

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

Estabilidade assintótica para a equação
da onda e para o modelo da onda
viscoelástica com história passada sobre
domínios bidimensionais e com termos
fonte de crescimentos exponenciais¹

José Guilherme Simion Antunes

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá

Janeiro de 2023

¹ O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Número do processo 88882.449189/2019-01.

José Guilherme Simion Antunes

**Estabilidade assintótica para a equação da onda e para
o modelo da onda viscoelástica com história passada
sobre domínios bidimensionais e com termos fonte de
crescimentos exponenciais**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá

Janeiro de 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

A636e Antunes, José Guilherme Simion
Estabilidade assintótica para a equação da onda e para o modelo da onda viscoelástica com história passada sobre domínios bidimensionais e com termos fonte de crescimentos exponenciais / José Guilherme Simion Antunes. -- Maringá, 2023.
172 f. : il.

Orientador: Prof.º Dr.º Marcelo Moreira Cavalcanti.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2023.

1. Equação da onda. 2. Termo fonte exponencial. 3. Amortecimento friccional não linear. 4. Taxas de decaimento uniforme. 5. Wave equation. 6. Exponential source term. 7. Localized nonlinear frictional damping. 8. Uniforme decay rates. I. Cavalcanti, Marcelo Moreira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.39

Edilson Damasio CRB9-1.123

JOSÉ GUILHERME SIMION ANTUNES

ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA A EQUAÇÃO DA ONDA E PARA O MODELO DA ONDA VISCOELÁSTICA COM HISTÓRIA PASSADA SOBRE DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS E COM TERMOS FONTE DE CRESCIMENTOS EXPONENCIAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM (Presidente)

Prof. Dr. André Vicente - UNIOESTE

Prof. Dr. Wellington José Corrêa - UTFPR/Campo Mourão

Profª. Dra. Claudete Matilde Webler Martins - UEM

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM

Aprovado em: 20 de janeiro de 2023.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (<https://meet.google.com/zvn-kbnz-rci>)

*Dedico este trabalho a minha esposa Jéssica
e aos meus pais, Célia e José.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao bom Deus por todas as bênçãos que coloca em minha vida. Ao Coração, a Rosa, a Cruz e ao Monte: instrumentos de Sua magnitude, benevolência e compaixão.

À ela, Jéssica Maiara de Souza Nogueira, minha esposa, confidente, cúmplice e resposta de oração. Com um coração imenso, sempre estive ao meu lado me apoiando, incentivando e sendo forte. Durante cada dificuldade, cada empecilho e cada momento de pequenez, mas também em cada alegria, cada vitória e cada meta superada, você me é luz.

Meus sinceros agradecimentos aos meus pais, Célia Aparecida Simion Antunes e José Figuro Antunes que nunca mediram esforços para que eu pudesse realizar os meus sonhos.

Ao meu irmão, Marcos Wesley Simion Antunes (In Memoriam), por desafiar-me ao estudo, pelas boas lembranças e pelo exemplo.

À minha família, que sempre torceu por mim e me fez sentir benquisto, principalmente nos momentos que tive de estar longe. Em especial, Mery, Paula (In Memoriam), Nair, Edelmar (In Memoriam), Miriam, Ramon (In Memoriam), Antônio, Gabriel, Débora, Ester, Junior, Jhennifer, Gilberto, Suellen, Lourdes, Marli, Murilo, Rafael e Jamile.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti, por seus ensinamentos, paciência e humanidade. Sua experiência e desejo de que as novas gerações alcem voos mais altos é uma inspiração ao pesquisador/professor que almejo ser.

Aos professores da minha vida: Luciene Freitas, Roseli Araújo, Alexandre Muriana, Kelly Roberta M. Lübeck, José Ricardo Souza (In Memoriam), Luciano Panek, Jáuber Cavalcante de Oliveira, Ruy Coimbra Charão, Claudete M. Webler Martins e Juan A. Soriano Palomino. Em especial aos meus orientadores, o Prof. Dr. Claiton Petris Mas-

sarolo que desde a graduação estimulou-me a ir mais longe na vida acadêmica e o Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto que me inspira com sua sede de querer conhecer a matemática sempre e cada vez mais.

Não poderia deixar de agradecer a todos aqueles que deixaram um pouco de si comigo, em especial, Thiago, Jenifer, Cibelly, Wilson, Willian, Mayara, Jéssica, Victor, Andrielli, Jonnathan, Bernardo, Lidiane, Dérek, Carolaine, Caio, Allan, Isabelle, Hugo, Danielly, Rafaela, Priscila, Jean, Pamela, Fernando, Mariana, Paula, Guilherme, Vivian, Leonardo, Gabriela e Maicon.

Àqueles que estiveram ao meu lado nessa jornada do doutorado: Guilherme, Evandro, Jean, Frederico e Victor.

Agradeço ao meu eu do passado, o meu impostor interior, aquele que não acreditava ser capaz e que sempre duvidou do que poderia fazer, de onde poderia chegar e do que poderia conseguir. À você, eu digo: ledô engano!

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo suporte financeiro sem o qual não seria possível a conclusão deste trabalho.

*Quero aquela sensação
de bem-estar saindo do meu peito.*

*Eu querendo mais,
quero ir mais além.*

Sinto no ar, vai começar!

*Tudo aquilo que sonhei um dia
vou conseguir, vou mostrar!*

E num simples toque de magia,

Explodirá!

– Abertura de Digimon Frontier

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a boa colocação e o comportamento assintótico de soluções de dois problemas associados à equações da onda com termos fonte de crescimentos exponenciais e amortecimentos não lineares localmente distribuídos postos em domínios limitados do \mathbb{R}^2 . No primeiro problema, discutimos a boa colocação global no espaço energético e decaimento uniforme da energia para o caso defocusing ($+f(u)$) e uma dicotomia entre existência global/decaimento uniforme e blow-up (para o caso do amortecimento total) para o caso focusing ($-f(u)$) para soluções com a energia menor que d (d é o nível do Teorema do Passo da Montanha). No segundo problema, consideramos uma equação da onda com amortecimento viscoelástico sujeita a um efeito viscoelástico localmente distribuído e suplementada com um amortecimento friccional localmente distribuído, no qual estudamos os mesmos comportamentos do problema anterior, com exceção do fenômeno de blow-up. Em ambos os casos, damos provas baseadas no truncamento dos problemas originais e as passagens aos limites, a fim de obter de uma vez só, as identidades de energia bem como as Desigualdades de Observabilidade, os quais são os ingredientes essenciais para obtermos as taxas de decaimento uniforme das energias. Uma vantagem das nossas provas é que as taxas de decaimento são independentes dos termos fonte não lineares.

Palavras-chave: Equação da onda; termo fonte exponencial; amortecimento friccional não linear localizado; amortecimento viscoelástico não linear localizado; taxas de decaimento uniforme.

ABSTRACT

In this work, we study the well-posedness and asymptotic behavior of solutions for two problems associated with wave equations with exponential growth source terms and locally distributed nonlinear dampings posed in bounded domains of \mathbb{R}^2 . In the first problem we discuss the globally well-posedness in the energy space and uniform decay of the energy to the defocusing case ($+f(u)$) and a dichotomy into global existence/uniform decay and blow-up (for full damping) to the focusing case ($-f(u)$) for those solutions with energy less than d (d is the level of the Mountain Pass Theorem). In the second one, we consider a viscoelastic damped wave equation subject to a locally distributed viscoelastic effect and supplemented with a locally distributed frictional damping in which we study the same behavior as in the previous problem except the blow-up phenomenon. In both cases we give proves based on the truncation of the original problems and passages to the limit in order to obtain in one shot, the energy identities as well as the Observability Inequalities, which are the essential ingredients to obtain uniform decay rates of energies. One advantage of our proves is that the decay rates are independent of the nonlinearities source terms.

Keywords: Wave equation; exponential source term; localized nonlinear frictional damping; localized nonlinear viscoelastic damping; uniform decay rates.

SUMÁRIO

<i>Introdução</i>	1
<i>1. Resultados preliminares</i>	7
1.1 Espaços $L^p(\Omega)$	7
1.2 Distribuições e Espaços Funcionais	9
1.3 Espaços de Sobolev	11
1.4 Traço de uma função de $H^m(\Omega)$	15
1.5 Topologias Fraca e Fraca *, Espaços Reflexivos e Separáveis	17
1.6 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais	18
1.7 Operador definido por terna	22
1.8 Principais resultados da Teoria de Semigrupos	25
1.9 Preliminares em Análise Microlocal	27
1.9.1 Operadores pseudodiferenciais	27
1.9.2 Medida de defeito microlocal	30
1.10 Resultados técnicos	33
<i>2. Existência, unicidade, taxa de decaimento uniforme e blow-up para a equação da onda 2D com termo fonte de crescimento exponencial</i>	36
2.1 Problema I	37

2.1.1	Boa Colocação	41
2.1.2	Decaimento Uniforme da Energia	70
2.2	Problemas II e III	94
2.2.1	Teorema do Passo da Montanha e Variedade de Nehari	94
2.2.2	Boa Colocação para o Problema II	96
2.2.3	Decaimento Uniforme da Energia para o Problema II	102
2.2.4	Boa Colocação para o Problema III	105
2.2.5	Blow-up de solução para o Problema III	106
2.3	Equação da onda com termo fonte de crescimento exponencial em uma variedade Riemanniana, compacta, sem bordo de dimensão 2	115
3.	<i>Estabilidade assintótica para um modelo da onda 2D com memória localizada em uma estrutura de história passada e termo fonte de crescimento exponencial</i>	121
3.1	Boa Colocação	123
3.1.1	Sequência de modelos truncados com termos fonte truncados	132
3.2	Equivalência entre modelos	140
3.3	Decaimento Uniforme da Energia	141
3.3.1	Desigualdade de Observabilidade para o modelo truncado	142
3.3.2	Desigualdade de Observabilidade para o modelo original	154
3.4	Caso Focusing	155
3.4.1	Teorema do Passo da Montanha e Variedade de Nehari para o modelo da onda com memória localizada	155
3.4.2	Boa Colocação	156
3.4.3	Estabilidade assintótica	161

INTRODUÇÃO

Nesta tese estudamos aspectos intrínsecos de alguns problemas de valor inicial e de fronteira em que o termo fonte f possui um crescimento exponencial. A saber,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u \pm f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

em que Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^2 , com fronteira suave $\partial\Omega$, as funções f , a e g são o termo fonte, a localização da região efetiva do amortecimento e o amortecimento, respectivamente e ainda,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x)\nabla u(\cdot, t-s)] \, ds + b(x)\partial_t u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, s) = u^0(x, s), \quad \partial_t u(x, s) = \partial_t u^0(x, s), & (x, s) \in \Omega \times (-\infty, 0], \end{cases} \quad (0.2)$$

em que Ω é um domínio aberto, limitado e conexo de \mathbb{R}^2 , com fronteira suave $\partial\Omega$. Aqui, g representa o núcleo da memória, a é uma função suave e positiva sobre uma vizinhança inteira de $\partial\Omega$, $b(\cdot) \geq 0$ é uma função limitada agindo efetivamente sobre uma vizinhança de $\partial\Omega$ em que $A = \{x \in \Omega / a(x) = 0\}$ e $u^0 : \Omega \times (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ descreve a história passada de u .

Estimativas de taxas de decaimento para o funcional de energia associadas as soluções de equações da onda com amortecimentos localizados vem sendo amplamente estudadas por muitos autores, sob diferentes situações. Dentre os trabalhos realizados sobre este

tema, temos os trabalhos [2], [9], [13], [17], [24], [32], [44], [45], [46], [50], [54], [56], [62] e [68]. Destacamos o trabalho de [68, Zuazua], em que o autor prova o decaimento exponencial uniforme do funcional de energia associado as soluções de uma equação da onda, reduzindo o problema ao uso de um Princípio de Continuação Única provado por [59, Ruiz].

O termo fonte f que é continuamente diferenciável, possui um crescimento exponencial, isto é, majorado da seguinte forma

$$|f^{(i)}(t)| \leq C_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1.$$

Empregando a Desigualdade de Trudinger–Moser (ver [52] e [63]), conseguimos estimar o majorante exponencial do termo fonte, isto é, para $u \in H_0^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha \pi |u(x)|^2} dx \leq C, \quad \forall \alpha \leq 4\pi.$$

O desenvolvimento deste estudo se restringe à dimensão 2 justamente por conta da Desigualdade de Trudinger–Moser.

A falta de resultados de continuação única para domínios gerais torna bastante difícil lidar com os termos não lineares na passagem ao limite e obter propriedades de continuação única do problema 0.1. É importante notar que isso nos leva a uma nova estratégia para estabilizar equações de ondas amortecidas localmente, direcionando o nosso trabalho inicial à problemas aproximados, em que o termo fonte é Lipschitz contínuo. Mais especificamente, em vez de abordarmos o problema 0.1, consideramos a seguinte sequência de problemas truncados:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k \pm f_k(u_k) + a(x)g(\partial_t u_k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0k}(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u_k(x, 0) = u_{1k}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (0.3)$$

em que (u_{0k}, u_{1k}) é tomado como elemento de uma sequência convergindo para (u_0, u_1) em espaços adequados e, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos uma sequência de truncamentos para

de f , dada por $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$f_k(s) := \begin{cases} f(s), & |s| \leq k, \\ f(k), & s > k, \\ f(-k), & s < -k. \end{cases}$$

A partir dos modelos aproximados, construiremos uma sequência de soluções (u_k) para o problema (0.3) com seus correspondentes índices, que possuem as propriedades desejadas de existência global, unicidade e regularidade forte (no sentido de semigrupos não-lineares) que nos conduzirão, na passagem ao limite, a uma solução do problema original (0.1). Neste sentido, nos concentramos no decaimento uniforme das soluções desses modelos aproximados, para o qual utilizaremos fortemente a teoria de análise microlocal. Isto é, consideravelmente mais simples do que trabalhar com o modelo não linear. Com isso, poderemos obter uma Desigualdade de Observabilidade para o problema (0.1) e estabelecer o decaimento uniforme da energia (e suas taxas) a partir de uma equação diferencial ordinária não linear, conforme o trabalho de [44, Lasiecka e Tataru].

Além disso, é possível fazer um estudo aprofundado para o caso focusing $(-f(u))$ utilizando argumentos semelhantes aos utilizados em [5, Alves e Cavalcanti]. Tomando os dados iniciais no poço potencial, por um lado, pode-se obter a existência global de solução e o decaimento uniforme da energia, por outro, podemos obter o blow-up em tempo finito da norma da solução para o problema com amortecimento $(a \equiv 0)$.

Em [28] e [66], os autores estudam a Desigualdade de Trudinger–Moser para variedades Riemannianas, compactas, sem bordo de dimensão 2, ferramenta fundamental (junto com as imersões de Sobolev) para uma generalização dos resultados anteriores para esses ambientes e para as funções no espaço $H^1(\mathcal{M})$ com média nula, isto é, $\int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M} = 0$.

A seguir, apresentamos um resumo dos trabalhos existentes na literatura relacionados às equações com memória que nortearam o nosso estudo. Sobre a existência de soluções e o comportamento assintótico dos problemas viscoelásticos, começamos citando o artigo de Dafermos [30], um dos precursores no estudo da equação da onda sujeita à história passada. Em Renardy, Hrusa e Nohel [57], os autores estudam a existência de solução em várias classes bem como as propriedades das soluções para as equações que modelam os

movimentos de materiais com memória.

Quando há dissipação viscoelástica efetiva em todo o domínio, Alabau–Boussouira, Cannarsa e Sforza [4] apresentaram um método unificado para a obtenção de estimativas para o decaimento de equações de evolução integro-diferencial de segunda ordem, ao passo que em [3], Alabau–Boussouira e Cannarsa obtiveram taxas de decaimento assumindo condições mais gerais e, quando aplicadas em exemplos concretos, são taxas ótimas. Também Lasiecka, Messaoudi e Mustafa [43], estudaram a equação da onda viscoelástica abstrata em que o núcleo da memória verificava certas hipóteses de crescimento.

Quanto às equações viscoelásticas com memória e história passada, Liu e Liu [49] apresentaram taxas de decaimento de energia exponencial para o modelo Kelvin–Voigt levando em conta funções coeficientes suaves para o modelo de Boltzmann com descontinuidade das propriedades dos materiais nas interfaces.

Fabrizio, Giorgi e Pata em [35], consideraram uma versão abstrata da equação de evolução

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta \left[G(0)u(x, t) + \int_0^\infty G'(s)u(x, t - s) ds \right] = 0,$$

em que $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função convexa crescente. Neste estudo, os autores discutiram uma abordagem nova para as equações com memória, baseada na nova noção de estado. Esta é a configuração inicial do sistema no tempo $t = 0$, o qual pode ser determinado pelo conhecimento do sistema para tempos positivos.

Ainda, quando tanto a dissipação friccional quanto a viscoelástica estão presentes, podemos referenciar os trabalhos de Cavalcanti e Oquendo [26], de Cavalcanti et al. [19] e [15] e o de Guo et al. [39] e [38], em que em [38] os autores investigam a existência global de soluções para a equação da onda viscoelástica com não linearidades supercríticas e em [39] obtiveram o decaimento da energia para um sistema de equações de ondas com dissipação e termos de fonte com crescimento supercrítico.

Já para a equação da onda sujeita à efeitos viscoelásticos localizados, a literatura é reduzida. Neste contexto, podemos referenciar os trabalhos de Muñoz–Rivera e Salvatierra [53] e Cavalcanti et al. [22], mais recentemente. No primeiro trabalho, os autores consideram um modelo viscoelástico com memória curta, enquanto no segundo, os autores consideram a equação da onda com memória localizada e história passada com termo de

fonte semilinear e crescimento subcrítico.

Tendo nos baseado no trabalho de Domingos Cavalcanti et al. [27], combinamos o termo de memória localizada, mas agora com o termo fonte de crescimento exponencial e, após uma transformação do modelo (0.2) em um outro modelo autônomo equivalente, obtivemos a existência global de soluções bem como o comportamento assintótico do funcional de energia (utilizando métodos semelhantes aos dos necessários para o problema 0.1). Os resultados deste estudo foram obtidos por Simion Antunes, J. G., Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N. e Vicente, A. e publicados em [61].

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

- O Capítulo 1 é composto da apresentação das definições e resultados preliminares, indispensáveis para uma boa compreensão do estudo realizado nos demais capítulos.
- No Capítulo 2 procedemos da seguinte forma:

▷ Obtemos a existência local de solução para a equação da onda no caso defocusing ($+f(u)$), apresentamos uma sequência de problemas truncados (termos fonte truncados), obtemos a extensão global de solução e a identidade de energia via passagem ao limite, além das Desigualdades de Observabilidade para o problema truncado (utilizando técnicas da teoria de análise microlocal) e para o problema original (via densidade). Por fim, apresentamos o resultado de estabilidade assintótica e as taxas de decaimento uniforme para o caso defocusing;

▷ Para o caso focusing ($-f(u)$), realizamos o mesmo estudo de boa colocação, mas considerando uma dicotomia ao tomarmos os dados iniciais no poço potencial: por um lado, obtemos a existência global e decaimento uniforme para soluções, por outro, obtemos o fenômeno de blow-up (se o amortecimento for total);

▷ Por fim, realizamos uma rápida abordagem do caso defocusing, mas agora posto sobre uma variedade Riemanniana, compacta, sem bordo de dimensão 2.

- O Capítulo 3 é destinado ao estudo da boa colocação e decaimento uniforme para a solução do modelo da onda com memória localizada em uma estrutura de história passada, no qual utilizamos os problemas truncados para realizar a passagem ao limite e obter tanto a identidade de energia, quanto a Desigualdade de Observabilidade para tal modelo.

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo apresentaremos as notações, conceitos e resultados técnicos a serem utilizados no desenvolvimento do nosso trabalho. Em geral, tais resultados são usuais e com isso, omitiremos boa parte de suas demonstrações. Para um estudo mais detalhado dos mesmos, veja [1], [12], [16], [25], [34], [42] e [67].

1.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de todas as classes de equivalência de funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis tais que $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$.

Se $p = \infty$, então denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de todas as funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ essencialmente limitadas, isto é

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \exists C = C(u) \geq 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Em $L^p(\Omega)$, consideramos a norma dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \text{supp ess } |u|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Riesz–Fischer (encontra-se em [12, p. 93]) temos $L^p(\Omega)$ um espaço de Banach.

Observação 1.2. O *supremo essencial* de uma função u é dado por

$$\operatorname{supp\,ess} |u| = \inf\{C > 0 / |u| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Teorema 1.3. Se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ for limitado, então $L^{p_2}(\Omega) \subseteq L^{p_1}(\Omega)$.

Observação 1.4. Se $1 < p < \infty$, o dual de $L^p(\Omega)$ pode ser identificado com o $L^q(\Omega)$, desde que $1/p + 1/q = 1$. Temos ainda que $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo. No caso $p = 1$, o dual de $L^1(\Omega)$ pode ser identificado como o $L^\infty(\Omega)$, contudo o contrário não é válido.

No caso $p = 2$, podemos definir um produto interno em $L^2(\Omega)$, o qual é dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Disso segue que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert reflexivo.

Definição 1.5. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções que são *localmente p -integráveis*, ou seja, $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^p(\mathcal{O})$ para todo compacto $\mathcal{O} \subset \Omega$.

Agora introduzimos algumas desigualdades clássicas que serão recorrentemente utilizadas ao longo deste texto.

Teorema 1.6 (Desigualdade de Young). Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Dados $a, b \geq 0$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.7 (Desigualdade de Hölder geral). Sejam $1 \leq p_i \leq \infty$ com $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, para cada $1 \leq i \leq k$. Se $1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_k = 1$, então $f = f_1 \cdots f_k \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Uma consequência imediata do resultado acima é a famosa desigualdade de Hölder.

Corolário 1.8 (Desigualdade de Hölder). Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lema 1.9 (Lions). Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^q(\mathcal{O})$ com $1 < q < \infty$. Se $u_n \rightarrow u$ q.s. em \mathcal{O} e $\|u_n\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então $u_n \rightharpoonup u$ em $L^q(\mathcal{O})$.

Demonstração. Ver [47, Lema 1.3, p. 12].

Proposição 1.10 (Gronwall). Sejam $\psi \in L^\infty(0, T)$ e $\varphi \in L^1(0, T)$ tais que $\psi(t) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e $c \geq 0$ uma constante. Se

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t \psi(s)\varphi(s) ds, \quad \forall t \in (0, T),$$

então

$$\varphi(t) \leq ce^{\int_0^t \psi(s) ds}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Demonstração. Ver [60, Lema 4.2', p. 179].

1.2 Distribuições e Espaços Funcionais

Neste ponto se faz necessário abordar o conceito de função teste. Estas funções desempenham um papel vital no estudo de soluções fracas para equações diferenciais parciais.

Definição 1.11. Seja $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. O *suporte* de ϕ é definido como o fecho em Ω do conjunto no qual ϕ não se anula, ou seja,

$$\text{supp } \phi = \overline{\{x \in \Omega / \phi(x) \neq 0\}}.$$

Se ainda, $\text{supp } \phi$ for compacto, dizemos que ϕ possui *suporte compacto*.

Definição 1.12. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. O conjunto das funções definidas de Ω em \mathbb{R} que são infinitamente continuamente diferenciáveis em Ω com suporte compacto será denotado por $C_0^\infty(\Omega)$. O *espaço das funções testes* de Ω , denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sequência $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, dizemos que

$$\phi_m \rightarrow \phi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1}$$

se existir um subconjunto compacto fixo K de Ω tal que $\text{supp } \phi_m, \text{supp } \phi \subseteq K$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $D^\alpha \phi_m \rightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente sobre K , para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 1.13. Um funcional linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é dito ser uma *distribuição* sobre Ω se para toda $\phi_m \rightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, tivermos $T(\phi_m) \rightarrow T(\phi)$ no sentido dado em (1.1). Definimos o *espaço das distribuições* em Ω como sendo o dual do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$, e o denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em $\mathcal{D}'(\Omega)$ usamos a topologia da convergência pontual sobre o espaço $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, as propriedades vetoriais e de convergência deste espaço são dadas por:

$$(i) \quad \langle S + T, \phi \rangle = \langle S, \phi \rangle + \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$$(ii) \quad \langle cT, \phi \rangle = c \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(iii) Dizemos que (T_n) converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, ou seja, $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tivermos que $\langle T_n, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle$ em \mathbb{R} .

Exemplo 1.14. Toda função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ define uma distribuição T_u , dada por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.15. Nem toda distribuição é oriunda de uma função localmente integrável. A contrapor, podemos considerar a distribuição delta de Dirac centrada em x_0 , denotada por δ_{x_0} e definida por $\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0), \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Para mais detalhes veja [42, p. 7].

Definição 1.16. Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Denotamos a α -ésima derivada distribucional de T por $D^\alpha T$ que é dada através de

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-índice, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e D^α o operador diferencial definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Observação 1.17. Toda distribuição possui infinitas derivadas distribucionais e todas elas são distribuições.

1.3 Espaços de Sobolev

Definimos agora determinados espaços de funções, cujos elementos possuem derivadas fracas de várias ordens em determinados espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.18. Sejam $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o *espaço de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções de $L^p(\Omega)$ tal que todas as suas derivadas distribucionais até ordem m também estão em $L^p(\Omega)$, ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para cada } |\alpha| \leq m\}.$$

Com a norma dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \text{supp ess } |D^\alpha u|, & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é de Banach.

Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Ainda, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u)(D^\alpha v) dx.$$

Definição 1.19. Por $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$ denotamos o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ e $H^m(\Omega)$, respectivamente, ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} \quad \text{e} \quad H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Proposição 1.20. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, então $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$. Já se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ for limitado, então $H_0^m(\Omega)$ é um subespaço próprio de $H^m(\Omega)$.

Observação 1.21. Como $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq W_0^{m,p}(\Omega)$ densamente, um funcional linear limitado em $W_0^{m,p}(\Omega)$ pode ser visto como uma distribuição. Por outro lado, se $f \in L^q(\Omega)$ com

$1/p + 1/q = 1$, podemos tomar a distribuição $D^\alpha f$, para $|\alpha| \leq m$, que se estende de forma contínua ao dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Assim, denotamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$. De forma análoga, o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é o espaço $H^{-m}(\Omega)$. Para mais detalhes veja [42, p. 88].

Apresentamos abaixo a Desigualdade de Poincaré (cujo nome é dado em homenagem ao matemático francês Henri Poincaré). Essa desigualdade nos permite estimar a norma $L^p(\Omega)$ de uma função em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pela norma $L^p(\Omega)$ de seu gradiente com derivada fraca.

Teorema 1.22 (Desigualdade de Poincaré). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $1 \leq p < \infty$. Então, existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observação 1.23.

- i) Em $H_0^1(\Omega)$, a Desigualdade de Poincaré é dada por $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, em que $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.
- ii) Várias generalizações da Desigualdade de Poincaré são possíveis. Por exemplo, se Ω for limitado em (ao menos) uma direção, ou ainda, se as funções não se anulam (no sentido do traço) sobre a fronteira toda, mas somente em uma porção dela em que se tenha uma medida $(n - 1)$ -dimensional positiva (encontra-se em [42, p. 71]).
- iii) Em geral, a Desigualdade de Poincaré não é válida para domínios ilimitados (encontra-se em [42, p. 71]).

Da Desigualdade de Poincaré, segue que a norma $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e que o espaço $H_0^1(\Omega)$ é de Hilbert com o produto interno dado por

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v)_{L^2(\Omega)}.$$

Utilizaremos fortemente o conceito de imersões contínuas e compactas para a obtenção das soluções dos problemas presentes neste texto. Para isso, fazem-se necessárias tais definições.

Definição 1.24. Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que Y está imerso em X , e denotamos por $Y \hookrightarrow X$, se Y for um subespaço vetorial de X . Dizemos ainda que a imersão de Y em X é

(i) *contínua*, se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_X \leq C \|u\|_Y, \quad \forall u \in Y;$$

(ii) *compacta*, a qual denotamos por $Y \xhookrightarrow{c} X$, se para toda sequência limitada $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Y , existir uma subsequência $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia forte de X .

Agora apresentamos propriedades de imersão relacionadas aos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Para isso, definimos o *expoente crítico* p^* da seguinte forma:

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Note que $p^* > p$. Assim, embora saibamos diretamente da definição dos espaços de Sobolev, que $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, é uma informação bastante útil sabermos se as funções de $W^{m,p}(\Omega)$ são mais regulares.

Definição 1.25. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, para algum $n \geq 2$ e $k \in \mathbb{N}$. Diremos que Ω é de *classe C^k (Lipschitz)*, se para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existir $r > 0$ e uma função $\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k (Lipschitz) tal que, a menos de uma renomeação e reorientação dos eixos coordenados, caso necessário, vale

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) / x_n > \Psi(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Teorema 1.26. Sejam $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^m , com $m \geq 1$. Então temos as seguintes inclusões contínuas:

(i) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, em que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

(ii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, em que $q \in [p, \infty)$;

(iii) se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Encontra-se em [42, p. 78]. ■

Teorema 1.27 (Rellich-Kondrachov). Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto limitado de classe C^1 , com $n \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:

(i) se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega)$, em que $q \in [1, p^*)$;

(ii) se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega)$, em que $q \in [1, \infty)$;

(iii) se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} C(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Encontra-se em [42, p. 84–85]. ■

Teorema 1.28. Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$ sendo um intervalo limitado. Então, existe $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que

$$u = \tilde{u} \text{ q.s. em } I$$

e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Demonstração. Ver [12, Teorema 8.2].

Teorema 1.29 (Regularidade Elíptica). Sejam m um inteiro não negativo e

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} (a^{ij}(x) \partial_{x_i} u) + \sum_{i=1}^n b^i(x) \partial_{x_i} u + c(x)u,$$

em que $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$, com $i, j = 1, \dots, n$. Supondo $f \in H^m(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para $\partial\Omega$ de classe C^{m+2} , então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \left[\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

em que $C = C(m, \Omega, a^{ij}, b^i, c) > 0$.

Demonstração. Ver [34, Teorema 5, p. 323].

Teorema 1.30. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}[K(x)\nabla u(x)] \in L^2(\Omega)$, em que $K(x)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ sendo funções de classe $C^\infty(\Omega)$. Então,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}[K(x)\nabla u(x)] \cdot v(x) \, dx = - \int_{\Omega} [\nabla u(x)]^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x) \, dx.$$

Proposição 1.31 (Desigualdade de Jensen). Seja B um hipercubo de \mathbb{R}^n , então, para toda função côncava F e toda função $g \in L^1(B)$, temos

$$F\left(\frac{1}{\operatorname{med} B} \int_B g(x) \, dx\right) \geq \frac{1}{\operatorname{med} B} \int_B F(g(x)) \, dx.$$

Demonstração. Ver [58, Teorema 3.3, p. 62]

Lema 1.32 (Strauss). Sejam \mathcal{O} um aberto limitado de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, $1 < q < \infty$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^q(\mathcal{O})$. Se $u_n \rightarrow u$ q.s. em \mathcal{O} , então $u \in L^q(\mathcal{O})$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^q(\mathcal{O})$. Além disso, se $1 \leq r < q$, então $u_n \rightarrow u$ em $L^r(\mathcal{O})$.

Demonstração. Ver [12, Exercício 4.16, p. 123].

1.4 Traço de uma função de $H^m(\Omega)$

Se $u \in C(\overline{\Omega})$, podemos obter os valores de u sobre a fronteira Γ de Ω , basta para isto tomar a restrição $u|_{\Gamma}$. Entretanto, se $u \in H^m(\Omega)$, como a medida n -dimensional de Γ é nula, não tem sentido, a priori, falar dos valores de u em Γ . O objetivo da teoria de traço é dar um significado para $u|_{\Gamma}$.

Conforme apresentado em [16], existe uma única aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}, \end{aligned}$$

denominada *aplicação traço*, que é linear, contínua, sobrejetiva, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, verificando

$$\gamma u = \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}|_{\Gamma} \right), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

e admitindo uma inversa à direita γ^{-1} linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear

$$\gamma^{-1} : \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^m(\Omega),$$

que é contínua e satisfaz

$$\gamma(\gamma^{-1}\xi) = \xi, \quad \forall \xi \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Tomando, em particular, $m = 1$, temos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u = u|_{\Gamma}, \end{aligned}$$

que é denominada *aplicação traço de ordem zero*.

Consideremos $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munido do produto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)},$$

o que o faz um espaço de Hilbert. A aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}, \end{aligned}$$

pode ser estendida, por continuidade, a uma única aplicação $\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ linear e contínua, uma vez que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Proposição 1.33. A aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ é sobrejetiva e, além disso, $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [16, Teorema 2, p. 336].

Para uma exposição completa da teoria do traço nos espaços $L^2(0, T; H^m(\Omega))$ e $H^{-1}(0, T; H^m(\Omega))$, veja [51].

1.5 Topologias Fraca e Fraca *, Espaços Reflexivos e Separáveis

As noções introduzidas nesta seção são clássicas da teoria da análise funcional e podem ser encontradas em [12] e [25]. Dentre elas, apresentamos algumas propriedades das topologias fraca e fraca *, bem como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços. Contudo, não dedicaremos tempo demasiado nesta apresentação inicial.

Considerando X um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(X, X')$ sobre X é a topologia menos fina sobre X que torna contínuas todas as aplicações $f \in X'$.

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para u na topologia fraca $\sigma(X, X')$. Quando não houver possibilidade de confusão, diremos apenas que (u_n) converge fraco para u e denotaremos por $u_n \rightharpoonup u$ em X .

Proposição 1.34. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Então

- i) $u_n \rightharpoonup u$ em X se, e somente se, $\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$, para todo $f \in X'$;
- ii) Se $u_n \rightarrow u$ em X , então $u_n \rightharpoonup u$ em X ;
- iii) Se $u_n \rightharpoonup u$ em X , então $(\|u_n\|_X)$ é limitada e $\|u\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_X$;
- iv) Se $u_n \rightharpoonup u$ em X e $f_n \rightarrow f$ em X' , então $\langle f_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$.

Sejam X um espaço de Banach e $x \in X$ fixo. Considere a aplicação $J_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle$, para cada $f \in X'$, que é linear e contínua, logo $J_x \in X''$, para todo $x \in X$. Deste modo, definamos a aplicação $J : X \rightarrow X''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de X em X'' .

A topologia fraca *, denotada por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X' que faz contínuas todas as aplicações J_x .

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para f na topologia fraca * $\sigma(X', X)$. Quando não houver possibilidade de confusão, diremos apenas que (f_n) converge fraco * para f , ou simbolicamente $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' .

Proposição 1.35. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X' . Então

- i) $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' se, e somente se, $\langle f_n, u \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$, para todo $u \in X$;
- ii) Se $f_n \rightarrow f$ em X' , então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(X', X'')$;
- iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(X', X'')$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' ;
- iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' , então $(\|f_n\|_{X'})$ é limitada e $\|f\|_{X'} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{X'}$;
- v) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' e $u_n \rightarrow u$ em X , então $\langle f_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$.

Um dos principais objetivos do estudo da convergência fraca $*$ está no fato de que a bola unitária fechada em X' , que nunca é compacta na topologia forte (a menos que $\dim X < \infty$), é sempre compacta na topologia fraca $*$.

Teorema 1.36 (Banach–Alaoglu–Bourbaki). A bola unitária fechada é compacta na topologia fraca $*$ de X' .

Definição 1.37. Dizemos que um espaço de Banach X é *reflexivo* se o operador $J : X \rightarrow X''$ for um isomorfismo isométrico.

Definição 1.38. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é *separável* se existir um conjunto $M \subseteq X$ que seja denso e enumerável em X .

Teorema 1.39. Seja X um espaço de Banach tal que X' é separável. Então X é separável.

Teorema 1.40. Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X' . Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca $*$ ($\sigma(X', X)$).

Teorema 1.41. Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X . Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca ($\sigma(X, X')$).

1.6 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar espaços envolvendo as variáveis temporal e espacial, os quais se fazem necessários para dar sentido a problemas de evolução.

Para $t \in (0, T)$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X . Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X .

Seja X um espaço de Banach e $T > 0$. Definimos:

- i) O espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0, T]$ com imagem em X , ou seja, as funções $u : (0, T) \rightarrow X$ tais que

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- ii) O espaço $L^\infty(0, T; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0, T]$ com imagem em X , ou seja, as funções $u : (0, T) \rightarrow X$ limitadas quase sempre em $(0, T)$.

A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \text{supp ess } \|u(t)\|_X.$$

- iii) O espaço $C^m([0, T]; X)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0, T]$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\| = \sum_{i=0}^m \max_{t \in [0, T]} |u^{(i)}(t)|.$$

Proposição 1.42. Sejam $m = 0, 1, \dots$, $1 \leq p < \infty$ e X e Y espaços de Banach.

- i) $C^m([0, T]; X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} ;
- ii) $L^p(0, T; X)$ e $L^\infty(0, T; X)$ são espaços de Banach sobre \mathbb{K} ;
- iii) $C([0, T]; X)$ é denso em $L^p(0, T; X)$ e a imersão $C([0, T]; X) \hookrightarrow L^p(0, T; X)$ é contínua;
- iv) Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)_X$, então $L^2(0, T; X)$ é também um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt;$$

v) $L^p(0, T; X)$ é separável se X for separável;

vi) O espaço $L^p(0, T; X)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$;

vii) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^r(0, T; Y)$, para $1 \leq r \leq \infty$.

Proposição 1.43. Seja X um espaço de Banach. Para todo $u \in L^1(0, T; X)$ vale

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Teorema 1.44. Sejam X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p, q < \infty$ com $1/p + 1/q = 1$ e $0 \leq T < \infty$. Vale que:

i) Se $u \in L^p(0, T; X)$, então

$$\left\langle v, \int_0^T u(t) dt \right\rangle = \int_0^T \langle v, u(t) \rangle dt, \quad \forall v \in X';$$

ii) Se $u \in L^p(0, T; X')$, então

$$\left\langle \int_0^T u(t) dt, v \right\rangle = \int_0^T \langle u(t), v \rangle dt, \quad \forall v \in X.$$

Utilizando o Teorema 1.44 é possível concluir que o espaço dual de $L^p(0, T; X)$ é o espaço $L^q(0, T; X')$, em que $1/p + 1/q = 1$.

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo e completo das funções vetoriais $\phi : (0, T) \rightarrow X$ infinitamente continuamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Dizemos que uma sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\phi_n \rightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(0, T; X)$ se:

i) Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp } \phi_n, \text{supp } \phi \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k} \phi_n(t) \rightarrow \frac{d^k}{dt^k} \phi(t)$ em X , uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T) = \mathcal{D}(0, T; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $S : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\phi_n \rightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(0, T)$ implicar que $\langle S, \phi_n \rangle \rightarrow \langle S, \phi \rangle$ em X . Diremos que $S_n \rightarrow S$ em $\mathcal{D}'(0, T; X)$ se

$\langle S_n, \phi \rangle \rightarrow \langle S, \phi \rangle$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$. O espaço $\mathcal{D}(0, T; X)$ munido de tal convergência é denominado espaço das *distribuições vetoriais* de $(0, T)$ com valores em X .

Seja X um espaço de Hilbert. Denotaremos por $H_0^1(0, T; X)$ o espaço

$$H_0^1(0, T; X) = \{u \in L^2(0, T; X) / u' \in L^2(0, T; X) \text{ e } u(0) = u(T) = 0\}$$

que também é um espaço de Hilbert quando munido com o produto interno

$$(u, v)_{H_0^1(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_H dt.$$

Identificando $L^2(0, T; X)$ com o seu dual $[L^2(0, T; X)]'$ via Teorema de Riesz, obtemos a seguinte cadeia de imersões

$$\mathcal{D}(0, T; X) \hookrightarrow H_0^1(0, T; X) \hookrightarrow L^2(0, T; X) \hookrightarrow H^{-1}(0, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; X),$$

em que $H^{-1}(0, T; X) = [H_0^1(0, T; X)]'$.

Lema 1.45 (Compacidade Sequencial Fraca *). Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Então, toda sequência limitada $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L^\infty(0, T; X')$ admite uma subsequência, digamos $(u_{n'})_{n' \in \mathbb{N}'}$ com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, satisfazendo

$$u_{n'} \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; X'), \text{ quando } n' \rightarrow \infty,$$

ou seja, para todo $v \in L^1(0, T; X)$, temos

$$\int_0^T \langle u_{n'}(t), v(t) \rangle_{X', X} dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X', X} dt, \text{ quando } n' \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Ver [67, Problema 23.12, p. 449].

Lema 1.46 (Lions–Magenes). Sejam X e Y espaços de Banach em que X é reflexivo e $X \hookrightarrow Y$. Definimos $C_w(0, T; Y)$ como sendo o espaço das funções $\xi \in L^\infty(0, T; Y)$ que são *escalarmente contínuas* de $[0, T] \mapsto Y$, ou seja, funções tais que a aplicação $t \rightarrow \langle y^*, \xi(t) \rangle$ é contínua em $[0, T]$, para cada $y^* \in Y'$. Então,

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_w(0, T; Y) = C_w(0, T; X).$$

Demonstração. Ver [48, Lema 8.1, p. 297]

Proposição 1.47 (Lions). Sejam X e Y espaços de Banach em que $X \hookrightarrow Y$. Se tivermos $u \in L^p(0, T; X)$ e $\partial_t u \in L^p(0, T; Y)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então $u \in C([0, T]; Y)$.

Demonstração. Ver o Problema 23.13a, p. 450 de [67] ou o Lema 1.2, p. 7 de [47].

Lema 1.48. Sejam X um espaço de Banach reflexivo e separável e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^\infty(0, T; X)$ tal que

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T; X'), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Se $v_n = u_n'$ sobre $(0, T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, no sentido distribucional e, ainda, vale que

$$v_n \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0, T; X'), \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

então $v = u'$ sobre $(0, T)$.

Demonstração. Ver o Problema 23.12g, p. 449–450 de [67].

Teorema 1.49 (Compacidade de Aubin-Lions-Simon). Sejam X, Y e Z espaços de Banach com $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow Z$ e $1 \leq p, q \leq \infty$. Para cada $T > 0$, definimos

$$\mathcal{E}_{p,q} = \{u \in L^p(0, T; X) / u_t \in L^q(0, T; Z)\}.$$

- i) Se $p < \infty$, então $\mathcal{E}_{p,q} \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(0, T; Y)$;
- ii) Se $p = \infty$ e $q > 1$, então $\mathcal{E}_{p,q} \overset{c}{\hookrightarrow} C([0, T]; Y)$.

Demonstração. Ver [10, Teorema II.5.16, p. 102].

1.7 Operador definido por terna

Consideremos V e H espaços de Hilbert complexos tais que $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ e V é denso em H . Seja também $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear, hermitiana e contínua em $V \times V$ tal que existem $\alpha_0, \alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$ satisfazendo a condição de coercividade:

$$\operatorname{Re}[a(u, u)] + \alpha_0 (u, u)_H \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

Consideremos

$$D(A) = \{u \in V / \text{a forma linear } v \mapsto a(u, v) \text{ é contínua}\},$$

em que V está munido com a topologia de H .

Pelo Teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$, existe um  nico $Au \in H$ tal que $a(u, v) = (Au, v)_H$, para cada $v \in V$. Assim, definimos um operador A com domínio

$$D(A) = \{u \in V / \exists f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H, \forall v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

Com isso, temos que $D(A)$   um subespaço de H e $A : D(A) \subset V \rightarrow H$   um operador de H . Assim, diremos que A   *definido pela terna* $\{V, H, a(\cdot, \cdot)\}$.

Proposi o 1.50 (Teorema Espectral). Nas condi es acima, temos

- i) A   auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H constituído de auto-vetores de A ;
- ii) Se $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são os auto-valores de A correspondentes aos auto-vetores $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \text{ e } \lambda_n \rightarrow \infty;$$

- iii) O domínio de A   dado por

$$D(A) = \left\{ u \in H / \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(u, w_n)_H|^2 < \infty \right\};$$

- iv) $Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, w_n)_H w_n$, para cada $u \in D(A)$.

Demonstra o. Ver [25, Teorema 5.146, p. 368]

Utilizando os resultados mencionados acima, iremos definir o operador $-\Delta$ através de uma terna e assim, obter valiosas propriedades para o mesmo, as quais desempenharão papéis fundamentais no decorrer do texto.

Definimos o operador laplaciano $-\Delta$ pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(\cdot, \cdot)\}$, em que $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \overline{\nabla v} \, dx$, para cada $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e $D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. O Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos garante a existência de um sistema $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ ortonormal completo constituído pelas auto-funções do operador $-\Delta$, soluções do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda_n w_n \\ w_n|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Se $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são os correspondentes auto-valores de $-\Delta$, então

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \text{ e } \lambda_n \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, segue que

- $\left(\frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega)$;
- $\left(\frac{w_n}{\lambda_n}\right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Este operador é densamente definido, injetivo e auto-adjunto. Ainda, pode ser isometricamente estendido para $-\tilde{\Delta} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$. Esta extensão é definida por

$$\left\langle -\tilde{\Delta} u, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.3)$$

Tendo este fato em vista, por simplicidade, denotaremos $-\tilde{\Delta}$ por $-\Delta$. Uma vez que $-\Delta$ é um operador positivo, podemos definir suas potências fracionárias. De acordo com (2.7) e (9.1) de Lions–Magenes [48], temos

$$D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \text{ e } D((-\Delta)^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega).$$

Da Teoria Espectral, segue que

$$D(-\Delta) \hookrightarrow D((-\Delta)^{3/4}) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

1.8 Principais resultados da Teoria de Semigrupos

Nesta seção evidenciaremos os resultados mais relevantes da Teoria de Semigrupos, os quais serão utilizados no decorrer do texto. As principais referências utilizadas para a escrita desta seção são [8], [11], [29], [55] e [60].

Seja X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual.

Definição 1.51. Um conjunto $A \subset X \times X'$ é dito ser *monótono* se $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$, para cada $(x_i, y_i) \in A$, com $i = 1, 2$. Um subconjunto de $X \times X'$ é dito ser *maximal monótono* se ele não possuir a propriedade de conter qualquer outro subconjunto monótono de $X \times X'$. Se A é um operador unívoco de X em X' , então a condição de monotonia pode ser revista como $(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2) \geq 0$, para cada $x_1, x_2 \in D(A)$.

Definição 1.52. Um operador $A : X \rightarrow X'$ é dito ser *hemicontínuo* se é unívoco e para cada $x, y \in X$ tivermos $A(x + ty) \xrightarrow{*} Ax$, quando $t \rightarrow 0$, isto é, $\lim_{t \rightarrow 0} \langle A(x + ty), z \rangle_{X, X'} = \langle Ax, z \rangle_{X, X'}$, para todo $z \in X'$.

Definição 1.53. O operador $A : X \rightarrow X'$ é chamado *coercivo* se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(x_m, x'_m)}{\|x_m\|} = \infty, \quad \forall (x_m, x'_m) \in A,$$

tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m\| = \infty$.

Proposição 1.54. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X'$ um operador. As seguintes propriedades são equivalentes:

- i) A é maximal monótono;
- ii) A é monótono e $Im(I + A) = X$;
- iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre todo X .

Demonstração. Ver [11, Proposição 2.2, p.23]. ■

Corolário 1.55. Sejam X um espaço de Banach reflexivo, A um operador maximal monótono de $X \times X'$ e B um operador monótono e hemicontínuo de X em X' . Então $A+B$ é maximal monótono em $X \times X'$. Além disso, se $A+B$ é coercivo, então $Im(A+B) = X'$.

Demonstração. Ver [8].

Proposição 1.56 (Kachurovskii). Sejam K um conjunto convexo em X e uma função $\phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ diferenciável à Gâteaux em cada $u \in K$, $K = D(\phi)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) ϕ é convexa;
- ii) $\langle \phi'(u), v - u \rangle \leq \phi(v) - \phi(u)$, $\forall u, v \in K$;
- iii) $\langle \phi'(u) - \phi'(v), u - v \rangle \geq 0$, $\forall u, v \in K$.

Demonstração. Ver [60].

Proposição 1.57. Seja $\phi : V \rightarrow (-\infty, +\infty]$ um funcional convexo próprio. Se ϕ é diferenciável à Gâteaux em $u \in \text{int}(D(\phi))$, então $\partial\phi(u) = \{\phi'(u)\}$. Se ϕ é contínua e $\partial\phi(u)$ é único, então ϕ é diferenciável à Gâteaux em u .

Demonstração. Ver [60].

Teorema 1.58. Seja ϕ uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente em V . Então $\partial\phi$ é um operador maximal monótono de V em V' .

Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathbb{B}U(t) \ni f, \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (1.4)$$

em que $\mathbb{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é uma aplicação localmente Lipschitz, isto é, para cada $R > 0$, existe $L_R > 0$ tal que para todos $U, V \in B_R^{\mathcal{H}}(0) = \{W \in \mathcal{H} / \|W\|_{\mathcal{H}} \leq R\}$, temos

$$\|\mathbb{B}U - \mathbb{B}V\|_{\mathcal{H}} \leq L_R \|U - V\|_{\mathcal{H}}.$$

Teorema 1.59. Suponha que \mathcal{A} é um operador maximal monótono e que $0 \in \mathcal{A}0$. Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, $f \in W^{1,1}(0, t; \mathcal{H})$ para todo $t > 0$ e \mathbb{B} é uma aplicação localmente Lipschitz, então existe $t_{\max} \leq +\infty$ tal que o problema (1.4) possui uma única solução forte U no intervalo $[0, t_{\max})$, ou seja, $U \in W^{1,\infty}(0, t_{\max}; \mathcal{H})$ e $U(t) \in D(\mathcal{A})$. Além disso, se

$U_0 \in \overline{D(\mathcal{A})}$ e $f \in L^1(0, t; \mathcal{H})$, para cada $t > 0$, obtemos uma única solução generalizada $U \in C([0, t_{\max}); \mathcal{H})$ para o problema (1.4). Em ambos os casos, se $t_{\max} < +\infty$, então $\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty$.

Demonstração. Ver [29, Teorema 7.2].

Teorema 1.60. Sejam X um espaço de Banach reflexivo, A um subconjunto maximal monótono de $X \times X'$ e $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ e

$$\limsup_{n, m \rightarrow +\infty} (u_n - u_m, v_n - v_m) \leq 0$$

ou

$$\limsup_{n, m \rightarrow +\infty} (u_n - u, v_n - v) \leq 0.$$

Então $(u, v) \in A$ e $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$, quando $n \rightarrow \infty$.

1.9 Preliminares em Análise Microlocal

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre operadores pseudodiferenciais e medidas de defeitos microlocais, cujas versões originais em francês podem ser encontradas nas notas de aula de Burq e Gérard [14].

1.9.1 Operadores pseudodiferenciais

Seja Ω um subconjunto aberto e não vazio do \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Um *operador diferencial* sobre Ω é uma aplicação linear $P : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ da forma

$$Pu(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u(x), \quad (\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d})$$

em que $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ são funções complexas. O maior inteiro m tal que as funções a_α , $|\alpha| = m$ são não nulas, é chamado de *ordem* de P . A aplicação $p : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$p(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha,$$

é chamada de símbolo de P .

Observamos que P é caracterizado pela identidade

$$P(e_\xi)(x) = p(x, \xi) e_\xi(x), \quad \text{em que } e_\xi(\cdot) = e^{i\langle(\cdot), \xi\rangle} = e^{i(\cdot)\cdot\xi}. \quad (1.5)$$

Adotando as notações

$$D = \frac{1}{i}\partial, \quad D_j = \frac{1}{i}\partial_j \text{ e } D^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}}\partial^\alpha,$$

o operador P pode ser reescrito

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) i^{|\alpha|} D^\alpha = p(x, D).$$

A fórmula (1.5) pode ser generalizada como segue: para todo $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ e todo $u \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$P(ue_\xi) = p(x, D)(ue_\xi) = e_\xi p(x, \xi + D)(u) = e_\xi \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial_\xi^\alpha p(x, \xi)}{\alpha!} D^\alpha u,$$

em que a soma acima é finita, uma vez que p é um polinômio na variável ξ .

Se P é um operador diferencial de ordem m e símbolo p , então o *símbolo principal de ordem m* , denotado por $\sigma_m(P)$, é a parte homogênea de grau m em ξ da função polinomial $p(x, \xi)$, a saber

$$\sigma_m(P)(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha.$$

Definição 1.61. Seja $m \in \mathbb{R}$. Definimos um *símbolo de ordem m* em Ω como uma função $a : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ , com suporte $K \times \mathbb{R}^d$, em que K é um subconjunto compacto de Ω , que satisfaz a seguinte estimativa: para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, existe uma constante $C_{\alpha, \beta} > 0$ tal que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}.$$

Denotamos por $\mathcal{S}_c^m(\Omega)$ o espaço vetorial de todos os símbolos de ordem no máximo m em Ω .

Proposição 1.62. Se $a \in \mathcal{S}_c^m(\Omega)$, a fórmula

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi \quad (1.6)$$

define, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, um elemento Au de $C_0^\infty(\Omega)$.

A fórmula (1.6) define uma aplicação linear $A : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega)$, a qual chamaremos de *operador pseudodiferencial* de ordem m e símbolo a . Frequentemente denotaremos a aplicação A por $a(x, D)$.

O conjunto de todos os operadores pseudodiferenciais de ordem m sobre Ω é denotado por $\Psi_c^m(\Omega)$.

Dizemos que o operador pseudodiferencial A admite um símbolo principal, denotado por $\sigma_m(A)$, se existe uma função $a_m = \sigma_m(A) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ com suporte, na primeira variável, compacto em $K \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ e homogêneo de ordem m , na segunda variável, tal que se $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ valendo 0 em uma vizinhança da origem e 1 fora de um compacto suficientemente grande, segue que $a(x, \xi) = a_m(x, \xi)\chi(\xi) + r(x, \xi)$, em que $r \in \mathcal{S}_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$.

Observe que, no caso em que $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ a aplicação $a \mapsto A$ não é injetora, isto é, um operador pseudodiferencial não é definido unicamente por um símbolo, por outro lado é possível provar a unicidade do símbolo principal.

Apesar de termos definido os operadores pseudodiferenciais sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, é possível estender a ação de operadores pseudodiferenciais a espaços de Sobolev.

Definição 1.63. Sejam K um subconjunto compacto contido em Ω e $s \in \mathbb{R}$. Denotamos por $H_K^s(\Omega)$ o espaço das distribuições com suporte compacto em K , em que o prolongamento como 0 fora de Ω está em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $H_{comp}^s(\Omega) = \bigcup_K H_K^s(\Omega)$, em que K é tomado sobre todos os compactos de Ω . Munindo $H_{comp}^s(\Omega)$ com a melhor topologia localmente convexa tal que todas as aplicações inclusões $H_K^s(\Omega) \hookrightarrow H_{comp}^s(\Omega)$ são contínuas. Ainda, o espaço $H_{loc}^{-1}(\Omega)$ representa o dual topológico de $H_{comp}^1(\Omega)$.

Observação 1.64. Se $A \in \Psi_c^m(\Omega)$ é um operador pseudodiferencial com $m < 0$, então $A : L_{comp}^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é um operador compacto. Com efeito, do Teorema de Rellich-Kondrachov, a inclusão $H_{comp}^{-m}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta.

Observação 1.65. Se $P \in \Psi^m(\Omega)$ é um operador compactamente suportado, então P pode ser estendido continuamente de $H_{loc}^s(\Omega)$ para $H_{comp}^{s-m}(\Omega)$.

1.9.2 Medida de defeito microlocal

Vamos introduzir agora, o conceito de medida de defeito microlocal, para tal, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L_{loc}^2(\Omega)$, i.e.,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_K |u_n(x)|^2 dx < +\infty,$$

para todo conjunto compacto K contido em Ω .

Dizemos que (u_n) converge fracamente para $u \in L_{loc}^2(\Omega)$, se tivermos

$$\int_{\Omega} u_n(x) f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(x) f(x) dx,$$

para todo $f \in L_{comp}^2(\Omega)$.

Teorema 1.66. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L_{loc}^2(\Omega)$ convergindo fracamente para 0 em $L_{loc}^2(\Omega)$. Então, existem uma subsequência $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ e uma medida de Radon positiva μ sobre $T^1\Omega := \Omega \times S^{d-1}$ tal que para todo operador pseudodiferencial essencialmente homogêneo $A \in \Psi_c^0(\Omega)$ com símbolo principal $\sigma_0(A)$ e para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, tem-se

$$(A(\chi u_{\varphi(n)}), \chi u_{\varphi(n)})_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A)(x, \xi) d\mu(x, \xi). \quad (1.7)$$

Definição 1.67. Sob as circunstâncias do Teorema 1.66, μ é chamada de *medida de defeito microlocal* (m.d.m.) da sequência $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Observação 1.68. O Teorema 1.66 assegura, que para toda sequência limitada $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L_{loc}^2(\Omega)$ que converge fracamente para 0, a existência de uma subsequência admitindo uma medida de defeito microlocal. Observamos que de (1.7), em particular, se $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} f(x) |u_{\varphi(n)}(x)|^2 dx \longrightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} f(x) d\mu(x, \xi),$$

assim $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge forte para 0 se, e somente se, $\mu = 0$.

Teorema 1.69. Sejam P um operador diferencial de ordem m sobre Ω e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fracamente para 0 e admitindo uma m.d.m. μ . As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $Pu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ em $H^{-m}_{loc}(\Omega)$, $m > 0$.

ii) $\text{supp } \mu \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times S^{d-1} / \sigma_m(P)(x, \xi) = 0\}$.

Teorema 1.70. Sejam P um operador diferencial de ordem m sobre Ω com $P^* = P$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fracamente para 0 associada a uma m.d.m. μ . Vamos assumir que $Pu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ em $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Então, para toda função $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ de grau $1 - m$ que é homogênea na segunda variável e com suporte compacto na primeira variável, tem-se

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p\}(x, \xi) \, d\mu(x, \xi) = 0.$$

A seguir, apresentaremos algumas ferramentas clássicas referentes ao campo vetorial Hamiltoniano e suas curvas bicaracterísticas no (x, ξ) -espaço cotangente para funções reais $p(x, \xi)$.

Definição 1.71. Seja $p \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ uma função real. Chamamos H_p de *campo Hamiltoniano* de p , o seguinte campo de vetores definido em $\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$:

$$H_p(x, \xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x, \xi), \dots, \frac{\partial p}{\partial \xi_d}(x, \xi); -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x, \xi), \dots, -\frac{\partial p}{\partial x_d}(x, \xi) \right).$$

A derivada de Lie de uma função f com respeito ao campo Hamiltoniano H_p é dado por $H_p(f) = \{p, f\}$, em que

$$\{p, f\}(x, \xi) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right).$$

Uma *curva Hamiltoniana* p é uma curva integrável do campo de vetores H_p , isto é, é

uma solução maximal $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ para as equações de Hamilton–Jacobi

$$\begin{cases} \dot{x} = p_\xi(x, \xi) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi), \\ \dot{\xi} = -p_x(x, \xi) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \end{cases}$$

em que I é um intervalo aberto de \mathbb{R} .

Observação 1.72. Se $H_p p = 0$, então a função p mantém um valor constante em cada uma de suas curvas Hamiltonianas. Dizemos que tal curva é *bicaracterística* de p se esse valor for nulo.

Observação 1.73. Seja λ uma função C^∞ em $T^0\Omega$ com valores reais diferentes de zero. Como

$$H_{\lambda p} = \lambda H_p + p H_\lambda = \lambda H_p, \text{ se } p = 0,$$

resulta que as bicaracterísticas de λp e p coincidem (módulo uma reparametrização).

Podemos agora, unir os Teoremas 1.69 e 1.70 em termos geométricos.

Teorema 1.74. Sejam P um operador diferencial autoadjunto de ordem m sobre Ω com símbolo principal p e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fracamente para 0 em $L^2_{loc}(\Omega)$, com uma m.d.m. μ . Suponha que Pu_n converge para 0 em $H^{-(m-1)}_{loc}(\Omega)$. Então, o suporte de μ , $\text{supp } \mu$, é uma união de curvas do tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$, em que $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ é uma bicaracterística de p .

Proposição 1.75. A menos de uma mudança de variáveis, as bicaracterísticas do símbolo principal do operador onda $p(t, x, \tau, \xi) = -\rho(x)\tau^2 + \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi$, em que $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ são curvas da seguinte forma

$$t \mapsto \left(t, x(t), \tau, -\tau \left(\frac{K(x(t))}{\rho(x(t))} \right)^{-1} \dot{x}(t) \right),$$

em que $t \mapsto x(t)$ é uma geodésica da métrica $G = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-1}$ sobre Ω , parametrizada pelo comprimento de arco.

1.10 Resultados técnicos

No próximo teorema apresentaremos a chamada Desigualdade de Trudinger–Moser para o caso $n = 2$, que pode ser encontrada em [52] e [63], a qual desempenha um papel essencial na obtenção de certas estimativas para as soluções que obtemos neste texto. É importante citarmos que tal desigualdade é apresentada para $n \geq 2$ em tais trabalhos.

Teorema 1.76 (Desigualdade de Trudinger–Moser). Para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$e^{\alpha|u|^2} \in L^1(\Omega), \quad \forall \alpha > 0,$$

e existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{\alpha\pi|u(x)|^2} dx \leq C, \quad \forall \alpha \leq 4\pi.$$

Apresentamos abaixo, um resultado obtido por Lasiecka e Tataru [44], o qual é uma ferramenta valiosíssima para a obtenção dos resultados de Estabilidade Uniforme presentes neste texto.

Lema 1.77. Seja p uma função crescente, positiva com $p(0) = 0$. Definimos a função $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$. Considere a sequência $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de números positivos satisfazendo

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então, $s_m \leq S(m)$, em que $S(t)$ é a solução da equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \\ S(0) = S_0. \end{cases}$$

Além disso, se $p(x) > 0$ para $x > 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$.

Com o intuito de apresentarmos resultados mais gerais, a seguir definimos o que é uma Variedade Riemanniana.

Definição 1.78. Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável \mathcal{M} é uma lei que faz corresponder a cada $p \in \mathcal{M}$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente

$T_p M$, tal que, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(e_i)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle \Big|_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n),$$

é uma função diferenciável em U . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Considere $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade Riemanniana, compacta, sem bordo de dimensão 2. Seja o conjunto $V = \{u \in H^1(\mathcal{M}) / \int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M} = 0\}$, o qual é um espaço de Hilbert munido da topologia induzida de $H^1(\mathcal{M})$.

Com efeito, provaremos que V é fechado em $H^1(\mathcal{M})$. Sejam $u \in \overline{V}^{H^1(\mathcal{M})}$ e $(u_n) \subset V$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathcal{M})$. Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$, então

$$\int_{\mathcal{M}} u_n \, d\mathcal{M} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Observamos que $\|u_n - u_m\|_{H^1(\mathcal{M})}^2 = \|u_n - u_m\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u_n - u_m)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \rightarrow 0$, quando $n, m \rightarrow \infty$. Assim, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathcal{M})$ é uma sequência de Cauchy e, uma vez que $L^2(\mathcal{M})$ é um espaço de Hilbert, existe $v \in L^2(\mathcal{M})$ tal que $u_n \rightarrow v$ em $L^2(\mathcal{M})$. Como M é uma variedade compacta e suave, temos que $L^2(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^1(\mathcal{M})$.

Por outro lado, da unicidade do limite em $L^2(\mathcal{M})$, deduzimos que $u = v$. Da imersão acima, temos $\int_{\mathcal{M}} |u_n - u| \, d\mathcal{M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Então,

$$\left| \int_{\mathcal{M}} (u_n - u) \, d\mathcal{M} \right| \leq \int_{\mathcal{M}} |u_n - u| \, d\mathcal{M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

isto é, $\int_{\mathcal{M}} u_n \, d\mathcal{M} \rightarrow \int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M}$, e de (1.8), segue que $0 = \int_{\mathcal{M}} u_n \, d\mathcal{M} \rightarrow \int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M}$, ou seja, $\int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M} = 0$ e $u \in V$. Além disso, V é um conjunto fechado de $H^1(\mathcal{M})$ e como $H^1(\mathcal{M})$ é um espaço de Hilbert, segue que V é um espaço de Hilbert munido com o produto interno induzido de $H^1(\mathcal{M})$. Ainda, se considerando a norma em V dada por $\|u\|_V = \|\nabla_{\mathbf{g}} u\|_{L^2(\mathcal{M})}$, para cada $u \in V$, é possível mostrar que em V as normas $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{M})}$ e $\|\cdot\|_V$ são equivalentes. Por fim, o espaço V é denso em $L^2(\mathcal{M})$ e a condição $\int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M} = 0$, para $u \in V$ é necessária para garantir a validade das desigualdades de Trudinger–Moser, Poincaré e Jensen.

Observação 1.79. Podemos substituir vários dos resultados de imersões de Sobolev, regularidade, dentre outros, vistos em abertos do \mathbb{R}^n para uma variedade compacta \mathcal{M} , cobrindo \mathcal{M} com vizinhanças coordenadas, aplicando os resultados em \mathbb{R}^n em coordenadas normais, e somando o resultado obtido através da partição da unidade.

Observação 1.80. Em diversas partes do trabalho, por simplicidade, escreveremos $a(s) \lesssim b(s)$ se $a(s) \leq Cb(s)$, em que $C > 0$ é uma constante independente de s .

EXISTÊNCIA, UNICIDADE, TAXA DE DECAIMENTO UNIFORME E BLOW-UP PARA A EQUAÇÃO DA ONDA 2D COM TERMO FONTE DE CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Neste capítulo, norteados pelas técnicas e resultados presentes nos artigos [5], [20] e [23], estamos interessados em realizar um estudo acerca das características intrínsecas dos Problemas I, II e III ((2.1), (2.121) e (2.138), respectivamente) em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado e com fronteira $\partial\Omega$ regular, a saber:

- Nos Problemas I e II, estudamos a boa colocação, extensão global e taxas de decaimento uniforme para soluções da equação da onda com termo fonte de crescimento exponencial e amortecimento não linear localmente distribuído, denominados *Caso Defocusing* e *Caso Focusing*, respectivamente;
- No Problema III, estudamos a boa colocação e o blow-up de solução forte da equação da onda com termo fonte de crescimento exponencial e amortecimento não linear.

Além disso, no final do capítulo, apresentamos um estudo referente aos mesmos problemas acima, realizando as devidas substituições no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é trocado por uma variedade Riemanniana e compacta \mathcal{M} sem bordo e de dimensão 2.

2.1 Problema I

Nesta seção, estamos interessados em obter a existência, unicidade, estabilidade assintótica e taxas de decaimento uniforme para soluções da equação da onda, sujeita a um amortecimento não linear localmente distribuído e com termo fonte de crescimento exponencial:

$$\text{(Problema I)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^2 , com fronteira $\partial\Omega$ regular. As funções f , a e g são, respectivamente, o termo fonte, a localização da região efetiva do amortecimento e o amortecimento, e satisfazem as Suposições 2.1, 2.5 e 2.6, respectivamente.

Suposição 2.1. Assumimos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:

i) Para cada $\beta > 0$, existe $C_\beta > 0$ tal que

$$|f(t)|, |f'(t)| \leq C_\beta e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

ii) Próximo à origem, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0. \quad (2.3)$$

iii) A função $\frac{f(t)}{t}$ é crescente em $(0, +\infty)$.

Observação 2.2. No estudo das equações elípticas, quando a condição (2.2) é satisfeita, dizemos que a função f possui um crescimento exponencial subcrítico (ver [31]). A grosso modo, f é uma função que cresce assintoticamente mais rápido do que um polinômio ou até mesmo alguns tipos de funções exponenciais, mas mais lenta que uma exponencial do tipo $e^{\beta t^2}$, para todo $\beta > 0$. Como exemplo de uma função que verifica a Suposição 2.1,

temos para $p > 2$, $C > 0$ e $\alpha \in (1, 2)$ fixo, porém arbitrário, a função

$$f(t) := |t|^{p-2} t e^{C|t|^\alpha}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Apresentamos agora, algumas importantes estimativas a serem utilizadas no decorrer do nosso estudo envolvendo as funções f e $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$.

De (2.3), para cada $\varepsilon > 0$ fixo, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t|, \quad \forall t \in [-\delta, \delta].$$

Por outro lado, de (2.2), para cada $\beta > 0$ e $p \geq 1$ fixos, existe $C_\beta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \delta^{-p+1} C_\beta |t|^{p-1} e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty).$$

Assim, para cada $\beta, \varepsilon > 0$ e $p \geq 1$ fixos, existe $C_{\beta, \varepsilon, p} > 0$ verificando

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| + C_{\beta, \varepsilon, p} |t|^{p-1} e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

e conseqüentemente,

$$|F(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t|^2 + C_{\beta, \varepsilon, p} |t|^p e^{\beta t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Em particular, de (2.4), temos

$$|f(t) - f(s)| \leq C_{\beta, \varepsilon, p} \left[e^{\beta |t|^2} + e^{\beta |s|^2} \right] |t - s|, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Observação 2.3. Com as hipóteses feitas sobre a função f , ela pode ser naturalmente vista como uma função de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ fazendo a seguinte consideração: definimos a função $f^e(u)(x) := f(u(x))$, $x \in \Omega$, para $u \in H_0^1(\Omega)$, então $f^e : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é contínua e compacta (ver Lema 4.8.4. de [40]).

Com o intuito de obtermos a existência global de soluções para o problema (2.1), apresentamos a seguinte suposição, conhecida como Condição de Ambrosetti–Rabinowitz,

usada com frequência em problemas elípticos.

Suposição 2.4 (Condição de Ambrosetti–Rabinowitz). Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(t) < f(t)t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Suposição 2.5. A função real não negativa $a = a(\cdot)$, responsável pelo efeito dissipativo localizado, é assumida estar em $L^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $a(x) \geq a_0 > 0$ sobre uma vizinhança ω da fronteira $\partial\Omega$ inteira (em verdade, ω denota uma interseção de Ω com uma vizinhança da fronteira $\partial\Omega$ inteira).

Apresentamos agora as hipóteses referentes a função g , responsável pelo efeito dissipativo.

Suposição 2.6. A função feedback $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, monótona crescente e satisfaz

$$g(s)s > 0, \quad \text{para } s \neq 0, \tag{2.7}$$

$$\tilde{m}s^2 \leq g(s)s \leq \tilde{M}s^2, \quad \text{para } |s| > 1 \tag{2.8}$$

em que $\tilde{m}, \tilde{M} > 0$ (exemplos de funções feedback são apresentadas posteriormente, juntamente com respectivas taxas de decaimento para o problema (2.1)). Além disso, assumimos a existência de uma função contínua, côncava e estritamente crescente $h_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $h_0(0) = 0$ e

$$h_0(g(s)s) \geq s^2 + g(s)^2, \quad \text{para } |s| \leq 1.$$

Duas propriedades da função feedback g podem ser exibidas, a saber:

- $g(0) = 0$, pois da condição de sinal (2.7), temos que se $s > 0$, então $g(s) > 0$, e se $s < 0$ e $g(s) < 0$. Logo, da continuidade de g , segue que

$$0 \leq \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = g(0) = \lim_{s \rightarrow 0^-} g(s) \leq 0.$$

- Se $u \in L^2(\Omega)$, então $g(u) \in L^2(\Omega)$. De fato, se $u \in L^2(\Omega)$, consideramos

$$\Omega_u^1 = \{x \in \Omega / |u(x)| \leq 1\},$$

$$\Omega_u^2 = \{x \in \Omega / |u(x)| > 1\}.$$

Assim, $\Omega = \Omega_u^1 \dot{\cup} \Omega_u^2$ e

$$\|g(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |g(u(x))|^2 dx = \int_{\Omega_u^1} |g(u(x))|^2 dx + \int_{\Omega_u^2} |g(u(x))|^2 dx =: I_1 + I_2.$$

Note que

$$\{|g(u(x))|^2 / |x| \in \Omega_u^1\} = \{|g(u(x))|^2 / |u(x)| \leq 1\} \subset \{|g(z)|^2 / |z| \leq 1\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_u^1} |g(u(x))|^2 dx \leq \sup_{x \in \Omega_u^1} |g(u(x))|^2 \text{med}(\Omega_u^1) \\ &\leq \sup_{z \in [-1,1]} |g(z)|^2 \text{med}(\Omega_u^1) \leq K_g^2 \text{med}(\Omega) < \infty. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_u^2} |g(u(x))|^2 dx \leq \widetilde{M}^2 \int_{\Omega_u^2} |u(x)|^2 dx \\ &\leq \widetilde{M}^2 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \widetilde{M}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Assim, $g(u) \in L^2(\Omega)$ e mais, tomando $C_g = \max\{K_g \text{med}(\Omega)^{1/2}, \widetilde{M}\}$, então vale que

$$\|g(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_g \left(1 + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Por fim, para a dada geometria, temos a seguinte suposição sendo assumida:

Suposição 2.7 (Princípio de Continuação Única). Dado $T > 0$, a única solução v no espaço $C((0, T); L^2(\Omega)) \cap C((0, T); H^{-1}(\Omega))$ para o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v + V(x, t)v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{sobre } \omega, \end{cases}$$

em que $V \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$, é a solução trivial, isto é, $v \equiv 0$.

Observação 2.8. Para $V \equiv 0$, a Suposição 2.7 é satisfeita pelos resultados presentes nas

notas de aula de Burq e Gérard [14, ver equações (6.28) e (6.29), p. 75]. Já na Seção 2.1.2 e Teorema 2.2 de [33, Duyckaerts, Zhang e Zuazua] é dado um exemplo em que o princípio de continuação única é válido globalmente e também é aplicado ao laplaciano com coeficientes não-constantas.

2.1.1 Boa Colocação

Consideramos o espaço de fase $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, o qual é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno e norma usuais, a saber

$$\begin{aligned} ((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + v_1 \cdot v_2 \, dx, \\ \|(u_1, v_1)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 + |v_1|^2 \, dx, \end{aligned}$$

para cada $(u_i, v_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$.

Para estudarmos a boa colocação no sentido de Hadamard para o problema (2.1), devemos escrevê-lo através de uma formulação abstrata.

Definimos o operador $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ com o elemento do espaço dual $Au \in H^{-1}(\Omega)$, dado pela ação $\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$.

- O operador A está bem definido, ou seja, seu contradomínio é $H^{-1}(\Omega)$. De fato, fixado arbitrariamente $u \in H_0^1(\Omega)$, a linearidade de Au é facilmente obtida. Vejamos agora, que Au é limitada. Para isso, basta observamos que para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\langle Au, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

o que implica que

$$\|Au\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\langle Au, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

e, assim, Au é limitada.

- A é um operador coercivo em $H_0^1(\Omega)$. De fato, para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\langle Au, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Definimos também o operador $B : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ dado por

$$(Bv)(x) = a(x)g(v(x)), \quad x \in \Omega, \quad (2.9)$$

o qual está bem definido e é maximal monótono.

- B está bem definido. De fato, sejam $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega / |v(x)| \leq 1\}$. Assim,

$$\int_{\Omega} |(Bv)(x)|^2 \, dx = \int_{\Omega} |a(x)|^2 |g(v(x))|^2 \, dx.$$

Como $a(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |a(x)|^2 |g(v(x))|^2 \, dx &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |g(v(x))|^2 \, dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left[\int_{\tilde{\Omega}} |g(v(x))|^2 \, dx + \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} |g(v(x))|^2 \, dx \right] \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left[\int_{\tilde{\Omega}} |g(v(x))|^2 \, dx + \tilde{M}^2 \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} |v(x)|^2 \, dx \right] \end{aligned}$$

e uma vez que $\tilde{\Omega}$ é compacto, g é contínua e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que

$$\int_{\Omega} |(Bv)(x)|^2 \, dx < \infty$$

e, identificando $L^2(\Omega) \equiv [L^2(\Omega)]'$, temos $Bv \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

- B é monótono. De fato, sejam $h_1, h_2 \in H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} (B(h_1) - B(h_2), h_1 - h_2)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} [B(h_1) - B(h_2)] (h_1 - h_2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} a(x) [g(h_1) - g(h_2)] (h_1 - h_2) \, dx. \end{aligned}$$

Uma vez que $a(\cdot)$ é não negativa e g é crescente, temos

$$(B(h_1) - B(h_2), h_1 - h_2)_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad (2.10)$$

ou seja, B é um operador monótono.

- B é maximal monótono. Para isto, basta mostrar que B é subdiferencial de um funcional convexo. Neste intuito, definimos $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(v)(x) = \int_{\Omega} \int_0^{v(x)} a(x)g(s) \, ds \, dx,$$

o qual está bem definido devido as hipóteses sobre as funções g e $a(\cdot)$. Mostremos agora, que B é subdiferencial de J . De fato, a derivada direcional de J em $v \in H_0^1(\Omega)$ na direção de u é dada por

$$\begin{aligned} J'(v)u &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(v + \lambda u) - J(v)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[\int_{\Omega} \int_0^{v(x) + \lambda u(x)} a(x)g(s) \, ds \, dx - \int_{\Omega} \int_0^{v(x)} a(x)g(s) \, ds \, dx \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} a(x) \int_{v(x)}^{v(x) + \lambda u(x)} g(s) \, ds \, dx \\ &= \int_{\Omega} a(x)g(v(x))u(x) \, dx. \end{aligned}$$

em que a última igualdade é obtida através do Teorema da Média. Assim, J é diferenciável à Gateaux em $v \in H_0^1(\Omega)$ e de (2.9), temos

$$\langle J'v, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} a(x)g(v(x))u(x) \, dx = \langle Bv, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, $J'v = Bv$, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$.

Agora, mostraremos que J é convexo. Para isso, de acordo com a Proposição 1.56, é suficiente mostrarmos que $\langle J'w - J'v, w - v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0$, para todo $w, v \in H_0^1(\Omega)$. De fato,

$$\langle J'w - J'v, w - v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq (J'w - J'v, w - v)_{L^2(\Omega)} \stackrel{(2.10)}{\geq} 0.$$

Usando agora a Proposição 1.57 e de $J'v = Bv$, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, segue que $\partial(Jv) = J'v = Bv$, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por fim, mostraremos que J é contínuo. De fato, seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ com $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$

em $H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} |Jv_n - Jv| &= \left| \int_{\Omega} a(x) \left[\int_0^{v_n(x)} g(s) \, ds - \int_0^{v(x)} g(s) \, ds \right] dx \right| \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \int_{[v_n(x), v(x)]} |g(s)| \, ds \, dx. \end{aligned}$$

Sendo g contínua, temos que $|g(s)| \leq C$, se $|s| \leq 1$ e de (2.8), $|g(s)| \leq \widetilde{M}|s|$, se $|s| > 1$. Assim, $|g(s)| \leq C + \widetilde{M}|s|$, para cada $s \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} |Jv_n - Jv| &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \int_{[v_n(x), v(x)]} [C + \widetilde{M}|s|] \, ds \, dx \\ &\leq C \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| \, dx + \frac{\widetilde{M}}{2} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} ||v_n(x)|^2 - |v(x)|^2| \, dx. \end{aligned}$$

Como $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que $\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ||v_n(x)|^2 - |v(x)|^2| \, dx &\leq \int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| |v_n(x) + v(x)| \, dx \\ &\stackrel{\text{(Des. de Hölder)}}{\leq} \left[\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)|^2 \, dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} |v_n(x) + v(x)|^2 \, dx \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_n(x) + v(x)|^2 \, dx &\leq \int_{\Omega} (|v_n(x)| + |v(x)|)^2 \, dx \leq 2 \left(\int_{\Omega} |v_n(x)|^2 \, dx + \int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \right) \\ &= 2 \left(\|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 2 \left(C_1 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

em que a constante $C_1 > 0$ vem da limitação de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma vez que tal sequência é convergente em $H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$\int_{\Omega} ||v_n(x)|^2 - |v(x)|^2| \, dx \leq \sqrt{2} \left(C_1 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left[\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)|^2 \, dx \right]^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, $Jv_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Jv$, ou seja, J é contínuo.

Portanto, J é contínuo, convexo e próprio e, do Teorema 1.58, segue que o operador B é maximal monótono.

Definimos o conjunto $D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in \mathcal{H} / v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } Au + Bv \in L^2(\Omega)\}$ e os operadores não lineares $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por

$$\mathcal{A}(u, v) = (-v, Au + Bv) \quad (2.11)$$

e $\mathbb{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por

$$\mathbb{B}(u, v) = (0, f(u)).$$

Assim, podemos reformular o problema (2.1) no seguinte problema de Cauchy em \mathcal{H} :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathbb{B}U(t) = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

com $U(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ e $U_0 = (u_0, u_1)$.

Com o intuito de utilizarmos o Teorema 1.59 e obtermos uma solução local para o problema (2.12), devemos mostrar que o operador \mathcal{A} é maximal monótono em \mathcal{H} e \mathbb{B} é localmente Lipschitz.

- \mathcal{A} é monótono. De fato, seja $(u, v) \in D(\mathcal{A})$, então

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(u, v), (u, v))_{\mathcal{H}} &= ((-v, Au + Bv), (u, v))_{\mathcal{H}} = (-v, u)_{H_0^1(\Omega)} + (Au + Bv, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \nabla(-v) \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} a(x)g(v)v \, dx \\ &= \int_{\Omega} a(x)g(v)v \, dx \geq 0, \end{aligned}$$

visto que $a(\cdot)$ é não negativa e que g é monótona crescente, e isto prova que \mathcal{A} é monótono.

- \mathcal{A} é um operador não linear maximal monótono. Para isso, basta mostrarmos que $Im(I + \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (graças a Proposição 1.54), isto é, dados $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, devemos exhibir $(u, v) \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\begin{cases} u - v = u_0, \\ v + Au + Bv = v_0, \end{cases} \quad (2.13)$$

em que deduzimos a seguinte igualdade

$$v + Av + Bv = v_0 - Au_0. \quad (2.14)$$

Note que o operador $v \mapsto v + Av$ é contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} \langle v + Av, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} v \cdot u \, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx \\ &\stackrel{\text{(Des. de Hölder)}}{\leq} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{(Des. de Poincaré)}}{\leq} \frac{1}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1 \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|v + Av\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left| \langle v + Av, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \\ &\leq \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1 \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1 \right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Além disso, A é um operador monótono. Com efeito $\langle Au, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq 0$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo, o operador $I + A$ é monótono e contínuo. Uma vez que B é maximal monótono, segue do Corolário 1.55 que $(I + A) + B$ é maximal monótono. Então, (2.14) possui uma única solução $v \in H_0^1(\Omega)$, ou seja, $u = u_0 + v$ e $Au + Bv = v_0 - v$, em que concluímos que $u \in H_0^1(\Omega)$ e $Au + Bv \in L^2(\Omega)$.

Portanto, (2.13) possui uma única solução $(u, v) \in D(\mathcal{A})$ e segue que \mathcal{A} é maximal monótono em \mathcal{H} .

- \mathbb{B} está bem definido. Para isso, devemos mostrar que para todo $(u, v) \in \mathcal{H}$, temos $\mathbb{B}(u, v) \in \mathcal{H}$, ou seja, $(0, f(u)) \in \mathcal{H}$, ou ainda, $f(u) \in L^2(\Omega)$.

De fato, seja $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u \neq 0$. Então, tomando $\beta < \frac{\pi}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u)|^2 dx &\stackrel{(2.4)}{\leq} \int_{\Omega} \left(\varepsilon |u| + C_{\beta, \varepsilon, p} |u|^{p-1} e^{\beta u^2} \right)^2 dx \\ &\leq 2 \left[\varepsilon^2 \int_{\Omega} |u|^2 dx + C_{\beta, \varepsilon, p}^2 \int_{\Omega} |u|^{2(p-1)} e^{2\beta u^2} dx \right] \\ (\text{Des. de Hölder}) &\leq 2\varepsilon^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C_{\beta, \varepsilon, p}^2 \left[\int_{\Omega} |u|^{4(p-1)} dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} e^{4\beta u^2} dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Uma vez que $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} e^{4\beta u^2} dx = \int_{\Omega} e^{4\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left(\frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2} dx$$

e, para utilizarmos a Desigualdade de Trudinger–Moser, precisamos que seja satisfeito $4\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 < 4\pi$, ou seja, $\beta < \frac{\pi}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2}$. Então,

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{4\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left(\frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2} dx \leq L,$$

com $L > 0$.

Ainda, uma vez que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para todo $r \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u)|^2 dx &\leq 2 \frac{\varepsilon^2}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2C_{\beta, \varepsilon, p}^2 \|u\|_{L^{4(p-1)}(\Omega)}^{2(p-1)} L^{1/2} \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon^2}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2C_{\beta, \varepsilon, p}^2 L^{1/2} K_0 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)} < \infty, \end{aligned}$$

em que $K_0 > 0$ é uma constante de imersão e $\lambda_1 > 0$ é a constante da Desigualdade de Poincaré.

Portanto, \mathbb{B} está bem definido.

- \mathbb{B} é localmente Lipschitz. Para isso, devemos mostrar que para cada $R > 0$, existe $L_R > 0$ tal que

$$\|\mathbb{B}(u_1, v_1) - \mathbb{B}(u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}} \leq L_R \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}},$$

para cada $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B_R^{\mathcal{H}}(0) = \{(u, v) \in \mathcal{H} / \|(u, v)\|_{\mathcal{H}} \leq R\}$. De fato, sejam $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B_R^{\mathcal{H}}(0)$. Assim, $\|(u_i, v_i)\|_{\mathcal{H}} \leq R \Leftrightarrow \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \leq R$, para cada $i = 1, 2$. Logo,

$$\|\mathbb{B}(u_1, v_1) - \mathbb{B}(u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(0, f(u_1)) - (0, f(u_2))\|_{\mathcal{H}}^2 = \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

assim,

$$\begin{aligned} & \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} |f(u_1) - f(u_2)|^2 \, dx \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} C \left[\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 \left(e^{\beta|u_1|^2} + e^{\beta|u_2|^2} \right)^2 \, dx \right] \\ &\leq 2C \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 \left(e^{2\beta|u_1|^2} + e^{2\beta|u_2|^2} \right) \, dx \\ &= 2C \left[\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 e^{2\beta|u_1|^2} \, dx + \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 e^{2\beta|u_2|^2} \, dx \right] \\ &\leq 2C \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^4 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} e^{4\beta|u_1|^2} \, dx \right)^{1/2} \\ &\quad + 2C \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^4 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} e^{4\beta|u_2|^2} \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, então $\|u_1 - u_2\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq K_1 \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2$, com $K_1 > 0$ sendo a constante de imersão. Ainda, de $\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq R$ para $i = 1, 2$, temos

$$\int_{\Omega} e^{4\beta|u_i|^2} \, dx = \int_{\Omega} e^{4\beta\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left(\frac{u_i}{\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2} \, dx \leq \int_{\Omega} e^{4\beta R^2 \left(\frac{u_i}{\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2} \, dx,$$

e tomando $4\beta R^2 < 4\pi$, ou seja, $\beta < \frac{\pi}{R^2}$, podemos utilizar a Desigualdade de Trudinger–Moser e assim,

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{4\beta R^2 \left(\frac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2} \, dx \leq L_{\tilde{R}}.$$

com $L_{\tilde{R}} > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2C \left[K_1 \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 L_{\tilde{R}}^{1/2} + K_1 \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 L_{\tilde{R}}^{1/2} \right] \\ &= 4CK_1 L_{\tilde{R}}^{1/2} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Tomando $L_R = 2\sqrt{CK_1 L_{\tilde{R}}^{1/2}} > 0$, temos

$$\|\mathbb{B}(u_1, v_1) - \mathbb{B}(u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}} \leq L_R \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq L_R \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.15)$$

Portanto, \mathbb{B} é localmente Lipschitz.

Por fim, utilizando o Teorema 1.59, estamos aptos a apresentar o resultado de existência local para solução do problema (2.1):

Teorema 2.9 (Local no tempo). Assumindo as Suposições 2.1, 2.5 e 2.6, temos que o problema (2.1) gera um semigrupo não linear sobre \mathcal{H} . Além disso,

i) Se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, existe uma única solução generalizada

$$u \in C([0, T_{\max}); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_{\max}); L^2(\Omega)).$$

ii) Se $(u_0, u_1) \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte

$$(u, \partial_t u) \in W^{1,\infty}(0, T_{\max}; \mathcal{H}). \quad (2.16)$$

Observação 2.10. Note que a regularidade (2.16) para a solução u do problema (2.1) significa que $u \in L^\infty(0, T_{\max}; H_0^1(\Omega))$, $\partial_t u \in L^\infty(0, T_{\max}; H_0^1(\Omega))$ e $\partial_t^2 u \in L^\infty(0, T_{\max}; L^2(\Omega))$.

2.1.1.1 Sequência de problemas truncados com termos fonte truncados

O Princípio de Continuação Única (Suposição 2.31) que utilizaremos neste problema é válido para termos de fonte Lipschitz contínuos, propriedade não garantida para f nas condições da Suposição 2.1. Neste sentido, não apenas mostraremos a existência e unicidade de uma solução global u , como também construiremos uma sequência de soluções fortes $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, associadas a problemas truncados, cujos termos fonte f_k são Lipschitz contínuos.

Observe que para dados iniciais $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, temos $(u, \partial_t u) \in C([0, T_{\max}); \mathcal{H})$, ou seja, $(u(t), \partial_t u(t)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ q.s. em $[0, T_{\max})$. Como $\partial_t^2 u(t) \in H^{-1}(\Omega)$ q.s. em $[0, T_{\max})$, a priori, não podemos realizar a dualidade $\langle \partial_t^2 u(t), \partial_t u(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$. Para contornar este problema, consideramos $(u_{0k}, u_{1k})_{k \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$ tal que

$$(u_{0k}, u_{1k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (u_0, u_1) \text{ em } \mathcal{H}. \quad (2.17)$$

Motivados por Lasiecka e Tataru [44], consideramos a seguinte sequência de problemas aproximados com termos fonte truncados, o qual chamaremos de *problemas truncados*:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k + f_k(u_k) + a(x)g(\partial_t u_k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0k}(x) & \text{em } \Omega \\ \partial_t u_k(x, 0) = u_{1k}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.18)$$

em que (u_{0k}, u_{1k}) foram definidos acima e, para cada $k \in \mathbb{N}$, o *termo fonte truncado* é definido por $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$f_k(s) := \begin{cases} f(s), & |s| \leq k, \\ f(k), & s > k, \\ f(-k), & s < -k. \end{cases} \quad (2.19)$$

Apresentamos agora, algumas propriedades da função truncada f_k .

Lema 2.11. A derivada distribucional f'_k da função f_k definida acima, é a função essencialmente limitada $\tilde{f}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}_k(s) := \begin{cases} f'(s), & |s| \leq k, \\ 0, & s > k, \\ 0, & s < -k. \end{cases}$$

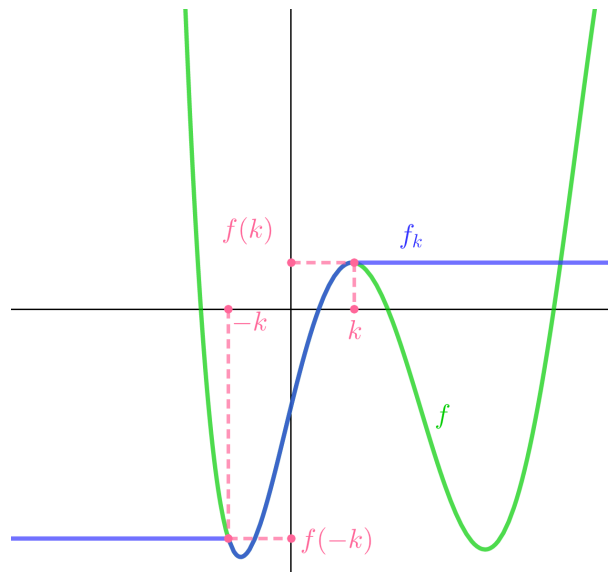


Fig. 2.1: Representação de uma possível função f e seu truncamento f_k .

Demonstração. Inicialmente, mostremos que \tilde{f}_k é essencialmente limitada. De fato

$$|\tilde{f}_k(s)| \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |\tilde{f}_k(s)| = \sup_{s \in [-k, k]} |\tilde{f}_k(s)| = \sup_{s \in [-k, k]} |f'(s)| = \tilde{C}.$$

Disto, segue que $f_k \in L^\infty(\mathbb{R})$ e ainda, que $\tilde{f}_k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Agora, mostremos que $f_k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De fato, dado $K \subset \mathbb{R}$ um compacto, temos

$$\int_K |f_k(s)| \, ds \leq \sup_{s \in K} |f_k(s)| \int_K 1 \, ds = \max_{s \in K} |f_k(s)| \, \text{med}(K) < \infty,$$

uma vez que f_k é contínua. Assim, tome $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e como $f_k, \tilde{f}_k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} \langle f'_k, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} &= - \int_{\mathbb{R}} f_k(s) \varphi'(s) \, ds \\ &= - \left[\int_{-\infty}^{-k} f_k(s) \varphi'(s) \, ds + \int_{-k}^k f_k(s) \varphi'(s) \, ds + \int_k^{+\infty} f_k(s) \varphi'(s) \, ds \right] \\ &= - [f(-k) \varphi(-k) + (f(k) \varphi(k) - f(-k) \varphi(-k)) \\ &\quad - \int_{-k}^k f'(s) \varphi(s) \, ds - f(k) \varphi(k)] \\ &= \int_{-k}^k f'(s) \varphi(s) \, ds = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_k \varphi(s) \, ds = \langle \tilde{f}_k, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Portanto, f'_k e \tilde{f}_k são iguais em $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

No Lema 2.12 abaixo, mostramos que para cada $k \in \mathbb{N}$, a função truncada f_k é globalmente Lipschitz.

Lema 2.12. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que

$$|f_k(r) - f_k(s)| \leq C_k |r - s|, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Demonstração. Considere $s, r \in \mathbb{R}$ com $s < r$. Utilizando o Teorema 1.28 para $I =]s, r[$, segue que

$$f_k(r) - f_k(s) = \int_s^r f'_k(\xi) \, d\xi.$$

Assim,

$$|f_k(r) - f_k(s)| \leq \int_s^r |f'_k(\xi)| \, d\xi \leq \sup_{\xi \in [-k, k]} |f'(\xi)| |r - s|,$$

o que conclui a prova. ■

Façamos agora $W_k(t) = (u_k(t), \partial_t u_k(t))$. Assim, o problema (2.18) pode ser reformulado como o seguinte problema de Cauchy em \mathcal{H} :

$$\begin{cases} \partial_t W_k(t) + \mathcal{A}W_k(t) + \mathbb{B}_k W_k(t) = 0, \\ W_k(0) = (u_{0k}, u_{1k}), \end{cases} \quad (2.21)$$

em que \mathcal{A} é o operador maximal monótono definido em (2.11) e $\mathbb{B}_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador não linear dado por $\mathbb{B}_k(u, v) = (0, f_k(u))$, o qual é, para cada $k \in \mathbb{N}$, globalmente Lipschitz (basta utilizar o Lema 2.12). Assim, de forma análoga ao que foi feito anteriormente, usando a teoria de semigrupos, provamos pelo Teorema 1.59 que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \in C([0, T_{\max}^k]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_{\max}^k]; L^2(\Omega))$ solução para o problema (2.18).

Multiplicando (2.18)₁ por $\partial_t u_k(t)$ e integrando em Ω , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t^2 u_k(t) \partial_t u_k(t) \, dx + \int_{\Omega} (-\Delta u_k(t)) \partial_t u_k(t) \, dx + \int_{\Omega} f_k(u_k(t)) \partial_t u_k(t) \, dx \\ + \int_{\Omega} a(x) g(\partial_t u_k(t)) \partial_t u_k(t) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Utilizando a Fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F_k(u_k(t)) \, dx \\ + \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k(t))\partial_t u_k(t) \, dx = 0, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k], \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que

$$F_k(s) = \begin{cases} \int_0^s f(\xi) \, d\xi, & |s| \leq k, \\ \int_0^k f(\xi) \, d\xi + f(k)(s - k), & s > k, \\ \int_0^{-k} f(\xi) \, d\xi + f(-k)(s + k), & s < -k. \end{cases} \quad (2.23)$$

Assim, integrando (2.22) de t_1 à t_2 com $0 \leq t_1 < t_2 < T_{\max}^k$, obtemos a identidade de energia para o problema truncado (2.18) dada por

$$E_{u_k}(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k(t))\partial_t u_k(t) \, dx \, dt = E_{u_k}(t_1), \quad (2.24)$$

para todos $0 \leq t_1 < t_2 < T_{\max}^k$, em que

$$E_{u_k}(t) = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \int_{\Omega} F_k(u_k(t)) \, dx$$

é o funcional de energia associado ao problema (2.18).

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F_k(u_{0k})| \, dx &\stackrel{(2.5)}{\leq} \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |u_{0k}|^2 + C_{\beta, \varepsilon, p} |u_{0k}|^p e^{\beta u_{0k}^2} \, dx \\ &\stackrel{(\text{Des. de Hölder})}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \|u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta, \varepsilon, p} \left[\int_{\Omega} |u_{0k}|^{2p} \, dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} e^{2\beta u_{0k}^2} \, dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $(u_{0k}, u_{1k}) \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\|(u_{0k}, u_{1k})\|_{\mathcal{H}} \leq R$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_{\Omega} e^{2\beta u_{0k}^2} \, dx = \int_{\Omega} e^{2\beta \|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}^2} \left(\frac{u_{0k}}{\|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 \, dx \leq \int_{\Omega} e^{2\beta R^2} \left(\frac{u_{0k}}{\|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 \, dx,$$

e se $2\beta R^2 < 4\pi$, ou seja, $\beta < \frac{2\pi}{R^2}$, usando a Desigualdade de Trudinger–Moser, obtemos

$$\sup_{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{2\beta R^2 \left(\frac{u}{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2} dx \leq L,$$

com $L > 0$. Assim, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F_k(u_{0k})| dx &\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta,\varepsilon,p} \|u_{0k}\|_{L^{2p}(\Omega)}^p L^{1/2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta,\varepsilon,p} L^{1/2} K_0 \|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}^p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} R^2 + C_{\beta,\varepsilon,p} L^{1/2} K_0 R^p < \infty \end{aligned} \quad (2.25)$$

com $K_0 > 0$ sendo a constante de imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$.

Com isso, voltando à identidade (2.24), temos

$$\begin{aligned} E_{u_k}(t) + \int_0^t \int_{\Omega} a(x) g(\partial_t u_k(t)) \partial_t u_k(t) dx dt \\ &= E_{u_k}(0) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\|u_{1k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \int_{\Omega} |F_k(u_{0k})| dx \\ &= C_R, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k), \end{aligned} \quad (2.26)$$

com $C_R > 0$ sendo uma constante independente de t e k . Assim, uma vez que a função $a(\cdot)$ é não negativa, g é monótona crescente e admitindo a Condição de Ambrosetti-Rabinowitz, segue que

$$\|W_k(t)\|_{\mathcal{H}} = \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_R.$$

Nesta perspectiva, para cada $k \in \mathbb{N}$, a solução u_k do problema (2.18) não sofre blow-up em tempo finito, ou seja, $T_{\max}^k = \infty$.

Portanto,

$$(u_k, \partial_t u_k) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}). \quad (2.27)$$

Observação 2.13. Uma vez que \mathbb{B}_k é globalmente Lipschitz e $\mathbb{B}_k(0, 0) = (0, 0)$, temos

$$\begin{aligned}\|\mathbb{B}_k(W_k(t))\|_{\mathcal{H}} &= \|\mathbb{B}_k(W_k(t)) - \mathbb{B}_k(0, 0)\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|W_k(t) - (0, 0)\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|W_k(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|W_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})} < \infty,\end{aligned}$$

e assim, $\mathbb{B}_k(W_k) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Agora, de (2.27), temos $\partial_t W_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Além disso, de (2.21), $\mathcal{A}W_k = -\partial_t W_k - \mathbb{B}_k W_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Ainda,

$$\begin{aligned}\|a(\cdot)g(\partial_t u_k(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |a(x)g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\{x \in \Omega / |\partial_t u_k(x, t)| \leq 1\}} |g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx \\ &\quad + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\{x \in \Omega / |\partial_t u_k(x, t)| > 1\}} |g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left[M_g \text{med}(\Omega) + \widetilde{M}^2 \int_{\Omega} |\partial_t u_k(x, t)|^2 dx \right] \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left[M_g \text{med}(\Omega) + \widetilde{M}^2 \|\partial_t u_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left[M_g \text{med}(\Omega) + \widetilde{M}^2 \|\partial_t u_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))}^2 \right] < \infty,\end{aligned}\tag{2.28}$$

em que $M_g = \max_{s \in [-1, 1]} |g(s)|^2$. Da estimativa (2.28), segue que

$$a(\cdot)g(\partial_t u_k) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

Por fim, como $\partial_t W_k(t) + \mathcal{A}W_k(t) + \mathbb{B}_k W_k(t) = 0$, temos

$$-\Delta u_k(t) = -\underbrace{a(x)g(\partial_t u_k(t))}_{\in L^2(\Omega)} - \underbrace{f_k(u_k(t))}_{\in L^2(\Omega)} - \underbrace{\partial_t^2 u_k(t)}_{\in L^2(\Omega)},\tag{2.29}$$

e assim, $-\Delta u_k(t) \in L^2(\Omega)$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Do Teorema 1.29, segue que $u_k(t) \in H^2(\Omega)$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$ e de (2.29) juntamente com a regularidade de cada um dos termos do lado direito da igualdade, segue que $u_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega))$.

Portanto, como no item ii) do Teorema 2.9 e dos argumentos acima, segue que

$$u_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \cap W^{2, \infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)),$$

ou seja, obtemos uma regularidade mais forte para a solução u_k do problema truncado

(2.18).

Da limitação uniforme dada em (2.26) e das propriedades das funções $a(\cdot)$ e g , obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} (u_k) &\text{ é limitada em } L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \\ (\partial_t u_k) &\text{ é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\ (a(x)g(\partial_t u_k)) &\text{ é limitada em } L^2(\Omega \times (0, T)), \quad \forall T > 0, \end{aligned}$$

e do Teorema 1.45, concluímos a existência de uma subsequência de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (a qual continuaremos denotando por (u_k)) e $g^* \in L^2(\Omega \times (0, T))$ tal que

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad (2.30)$$

$$\partial_t u_k \xrightarrow{*} \partial_t u \text{ em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad (2.31)$$

$$a(x)g(\partial_t u_k) \rightharpoonup g^* \text{ em } L^2(\Omega \times (0, T)), \quad \forall T > 0. \quad (2.32)$$

Neste sentido, do Teorema de Compacidade de Aubin–Lions–Simon, temos

$$u_k \longrightarrow u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0. \quad (2.33)$$

Além disso, como $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(\Omega \times (0, T))$, para cada $T > 0$ e de (2.33), segue que

$$u_k(x, t) \longrightarrow u(x, t) \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T), \quad \forall T > 0. \quad (2.34)$$

Por outro lado, uma vez que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para cada $r \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_k(u_k)|^r dx &\stackrel{(2.4)}{\leq} \int_{\Omega} \left| \varepsilon |u_k| + C_{\beta, \varepsilon, p} |u_k|^{p-1} e^{\beta u_k^2} \right|^r dx \\ &\leq 2^r \left[\varepsilon^r \int_{\Omega} |u_k|^r dx + C_{\beta, \varepsilon, p}^r \int_{\Omega} |u_k|^{r(p-1)} e^{r\beta u_k^2} dx \right] \\ &\leq 2^r \left[\varepsilon^r \|u_k\|_{L^r(\Omega)}^r + C_{\beta, \varepsilon, p}^r \left(\int_{\Omega} |u_k|^{2r(p-1)} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} e^{2r\beta u_k^2} dx \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Como (u_k) é limitada em $L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, temos $\|u_k(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \widehat{R}$ q.s. em $(0, \infty)$.

Utilizando a Desigualdade de Trudinger–Moser para $\beta < \frac{2\pi}{rR^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_k(u_k)|^r dx &\leq 2^r \left[\varepsilon^r \|u_k\|_{L^r(\Omega)}^r + C_{\beta,\varepsilon,p}^r L^{1/2} \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^{r(p-1)} \right] \\ &\lesssim \|u_k\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^r + \|u_k\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^{r(p-1)} < \infty, \quad \forall T > 0, \end{aligned}$$

em outras palavras, $f_k(u_k) \in L^\infty(0, T; L^r(\Omega))$, para cada $T > 0$. Na mesma perspectiva, obtemos também que $f(u) \in L^\infty(0, T; L^r(\Omega))$, para cada $T > 0$. Além disso,

$$f_k(u_k(x, t)) \longrightarrow f(u(x, t)) \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T), \quad \forall T > 0. \quad (2.35)$$

De fato, da convergência (2.34), temos garantida a existência de um conjunto $Z_T \subset \Omega \times (0, T)$ com $\text{med}(Z_T) = 0$ tal que $u_k(x, t) \rightarrow u(x, t)$, para todo $(x, t) \in [\Omega \times (0, T)] \setminus Z_T$, quando $k \rightarrow \infty$. Ainda, para cada $(x, t) \in [\Omega \times (0, T)] \setminus Z_T$, existe uma constante $L = L(x, t) > 0$ tal que $|u_k(x, t)| < L$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, usando a definição de f_k , obtemos que

$$\text{se } |u_k(x, t)| < L, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ então } f_k(u_k(x, t)) = f(u_k(x, t)), \text{ para todo } k \geq L, \quad (2.36)$$

isto é,

$$f_k(u_k(x, t)) - f(u_k(x, t)) \longrightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty, \text{ para todo } (x, t) \in [\Omega \times (0, T)] \setminus Z_T.$$

Por outro lado, da continuidade da função f , segue que

$$f(u_k(x, t)) - f(u(x, t)) \longrightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty, \text{ para todo } (x, t) \in [\Omega \times (0, T)] \setminus Z_T.$$

Assim, (2.35) segue das últimas duas convergências.

Agora, do Lema de Lions, segue que

$$f_k(u_k) \rightharpoonup f(u) \text{ em } L^r(\Omega \times (0, T)), \quad \forall T > 0, \quad r \geq 1. \quad (2.37)$$

Por fim, uma vez que para todo $T > 0$, temos $\Omega \times (0, T)$ um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $(f_k(u_k)) \subset L^r(\Omega \times (0, T))$ uma sequência limitada e $f_k(u_k(x, t)) \longrightarrow f(u(x, t))$

q.s. em $\Omega \times (0, T)$, segue do Lema de Strauss que

$$f_k(u_k) \longrightarrow f(u) \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall T > 0, \quad 1 \leq q < r. \quad (2.38)$$

Mais ainda, como $(f_k(u_k))$ é limitada em $L^r(\Omega \times (0, T))$ para todo $r \geq 1$, obtemos que a convergência (2.38) é válida para todo $q \geq 1$.

Sejam agora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\theta \in C_0^\infty(0, T)$. Multiplicando (2.18)₁ por $\varphi\theta$ e integrando em $\Omega \times (0, T)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t^2 u_k \cdot \varphi \theta \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (-\Delta u_k) \varphi \theta \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega f_k(u_k) \varphi \theta \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(\partial_t u_k) \varphi \theta \, dx \, dt = 0, \end{aligned}$$

em que, utilizando a Fórmula de Green e a derivada distribucional, obtemos

$$\begin{aligned} - \int_0^T \theta' \int_\Omega \partial_t u_k \cdot \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega \nabla u_k \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega f_k(u_k) \varphi \, dx \, dt \\ + \int_0^T \theta \int_\Omega a(x) g(\partial_t u_k) \varphi \, dx \, dt = 0. \end{aligned}$$

Passando o limite na equação acima, tendo em vista (2.30), (2.31), (2.32) e (2.37), resulta em

$$\begin{aligned} - \int_0^T \theta' \int_\Omega \partial_t u \cdot \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega f(u) \varphi \, dx \, dt \\ + \int_0^T \theta \int_\Omega g^* \varphi \, dx \, dt = 0, \end{aligned}$$

e utilizando novamente a Fórmula de Green e a derivada distribucional, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t^2 u \cdot \varphi \theta \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (-\Delta u) \varphi \theta \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega f(u) \varphi \theta \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Omega g^* \varphi \theta \, dx \, dt = 0, \end{aligned}$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\theta \in C_0^\infty(0, T)$.

Assim

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) + g^* = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)).$$

Como $g^* \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $\Delta u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ e $f(u) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, segue que

$$\partial_t^2 u = \Delta u - f(u) - g^* \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.39)$$

Aplicando o Lema 1.46 (Lions–Magenes) e a Proposição 1.47 (Lions), deduzimos que

$$u \in C_w(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e } \partial_t u \in C_w(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.40)$$

Nesta perspectiva, uma vez que a regularidade obtida em (2.40) é satisfeita, podemos avaliar u e $\partial_t u$ em $t = 0$, garantindo que $(u(0), \partial_t u(0)) \in \mathcal{H}$.

Neste sentido, iremos recuperar a regularidade temporal, ou seja, devemos mostrar que a solução do problema (2.1) está na classe

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t^2 u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \forall T > 0,$$

satisfazendo

$$(u_k, \partial_t u_k) \longrightarrow (u, \partial_t u) \text{ em } C([0, T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0,$$

e ainda

$$g^* = a(x)g(\partial_t u).$$

Como u_m e u_n satisfazem (2.18), para m e n , respectivamente, com $m, n \in \mathbb{N}$, definindo $z_{m,n} = u_m - u_n$, de (2.18), temos que $z_{m,n}$ satisfaz para cada $T > 0$,

$$\begin{cases} \partial_t^2 z_{m,n} - \Delta z_{m,n} + [f_m(u_m) - f_n(u_n)] + a(x)[g(\partial_t u_m) - g(\partial_t u_n)] = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ z_{m,n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ z_{m,n}(x, 0) = u_{0m}(x) - u_{0n}(x) & \text{em } \Omega \\ \partial_t z_{m,n}(x, 0) = u_{1m}(x) - u_{1n}(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.41)$$

Multiplicando (2.41)₁ por $\partial_t z_{m,n}(t)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\partial_t z_{m,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z_{m,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ + \int_{\Omega} a(x) [g(\partial_t u_m(t)) - g(\partial_t u_n(t))] [\partial_t u_m(t) - \partial_t u_n(t)] dx \\ = - \int_{\Omega} [f_m(u_m(t)) - f_n(u_n(t))] [\partial_t u_m(t) - \partial_t u_n(t)] dx. \end{aligned}$$

Agora, integrando de 0 à $t \in [0, T]$, com $T > 0$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|\partial_t z_{m,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z_{m,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ + \int_0^t \int_{\Omega} a(x) [g(\partial_t u_m(s)) - g(\partial_t u_n(s))] [\partial_t u_m(s) - \partial_t u_n(s)] dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \left[\|u_{1m} - u_{1n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0m} - \nabla u_{0n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ + \left| \int_0^t \int_{\Omega} [f_m(u_m(s)) - f_n(u_n(s))] [\partial_t z_{m,n}(s)] dx ds \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left[\|u_{1m} - u_{1n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0m} - \nabla u_{0n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ + \left| \int_0^t \|f_m(u_m(s)) - f_n(u_n(s))\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t z_{m,n}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right|. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Uma vez que $[g(s_1) - g(s_2)](s_1 - s_2) \geq 0$, para cada $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ (segue de g ser monótona crescente), a função $a(\cdot)$ ser não negativa e utilizando as convergências (2.17), (2.31) e (2.38), obtemos a convergência a zero quando $m, n \rightarrow \infty$ dos termos do lado direito da desigualdade (2.42), i.e., $(u_k, \partial_t u_k) \in C([0, T]; \mathcal{H})$ é uma sequência de Cauchy, logo $(u, \partial_t u) \in C([0, T]; \mathcal{H})$ e

$$u_k \longrightarrow u \text{ em } C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0. \tag{2.43}$$

Além disso, de (2.42), temos que

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [g(\partial_t u_m(t)) - g(\partial_t u_n(t))] [\partial_t u_m(t) - \partial_t u_n(t)] dx dt = 0, \quad \forall T > 0.$$

Por fim, de (2.43), segue que $\partial_t u_k(x, t) \longrightarrow \partial_t u(x, t)$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$. Sendo a função g contínua, temos que $a(x)g(\partial_t u_k(x, t)) \longrightarrow a(x)g(\partial_t u(x, t))$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$.

Uma vez que $(a(x)g(\partial_t u_k(x, t)))_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\Omega \times (0, T))$, para cada $T > 0$, pelo Lema de Strauss, segue que

$$a(x)g(\partial_t u_k) \rightharpoonup a(x)g(\partial_t u) \text{ em } L^2(\Omega \times (0, T)), \quad \forall T > 0. \quad (2.44)$$

Assim, de (2.32), (2.44) e da unicidade do limite fraco, segue que $g^* = a(x)g(\partial_t u)$.

Com relação aos dados iniciais, devemos mostrar que $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1)$ em \mathcal{H} . Com efeito, consideramos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0, T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Das convergências (2.30) e (2.31) e utilizando o Lema 1.45, segue que

$$-\int_0^T \theta'(t) (u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \longrightarrow -\int_0^T \theta'(t) (u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt, \quad (2.45)$$

$$-\int_0^T \theta(t) (\partial_t u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \longrightarrow -\int_0^T \theta(t) (\partial_t u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt. \quad (2.46)$$

Nesta perspectiva, utilizando a integração por partes no termo sequencial de (2.46), temos

$$\begin{aligned} (u_k(0), \varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \theta'(t) (u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt &= -\int_0^T \theta(t) (\partial_t u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ &\longrightarrow -\int_0^T \theta(t) (\partial_t u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ &= (u(0), \varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \theta'(t) (u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Assim, das convergências (2.45) e (2.47), temos

$$\begin{aligned} (u_k(0), \varphi)_{L^2(\Omega)} &= \left[(u_k(0), \varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \theta'(t) (u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \right] - \int_0^T \theta'(t) (u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ &\longrightarrow \left[(u(0), \varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \theta'(t) (u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \right] - \int_0^T \theta'(t) (u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ &= (u(0), \varphi)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Por densidade, segue que

$$\langle \psi, u_k(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \langle \psi, u(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \psi \in H^{-1}(\Omega),$$

e, portanto, $u_k(0) \rightharpoonup u(0)$ em $H_0^1(\Omega)$. Contudo, de (2.17), sabemos que $u_k(0) = u_{0k} \longrightarrow u_0$

em $H_0^1(\Omega)$. Da unicidade do limite fraco, segue que $u(0) = u_0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Agora, multiplicando (2.18)₁ por $\varphi\theta$ e integrando em $\Omega \times (0, T)$, temos

$$\int_0^T \theta(t) (\partial_t^2 u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (-\Delta u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (f_k(u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ + \int_0^T \theta(t) (a(\cdot)g(\partial_t u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = 0,$$

em que, utilizando a integração por partes no primeiro termo, obtemos

$$\int_0^T \theta'(t) (\partial_t u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (-\Delta u_k(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (f_k(u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ + \int_0^T \theta(t) (a(\cdot)g(\partial_t u_k(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = (\partial_t u_k(0), \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Por processos análogos aos que realizamos anteriormente, podemos passar o limite quando $k \rightarrow \infty$ na equação acima, em que obtemos

$$\int_0^T \theta'(t) (\partial_t u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (-\Delta u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (f(u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ + \int_0^T \theta(t) (a(\cdot)g(\partial_t u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = (u_1, \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Utilizando novamente a integração por partes no primeiro termo da equação acima, obtemos

$$\int_0^T \theta(t) (\partial_t^2 u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (-\Delta u(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta(t) (f(u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt \\ + \int_0^T \theta(t) (a(\cdot)g(\partial_t u(t)), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = (u_1, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\partial_t u(0), \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, $(u_1, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\partial_t u(0), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0$, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Por densidade, segue que $(u_1, \psi)_{L^2(\Omega)} = (\partial_t u(0), \psi)_{L^2(\Omega)}$, para cada $\psi \in L^2(\Omega)$ e, portanto, $\partial_t u(0) = u_1$ em $L^2(\Omega)$, como queríamos.

Portanto, passando o limite em (2.18), para cada $T > 0$ concluímos que

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times [0, T], \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Provemos a unicidade de solução para o problema (2.1). Com efeito, suponhamos que $u, v \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ sejam soluções fracas de (2.1) e façamos $w = u - v$. Assim, para cada $T > 0$, w satisfaz

$$\partial_t^2 w - \Delta w + [f(u) - f(v)] + a(x)[g(\partial_t u) - g(\partial_t v)] = 0 \quad (2.48)$$

em $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, com dados iniciais

$$w(0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_t w(0) = 0.$$

Notamos que não faz sentido compormos $\partial_t^2 w(t)$ com $\partial_t w(t)$ na dualidade de $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, visto que $\partial_t w(t) \in L^2(\Omega)$, para todo $t \in [0, T]$. Com isso, o método da energia não é o mais adequado para prosseguirmos. Para contornarmos esta situação, vamos obter a unicidade da solução via método de Visik–Ladyzhenskaya (ver [47] e [64]). Com efeito, dado $s \in [0, T]$, definimos a seguinte função auxiliar:

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\tau) d\tau, & \text{se } 0 \leq t < s, \\ 0, & \text{se } s \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.49)$$

cuja derivada no sentido distribucional a valores vetoriais é dada por

$$\partial_t \psi(t) = \begin{cases} w(t), & \text{se } 0 \leq t < s, \\ 0, & \text{se } s \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.50)$$

Definindo $\phi(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$, segue de (2.51) que

$$\begin{cases} \psi(t) = \phi(t) - \phi(s), & \forall t \in [0, s], \\ \psi(s) = 0, \psi(0) = -\phi(s). \end{cases}$$

Com isso, juntamente com a regularidade de w , obtemos que

$$\psi, \partial_t \psi \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)).$$

Agora podemos compor (2.48) com ψ na dualidade de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e, uma vez que $\psi \equiv 0$ em $[s, T]$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^s \langle \partial_t^2 w(t), \psi(t) \rangle dt - \int_0^s \langle \Delta w(t), \psi(t) \rangle dt \\ = - \int_0^s \langle f(u(t)) - f(v(t)), \psi(t) \rangle dt - \int_0^s \langle a(x) [g(\partial_t u(t)) - g(\partial_t v(t))], \psi(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Integrando o primeiro termo de (2.51) por partes, temos

$$\int_0^s \langle \partial_t^2 w(t), \psi(t) \rangle dt = \underbrace{\langle \partial_t w(s), \psi(s) \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \partial_t w(0), \psi(0) \rangle}_{=0} - \int_0^s \langle \partial_t w(t), \partial_t \psi(t) \rangle dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^s \langle \partial_t^2 w(t), \psi(t) \rangle dt &= - \int_0^s \langle \partial_t w(t), w(t) \rangle dt = - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \frac{1}{2} (\underbrace{\|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2}_{=0} - \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) = - \frac{1}{2} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_0^s \langle -\Delta w(t), \psi(t) \rangle dt &= \int_0^s (\nabla w(t), \nabla \psi(t)) dt \stackrel{(2.50)}{=} \int_0^s (\nabla \partial_t \psi(t), \nabla \psi(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = \frac{1}{2} (\underbrace{\|\psi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2}_{=0} - \|\psi(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \\ &= - \frac{1}{2} \|\psi(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = - \frac{1}{2} \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo (2.52) e (2.53) em (2.51), temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right] \\ &= \underbrace{\int_0^s \langle f(u(t)) - f(v(t)), \psi(t) \rangle dt}_{=: I_f} + \underbrace{\int_0^s \langle a(x) [g(\partial_t u(t)) - g(\partial_t v(t))], \psi(t) \rangle dt}_{=: I_g}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

- Utilizando a estimativa (2.6) e as Desigualdades de Trudinger–Moser e Hölder para I_f , temos

$$\begin{aligned} I_f &= \int_0^s \langle f(u(t)) - f(v(t)), \psi(t) \rangle dt \leq \int_0^s \int_{\Omega} |f(u(x,t)) - f(v(x,t))| |\psi(x,t)| dx dt \\ &\leq C \int_0^s \int_{\Omega} |w(x,t)| |\psi(x,t)| \left(e^{\beta|u(x,t)|^2} + e^{\beta|v(x,t)|^2} \right) dx dt \\ &= C \left[\int_0^s \int_{\Omega} |w(x,t)| |\psi(x,t)| e^{\beta|u(x,t)|^2} dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \int_{\Omega} |w(x,t)| |\psi(x,t)| e^{\beta|v(x,t)|^2} dx dt \right] \\ &\lesssim \int_0^s \int_{\Omega} |w(x,t)| |\psi(x,t)| dx dt \leq \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} dx dt \\ &\lesssim \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\psi(t)\|_{H_0^1(\Omega)} dx dt. \end{aligned} \quad (2.55)$$

- Vamos mostrar que $I_g \leq 0$. Para isso, consideramos

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{(x,t) \in \Omega \times [0,s] / \partial_t u(x,t) \geq \partial_t v(x,t)\}, \\ \Lambda_2 &= (\Omega \times [0,s]) \setminus \Lambda_1. \end{aligned}$$

Assim,

- (i) $\partial_t w(x,t) \geq 0$ em Λ_1 . Então, w é não-decrescente na variável t em Λ_1 com $w(x,0) = 0$. Logo, $w(x,t) \geq w(x,0) = 0$ em Λ_1 . Agora, uma vez que w é contínua em $[t,s] \subset [0,T]$, do Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $t_0 \in [t,s]$ tal que

$$\psi(x,t) = - \int_t^s w(x,\tau) d\tau = -w(x,t_0)(s-t) = \underbrace{w(x,t_0)}_{\geq 0, \text{ em } \Lambda_1} (t-s) \leq 0.$$

Disto, temos que $\psi(x, t) \leq 0$ em Λ_1 .

(ii) $\partial_t w(x, t) < 0$ em Λ_2 . Então, w é decrescente na variável t em Λ_2 com $w(x, 0) = 0$. Logo, $w(x, t) < w(x, 0) = 0$ em Λ_2 . Por argumentação análoga, deve existir $t_1 \in [t, s]$ tal que

$$\psi(x, t) = - \int_t^s w(x, \tau) d\tau = -w(x, t_1)(s - t) = \underbrace{w(x, t_1)}_{< 0, \text{ em } \Lambda_2} (t - s) \geq 0.$$

Disto, temos que $\psi(x, t) > 0$ em Λ_2 .

Como g é monótona crescente, de (i) e (ii), concluimos que

$$\begin{cases} \partial_t w(x, t) \geq 0 \Rightarrow g(\partial_t u(x, t)) \geq g(\partial_t v(x, t)) \text{ e } \psi(x, t) \leq 0, \\ \partial_t w(x, t) < 0 \Rightarrow g(\partial_t u(x, t)) < g(\partial_t v(x, t)) \text{ e } \psi(x, t) \geq 0. \end{cases}$$

Uma vez que $\Omega \times [0, s) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, temos

$$[g(\partial_t u(x, t)) - g(\partial_t v(x, t))] \psi(x, t) \leq 0 \text{ em } \Omega \times [0, s),$$

e, portanto, como $a(\cdot)$ é uma função não-negativa, temos

$$I_g = \int_0^s \int_{\Omega} a(x) [g(\partial_t u(x, t)) - g(\partial_t v(x, t))] \psi(x, t) dx dt \leq 0. \quad (2.56)$$

Utilizando (2.55) e (2.56) em (2.54), obtemos

$$\frac{1}{2} \left[\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right] \lesssim \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\psi(t)\|_{H_0^1(\Omega)} dt,$$

mas como $\psi(t) = \phi(t) - \phi(s)$, para cada $t \in [0, s]$, temos

$$\frac{1}{2} \left[\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right] \leq C \left[\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi(t)\|_{H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)} dt \right].$$

• Da Desigualdade de Young, temos

$$\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi(t)\|_{H_0^1(\Omega)} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^s \|\phi(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt.$$

- Da Desigualdade de Young com peso $\varepsilon = (2Cs)^{1/2} > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)} dt &= \int_0^s \varepsilon \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\varepsilon} \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^s \varepsilon^2 \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{1}{\varepsilon^2} \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\
&= Cs \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{4Cs} \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 s \\
&\leq CT \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{4C} \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Das desigualdades acima, obtemos

$$\frac{1}{4} \left[\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right] \leq CT \int_0^s \left[\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right] dt,$$

com $C_T > 0$ e $s \in (0, T]$. Pelo Lema de Gronwall aplicado a desigualdade acima, temos que

$$\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0, \quad \forall s \in (0, T].$$

Assim, $\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$, para $s \in (0, T]$ e como $w(0) = 0$, obtemos $w(s) = 0$ em $L^2(\Omega)$, para $s \in [0, T]$. Disto, $u = v$ em $C([0, T]; L^2(\Omega))$ e, conseqüentemente, $u = v$ em $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$.

Por fim, para mostrar que o funcional de energia do problema truncado converge para o funcional de energia do problema original, resta-nos provar que para cada $t_0 \in [0, T]$,

$$F_k(u_k(\cdot, t_0)) \longrightarrow F(u(\cdot, t_0)) \text{ em } L^r(\Omega), \quad \forall r \geq 1. \quad (2.57)$$

Com efeito, seja $t_0 \in [0, T]$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |F_k(u_k(x, t_0))|^r dx &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\varepsilon}{2} |u_k(x, t_0)|^2 + C_{\beta, \varepsilon, p} |u_k(x, t_0)|^p e^{\beta[u_k(x, t_0)]^2} \right|^r dx \\
&\leq 2^r \left[\frac{\varepsilon^r}{2^r} \int_{\Omega} |u_k(x, t_0)|^{2r} dx + C_{\beta, \varepsilon, p}^r \int_{\Omega} |u_k(x, t_0)|^{rp} e^{r\beta[u_k(x, t_0)]^2} dx \right] \\
&\leq 2^r \left[\frac{\varepsilon^r}{2^r} \|u_k(\cdot, t_0)\|_{L^r(\Omega)}^{2r} \right. \\
&\quad \left. + C_{\beta, \varepsilon, p}^r \left(\int_{\Omega} |u_k(x, t_0)|^{2rp} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} e^{2r\beta[u_k(x, t_0)]^2} dx \right)^{1/2} \right].
\end{aligned}$$

Como $u_k \rightarrow u$ em $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, temos $u_k(\cdot, t_0) \rightarrow u(\cdot, t_0)$ em $H_0^1(\Omega)$ e assim, $\|u_k(\cdot, t_0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \widehat{R}$. Tomando $\beta < \frac{2\pi}{r\widehat{R}^2}$, podemos utilizar a Desigualdade de Trudinger–Moser e assim, podemos estimar a última integral acima. Além disso, uma vez que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$, temos então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F_k(u_k(x, t_0))|^r dx &\leq 2^r \left[\frac{\varepsilon^r}{2^r} K_0 \|\nabla u_k(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^{2r} + C_{\beta, \varepsilon, p}^r L^{1/2} \|u_k(\cdot, t_0)\|_{L^{2rp}(\Omega)}^{rp} \right] \\ &\leq 2^r \left[\frac{\varepsilon^r}{2^r} K_0 \|\nabla u_k(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^{2r} + C_{\beta, \varepsilon, p}^r L^{1/2} K_1 \|\nabla u_k(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^{rp} \right] \\ &\leq 2^r \left[\frac{\varepsilon^r}{2^r} K_0 [2E_{u_k}(0)]^r + C_{\beta, \varepsilon, p}^r L^{1/2} K_1 [2E_{u_k}(0)]^{\frac{rp}{2}} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $(F(u_k(\cdot, t_0)))_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^r(\Omega)$, para cada $r \geq 1$. Disto, segue que

$$F_k(u_k(\cdot, t_0)) \rightharpoonup \mathcal{F}^* \text{ em } L^r(\Omega), \quad r \geq 1.$$

Afirmamos que $\mathcal{F}^* = F(u(\cdot, t_0))$. De fato, como (2.43), segue que $u_k(\cdot, t_0) \rightarrow u(\cdot, t_0)$ em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$. Logo,

$$u_k(x, t_0) \longrightarrow u(x, t_0) \text{ q.s. em } \Omega, \quad (2.58)$$

Note que

$$|F_k(u_k(x, t_0)) - F(u(x, t_0))| \leq |F_k(u_k(x, t_0)) - F(u_k(x, t_0))| + |F(u_k(x, t_0)) - F(u(x, t_0))|. \quad (2.59)$$

De (2.58) e da continuidade da função F , temos

$$F(u_k(x, t_0)) \longrightarrow F(u(x, t_0)) \text{ q.s. em } \Omega. \quad (2.60)$$

Para provarmos que

$$F_k(u_k(x, t_0)) \longrightarrow F(u(x, t_0)) \text{ q.s. em } \Omega, \quad (2.61)$$

resta-nos mostrar que

$$F_k(u_k(x, t_0)) \longrightarrow F_k(u(x, t_0)) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Com efeito, de (2.36), existe $L = L(x, t) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |F_k(u_k(x, t_0)) - F(u_k(x, t_0))| &= \left| \int_0^{u_k(x, t_0)} f_k(s) \, ds - \int_0^{u_k(x, t_0)} f(s) \, ds \right| \\ &\leq \int_{-L}^L |f_k(s) - f(s)| \, ds = 0, \text{ se } k \geq L. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Combinando (2.59), (2.60) e (2.62), obtemos (2.61) que nos permite, através do Lema de Strauss, obter

$$F_k(u_k(\cdot, t_0)) \rightharpoonup F(u(\cdot, t_0)) \text{ em } L^r(\Omega).$$

Da unicidade do limite fraco, segue que $F(u(\cdot, t_0)) = \mathcal{F}^*$. Ainda do Lema de Strauss, se $1 \leq q < r$, temos

$$F_k(u_k(\cdot, t_0)) \longrightarrow F(u(\cdot, t_0)) \text{ em } L^q(\Omega).$$

Mais ainda, como $r > 1$ é arbitrário, segue que a convergência forte acima é válida para todo $q \geq 1$.

Portanto, passando o limite no funcional de energia associado ao problema truncado (2.18), obtemos o funcional de energia para o problema original (2.1), dado por

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \int_{\Omega} F(u(t)) \, dx,$$

e ainda, obtemos também a identidade de energia dada por

$$E_u(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u(t))\partial_t u(t) \, dx \, dt = E_u(t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 < T_{\max}.$$

Assim, de $E_u(t) \leq E_u(0) < \infty$, para cada $t \in [0, T_{\max})$, uma vez que $E_u(0)$ é independente de t , segue que a solução não sofre blow-up em tempo finito, ou seja, no Teorema 2.9, temos que $T_{\max} = \infty$. Nesta perspectiva, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 2.14 (Global no tempo). Assumindo as Suposições 2.1, 2.4, 2.5 e 2.6, então

dados $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, o problema (2.1) possui uma única solução global na classe

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t^2 u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

Além disso, a identidade de energia é verificada

$$E_u(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u(x, t))\partial_t u(x, t) \, dx \, dt = E_u(t_1),$$

com

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \int_{\Omega} F(u(x, t)) \, dx.$$

2.1.2 Decaimento Uniforme da Energia

Com o objetivo de apresentarmos o resultado de decaimento uniforme da energia dado no Teorema 2.19, à luz de Lasiecka e Tataru [44], mostraremos que o decaimento da energia é estabelecido através da solução de uma equação diferencial ordinária não linear. Nesse sentido, uma vez que o problema possui um amortecimento localizado, dois ingredientes são necessários: um Princípio de Continuação Única (dado pela Suposição 2.7) e uma Desigualdade de Observabilidade. Para obter a Desigualdade de Observabilidade para o problema (2.1) dado no Lema 2.18, é necessário que uma versão da mesma seja obtida para o problema truncado (Lema 2.15), que via densidade, nos fornece o desejado.

2.1.2.1 Desigualdade de Observabilidade para o problema truncado

O objetivo desta etapa é apresentar a Desigualdade de Observabilidade para o problema truncado (2.18), para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado (suficientemente grande) e $T \geq T_0$, com T_0 sendo a constante de observabilidade o qual é independente de k , ou ainda, o tempo $T_0 > 0$ é uma constante tal que, toda geodésica da métrica $G = I$ viajando com velocidade constante igual a 1 e com início em $t = 0$, entra na região ω (vizinhança da fronteira $\partial\Omega$ inteira) em um tempo $t < T_0$, uma vez que as geodésicas de Ω são linhas retas que necessariamente tocam a fronteira $\partial\Omega$ e são refletidas de acordo com as leis da ótica geométrica.

Primeiramente, observamos que o dado inicial $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ do problema original (2.1) pode ser nulo ou não nulo.

No primeiro caso, quando $(u_0, u_1) = (0, 0)$, observamos de (2.17), que podemos considerar $(u_{0k}, u_{1k}) = (0, 0)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, e a correspondente solução de (2.18) deve ser $u_k \equiv 0$. Então, a Desigualdade de Observabilidade dada em (2.64) abaixo, é trivialmente satisfeita para qualquer escolha de $C > 0$.

No segundo caso, existem constantes $r, R > 0$ tais que $r < E_u(0) < R$. Além disso, da convergência dos dados iniciais dado em (2.17), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, (u_{0k}, u_{1k}) satisfaz

$$r < E_{u_k}(0) < R. \quad (2.63)$$

Nosso objetivo é provar que a Desigualdade de Observabilidade para o problema truncado é verdadeira. Posteriormente, iremos mostrar que se escolhermos uma sequência de dados aproximados (u_{0k}, u_{1k}) que satisfaça (2.17), bem como (2.63), então a constante da Desigualdade de Observabilidade para soluções aproximadas pode ser tomada independentemente de k .

Lema 2.15 (Desigualdade de Observabilidade - Truncado). Sejam $r, R > 0$, $T \geq T_0$ e $k \geq 1$. Sob as hipóteses do Teorema 2.14 e admitindo a Suposição 2.7, existe $C = C(k, r, R, T) > 0$ tal que a correspondente solução u_k de (2.18) com $(u_{0k}, u_{1k}) \in D(\mathcal{A})$ distante da origem (i.e., verificando (2.63)) satisfaz a Desigualdade de Observabilidade

$$E_{u_k}(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k(x, t)|^2 + |g(\partial_t u_k(x, t))|^2] dx dt. \quad (2.64)$$

Além disso, se $(u_{0k}, u_{1k}) \rightarrow (u_0, u_1)$ em \mathcal{H} tal que $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ e $r < E_u(0) < R$, então existe $T^* \geq T_0$ tal que C pode ser escolhido independente de k , sempre que $T \geq T^*$.

Demonstração. Realizaremos a prova deste lema através de um argumento de contradição. Supondo que o Lema 2.15 seja falso, então para toda constante $C > 0$, existem dados iniciais $(u_{0k}^C, u_{1k}^C) \in D(\mathcal{A})$ verificando (2.63) cuja correspondente solução u_k^C viola (2.64).

Em particular, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente, obtemos a existência de dados iniciais (u_{0k}^m, u_{1k}^m) verificando (2.63) e cuja correspondente solução u_k^m satisfaz a Desigualdade de Observabilidade Inversa

$$E_{u_k^m}(0) > m \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2] dx dt.$$

Então, obtemos uma sequência $(u_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$ de soluções de (2.18) tal que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2] dx dt}{E_{u_k^m}(0)} = 0. \quad (2.65)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} E_{u_k^m}(0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u_k^m(x, 0)|^2 + |\nabla u_k^m(x, 0)|^2 dx + \int_{\Omega} F_k(u_k^m(x, 0)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{1k}^m|^2 + |\nabla u_{0k}^m|^2 dx + \int_{\Omega} F_k(u_{0k}^m) dx \\ &\stackrel{(2.25)}{\leq} \frac{1}{2} \left[\|u_{1k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \|\nabla u_{0k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta, \varepsilon, p} L^{1/2} K_0 \|\nabla u_{0k}^m\|_{L^2(\Omega)}^p \\ &\stackrel{(2.63)}{\lesssim} R, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Assim, de (2.65), temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2] dx dt = 0. \quad (2.67)$$

Além disso, do funcional de energia do problema truncado e de (2.66), segue que existe uma subsequência (a qual continuaremos denotando por $(u_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$) tal que

$$u_k^m \xrightarrow{*} u_k \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.68)$$

$$\partial_t u_k^m \xrightarrow{*} \partial_t u_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.69)$$

$$u_k^m \rightarrow u_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall q \geq 2, \quad (2.70)$$

em que (2.70) ocorre por $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, para todo $q \geq 2$ e pelo Teorema de Compacidade de Aubin-Lions-Simon.

Agora, dividimos a prova em dois casos: $u_k \neq 0$ e $u_k = 0$.

Caso 1: $u_k \neq 0$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, u_k^m é solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k^m - \Delta u_k^m + f_k(u_k^m) + a(x)g(\partial_t u_k^m) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_k^m(x, 0) = u_{0k}^m(x) & \text{em } \Omega \\ \partial_t u_k^m(x, 0) = u_{1k}^m(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.71)$$

Multiplicando (2.71)₁ por $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando em $\Omega \times (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t^2 u_k^m \cdot \varphi \theta \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (-\Delta u_k^m) \varphi \theta \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} f_k(u_k^m) \varphi \theta \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k^m) \varphi \theta \, dx \, dt = 0. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^T \theta \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k^m) \varphi \, dx \, dt \\ \leq \int_0^T \theta \left[\int_{\Omega} (a(x)g(\partial_t u_k^m))^2 \, dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} \varphi^2 \, dx \right]^{1/2} \, dt \\ \leq M^{1/2} \text{med}(\Omega)^{1/2} \int_0^T \theta \left[\int_{\Omega} (a(x)g(\partial_t u_k^m))^2 \, dx \right]^{1/2} \, dt \\ \leq M^{1/2} \text{med}(\Omega)^{1/2} \underbrace{\left[\int_0^T \theta^2 \, dt \right]^{1/2}}_{< \infty} \left[\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g(\partial_t u_k^m))^2 \, dx \, dt \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.72)$$

o qual vai à 0 por (2.67) quando $m \rightarrow \infty$, em que $M = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi|^2$.

Logo, das convergências (2.68), (2.69) e (2.70), de (2.72) e utilizando argumentos similares à obtenção de (2.39), fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\partial_t^2 u_k - \Delta u_k + f_k(u_k) = 0 \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.73)$$

Assim, fazendo $m \rightarrow \infty$ no problema truncado, obtemos na situação limite

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k + f_k(u_k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ \partial_t u_k = 0 & \text{q.s. em } \omega. \end{cases} \quad (2.74)$$

Derivando (2.74)₁ e (2.74)₂ na variável temporal no sentido distribucional e denotando $w_k = \partial_t u_k$, temos o seguinte problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 w_k - \Delta w_k + f'_k(u_k)w_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ w_k = 0 & \text{q.s. em } \omega. \end{cases} \quad (2.75)$$

Uma vez que $f'_k(u_k) \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$, para todo $k \in \mathbb{N}$, deduzimos da Suposição 2.7 que $w_k \equiv 0$, ou seja, $\partial_t u_k \equiv 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Contudo, de (2.73), concluímos que

$$-\Delta u_k(t) + f_k(u_k(t)) = 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega) \text{ q.s. em } (0, T). \quad (2.76)$$

Uma vez que $u_k \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, podemos fazer a dualidade de (2.76) em que $u_k(t) \in H_0^1(\Omega)$ q.s. em $(0, T)$, e já utilizando a relação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ dada em (1.3), temos

$$\int_{\Omega} (-\Delta u_k(t)) u_k(t) \, dx + \int_{\Omega} f_k(u_k(t)) u_k(t) \, dx = 0,$$

e utilizando a Fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_k(t) \nabla u_k(t) \, dx = - \int_{\Omega} f_k(u_k(t)) u_k(t) \, dx.$$

Por fim, da Condição de Ambrosetti–Rabinowitz, inferimos que

$$\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_{\Omega} f_k(u_k(t)) u_k(t) \, dx < - \int_{\Omega} \theta F(u_k(t)) \, dx < 0,$$

e da Desigualdade de Poincaré, temos $\lambda_1 \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < 0$, e assim, segue que $u_k \equiv 0$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$, o que contradiz que $u_k \neq 0$.

Caso 2: $\underline{u_k = 0}$

De (2.68), (2.69) e (2.70), agora temos

$$u_k^m \xrightarrow{*} 0 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.77)$$

$$\partial_t u_k^m \xrightarrow{*} 0 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.78)$$

$$u_k^m \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall q \geq 2. \quad (2.79)$$

Fazendo

$$\alpha_m = [E_{u_k^m}(0)]^{1/2} \text{ e } v_k^m = \frac{u_k^m}{\alpha_m}, \quad (2.80)$$

e multiplicando (2.67) por $\frac{1}{\alpha_m^2}$, obtemos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x) \left[|\partial_t v_k^m|^2 + \frac{1}{\alpha_m^2} |g(\partial_t u_k^m)|^2 \right] dx dt = 0. \quad (2.81)$$

Multiplicando o problema (2.71) por $\frac{1}{\alpha_m}$, temos que os elementos da sequência $(v_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$ dada em (2.80), são soluções (para os respectivos índices) da sequência de problemas normalizados

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k^m - \Delta v_k^m + \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) + \frac{1}{\alpha_m} a(x) g(\partial_t u_k^m) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ v_k^m(x, 0) = \frac{u_{0k}^m}{\alpha_m}(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t v_k^m(x, 0) = \frac{u_{1k}^m}{\alpha_m}(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.82)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_m} \int_\Omega f_k(u_k^m) \partial_t v_k^m dx &= \frac{1}{\alpha_m^2} \int_\Omega f_k(\alpha_m v_k^m) \partial_t(\alpha_m v_k^m) dx \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{d}{dt} \int_\Omega F_k(\alpha_m v_k^m) dx \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{d}{dt} \int_\Omega F_k(u_k^m) dx. \end{aligned}$$

Assim, o funcional de energia associado ao problema (2.82) é dado por

$$E_{v_k^m}(t) = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx. \quad (2.83)$$

Uma vez que a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz é satisfeita, temos $\frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \geq 0$, e assim, $E_{v_k^m}(t) \geq 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Além disso, notemos que

$$E_{v_k^m}(t) = \frac{1}{\alpha_m^2} \left[\frac{1}{2} \left[\|\partial_t u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_k^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \right] = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{u_k^m}(t), \quad \forall t \geq 0,$$

e então

$$E_{v_k^m}(0) = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{u_k^m}(0) = \frac{1}{E_{u_k^m}(0)} E_{u_k^m}(0) = 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.84)$$

Para obtermos a contradição necessária, mostraremos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_{v_k^m}(0) = 0. \quad (2.85)$$

Com efeito, de (2.83) e (2.84), existe uma subsequência de $(v_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$ (a qual continuaremos denotando por $(v_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$) tal que

$$v_k^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_k \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.86)$$

$$\partial_t v_k^m \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t v_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.87)$$

$$v_k^m \rightarrow v_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall q \geq 2, \quad (2.88)$$

com a convergência (2.88) sendo obtida pelo Teorema de Compacidade de Aubin-Lions-Simon.

Sendo $\alpha_m = [E_{u_k^m}(0)]^{1/2}$ e $E_{u_k^m}(0) \lesssim R$, temos que existe $\alpha \geq 0$ tal que, a menos de subsequência, $\alpha_m \rightarrow \alpha$.

Agora, consideramos outros dois casos: $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$.

Caso I: $\alpha > 0$

De (2.88), $L^\infty(0, T; L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^q(\Omega \times (0, T))$ e $\alpha_m \rightarrow \alpha$, temos

$$\alpha_m v_k^m \longrightarrow \alpha v_k \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2.$$

Por outro lado, de (2.70) temos

$$\alpha_m v_k^m = u_k^m \longrightarrow u_k \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2.$$

Logo, da unicidade do limite em $L^q(\Omega \times (0, T))$, temos $\alpha v_k = u_k \stackrel{\text{Caso } 2}{=} 0$. Disso, $v_k \equiv 0$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$ e assim, $E_{v_k^m}(0) \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$.

Caso II: $\alpha = 0$

Primeiramente, observamos que de $f_k(0) = 0$ e (2.20), temos

$$\frac{1}{\alpha_m^r} |f_k(u_k^m)|^r = \frac{1}{\alpha_m^r} |f_k(u_k^m) - f_k(0)|^r \leq C_k^r \frac{1}{\alpha_m^r} |u_k^m|^r = \frac{C_k^r}{\alpha_m^r} \alpha_m^r |v_k^m|^r = C_k^r |v_k^m|^r.$$

Assim,

$$\frac{1}{\alpha_m^r} \int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k^m)|^r dx dt \leq C_k^r \int_0^T \int_\Omega |v_k^m|^r dx dt. \quad (2.89)$$

Por outro lado, de (2.79), temos

$$\alpha_m v_k^m = u_k^m \longrightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall q \geq 2. \quad (2.90)$$

Mostremos que

$$\frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) \longrightarrow f'(0) v_k \stackrel{(2.3)}{=} 0 \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2. \quad (2.91)$$

Para isso, escrevemos

$$\frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - f'(0) v_k = \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) + \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) - f'(0) v_k.$$

Agora,

$$\frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \longrightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2. \quad (2.92)$$

De fato, seja

$$\Omega_m^t = \{x \in \Omega / |u_k^m(x, t)| > k \geq 1\}. \quad (2.93)$$

Assim, da definição da função truncamento f_k , temos $|f_k(\alpha_m v_k^m) - f(\alpha_m v_k^m)| = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_m^t$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right\|_{L^q(\Omega \times (0, T))}^q \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right|^q dx dt \\ &= \frac{1}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} |f_k(\alpha_m v_k^m) - f(\alpha_m v_k^m)|^q dx dt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} |f_k(\alpha_m v_k^m)|^q + |f(\alpha_m v_k^m)|^q dx dt \\ (2.4) \text{ e } (2.19) &\lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} |f(k)|^q + |f(-k)|^q \\ &\quad + \left[\varepsilon |\alpha_m v_k^m| + C_{\beta, \varepsilon, p} |\alpha_m v_k^m|^{p-1} e^{\beta(\alpha_m v_k^m)^2} \right]^q dx dt \\ (2.4) &\lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} \left| \varepsilon |k| + C_{\beta, \varepsilon, p} |k|^{p-1} e^{\beta k^2} \right|^q \\ &\quad + \varepsilon^q |\alpha_m v_k^m|^q + C_{\beta, \varepsilon, p}^q |\alpha_m v_k^m|^{q(p-1)} e^{\beta q (\alpha_m v_k^m)^2} dx dt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} \varepsilon^q |k|^q + C_{\beta, \varepsilon, p}^q |k|^{q(p-1)} e^{\beta q k^2} \\ &\quad + \varepsilon^q |\alpha_m v_k^m|^q + C_{\beta, \varepsilon, p}^q |\alpha_m v_k^m|^{q(p-1)} e^{\beta q (\alpha_m v_k^m)^2} dx dt \\ (2.93) &\lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} \varepsilon^q |\alpha_m v_k^m|^q dx dt \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} C_{\beta, \varepsilon, p}^q |\alpha_m v_k^m|^{q(p-1)} e^{\beta q (\alpha_m v_k^m)^2} dx dt \\ (\text{Des. de Hölder}) &\leq \frac{\varepsilon^q}{\alpha_m^q} \int_0^T \int_{\Omega_m^t} |\alpha_m v_k^m|^{2q(p-1)} dx dt \\ &\quad + \frac{C_{\beta, \varepsilon, p}^q}{\alpha_m^q} \int_0^T \left[\int_{\Omega_m^t} |\alpha_m v_k^m|^{2q(p-1)} dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega_m^t} e^{2\beta q (\alpha_m v_k^m)^2} dx \right]^{1/2} dt, \end{aligned}$$

em que na última desigualdade acima, foi utilizada a relação $2q(p-1) > q$. Uma vez que

(v_k^m) é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, segue que $(v_k^m(t))$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ q.s. em $(0, T)$, ou seja, $\|v_k^m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \widehat{R}$ q.s. em $(0, T)$ e ainda, de $\alpha_m \rightarrow 0$, segue que $|\alpha_m| \leq \widetilde{C}$. Assim, se $2\beta q \widetilde{C}^2 \widehat{R}^2 < 4\pi$, ou seja, $\beta < \frac{2\pi}{q \widetilde{C}^2 \widehat{R}^2}$, podemos utilizar a Desigualdade de Trudinger–Moser e com isso, a última integral acima é limitada. Logo,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right\|_{L^q(\Omega \times (0, T))}^q \\ & \lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \left[\varepsilon^q \|\alpha_m v_k^m\|_{L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t \times (0, T))}^{2q(p-1)} + C_{\beta, \varepsilon, p}^q L^{1/2} \int_0^T \|\alpha_m v_k^m\|_{L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t)}^{q(p-1)} dt \right] \\ & = \frac{1}{\alpha_m^q} \left[\varepsilon^q \|\alpha_m v_k^m\|_{L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t \times (0, T))}^{2q(p-1)} + C_{\beta, \varepsilon, p}^q L^{1/2} \|\alpha_m v_k^m\|_{L^{q(p-1)}(0, T; L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t))}^{q(p-1)} \right] \\ & \lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \left[\varepsilon^q \|\alpha_m v_k^m\|_{L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t \times (0, T))}^{2q(p-1)} + C_{\beta, \varepsilon, p}^q L^{1/2} \|\alpha_m v_k^m\|_{L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t \times (0, T))}^{q(p-1)} \right] \\ & \lesssim \frac{1}{\alpha_m^q} \left[\|\alpha_m v_k^m\|_{L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t \times (0, T))}^{2q(p-1)} + \|\alpha_m v_k^m\|_{L^{2q(p-1)}(\Omega_m^t \times (0, T))}^{q(p-1)} \right]. \end{aligned}$$

Então, da última desigualdade e de (2.88), temos

$$\left\| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right\|_{L^q(\Omega \times (0, T))} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

o que prova (2.92).

Por outro lado, como $f \in C^1(\mathbb{R})$, pela Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange, temos

$$f(s) = \underbrace{f(0)}_{=0} + R(s), \text{ com } R(s) = f'(\xi_0)s, \text{ para algum } \xi_0 \in (0, s), \text{ } s > 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) = \frac{R(\alpha_m v_k^m)}{\alpha_m} = f'(\xi_0^m) v_k^m, \text{ para algum } \xi_0^m \in (0, \alpha_m v_k^m).$$

Uma vez que a convergência (2.90) ocorre, $\alpha_m v_k^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$ e assim $|\xi_0^m| < |\alpha_m v_k^m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$. Daí,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right\|_{L^q(\Omega \times (0, T))}^q \stackrel{(2.3)}{=} \left\| \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) - f'(0)v_k \right\|_{L^q(\Omega \times (0, T))}^q = \|f'(\xi_0^m)v_k^m\|_{L^q(\Omega \times (0, T))}^q \\ & = |f'(\xi_0^m)|^q \|v_k^m\|_{L^q(\Omega \times (0, T))}^q \leq C_1 |f'(\xi_0^m)|^q \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pois (v_k^m) é limitado em $L^\infty(0, T; L^q(\Omega))$, para todo $q \geq 2$, f' é contínua, $\xi_0^m \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$ e $f'(0) = 0$. Disto,

$$\frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) - f'(0)v_k \longrightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall q \geq 2. \quad (2.94)$$

Portanto, de (2.92) e (2.94), temos que (2.91) ocorre.

Por fim, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.82), observando as convergências (2.81), (2.86), (2.87), (2.88) e (2.91) e do item ii) da Suposição 2.1, temos na situação limite

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k - \Delta v_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ \partial_t v_k = 0 & \text{q.s. em } \omega. \end{cases} \quad (2.95)$$

Derivando (2.95)₁ e (2.95)₂ na variável temporal no sentido distribucional e denotando $w_k = \partial_t v_k$, temos o seguinte problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 w_k - \Delta w_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ w_k = 0 & \text{q.s. em } \omega, \end{cases}$$

o qual, como o feito após (2.75) (repassando pela Suposição 2.7), temos $w_k \equiv 0$, ou seja, $\partial_t v_k \equiv 0$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$.

Observamos que no problema (2.95), a equação se verifica em $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Logo,

$$-\Delta v_k(t) = 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega), \quad \text{q.s. em } (0, T). \quad (2.96)$$

Uma vez que $v_k \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, podemos fazer a dualidade de (2.96) com $v_k(t) \in H_0^1(\Omega)$ q.s. em $(0, T)$, e já utilizando a relação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ dada em (1.3), temos da Fórmula de Green e da Desigualdade de Poincaré, que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta v_k(t)) v_k(t) \, dx = 0 &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla v_k(t) \nabla v_k(t) \, dx = 0 \\ &\Rightarrow \|\nabla v_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \|v_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Assim, $v_k \equiv 0$ em $\Omega \times (0, T)$.

Por fim, de (2.88), temos $v_k^m \rightarrow 0$ em $L^\infty(0, T; L^q(\Omega))$, quando $m \rightarrow \infty$, para todo $q \geq 2$ e de (2.89), segue que

$$\frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) \rightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow L^2(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2. \quad (2.97)$$

Notemos que da convergência (2.81) e da hipótese de $a(x) \geq a_0 > 0$ sobre ω , obtemos

$$\partial_t v_k^m \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\omega \times (0, T)).$$

Consideramos agora, $\square = \partial_t^2 - \Delta$ o operador de D'Alembert. De (2.82)₁, temos

$$\square v_k^m = -\frac{1}{\alpha_m} f_k(v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} a(x) g(\partial_t u_k^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^2(\Omega \times (0, T))$$

e deduzimos, independente de $\alpha > 0$ ou $\alpha = 0$ (tendo em vista (2.81), (2.97) e $v_k = 0$), que

$$\partial_t \left(-\frac{1}{\alpha_m} f_k(v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} a(x) g(\partial_t u_k^m) \right) = \partial_t \square v_k^m = \square (\partial_t v_k^m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)). \quad (2.98)$$

De fato, para tal, tome $w \in H_0^1(\Omega \times (0, T))$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \langle \partial_t \square v_k^m, w \rangle_{H^{-1}(\Omega \times (0, T)), H_0^1(\Omega \times (0, T))} \right| &= \left| \langle \square v_k^m, \partial_t w \rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \right| \\ &\leq \| \square v_k^m \|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \| \partial_t w \|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \| \square v_k^m \|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \| w \|_{H_0^1(0, T; H_0^1(\Omega))}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

em que a última desigualdade utilizamos que

$$\|w\|_{H_0^1(0, T; H_0^1(\Omega))} = \|w\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t w\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}.$$

Assim, combinando (2.99) com $\square v_k^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ em $L^2(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega \times (0, T))$,

deduzimos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\partial_t \square v_k^m\|_{H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Omega))} = 0. \quad (2.100)$$

Por outro lado, como $H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T))$ representa o dual topológico de $H_{comp}^1(\Omega \times (0, T))$ e como

$$H_{comp}^1(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow H_0^1(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow L^2(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)), \quad (2.101)$$

dessa forma, de (2.100) e (2.101) concluímos a convergência (2.98).

Como $\partial_t v_k^m \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega \times (0, T))$, consideramos μ a medida de defeito microlocal associada à sequência $(\partial_t v_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$ em $L_{loc}^2(\Omega \times (0, T))$ (garantida pelo Teorema 1.66 conforme a Observação 1.68). Da convergência (2.98) concluímos dois fatos:

- i) O $\text{supp } \mu$ está contido no conjunto característico do operador de ondas $\{(t, x, \tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 / \sigma_2(\square) = 0\}$, em que $\sigma_2(\square) = p(t, x, \tau, \xi) = \tau^2 - |\xi|^2$ denota o símbolo principal do operador de D'Alembert (este fato é garantido pelo Teorema 1.69).
- ii) O $\text{supp } \mu$ é uma união de curvas do tipo

$$t \in I \cap (0, \infty) \mapsto m_{\pm}(t) = \left(t, x(t), \pm \frac{1}{\sqrt{1 + |G(x)\dot{x}|^2}}, \mp \frac{G(x)\dot{x}}{\sqrt{1 + |G(x)\dot{x}|^2}} \right),$$

em que $t \in I \mapsto x(t) \in \text{int } \Omega = \Omega$ é uma geodésica associada à métrica $G = I$ (este fato é garantido pelo Teorema 1.74 e pela Proposição 1.75).

Assim, segue que μ se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador \square , ou seja, se algum ponto $w_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ não pertence a $\text{supp } \mu$, então toda bicaracterística que parte de w_0 não pertence ao $\text{supp } \mu$.

Nosso objetivo agora, é propagar a convergência de $(\partial_t v_k^m)$ em $L^2(\omega \times (0, T))$ para todo $L^2(\Omega \times (0, T))$.

Uma vez que $\partial_t v_k^m \rightarrow 0$ em $L^2(\omega \times (0, T))$, da Observação 1.68, através do Teorema 1.66, temos assegurada a existência de uma subsequência de $(\partial_t v_k^m)$ (a qual denotaremos

da mesma forma) tal que

$$\int_0^T \int_{\omega} \varphi(x, t) |\partial_t v_k^m|^2 dx dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\omega \times (0, T) \times S^1} \varphi(x, t) d\mu(z, t, \xi),$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\omega \times (0, T))$, o que implica que $\mu = 0$ em $\omega \times (0, T)$, o que nos garante que $\text{supp } \mu \subset (\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$.

Assim, uma vez que $\text{supp } \mu \subset (\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$ e que o amortecimento friccional age em $\omega \times (0, T)$, podemos propagar a energia cinética de $\omega \times (0, T)$ para $(\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$. De fato, considere $w_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \text{supp } \mu$ e x uma geodésica de $G = I$ definida próxima à t_0 . Uma vez que as geodésicas de Ω são linhas retas que necessariamente tocam a fronteira $\partial\Omega$ de Ω e se refletem de acordo com as leis da ótica geométrica, então as bicaracterísticas $m_{\pm}(t)$, acima mencionadas, tocam a fronteira lateral $\partial\Omega \times (0, T)$ do cilindro $\Omega \times (0, T)$. Dessa forma, $m_{\pm}(t) \notin \text{supp } \mu$ e, como consequência $w_0 \notin \text{supp } \mu$. Da arbitrariedade de w_0 e da geodésica x , concluímos que $\text{supp } \mu = \emptyset$, ou seja, $\mu = 0$ em $\Omega \times (0, T)$. Assim, da Observação 1.68 segue que

$$\partial_t v_k^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L_{loc}^2(\Omega \times (0, T)). \quad (2.102)$$

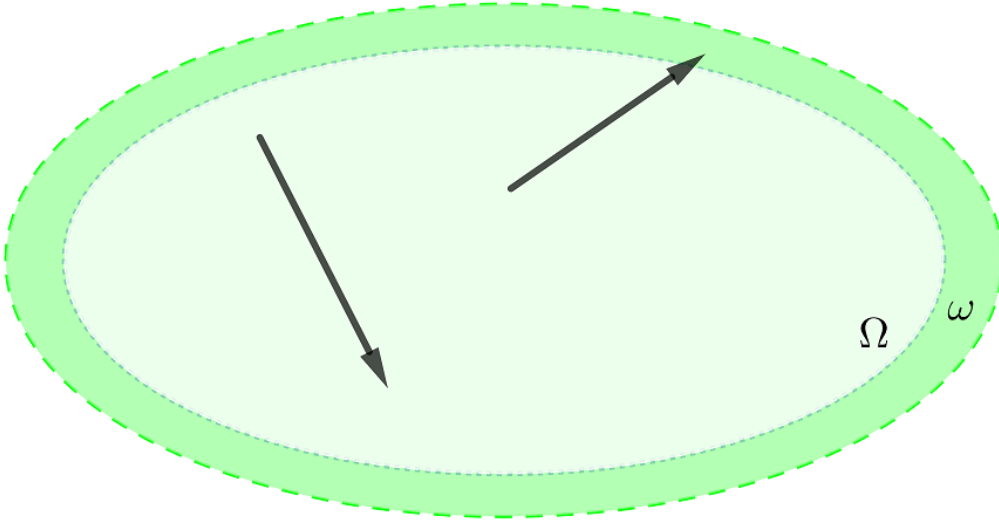


Fig. 2.2: A região ω é uma vizinhança da fronteira inteira de Ω e as setas indicam as geodésicas de Ω .

Além disso, das convergências acima, deduzimos que

$$\partial_t v_k^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ em } L^2(\Omega \times (0, T)). \quad (2.103)$$

De fato,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt = \underbrace{\int_0^T \int_{\omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt}_{=: L_1} + \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt}_{=: L_2}.$$

De (2.67), segue que $L_1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Agora, considere a seguinte decomposição de L_2

$$L_2 = \underbrace{\int_0^{\varepsilon} \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt}_{=: J_1} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt}_{=: J_2} + \underbrace{\int_{T-\varepsilon}^T \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt}_{=: J_3}.$$

Observamos que

$$J_1 = \int_0^{\varepsilon} \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt \stackrel{(2.83)}{\leq} 2 \int_0^{\varepsilon} E_{v_k^m}(t) \, dt \leq 2\varepsilon E_{v_k^m}(0) \stackrel{(2.84)}{\leq} 2\varepsilon,$$

Logo, $\lim_{m \rightarrow +\infty} J_1 \leq 2\varepsilon$, para todo $T > \varepsilon > 0$. Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ segue que

$\lim_{m \rightarrow +\infty} J_1 = 0$. Procedendo da mesma forma, é possível mostrar que $J_3 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Ainda, de (2.102), segue que $J_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Portanto, (2.103) ocorre, ou seja,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t v_k^m(x, t)|^2 \, dx \, dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (2.104)$$

Por fim, mostremos que $E_{v_k^m}(0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Com efeito, para isso, vamos fazer uso de uma equipartição da energia, para tal, considere a função cut-off $\theta \in C_0^\infty(0, T)$, $0 \leq \theta(t) < 1$ e $\theta(t) = 1$ em $(\varepsilon, T - \varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$. Multiplicando (2.82)₁ por $v_k^m \theta$, integrando em Ω e $(0, T)$ e utilizando a Fórmula de Green

e a derivada distribucional, temos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt - \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \partial_t v_k^m \cdot v_k^m \, dx \, dt + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} |\nabla v_k^m|^2 \, dx \, dt \\ & + \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} f_k(u_k^m) v_k^m \, dx \, dt + \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} a(x) g(\partial_t u_k^m) v_k^m \, dx \, dt = 0. \end{aligned}$$

Considerando as convergências (2.81), (2.86), (2.87), (2.88) e (2.104) e lembrando que $v_k \equiv 0$, de (2.105), deduzimos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla v_k^m|^2 + \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) v_k^m \, dx \, dt = 0,$$

e ainda,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \, dt = 0,$$

o que, juntamente com as convergências acima citadas, implica que $\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} E_{v_k^m}(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Então, uma vez que a energia decresce, obtemos $(T - 2\varepsilon) E_{v_k^m}(T - \varepsilon) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Isso implica, juntamente com a identidade de energia

$$E_{v_k^m}(T - \varepsilon) - E_{v_k^m}(\varepsilon) = - \frac{1}{\alpha_m} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} a(x) g(\partial_t u_k^m) \partial_t v_k^m \, dx \, dt,$$

da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ e de (2.81), segue que $E_{v_k^m}(0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, o que fornece a contra-dição desejada em (2.85).

Com o intuito de provar a última afirmação do Lema, supomos que (u_0, u_1) é tal que $r < E_u(0) < R$ e $(u_{0k}, u_{1k}) \rightarrow (u_0, u_1)$ em \mathcal{H} , com $r < E_{u_k}(0) < R$, $k \geq 1$. Então, a Desigualdade de Observabilidade provada na primeira parte deste Lema pode ser aplicada para qualquer k . Argumentando por contradição, então devemos ter

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{E_{u_k}(0)}{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k|^2 + |g(\partial_t u_k)|^2] \, dx \, dt} = \infty. \quad (2.105)$$

Primeiramente, observamos que no argumento de contradição, podemos assumir que (2.105) ocorre para cada $T > T_0$. Com efeito, se (2.105) não fosse válido para algum $T = T^* > T_0$, então para $T' > T^*$, (2.105) seria falso com $T = T'$, uma vez que o denominador fica maior conforme T aumenta. Isto implicaria que o resultado desejado (i.e., a

existência de um limitante uniforme) seria diretamente válido para todo $T > T^*$, o que seria suficiente para esta prova.

Agora, uma vez que $r < E_{u_k}(0) < R$, então (2.105) só se verifica se existir uma subsequência, ainda denotada com índice k , tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k|^2 + |g(\partial_t u_k)|^2] dx dt = 0, \quad \forall T \geq T_0. \quad (2.106)$$

Fixemos um tempo $T > T_0$. Sabemos que existe uma subsequência $(u_{k_{1j}})$ que converge para algum u^1 no sentido de (2.68)–(2.70) sobre $[0, T]$. Uma vez que (2.106) é válida para todo $T > T_0$, em particular, substituindo T por $2T$, o limite (2.106) continua válido. Como $(u_{k_{1j}})$ é uma subsequência de (u_k) , existe também uma subsequência $(u_{k_{2j}})$ de $(u_{k_{1j}})$ a qual converge para algum u^2 no sentido de (2.68)–(2.70) sobre $[0, 2T]$ e além disso, $u^2 = u^1$ sobre $[0, T]$. Indutivamente, obtemos uma subsequência $(u_{k_{mj}})$ que converge para algum u^m sobre $[0, mT]$ no sentido de (2.68)–(2.70) e $u^m = u^{m-1}$ sobre $[0, (m-1)T]$.

Considerando a sequência diagonal $(u_{k_{mm}})_{m \in \mathbb{N}}$, obtemos que esta subsequência converge para u (solução do problema original) com dados (u_0, u_1) sobre subconjuntos compactos de $[0, \infty)$ satisfazendo $u(t) = u^m(t)$ sobre $[0, mT]$. Disto, concluímos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u|^2 + |g(\partial_t u)|^2] dx dt = 0, \quad \forall T \geq T_0.$$

Assim, u deve satisfazer o seguinte problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \text{ em } \Omega. \end{cases} \quad (2.107)$$

Vemos de (2.107) que a energia de u é constante e temos $E_u(t) = E_u(0) > 0$, para cada $t \geq 0$. Definamos $\delta := E_u(t)$. Qualquer solução aproximada u_k satisfaz imediatamente o mesmo tipo de estimativa de decaimento (embora com constante dependendo de k), a qual será provada no Teorema 2.19. Isto se dá pois as soluções aproximadas já possuem

a propriedade de observabilidade, como provado na primeira parte deste Lema. Assim, temos que a energia da solução do problema truncado decai à zero. Consequentemente, para um k fixado, corresponde um tempo t_k suficientemente grande, para o qual $E_{u_k}(t_k)$ é muito pequeno, digamos que $E_{u_k}(t) \leq \delta/4$, para $t \geq t_k$. Além disso, podemos obter uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ crescente com $t_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$. Para cada t_k , temos $E_{u_k}(t_k) \leq \delta/4$, com $k \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como já provado, sabemos que para t_0 fixado, $E_{u_k}(t_0) \rightarrow E_u(t_0) = \delta$, quando $k \rightarrow \infty$. Em particular, para cada $t = t_m$ fixado, em que $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de tempos como acabamos de construir acima, temos $E_{u_k}(t_m) \rightarrow E_u(t_m) = \delta$, quando $k \rightarrow \infty$. Consideramos $(E_{u_k}(t_m))_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números indexados por k , para cada m fixado. Notamos que cada sequência possui o mesmo limite δ , quando $k \rightarrow \infty$. Logo, utilizando o método da diagonal de Cantor, deduzimos que a subsequência diagonal $(E_{u_k}(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ também converge para δ . Assim, de $E_{u_k}(t_k) \leq \delta/4$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $E_{u_k}(t_k) \rightarrow \delta$, quando $k \rightarrow \infty$, obtemos uma contradição. Nesta perspectiva, devemos ter

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{E_{u_k}(0)}{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k|^2 + |g(\partial_t u_k)|^2] dx dt} =: C < \infty.$$

Portanto, concluímos que se (u_0, u_1) em \mathcal{H} , com $r < E_u(0) < R$ é tal que $(u_{0k}, u_{1k}) \in D(\mathcal{A})$ e $(u_{0k}, u_{1k}) \rightarrow (u_0, u_1)$ em \mathcal{H} verificando $r < E_{u_k}(0) < R$, então a constante da Desigualdade de Observabilidade pode ser tomada independente de k . ■

Observação 2.16. A argumentação necessária para mostrar a independência da constante de observabilidade C em relação à k está presente no artigo de Cavalcanti et al. [20, Lema 3.1].

Observação 2.17. No que se segue, abusaremos da notação e escreveremos T_0 no sentido do tempo T^* encontrado na segunda parte do Lema 2.15.

2.1.2.2 Desigualdade de Observabilidade para o problema original

Nesta etapa obtemos a Desigualdade de Observabilidade para o problema (2.1), utilizando a Desigualdade de Observabilidade para o problema truncado, obtida na etapa anterior.

Lema 2.18 (Desigualdade de Observabilidade). Sejam $T \geq T_0$ e $r, R > 0$. Sob as

hipóteses do Teorema 2.14 e a Suposição 2.7, existe uma constante $C = C(r, R, T) > 0$ tal que, toda solução u do problema (2.1) satisfaz

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u(x, t)|^2 + |g(\partial_t u(x, t))|^2] dx dt, \quad (2.108)$$

sempre que $r < E_u(0) < R$.

Demonstração. De (2.64), para todo $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$ e toda solução do problema truncado (2.18), a seguinte desigualdade é válida

$$E_{u_k}(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u_k|^2 + |g(\partial_t u_k)|^2) dx dt, \quad (2.109)$$

sempre que $r < E_{u_k}(0) < R$, com $C > 0$ sendo uma constante independente de k .

De (2.43) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, deduzimos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(\partial_t u(x, t))|^2 dx dt. \quad (2.110)$$

Assim, de (2.57), (2.109) e (2.110), também obtemos a Desigualdade de Observabilidade para o problema original (2.1), i.e.,

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u|^2 + |g(\partial_t u)|^2) dx dt, \quad \forall T \geq T_0,$$

sempre que $r < E_u(0) < R$. ■

2.1.2.3 Taxa de Decaimento Uniforme

Antes de apresentarmos nosso resultado de estabilidade para o problema (2.1), definiremos algumas funções necessárias. Com este intuito, seguiremos as ideias previamente introduzidas por Lasiecka e Tataru em [44] para forças atrativas e por Cavalcanti et al em [18] para forças repulsivas (fontes). A fim de entendimento, apresentamos brevemente as argumentações utilizadas.

Das hipóteses feitas sobre g na Suposição 2.6, segundo Lasiecka e Tataru, obtemos

uma função h_0 côncava, estritamente crescente tal que $h(0) = 0$ e

$$h_0(sg(s)) \geq |s|^2 + |g(s)|^2, \text{ para } |s| < 1. \quad (2.111)$$

A partir da função h_0 , definimos a função

$$r(\cdot) = h_0\left(\frac{\cdot}{\text{med}(Q_T)}\right), \quad (2.112)$$

com $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Observamos que r é monótona crescente, então $cI + r$ é invertível, para todo $c \geq 0$. Para $K := [C \text{med}(Q_T)(1 + \|a\|_\infty)]^{-1} > 0$ (em que a constante $C > 0$ é obtida através do Lema 2.18), temos $p(s) = (cI + r)^{-1}(Ks)$.

A função p é positiva, contínua e estritamente crescente com $p(0) = 0$. Por fim, definimos

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s), \quad s > 0, \quad (2.113)$$

e uma vez que p é positiva e crescente, então q também o é.

Agora podemos apresentar o nosso resultado de estabilização.

Teorema 2.19 (Estabilidade Uniforme). Seja $T_0 > 0$ dado como nos Lemas 2.15 e 2.18. Considere h_0 e q definidas em (2.111) e (2.113), respectivamente, e u uma solução generalizada do problema (2.1) com $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ e $r < E_u(0) < R$. Então,

$$E_u(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t \geq T_0 \quad (2.114)$$

e $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$, em que $S(t)$ é a solução da equação diferencial ordinária não linear

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \\ S(0) = E_u(0). \end{cases}$$

Demonstração. Uma vez que a Desigualdade de Observabilidade (2.108) é satisfeita e considerando o Lema 1.77, obtemos a taxa de decaimento dada em (2.114).

De fato, consideramos os conjuntos

$$Q_T^\alpha = \{(x, t) \in Q_T / |\partial_t u(x, t)| > 1 \text{ q.s. em } Q_T\},$$

$$Q_T^\beta = Q_T \setminus Q_T^\alpha.$$

Com isso, faremos a análise do amortecimento próximo à origem e no infinito.

• Amortecimento próximo à origem:

Das hipóteses feitas para a função h_0 e sabendo que $a(x) \leq \|a\|_\infty + 1$ e $\frac{a(x)}{1 + \|a\|_\infty} < a(x)$, deduzimos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T^\beta} a(x) [(\partial_t u)^2 + (g(\partial_t u))^2] dx dt &\stackrel{(2.111)}{\leq} \int_{Q_T^\beta} a(x) h_0 (g(\partial_t u) \partial_t u) dx dt \\ &= \int_{Q_T^\beta} (1 + \|a\|_\infty) \frac{a(x)}{(1 + \|a\|_\infty)} h_0 (g(\partial_t u) \partial_t u) dx dt \\ &\stackrel{(h_0 \text{ é côncava e } h_0(0)=0)}{\leq} \int_{Q_T^\beta} (1 + \|a\|_\infty) h_0 \left(\frac{a(x)}{(1 + \|a\|_\infty)} g(\partial_t u) \partial_t u \right) dx dt \\ &\stackrel{(h_0 \text{ é crescente})}{\leq} \int_{Q_T^\beta} (1 + \|a\|_\infty) h_0 (a(x) g(\partial_t u) \partial_t u) dx dt. \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned} (1 + \|a\|_\infty) \int_{Q_T^\beta} h_0 (a(x) g(\partial_t u) \partial_t u) dx dt \\ \leq (1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T) h_0 \left(\frac{1}{\text{med}(Q_T)} \int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \right) \\ \stackrel{(2.112)}{=} (1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T) r \left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{Q_T^\beta} a(x) [(\partial_t u)^2 + (g(\partial_t u))^2] dx dt \\ \leq (1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T) r \left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \right). \end{aligned} \tag{2.115}$$

• Amortecimento linear no infinito:

Como $\tilde{m}s^2 \leq g(s)s \leq \tilde{M}s^2$, para $|s| > 1$, temos

$$\tilde{m} |\partial_t u|^2 \leq g(\partial_t u) \partial_t u \leq \tilde{M} |\partial_t u|^2, \quad \forall (x, t) \in Q_T^\alpha,$$

ou seja, se $(x, t) \in Q_T^\alpha$, temos $|\partial_t u|^2 \leq \tilde{m}^{-1} g(\partial_t u) \partial_t u$ e $|g(\partial_t u)|^2 \leq \tilde{M} |g(\partial_t u)| |\partial_t u|$. Logo,

$$\int_{Q_T^\alpha} a(x) [(\partial_t u)^2 + (g(\partial_t u))^2] dx dt \leq (\tilde{m}^{-1} + \tilde{M}) \int_{Q_T^\alpha} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt. \quad (2.116)$$

Assim, de (2.115) e (2.116), concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} a(x) [(\partial_t u)^2 + (g(\partial_t u))^2] dx dt \\ \leq (\tilde{m}^{-1} + \tilde{M}) \int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \\ + (1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T) r \left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \right). \end{aligned}$$

Agora, uma vez que a Desigualdade de Observabilidade dada pelo Lema 2.18 é satisfeita, existem $K = [C(1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T)]^{-1}$ e $c = (\tilde{m}^{-1} + \tilde{M}) [(1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T)]^{-1}$ tais que

$$E_u(0) \leq K^{-1}(cI + r) \left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \right).$$

Aplicando $p(s) = (cI + r)^{-1}(Ks)$ em ambos os lados da desigualdade acima (uma vez que p é estritamente crescente), temos

$$\begin{aligned} p(E_u(t)) &\leq p(E_u(0)) \leq p \left(K^{-1}(cI + r) \left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \right) \right) \\ &= (cI + r)^{-1} \left((cI + r) \left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt \right) \right) \\ &= \int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dx dt, \end{aligned}$$

e utilizando a identidade de energia, obtemos $p(E_u(T)) \leq E_u(0) - E_u(T)$, ou seja,

$$E_u(T) + p(E_u(T)) \leq E_u(0).$$

Agora, repetindo os mesmos argumentos para o intervalo $[mT, (m+1)T]$, com $m \in \mathbb{N}$,

obtemos

$$E_u((m+1)T) + p(E_u((m+1)T)) \leq E_u(mT), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o Lema 1.77 com $s_m = E_u(mT)$ e $s_0 = E_u(0)$, concluímos que

$$E_u(mT) \leq S(m), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.117)$$

Por fim, usando a dissipatividade da energia e (2.117), temos para $t = mT + \tau$, com $0 \leq \tau \leq T$, que

$$\begin{aligned} E_u(t) &= E_u(mT + \tau) \leq E_u(mT) \\ &\leq S(m) = S\left(\frac{t - \tau}{T}\right) \\ &\leq S\left(\frac{t - T}{T}\right) = S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad \forall t > T_0. \end{aligned}$$

■

2.1.2.4 Exemplos de Taxas de Decaimento Uniforme

Esta etapa é dedicada a mostrar como obter estimativas de taxas de decaimento explícitas dadas pela fórmula geral (2.114). Iremos repetir os mesmos argumentos apresentados inicialmente por Cavalcanti et al [18].

O algoritmo utilizado nos cálculos de taxas de decaimento dado pelo Teorema 2.19 fornece as taxas de decaimento explícitas sem quaisquer restrições sobre o crescimento da dissipação g na origem. Ilustramos a seguir alguns exemplos simples. Por simplificação, as constantes serão tomadas normalizadas para que não apareçam nas expressões.

Exemplo 2.20. Considere $g(s) = s^p$, $p > 1$ na origem. Uma vez que a função $s^{\frac{p+1}{2}}$ é convexa para $p \geq 1$, podemos resolver

$$S_t + S^{\frac{p+1}{2}} = 0, \quad S(0) = E_u(0)$$

Esta equação pode ser integrada diretamente. Contudo, para ilustrarmos a utilização

da fórmula geral, encontramos

$$G(s, E_u(0)) = \int_{\sqrt{E_u(0)}}^{\sqrt{s}} u^{-p} du = \frac{1}{1-p} \left[s^{\frac{-p+1}{2}} - E_u(0)^{\frac{-p+1}{2}} \right].$$

Assim, $G^{-1}(t) = \left[E_u(0)^{\frac{-p+1}{2}} - t(1-p) \right]^{\frac{2}{-p+1}}$. Logo,

$$E_u(t) \leq C(E_u(0)) \left[E_u(0)^{\frac{-p+1}{2}} + t(p-1) \right]^{\frac{2}{-p+1}}.$$

Exemplo 2.21. Tome $g(s) = s^3 e^{-\frac{1}{s^2}}$ para s na origem. Uma vez que a função $s^2 e^{-\frac{1}{s}}$ é convexa numa vizinhança da origem, podemos resolver

$$S_t + S^2 e^{-\frac{1}{S}} = 0, \quad S(0) = E_u(0).$$

Neste caso $G(s, E_u(0)) = -\frac{1}{2} \left[e^{-\frac{1}{s}} - e^{-\frac{1}{E_u(0)}} \right]$ e $G^{-1}(t, E_u(0)) = \left[\ln \left(e^{\frac{1}{E_u(0)}} - 2t \right) \right]^{-1}$.

Logo,

$$E_u(t) \leq C(E_u(0)) \left[\ln \left(e^{\frac{1}{E_u(0)}} + t \right) \right]^{-1}.$$

Exemplo 2.22. Consideramos $g(s) = s|s| e^{-\frac{1}{|s|}}$ para s próximo à origem. Uma vez que a função $s^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$ é convexa em $[0, s_0]$ para certos s_0 pequenos, obtemos a equação diferencial

$$S_t + S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{S}}} = 0, \quad S(0) = E_u(0).$$

Logo, a função $G(s, E_u(0))$ é dada por $G(s, E_u(0)) = - \left[e^{\frac{1}{\sqrt{s}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{E_u(0)}}} \right]$. Consequentemente,

$$G^{-1}(t, E_u(0)) = \frac{1}{\left[\ln \left(e^{\frac{1}{\sqrt{E_u(0)}}} - t \right) \right]^2} e$$

$$E_u(t) \leq C(E_u(0)) \frac{1}{\left[\ln \left(e^{\frac{1}{\sqrt{E_u(0)}}} + \frac{1}{2}t \right) \right]^2}.$$

Exemplo 2.23. Tome $g(s) = |s|^{\theta-1} s$, $0 < \theta < 1$. Neste caso a análise é idêntica ao caso dado no Exemplo 2.20 uma vez que $g^{-1}(s) = s^{\frac{1}{\theta}}$, $s > 0$ e $\frac{1}{\theta} > 1$. Assim, a taxa de

decaimento neste caso é dada por

$$E_u(t) \leq C(E_u(0)) \left[E_u(0)^{\frac{-1+\theta}{2\theta}} + t \frac{1-\theta}{\theta} \right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}.$$

2.2 Problemas II e III

Nesta seção apresentamos um estudo acerca da existência local de soluções fortes e fracas para a equação da onda bidimensional com termo fonte sujeito a um crescimento exponencial. A saber,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) = f(u) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Para o Problema II, admitimos um amortecimento não linear localmente distribuído, já para o Problema III assumimos um amortecimento não linear full (i.e., $a \equiv 1$).

Tomando os dados iniciais no poço potencial, podemos obter a extensão global de solução e a taxa de decaimento da energia para o problema (2.121) e o blow-up de solução para o problema (2.138).

2.2.1 Teorema do Passo da Montanha e Variedade de Nehari

Assumimos o crescimento exponencial para a função f e que temos um amortecimento localmente distribuído mais fraco dado pelo termo $a(x)g(\partial_t u)$ em que $a(\cdot)$ é uma função contínua e não negativa assumida ser estritamente maior que 0 sobre uma vizinhança ω da fronteira $\partial\Omega$ inteira e g é apenas uma função monótona crescente e contínua verificando a condição de sinal $g(s)s \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e um crescimento polinomial no infinito.

Apresentamos agora a conexão entre a boa definição do problema acima com a teoria dos problemas elípticos e o bem conhecido *nível do passo da montanha*. Rigorosamente,

definindo o funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) \, dx, \quad (2.118)$$

com $F(t) = \int_0^t f(s) \, ds$, os pontos críticos do funcional J são as soluções fracas do problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Associado ao funcional J , temos a *variedade de Nehari*

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} / J'(u)u = 0\} \\ &= \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} / \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\Omega} f(u)u \, dx \right\}. \end{aligned}$$

Se f satisfaz certas propriedades, é possível mostrar que o funcional J satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (ver [7]) e o nível

$$d = \inf_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J(tv) > 0,$$

chamado de *nível do passo da montanha*, é um nível crítico de J . Dos resultados obtidos em [65, Capítulo 4] obtemos a seguinte relação entre o nível do passo da montanha e a variedade de Nehari

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u). \quad (2.119)$$

Obtemos também que para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, existe um único $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda u \in \mathcal{N} \text{ e } J(\lambda u) = \max_{s \geq 0} J(su). \quad (2.120)$$

Denotamos por W , W_1 e W_2 os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} W &:= \{u \in H_0^1(\Omega) / J(u) < d\}, \\ W_1 &:= \left\{ u \in W / \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx > \int_{\Omega} f(u)u \, dx \right\} \cup \{0\}, \\ W_2 &:= \left\{ u \in W / \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx < \int_{\Omega} f(u)u \, dx \right\}. \end{aligned}$$

É possível mostrar que W_1 e W_2 são conjuntos estáveis relacionados ao problema (2.121) (em verdade, provaremos resultados análogos aos Lemas 3.1 e 4.1 de [5] que provam tal afirmação).

2.2.2 Boa Colocação para o Problema II

Nesta subsecção faremos um estudo do seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\text{(Problema II)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)g(\partial_t u) = f(u) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.121)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular e as funções f , $a(\cdot)$ e g satisfazem a Suposições 2.1, 2.5 e 2.6, respectivamente.

Para iniciarmos o estudo do Problema II, consideramos o seguinte conjunto $\mathcal{V}_1 := \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) / \phi \in W_1\} = \mathcal{D}(\Omega) \cap W_1$, o qual não é um espaço vetorial. Agora, definimos os seguintes espaços vetoriais

$$\mathcal{V}_1^* := \text{Span } \mathcal{V}_1, \quad V_1 := \overline{\mathcal{V}_1^*}^{H_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad H_1 := \overline{\mathcal{V}_1^*}^{L^2(\Omega)}.$$

Notemos que $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_1^* \subset V_1 \subset H_1$, logo $H_1 = \overline{\mathcal{V}_1^*}^{L^2(\Omega)} \subset \overline{V_1}^{L^2(\Omega)} \subset \overline{H_1}^{L^2(\Omega)} = H_1$, ou seja, $\overline{V_1}^{L^2(\Omega)} = H_1$. Ainda, $V_1 \xrightarrow{c} H_1$. Com efeito, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que $\|u\|_{H_1} \leq C \|u\|_{V_1}$, para cada $u \in V_1$, e mais, de $H_0^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega)$, se $(u_n) \subset V_1$ é limitada em V_1 , existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) convergente em H_1 , o que prova a afirmação.

Consideramos então, o operador limitado $A : D(A) \subset V_1 \rightarrow V_1'$ definido pela terma $\{V_1, H_1, (\cdot, \cdot)_{V_1}\}$, com o elemento do dual $Au \in V_1'$, $u \in D(A)$ dado por

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx, \quad \forall v \in V_1,$$

em que as propriedades intrínsecas à tal operador, podem ser provadas tal como o que foi feito no problema (2.1).

Definimos o operador $B : V_1 \rightarrow V_1'$ por $(Bv)(x) = a(x)g(v(x))$, $x \in \Omega$, o qual está bem definido e é maximal monótono.

Consideramos o espaço de fase $\mathcal{H}_1 = V_1 \times H_1$, o qual é um espaço de Hilbert munido do produto interno e norma usuais, a saber

$$\begin{aligned} ((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathcal{H}_1} &= \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + v_1 \cdot v_2 \, dx, \\ \|(u_1, v_1)\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 + |v_1|^2 \, dx, \end{aligned}$$

para cada $(u_i, v_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$.

Definimos também $D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in \mathcal{H}_1 / v \in V_1 \text{ e } Au + Bv \in H_1\}$ e os operadores não lineares $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ dado por $\mathcal{A}(u, v) = (-v, Au + Bv)$ e $\mathbb{B} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ dado por $\mathbb{B}(u, v) = (0, -f(u))$. Assim, podemos reformular o problema (2.121) no seguinte problema de Cauchy em \mathcal{H}_1 :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathbb{B}U(t) = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

com $U(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ e $U_0 = (u_0, u_1)$.

O operador \mathcal{A} é maximal monótono e o operador \mathbb{B} está bem definido e é localmente Lipschitz ao fazermos as devidas substituições do que já foi feito no Problema I de $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ por V_1 , V_1' e H_1 , respectivamente. Além disso, temos que $\mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^* \subset D(\mathcal{A})$.

Com isto, podemos apresentar o resultado de existência local de solução para o problema (2.121):

Teorema 2.24 (Local no tempo). Assumindo as Suposições 2.1, 2.5, e 2.6, temos que o problema (2.121) gera um semigrupo não linear sobre \mathcal{H}_1 . Além disso,

i) Se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$, existe uma única solução generalizada

$$u \in C([0, T_{\max}); V_1) \cap C^1([0, T_{\max}); H_1).$$

ii) Se $(u_0, u_1) \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte

$$(u, \partial_t u) \in W^{1,\infty}(0, T_{\max}; \mathcal{H}_1). \quad (2.122)$$

Observação 2.25. Note que a regularidade (2.122) para a solução u do problema (2.121) pode ser reescrita como

$$u \in L^\infty(0, T_{\max}; V_1), \quad \partial_t u \in L^\infty(0, T_{\max}; V_1) \quad \text{e} \quad \partial_t^2 u \in L^\infty(0, T_{\max}; H_1).$$

Provemos agora que $T_{\max} = +\infty$. Neste sentido, tomemos $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$. Então existe $(u_{0k}, u_{1k})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^*$ (que é denso em $D(\mathcal{A})$) tal que $(u_{0k}, u_{1k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (u_0, u_1)$ em \mathcal{H}_1 . Consideramos agora a seguinte sequência de problemas aproximados

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k + a(x)g(\partial_t u_k) = f(u_k) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0k}(x) & \text{em } \Omega \\ \partial_t u_k(x, 0) = u_{1k}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.123)$$

em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, o problema (2.123) possui uma única solução

$$(u_k, \partial_t u_k) \in W^{1,\infty}(0, T_{\max}^k; \mathcal{H}_1). \quad (2.124)$$

Procedendo como no Problema I, obtemos o funcional de energia associado ao problema aproximado dado por

$$\begin{aligned} E_{u_k}(t) &= \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] - \int_{\Omega} F(u_k(t)) \, dx \\ (2.118) &= \frac{1}{2} \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_k(t)) \end{aligned} \quad (2.125)$$

e a identidade de energia do problema aproximado fica

$$E_{u_k}(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k(t))\partial_t u_k(t) \, dx \, dt = E_{u_k}(t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T_{\max}^k. \quad (2.126)$$

Uma ferramenta importante para a obtenção da extensão global de solução para o

problema (2.121) é dada pelo seguinte Lema:

Lema 2.26. Nas hipóteses do Teorema 2.24 e admitindo a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz (Suposição 2.4), se $(u_{0k}, u_{1k}) \in \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^*$ e $E_{u_k}(0) < d$, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} u_k(t) &\in \mathcal{V}_1^*, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k], \\ \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &< \frac{2\theta d}{\theta - 2}, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k]. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Demonstração. Como $E_{u_k}(t) \leq E_{u_k}(0) < d$, para todo $t \in [0, T_{\max}^k]$, segue que

$$\frac{1}{2} \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_k(t)) < d, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k], \quad (2.128)$$

o que implica que $u_k(t) \in W$, para todo $t \in [0, T_{\max}^k]$.

Assumimos por contradição, que exista um $t_0 \in (0, T_{\max}^k)$ tal que $u_k(t_0) \notin \mathcal{V}_1^*$. Logo, $u_k(t_0) \notin \mathcal{D}(\Omega) \cap W_1$. Uma vez que $u_k(t_0) \in V_1$ (por 2.124), a menos de densidade, ele pode ser tomado em $\mathcal{D}(\Omega)$. Com isso, $u_k(t_0) \notin W_1$, ou seja, $u_k(t_0) \in W_2$ (uma vez que $W = W_1 \dot{\cup} W_2$). Disto,

$$\|\nabla u_k(t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \int_{\Omega} f(u_k(t_0))u_k(t_0) \, dx.$$

Uma vez que as funções envolvidas são contínuas e $u_k(0) = u_{0k} \in \mathcal{V}_1^*$, pelo Teorema de Mudança de Sinal, existe $t^* \in (0, t_0)$ tal que

$$\|\nabla u_k(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(u_k(t^*))u_k(t^*) \, dx.$$

Nesta perspectiva, temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\|\nabla u_k(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 \neq 0$

Neste caso $u_k(t^*) \neq 0$, temos $u_k(t^*) \in \mathcal{N}$, o que implica, de (2.119), que $J(u_k(t^*)) \geq d$ e assim

$$E_{u_k}(t^*) = \frac{1}{2} \|\partial_t u_k(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_k(t^*)) \geq d,$$

o que é uma contradição com (2.128).

Caso 2: $\|\nabla u_k(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$

Neste caso, podemos supor também que

$$0 < \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \int_{\Omega} f(u_k(t))u_k(t) \, dx, \quad \forall t \in (t^*, t_0], \quad (2.129)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_+^*} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (2.130)$$

Da condição de crescimento imposta à função f , para $\beta \in (0, 1)$, existe $C_{\beta, \varepsilon} > 0$ tal que

$$|f(t)t| \leq \varepsilon |t|^2 + C_{\beta, \varepsilon} |t|^4 e^{\beta t^2}, \quad (p = 4).$$

Disto, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u_k(t))u_k(t) \, dx &\leq \varepsilon \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta, \varepsilon} \int_{\Omega} |u_k(t)|^4 e^{\beta(u_k(t))^2} \, dx \\ (\text{Des. de Hölder}) &\leq \varepsilon \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta, \varepsilon} \left[\int_{\Omega} |u_k(t)|^8 \, dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} e^{2\beta(u_k(t))^2} \, dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Uma vez que $u_k(t) \in H_0^1(\Omega)$ q.s. em $[0, T_{\max})$, temos

$$\int_{\Omega} e^{2\beta(u_k(t))^2} \, dx = \int_{\Omega} e^{2\beta \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2} \left(\frac{u_k(t)}{\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 \, dx \leq \int_{\Omega} e^{2\beta R^2} \left(\frac{u_k(t)}{\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 \, dx,$$

e, para utilizarmos a Desigualdade de Trudinger–Moser, precisamos ter $2\beta R^2 < 4\pi$, ou seja, $\beta < \frac{2\pi}{R^2}$. Então, como podemos considerar $\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} < 1$ para t muito próximo à t^* , obtemos

$$\sup_{\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} e^{2\beta R^2} \left(\frac{u_k}{\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 \, dx \leq L,$$

com $L > 0$. Ainda, de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u_k(t))u_k(t) \, dx &\leq \varepsilon \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta, \varepsilon} L^{1/2} \|u_k(t)\|_{L^8(\Omega)}^4 \\ &\leq \varepsilon \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{C}_{\beta, \varepsilon} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^4. \end{aligned}$$

Consequentemente, de (2.129), temos

$$0 < \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \varepsilon \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{C}_{\beta, \varepsilon} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^4.$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno e utilizando a Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$0 < \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \widehat{C}_{\beta,\varepsilon} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^4,$$

o que implica que

$$0 < \frac{1}{\widehat{C}_{\beta,\varepsilon}} \leq \|\nabla u_k(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

o que é uma contradição com a afirmação deste caso.

Portanto, $u_k(t) \in \mathcal{V}_1^*$, para todo $t \in [0, T_{\max}^k)$.

Disso e de (2.128), segue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(u_k(t)) \, dx < d \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(u_k(t)) \, dx < d \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} f(u_k(t)) u_k(t) - F(u_k(t)) \right] \, dx < d, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade acima segue pois $u_k(t) \in \mathcal{V}_1^*$. Da Condição de Ambrosetti–Rabinowitz temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) F(u_k(t)) \, dx < d \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} F(u_k(t)) \, dx < \frac{2d}{\theta - 2}. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Por fim, combinando (2.128) e (2.131) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} < d + \frac{2d}{\theta - 2} = \frac{d\theta}{\theta - 2} \\ \Rightarrow & \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \frac{2d\theta}{\theta - 2}. \end{aligned}$$

■

Agora, tendo em mente as hipóteses do Lema 2.26 e que $u_k(t) \in \mathcal{V}_1^*$, para todo

$t \in [0, T_{\max}^k)$, $g(s)s > 0$, para $s \neq 0$ e $a(\cdot)$ é não negativa, da identidade de energia, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq E_{u_k}(0) + \frac{1}{2} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} F(u_k(t)) \, dx \\ &\stackrel{(2.131)}{\leq} d + \frac{\theta d}{\theta - 2} + \frac{2d}{\theta - 2} = \frac{2\theta d}{\theta - 2}, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k). \end{aligned}$$

Neste sentido, procedendo como no Problema I, podemos estender as soluções u_k à todo intervalo $[0, \infty)$ e assim, o mesmo ocorrerá com as soluções u do problema original (2.121) com $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$, o que nos permite enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 2.27 (Global no tempo). Assumindo as hipóteses do Teorema 2.9, a Suposição 2.4, $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$ e $E_u(0) < d$, então a solução u do problema (2.121), dada pelo Teorema 2.24, pode ser estendida à $[0, \infty)$. Além disso, $u(t) \in \mathcal{V}_1$, para todo $t \geq 0$.

2.2.3 Decaimento Uniforme da Energia para o Problema II

Com o intuito de obtermos a Desigualdade de Observabilidade para o Problema II, iremos considerar a seguinte sequência de problemas aproximados com termos fonte truncados:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k + a(x)g(\partial_t u_k) = f_k(u_k) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0k}(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u_k(x, 0) = u_{1k}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.132)$$

com (u_{0k}, u_{1k}) sendo tomados em $\mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^*$ convergindo para os dados (u_0, u_1) em \mathcal{H}_1 e, para cada $k \in \mathbb{N}$, f_k é definido como em (2.19) o qual é globalmente Lipschitz.

Seguindo os mesmos passos do Problema I e tendo em vista os procedimentos para a obtenção do Teorema 2.27, podemos obter o mesmo resultado para o problema truncado (2.132).

Para a obtenção da estabilidade assintótica para o problema 2.121, basta repetirmos os mesmos passos do Problema I. Contudo, na conquista da Desigualdade de Observabilidade para o problema truncado, existem particularidades que merecem ser pontuadas, como seguem na demonstração do Lema a seguir.

Lema 2.28. Sejam $r > 0$, $T \geq T_0$, $k \geq 1$ e $\tilde{R} = \max\{R, d\}$. Sob as hipóteses do Teorema

2.27 e admitindo a Suposição 2.7, existe $C = C(k, r, \tilde{R}, T) > 0$ tal que a correspondente solução u_k de (2.132) com $(u_{0k}, u_{1k}) \in \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^*$ distante da origem (i.e., verificando (2.63)) satisfaz a Desigualdade de Observabilidade

$$E_{u_k}(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k(x, t)|^2 + |g(\partial_t u_k(x, t))|^2] dx dt. \quad (2.133)$$

Além disso, se $(u_{0k}, u_{1k}) \rightarrow (u_0, u_1)$ em \mathcal{H}_1 tal que $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$ e $r < E_u(0) < \tilde{R}$, então existe $T^* \geq T_0$ tal que C pode ser escolhido independente de k , sempre que $T \geq T^*$.

Esboço da demonstração. O índice $k_0 \in \mathbb{N}$ é estabelecido como para o Lema 2.15 (acima das desigualdades em (2.63)). Supondo que (2.133) seja falso, existe $T > T_0$ e uma sequência (u_k^m) de soluções de (2.132) tal que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2] dx dt}{E_{u_k^m}(0)} = 0. \quad (2.134)$$

Notemos que da Condição de Ambrosetti–Rabinowitz, $-F(t) < 0$, para todo $t > 0$, logo

$$\begin{aligned} E_{u_k^m}(0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u_k^m(x, 0)|^2 + |\nabla u_k^m(x, 0)|^2 dx - \int_{\Omega} F_k(u_k^m(x, 0)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{1k}^m|^2 + |\nabla u_{0k}^m|^2 dx - \int_{\Omega} F_k(u_{0k}^m) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\|u_{1k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\lesssim E_{u_k^m}(0) \stackrel{(2.63)}{\leq} \tilde{R}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.135)$$

e ainda,

$$\begin{aligned} E_{u_k^m}(0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u_k^m(x, 0)|^2 + |\nabla u_k^m(x, 0)|^2 dx - \int_{\Omega} F_k(u_k^m(x, 0)) dx \\ (2.4) &> \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{1k}^m|^2 + |\nabla u_{0k}^m|^2 dx - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f_k(u_{0k}^m) u_{0k}^m dx \\ (\theta > 2) &> \frac{1}{2} \|u_{1k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left[\|\nabla u_{0k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f_k(u_{0k}^m) u_{0k}^m dx \right] \\ (u_{0k}^m \in \mathcal{V}_1^*) &> \frac{1}{2} \|u_{1k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Assim, de (2.134) e (2.135), temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) [|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2] dx dt = 0.$$

Além disso, do funcional de energia do problema truncado e de (2.135), existe uma subsequência de $(u_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$ (a qual continuaremos denotando por $(u_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$) tal que

$$\begin{aligned} u_k^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u_k \text{ em } L^\infty(0, T; V_1), \quad m \rightarrow \infty \\ \partial_t u_k^m &\overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u_k \text{ em } L^\infty(0, T; H_1), \quad m \rightarrow \infty \\ u_k^m &\rightarrow u_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall q \geq 2. \end{aligned}$$

Agora, dividimos o esboço da prova em dois casos: $u_k \neq 0$ e $u_k = 0$.

Caso 1: $u_k \neq 0$

Todos os passos deste caso são análogos aos respectivos passos do Problema I, fazendo as devidas substituições. Em especial, obtemos uma equação semelhante à (2.76), a saber,

$$-\Delta u_k(t) = f_k(u_k(t)) \text{ em } V_1' \text{ q.s. em } (0, T).$$

Como $u_k(t) \in V_1$ q.s. em $(0, T)$, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k(t)|^2 dx = \int_{\Omega} f_k(u_k(t)) u_k(t) dx,$$

o que implica que $u_k(t) \in \mathcal{N}$ (variedade de Nehari), mas pelo Lema 2.26, $u_k(t) \in \mathcal{V}_1^*$ e pela suposição deste caso, $u_k(t) \neq 0$, para todo $t \geq 0$, logo, obtemos uma contradição.

Caso 2: $u_k = 0$

Neste caso, notemos que $\alpha_m = [E_{u_k^m}(0)]^{1/2}$ está bem definido devido à (2.136).

Pontuamos aqui um argumento que difere do respectivo passo no Problema I, a saber,

$$\begin{aligned} &\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla v_k^m|^2 - \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) v_k^m dx dt = 0 \\ \Rightarrow &\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla v_k^m|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) v_k^m dx dt = 0, \end{aligned} \quad (2.137)$$

em que a convergência ocorre devido à (2.88) e (2.91).

Por outro lado, da Condição de Ambrosetti–Rabinowitz, temos

$$\begin{aligned}
& 0 < \theta F_k(u_k^m) < f_k(u_k^m)u_k^m \\
\Rightarrow & 0 < \frac{1}{\alpha_m^2} \theta F_k(u_k^m) < \frac{1}{\theta \alpha_m} f_k(u_k^m)v_k^m \\
\Rightarrow & 0 < \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \, dt < \frac{1}{\theta \alpha_m} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} f_k(u_k^m)v_k^m \, dx \, dt \\
\Rightarrow & 0 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \, dt \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta \alpha_m} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} f_k(u_k^m)v_k^m \, dx \, dt \stackrel{(2.137)}{=} 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \, dt = 0.$$

Com isso, a prova segue de forma análoga ao Lema 2.15. ■

2.2.4 Boa Colocação para o Problema III

O objetivo desta subseção é apresentarmos a boa colocação e a obtenção do fenômeno de blow-up para o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$(\text{Problema III}) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + g(\partial_t u) = f(u) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.138)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, a função f satisfaz a Suposição 2.1 e g satisfaz a Suposição 2.29 abaixo.

Suposição 2.29. A função feedback $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, monótona crescente e satisfaz

$$\begin{aligned}
& g(s)s > 0, \quad \text{para } s \neq 0 \\
& \tilde{m}s^2 \leq g(s)s \leq \tilde{M}s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R},
\end{aligned} \quad (2.139)$$

com $0 < \tilde{m} < \tilde{M} < 1$.

Primeiramente consideramos o seguinte conjunto $\mathcal{V}_2 := \mathcal{D}(\Omega) \cap W_2$, o qual não é um

espaço vetorial. Agora, definimos os seguintes espaços vetoriais $\mathcal{V}_2^* := \text{Span } \mathcal{V}_2$, $V_2 := \overline{\mathcal{V}_2^*}^{H_0^1(\Omega)}$ e $H_2 := \overline{\mathcal{V}_2^*}^{L^2(\Omega)}$, em que $\overline{V_2}^{L^2(\Omega)} = H_2$ e $V_2 \xhookrightarrow{c} H_2$.

Tendo em vista o que foi feito na Seção 2.2.2 e fazendo as devidas alterações, obtemos a solução local para o problema (2.138).

Teorema 2.30 (Local no tempo). Assumindo as Suposições 2.1 e 2.29, temos que o problema (2.138) gera um semigrupo não linear sobre $\mathcal{H}_2 = \mathcal{V}_2 \times H_2$. Além disso,

i) Se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_2$, existe uma única solução generalizada

$$u \in C([0, T_{\max}); V_2) \cap C^1([0, T_{\max}); H_2).$$

ii) Se $(u_0, u_1) \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte

$$(u, \partial_t u) \in W^{1,\infty}(0, T_{\max}; \mathcal{H}_2).$$

2.2.5 Blow-up de solução para o Problema III

Com o intuito de obtermos o fenômeno de blow-up para solução do problema (2.138), consideramos a seguinte suposição adicional.

Suposição 2.31. Seguem as seguintes suposições para o funcional de energia e para o termo fonte, respectivamente:

i) Suponha que

$$E_u(0) \leq 0 \text{ ou } 0 \leq E_u(0) < \gamma d, \quad \text{para algum } 0 < \gamma < \frac{\theta - 3}{\theta}, \quad \theta > 3, \quad (2.140)$$

em que d é o nível do passo da montanha associado com o correspondente problema elíptico.

ii) Existe $\theta > 3 + \frac{1}{\lambda_1}$ tal que

$$0 < \theta F(t) < f(t)t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2.141)$$

em que λ_1 representa o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet na fronteira.

Nosso próximo passo para a obtenção do blow-up de solução é mostrar que \mathcal{V}_2^* é um conjunto invariante. Para isso, consideramos $(u_0, u_1) \in \mathcal{V}_2^* \times \mathcal{V}_2^* \subset D(\mathcal{A})$. Logo, existe uma única solução forte para o problema (2.138) com $(u, \partial_t u) \in W^{1,\infty}(0, T_{\max}; \mathcal{H}_2)$ e obtemos o funcional de energia e a identidade de energia como em (2.125) e (2.126) com $a \equiv 1$.

Lema 2.32. Nas hipóteses do Teorema 2.30 e da Suposição 2.31, se $(u_0, u_1) \in \mathcal{V}_2^* \times \mathcal{V}_2^*$ e $E_u(0) < d$, temos

$$\begin{aligned} u(t) &\in \mathcal{V}_2^*, \quad \forall t \in [0, T_{\max}), \\ \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &> 2d, \quad \forall t \in [0, T_{\max}). \end{aligned} \tag{2.142}$$

Demonstração. Seja $(u_0, u_1) \in \mathcal{V}_2^* \times \mathcal{V}_2^*$. Provemos que $u(t) \in \mathcal{V}_2^*$, para cada $t \in [0, T_{\max})$.

Faremos a prova por contradição. Suponha que exista $t_0 \in (0, T_{\max})$ tal que $u(t_0) \notin \mathcal{V}_2^*$. Então, como argumentado no Lema 2.26, $u(t_0) \in W_1$, ou seja, $u(t_0) = 0$ ou

$$\|\nabla u(t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 > \int_{\Omega} f(u(t_0))u(t_0) \, dx.$$

Tal como no Lema 2.26, pelo Teorema de Mudança de Sinal, existe $t^* \in (0, t_0]$ com

$$\|\nabla u(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(u(t^*))u(t^*) \, dx,$$

e $u(t) \in W_2$, para todo $t \in [0, t^*)$. Assim, temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\|\nabla u(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$

Como as funções envolvidas são contínuas em t , temos

$$\lim_{t \rightarrow t^*_-} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \tag{2.143}$$

Por outro lado, uma vez que $u(t) \in W_2$, para todo $t \in [0, t^*)$, temos $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \neq 0$ e, além disso,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx, \quad \forall t \in [0, t^*).$$

Utilizando as Desigualdades de Trudinger–Moser e Poincaré como no Lema 2.26, segue da última desigualdade que

$$0 < \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\beta,\varepsilon} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^4.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_{\beta,\varepsilon}},$$

o que contradiz (2.143).

Caso 2: $\|\nabla u(t^*)\|_{L^2(\Omega)}^2 \neq 0$

Como no *Caso 1* do Lema 2.26, temos $J(u(t^*)) \geq d$ e assim, $E_u(t^*) \geq d$, o que é uma contradição, uma vez que $E_u(t) \leq E_u(0) < d$, para todo $t \in [0, T_{\max})$.

Portanto, $u(t) \in \mathcal{V}_2^*$, para todo $t \in [0, T_{\max})$.

Agora, uma vez que $u(t) \in \mathcal{V}_2^*$, podemos tomar $u(t) \neq 0$ (visto que $u \equiv 0$ em $[0, T_{\max})$ não sofre blow-up) e do que precede (2.120), existe $\lambda(t) > 0$ tal que

$$J'(\lambda(t)u(t))(\lambda(t)u(t)) = 0 \quad \text{e} \quad J(\lambda(t)u(t)) = \max_{s \in [0, \infty)} J(su(t)),$$

o que implica que $\lambda(t)u(t) \in \mathcal{N}$ e, conseqüentemente

$$J(\lambda(t)u(t)) \geq d = \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v). \quad (2.144)$$

Uma vez que $u(t) \in \mathcal{V}_2^*$, temos $J'(u(t))(u(t)) < 0$, em que segue que $0 < \lambda(t) < 1$. Assim, de (2.144), temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla(\lambda(t)u(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(\lambda(t)u(t)) \, dx \geq d \\ \Rightarrow & \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{2d}{(\lambda(t))^2} > 2d, \end{aligned}$$

o que prova (2.142). ■

Nesta altura, somos capazes de apresentar o nosso resultado de blow-up para solução forte de (2.138).

Teorema 2.33 (Blow-up). Nas hipóteses do Teorema 2.30 e admitindo a Suposição 2.31, se $(u_0, u_1) \in \mathcal{V}_2^* \times \mathcal{V}_2^*$, então existe $T > 0$ tal que a solução forte u de (2.138) sofre blow-up na norma $L^2(\Omega)$ quando $t \rightarrow T_-$.

Demonstração. Seja $(u_0, u_1) \in \mathcal{V}_2^* \times \mathcal{V}_2^*$. Suponhamos por contradição, que a solução dada pelo Teorema 2.30 possa ser estendida à todo intervalo $[0, \infty)$. Uma vez que \mathcal{V}_2^* é invariante (Lema 2.32), então $u(t) \in \mathcal{V}_2^*$, para todo $t \in [0, \infty)$. Logo,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.145)$$

Tal como em (2.39) e utilizando (2.139) (uma vez que $u(t) \neq 0$), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \geq \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \widetilde{M} (\partial_t u(t), u(t))_{L^2(\Omega)}. \quad (2.146)$$

Uma vez que $E_u(t) \leq E_u(0)$, para todo $t \geq 0$, temos

$$\int_{\Omega} F(u(t)) \, dx \geq \frac{1}{2} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - E_u(0),$$

e utilizando (2.141), obtemos a seguinte estimativa

$$\int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx \geq \frac{\theta}{2} \left[\|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] - \theta E_u(0). \quad (2.147)$$

Assim, substituindo (2.147) em (2.146), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &\geq \left(\frac{\theta}{2} + 1 \right) \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \widetilde{M} \int_{\Omega} \partial_t u(t)u(t) \, dx - \theta E_u(0). \end{aligned} \quad (2.148)$$

Observação 2.34. Se $E_u(0) \leq 0$, então $-E_u(0) \geq 0$ e o último termo do lado direito de (2.148) pode ser ignorado. Assim, a condição $E_u(0) < \gamma d$, para algum $0 < \gamma < 1$ dada em (2.140) é desnecessária. O restante da prova continua a mesma.

De (2.148), $E_u(0) < \gamma d$ e da Desigualdade de Cauchy–Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &\geq \left(\frac{\theta + 2}{2} \right) \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\theta - 2}{2} \right) \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - \widetilde{M} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} - \theta \gamma d \\
(\text{Des. de Young e Poincaré}) &\geq \left[\left(\frac{\theta + 2}{2} \right) - \frac{\widetilde{M}}{2\lambda_1} \right] \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \left[\left(\frac{\theta - 2}{2} \right) - \frac{\widetilde{M}}{2} \right] \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \theta \gamma d.
\end{aligned} \tag{2.149}$$

Substituindo (2.142) em (2.149), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \geq \left[\left(\frac{\theta + 2}{2} \right) - \frac{\widetilde{M}}{2\lambda_1} \right] \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left[\left(\frac{\theta - 2}{2} \right) - \frac{\widetilde{M}}{2} \right] 2d - \theta \gamma d,$$

uma vez que $\theta > 3$.

Observação 2.35. Enfatizamos que podemos utilizar uma desigualdade do tipo $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$ e considerar ε suficientemente pequeno em vez de considerar $\theta > 3$. No entanto, em (2.150), tal condição será necessária, logo iremos tomá-la desde já.

Da última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &\geq \left[\left(\frac{\theta + 2}{2} \right) - \frac{\widetilde{M}}{2\lambda_1} \right] \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left[(\theta - 2 - \widetilde{M}) - \theta \gamma \right] d - \theta \gamma d \\
(\widetilde{M} < 1) &\geq \left[\left(\frac{\theta + 2}{2} \right) - \frac{1}{2\lambda_1} \right] \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + [(\theta - 3) - \theta \gamma] d - \theta \gamma d
\end{aligned}$$

Tomando γ tal que

$$0 < \gamma < \frac{\theta - 3}{\theta},$$

segue que

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \geq \left[(\theta + 2) - \frac{1}{\lambda_1} \right] \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Como $\theta > 3 + \frac{1}{\lambda_1}$, temos $\theta + 2 - \frac{1}{\lambda_1} > 5$ e além disso,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \geq 5 \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.150}$$

Observação 2.36. A desigualdade em (2.150) é a mesma obtida em (2.25) de [41]. Para repetirmos o mesmo argumento (e por isso estamos tomando $\theta > 3 + 1/\lambda_1$), precisamos provar a seguinte afirmação:

$$\text{Existe } t_1 \geq 0 \text{ tal que } \frac{d}{dt} \left(\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) > 0. \quad (2.151)$$

Suponhamos por contradição, que (2.151) não ocorra. Então,

$$\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.152)$$

Como $\int_{\Omega} \partial_t u(t) \cdot u(t) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 0$, de (2.146), deduzimos que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \geq \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.153)$$

Por outro lado, de (2.152), concluímos que $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ é limitado, para todo $t \geq 0$. Logo, existe $K \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = K. \quad (2.154)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &\stackrel{(2.153)}{\geq} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\stackrel{(2.145)}{>} \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &> 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &> 0, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

assim, existe uma constante C tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = C \leq 0,$$

mas de (2.154), deduzimos que $C = 0$. Daí, existe uma sequência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = 0. \quad (2.155)$$

De (2.155), (2.145) e (2.153), segue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\partial_t u(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \quad (2.156)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f(u(t_n))u(t_n) \, dx \right] = 0. \quad (2.157)$$

Assim, da identidade de energia e da hipótese $E_u(0) < d$, temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\|\partial_t u(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2}_{=0} + J(u(t_n)) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} E_u(0) < d \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} J(u(t_n)) &\leq E_u(0) < d. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Agora, de (2.141), temos

$$\begin{aligned} J(u) &> \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx \\ \Rightarrow \frac{\theta}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &< \theta J(u(t)) + \int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx \\ \Rightarrow \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &< \theta J(u(t)) + \left[\int_{\Omega} f(u(t))u(t) \, dx - \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Combinando a desigualdade acima com (2.157) e (2.158), segue que $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em V_2 e conseqüentemente, existe uma subsequência de (t_n) (a qual denotaremos da mesma forma) tal que

$$u(t_n) \rightharpoonup u \text{ em } V_2, \quad (2.159)$$

$$u(t_n) \rightarrow u \text{ em } L^r(\Omega), \quad \forall r \geq 1, \quad (2.160)$$

em que a convergência forte acima é oriunda de $V_2 \xhookrightarrow{c} L^r(\Omega)$, para todo $r \geq 1$.

Agora, dividimos a demonstração em dois casos:

Caso 1: $u = 0$

Neste caso, usando a Desigualdade de Trudinger–Moser, segue de (2.160) que

$$\int_{\Omega} f(u(t_n))u(t_n) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u)u \, dx. \quad (2.161)$$

Combinando (2.161) com (2.157), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(u)u \, dx = 0. \quad (2.162)$$

Uma vez que $u(t_n) \in \mathcal{V}_2^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que (2.145) ocorre para $u(t_n)$, então usando (2.162) e a Desigualdade de Trudinger–Moser, obtemos a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{C}{\|u(t_n)\|_{L^4(\Omega)}^4} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição, uma vez que $u = 0$. Logo,

$$\frac{1}{\|u(t_n)\|_{L^4(\Omega)}^4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Caso 2: $u \neq 0$

Como

$$f(u(t_n)) \rightharpoonup f(u) \text{ em } L^2(\Omega), \quad (2.163)$$

de (2.156), (2.163) e da igualdade análoga à (2.39), temos

$$-\Delta u = f(u) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Por outro lado, como $u(t_n) \in \mathcal{V}_2^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $u(t_n) \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (uma vez que com $u \equiv 0$ não obtemos blow-up) e das suposições quanto a função f e do funcional J , existe um único $\lambda_n > 0$ tal que $\lambda_n u(t_n) \in \mathcal{N}$, ou seja,

$$\|\lambda_n \nabla u(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(\lambda_n u(t_n))(\lambda_n u(t_n)) \, dx. \quad (2.164)$$

Uma vez que da Suposição 2.1 temos que $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ é crescente, combinando (2.157),

(2.164) e argumentos similares àqueles utilizados no Lema 3.4 de [6], segue que

$$\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2.165)$$

Assim, usando a Desigualdade de Trudinger–Moser e (2.165), temos

$$\int_{\Omega} f(\lambda_n u(t_n))(\lambda_n u(t_n)) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u)u \, dx.$$

Assim, desta convergência, concluímos que $J(\lambda_n u(t_n))$ e $J(u(t_n))$ são convergentes bem como possuem o mesmo limite e, uma vez que $\lambda_n u(t_n) \in \mathcal{N}$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u(t_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(\lambda_n u(t_n)) \stackrel{(2.119)}{\geq} 0,$$

o que contradiz (2.158).

De ambas as contradições, concluímos que a afirmação (2.151) é válida.

Agora, de (2.150), deduzimos que $\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$ é não decrescente e de (2.151) segue de fato que

$$\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \geq \frac{d}{dt} \left(\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \stackrel{(2.151)}{>} 0, \quad \forall t \geq t_1.$$

Agora estamos aptos a repetir os mesmos argumentos utilizados em [41]. Da desigualdade (2.150), temos

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \frac{5}{4} \frac{d}{dt} \left[\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right]^2 > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

e conseqüentemente,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-1/2} \right) = -\frac{1}{4} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-9/2} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \frac{5}{4} \left[\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right]^2 \right\} < 0.$$

Por outro lado, de (2.151), temos

$$\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-1/2} \right) = -\frac{1}{4} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-5/2} \frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) < 0, \quad \forall t \geq t_1.$$

Das desigualdade acima, segue que a função $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-1/2}$ é decrescente e côncava para todo $t \geq t_1$. Assim, existe $0 < T < +\infty$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow T_-} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-1/2} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow T_-} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = +\infty,$$

o que prova o Teorema 2.33. ■

2.3 Equação da onda com termo fonte de crescimento exponencial em uma variedade Riemanniana, compacta, sem bordo de dimensão 2

Nesta seção, apresentamos as ferramentas necessárias para a realização de um estudo das propriedades intrínsecas das soluções da seguinte equação da onda com termo fonte de crescimento exponencial, sujeita a um amortecimento não linear localmente distribuída. Mais precisamente, consideramos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathcal{M}, \end{cases} \quad (2.166)$$

em que \mathcal{M} é uma variedade Riemanniana, compacta, sem bordo de dimensão 2, \mathbf{g} é a sua métrica Riemanniana, $-\Delta_{\mathbf{g}}$ denota o operador de Laplace–Beltrami em $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e $\nabla_{\mathbf{g}}$ é sua conexão Riemanniana. Além disso, f e g satisfazem as Suposições 2.1 e 2.6 e $a(\cdot)$ é a função real satisfazendo a suposição abaixo.

Suposição 2.37. A função real não negativa $a = a(\cdot)$, responsável pelo efeito dissipativo localizado é assumida ser de classe $C^0(\mathcal{M})$ e $a(x) \geq a_0 > 0$ sobre um conjunto $\omega \subset \mathcal{M}$.

Quanto ao conjunto ω , diferente das seções anteriores, realizamos a seguinte suposição, conhecida como *Condição Geométrica de Controle* (CGC):

Suposição 2.38. O conjunto ω controla geometricamente \mathcal{M} , i.e., existe $T_0 > 0$, tal que

todo raio da ótica geométrica da métrica \mathbf{g} viajando com velocidade constante igual a 1 e partindo de $t = 0$, encontra o conjunto ω em um tempo $t < T_0$.

Observação 2.39. Existem variedade Riemannianas que podemos identificar as suas geodésicas. Este é o caso de algumas variedades Riemannianas sem bordo. Neste caso, não é difícil identificar uma região ótima ω satisfazendo a condição geométrica de controle. De fato, apresentamos abaixo, dois exemplos de pares (\mathcal{M}, ω) satisfazendo isso:

- i) $\mathcal{M} = S^2$ e ω é a vizinhança de algum equador.

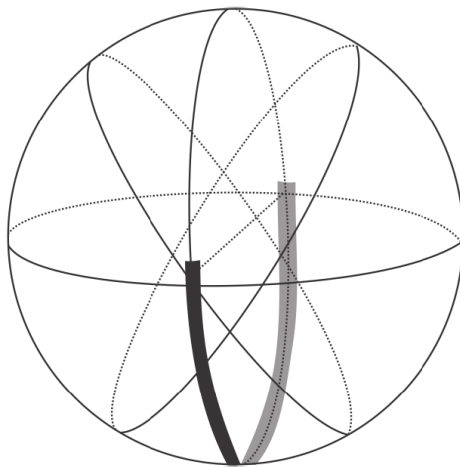


Fig. 2.3: A região escura denota o conjunto ω e intercepta todas as geodésicas (círculos máximos) sobre a esfera.

- ii) $\mathcal{M} = \mathbb{T}^2$ (toro bidimensional) e $\omega = V(C_0) \cup V(C_1)$ em que C_0 é um círculo gerador, C_1 é o seu maior (exterior) círculo e $V(C_i)$ denota a vizinhança do círculo C_i , com $i = 0, 1$.

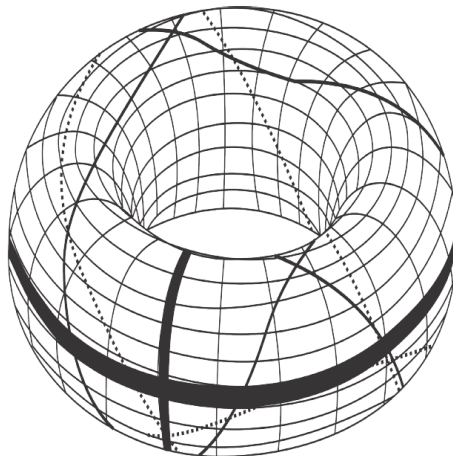


Fig. 2.4: A região escura denota o conjunto ω e intercepta todas as geodésicas sobre o toro.

Por fim, apresentamos uma suposição análoga ao Princípio de Continuação Única dada na Suposição 2.7. A saber:

Suposição 2.40. Dado $T > 0$, a única solução $v \in C([0, T[; L^2(\mathcal{M})) \cap C([0, T[; V')$, com V' sendo o dual topológico de $V = \{u \in H^1(\mathcal{M}) / \int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M} = 0\}$, que satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta_{\mathbf{g}} v + W(x, t)v = 0 & \text{em } \mathcal{M} \times (0, T), \\ v = 0 & \text{sobre } \omega, \end{cases}$$

em que $W \in L^\infty(\mathcal{M} \times (0, T))$, é a solução trivial, i.e., $v \equiv 0$.

Apresentamos abaixo, uma adequação da Desigualdade de Trudinger–Moser utilizada nas seções anteriores, mas agora em uma variedade Riemanniana, compacta, sem bordo de dimensão 2, que pode ser encontrada em [28] e [66].

Teorema 2.41 (Desigualdade de Trudinger–Moser para variedades). Se \mathcal{M} é uma variedade Riemanniana, compacta, sem bordo de dimensão 2, temos que

$$\sup_{\substack{\|\nabla_{\mathbf{g}} u\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq 1 \\ \int_{\mathcal{M}} u \, d\mathcal{M} = 0}} \int_{\mathcal{M}} e^{\alpha\pi|u|^2} \, d\mathcal{M} \leq C(\mathcal{M}, \mathbf{g}), \quad \forall \alpha \leq 4\pi.$$

Consideramos o espaço de fase $\mathcal{H} = V \times L^2(\mathcal{M})$, que é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$((u_1, u_2), (v_1, v_2))_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{M}} \nabla_{\mathbf{g}} u_1 \cdot \nabla_{\mathbf{g}} v_1 + u_2 \cdot v_2 \, d\mathcal{M}.$$

Considere o operador coercivo $A : V \rightarrow V'$ definido por $\langle Au, v \rangle = \int_{\mathcal{M}} \nabla_{\mathbf{g}} u \cdot \nabla_{\mathbf{g}} v \, d\mathcal{M}$, para cada $v \in V$ e o operador maximal monótono $B : V \rightarrow V'$ dado por $(Bv)(x) = a(x)g(v(x))$, com $x \in \mathcal{M}$. Além disso, definimos o conjunto $D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in \mathcal{H} / v \in V \text{ e } Au + Bv \in L^2(\mathcal{M})\}$ e os operadores não lineares $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por $\mathcal{A}(u, v) = (-v, Au + Bv)$ que é maximal monótono e $\mathbb{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por $\mathbb{B}(u, v) = (0, f(u))$, o qual é localmente Lipschitz. As demonstrações das propriedades dos operadores A, B, \mathcal{A} e \mathbb{B} seguem similares às provas já realizadas na subseção 2.1.1. A única ressalva é quanto a utilização da desigualdade de Trudinger–Moser para variedades dada pelo Teorema 2.41, na obtenção da propriedade de \mathbb{B} ser

localmente Lipschitz, ao invés da utilização do Teorema 1.76.

Assim, podemos reformular o problema (2.166) no seguinte problema de Cauchy em \mathcal{H} :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathbb{B}U(t) = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

com $U(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ e $U_0 = (u_0, u_1)$. Nesta perspectiva, utilizando os mesmos argumentos e realizando as devidas substituições para a obtenção do Teorema 2.9, conquistamos o seguinte teorema.

Teorema 2.42 (Local no tempo). Assumindo as Suposições 2.1, 2.5, 2.6 e 2.37, temos que o problema (2.166), gera um semigrupo não linear sobre \mathcal{H} . Além disso,

i) Se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, existe uma única solução generalizada

$$u \in C([0, T_{\max}); V) \cap C^1([0, T_{\max}); L^2(\mathcal{M})).$$

ii) Se $(u_0, u_1) \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte

$$(u, \partial_t u) \in W^{1,\infty}([0, T_{\max}); \mathcal{H}).$$

Tal como na obtenção da extensão global e decaimento uniforme para a solução do Problema (2.1), podemos definir o termo fonte truncado f_k como em (2.19) e o operador não linear globalmente Lipschitz \mathbb{B}_k . Por fim, empregando os mesmos argumentos (com as devidas substituições) para a obtenção da extensão global de solução (Teorema 2.14), obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.43 (Global no tempo). Assumindo as Suposições 2.1, 2.4, 2.5 e 2.6, então dados $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, o problema (2.166), possui uma única solução global na classe

$$u \in C([0, T]; V), \quad \partial_t u \in C([0, T]; L^2(\mathcal{M})), \quad \partial_t^2 u \in L^2(0, T; V'), \quad \forall T > 0.$$

Além disso, a identidade de energia é verificada

$$E_u(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{M}} a(x)g(\partial_t u(x, t))\partial_t u(x, t) \, d\mathcal{M} \, dt = E_u(t_1),$$

com

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u(x, t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}} u(x, t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \right] + \int_{\mathcal{M}} F(u(x, t)) \, d\mathcal{M}.$$

Agora, com o intuito de obtermos o resultado de decaimento uniforme da energia, devemos obter a Desigualdade de Observabilidade para o problema (2.166), a qual alcançaremos via problemas truncados.

Nesta perspectiva, utilizando os mesmos argumentos anteriores ao Lema 2.15, mas agora com $T_0 > 0$ sendo a constante de observabilidade independente de k dada pela Suposição 2.38, obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.44 (Desigualdade de Observabilidade para variedade - Truncado). Sejam $r, R > 0$, $T \geq T_0$ e $k \geq 1$. Sob as hipóteses do Teorema 2.43 e admitindo as Suposições 2.38 e 2.40, existe $C = C(k, r, R, T) > 0$ tal que a correspondente solução u_k para o problema truncado com $(u_{0k}, u_{1k}) \in D(\mathcal{A})$ distante da origem (i.e., verificando (2.63)) satisfaz a Desigualdade de Observabilidade

$$E_{u_k}(0) \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) [|\partial_t u_k(x, t)|^2 + |g(\partial_t u_k(x, t))|^2] \, d\mathcal{M} \, dt, \quad \text{para } T \geq T_0.$$

Além disso, se $(u_{0k}, u_{1k}) \rightarrow (u_0, u_1)$ em \mathcal{H} tal que $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ e $r < E_u(0) < R$, então existe $T^* \geq T_0$ tal que C pode ser escolhido independente de k , sempre que $T \geq T^*$.

Esboço da demonstração. A prova deste lema segue de forma análoga à do Lema 2.15, fazendo as devidas substituições dos espaços $H_0^1(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$ por V , $L^q(\mathcal{M})$ e V' e levando em conta que, uma vez que \mathcal{M} é uma variedade sem bordo, não temos um problema de fronteira. Além disso, neste caso, o operador de D'Alembert é denotado por $\square_{\mathbf{g}} = \partial_t^2 - \Delta_{\mathbf{g}}$ e seguindo as mesmas argumentações já realizadas, obtemos uma medida de defeito microlocal μ , tal que $\text{supp } \mu = \emptyset$, já que ω verifica a Suposição 2.38, i.e., ω controla geometricamente \mathcal{M} , então as bicaracterísticas $m_{\pm}(t)$ tocam $\omega \times (0, T)$. ■

A partir deste ponto, a Desigualdade de Observabilidade para o problema (2.166), os resultados de decaimento uniforme da energia e os exemplos de taxas de decaimento uniforme, seguem de forma semelhante aos problemas pretéritos.

Observação 2.45. Nos focamos somente no caso $+f(u)$ no problema (2.166), contudo

é possível fazer um estudo para o caso $-f(u)$ de forma análoga ao que foi realizado nos problemas (2.121) e (2.138) ($a(\cdot) \equiv 1$).

ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA UM MODELO DA ONDA 2D COM MEMÓRIA LOCALIZADA EM UMA ESTRUTURA DE HISTÓRIA PASSADA E TERMO FONTE DE CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Este estudo, realizado em parceria com Marcelo Moreira Cavalcanti, Valéria Neves Domingos Cavalcanti e André Vicente foi publicado em [61].

Neste capítulo, estabelecemos a boa colocação, bem como o decaimento uniforme para a solução do seguinte modelo da onda com amortecimento viscoelástico localmente distribuído e história passada:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(\cdot, t-s)] \, ds + b(x) \partial_t u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, s) = u^0(x, s), \quad \partial_t u(x, s) = \partial_t u^0(x, s), & (x, s) \in \Omega \times (-\infty, 0], \end{cases} \quad (3.1)$$

em que Ω é um domínio aberto, limitado e conexo de \mathbb{R}^2 , com fronteira suave $\partial\Omega$. Aqui, g representa o núcleo da memória, $a(\cdot) \geq 0$ é uma função suave e positiva ao redor de uma vizinhança inteira de $\partial\Omega$, $b(\cdot) \geq 0$ é uma função limitada agindo efetivamente sobre uma vizinhança de ∂A em que $A = \{x \in \Omega / a(x) = 0\}$ (ver a Figura 3.1), f possui um crescimento exponencial dado como na Suposição 2.1 e $u^0 : \Omega \times (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ descreve a

história passada de u .

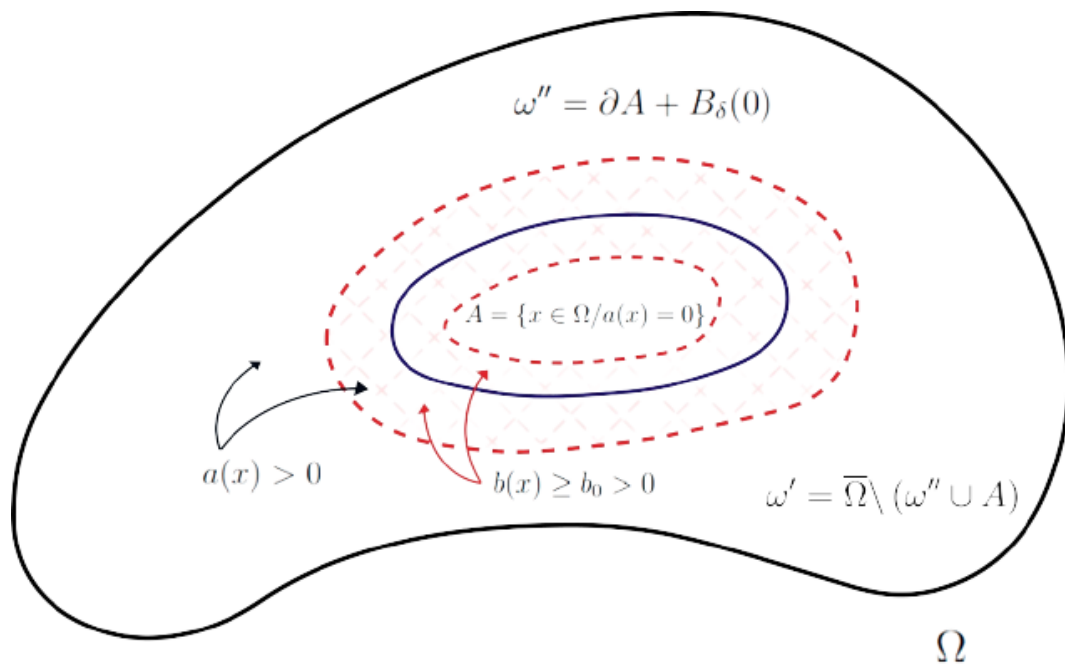


Fig. 3.1: $b(x)$ é efetivo em uma vizinhança da fronteira ∂A do conjunto $A = \{x \in \Omega / a(x) = 0\}$ violando a Condição de Controle Geométrico e $\delta > 0$ é tomado suficientemente pequeno.

Para demonstrarmos os nossos resultados, utilizando as ideias de Dafermos [30] e seguindo Giorgi, Rivera e Pata [36], definimos uma nova variável η que corresponde a história de deslocamento relativo,

$$\eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad s \in (0, \infty). \quad (3.2)$$

De modo formal, temos $\partial_t \eta^t(x, s) = \partial_t u(x, t) - \partial_t u(x, t - s)$ e $\partial_s \eta^t(x, s) = \partial_t u(x, t - s)$.

Ainda, segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \eta^t(x, s) + \partial_s \eta^t(x, s) = \partial_t u(x, t), \quad (x, t, s) \in \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ \eta^0(x, s) = u^0(x, 0) - u^0(x, -s), \quad (x, s) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \eta^t(x, 0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \eta^t(x, s) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty), \\ \eta^t(x, s) = 0, \quad (x, s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Pela definição de η , temos

$$\int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(t-s)] \, ds = g_0 \operatorname{div}[a(x) \nabla u(t)] - \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla \eta^t(x, s)] \, ds,$$

em que $g_0 = \int_0^\infty g(s) \, ds \in (0, 1)$.

Neste sentido, definindo

$$\kappa(x) = 1 - g_0 a(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.4)$$

podemos reescrever o modelo (3.1) como um modelo autônomo dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u - \operatorname{div}[\kappa(x) \nabla u] - \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla \eta^t(\cdot, s)] \, ds + b(x) \partial_t u + f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t \eta + \partial_s \eta = \partial_t u \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \quad \eta^t(x, s) = 0, \quad (x, s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) := u^0(x, 0), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s) := u^0(x, 0) - u^0(x, -s), \quad (x, s) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \eta^t(x, 0) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty). \end{array} \right. \quad (3.5)$$

3.1 Boa Colocação

O objetivo desta seção é estabelecer resultados de existência, unicidade e extensão global para solução do modelo (3.5). Neste sentido, apresentamos algumas suposições necessárias e definimos os espaços funcionais essenciais para o nosso estudo.

Suposição 3.1. Assumimos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:

- i) Para cada $\beta > 0$, existe $C_\beta > 0$ tal que $|f^{(i)}(t)| \leq C_\beta e^{\beta t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, com $i = 0, 1$.
- ii) Próximo à origem, temos que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$.
- iii) A função $\frac{f(t)}{t}$ é crescente em $(0, +\infty)$.

O termo fonte f apresentado na Suposição 3.1 é exatamente o mesmo do apresentado na Suposição 2.1 para o problema (2.1), assim, as estimativas (2.4), (2.5) e (2.6) seguem de forma análoga. Ainda, consideramos novamente a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz como hipótese para o nosso modelo a fim de obtermos a extensão global de solução.

Suposição 3.2 (Condição de Ambrosetti–Rabinowitz). Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(t) < f(t)t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Com o intuito de provarmos que a energia do modelo decai assintoticamente à zero quando $t \rightarrow \infty$, devemos assumir que o núcleo g é exponencialmente estável, a saber:

Suposição 3.3. Existe uma constante $\xi > 0$ tal que

$$g'(t) \leq -\xi g(t), \quad \forall t > 0. \quad (3.6)$$

Suposição 3.4. Com respeito às funções g , $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$, assumimos que:

i) $g \in L^1(0, \infty) \cap C^1([0, \infty))$ é uma função não-crescente e positiva tal que

$$\int_0^\infty g(s) \, ds := g_0 \in (0, 1).$$

ii) $a(\cdot) \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma função não-negativa satisfazendo

$$l := 1 - g_0 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} > 0, \quad (3.7)$$

e existe um conjunto fechado e conexo $A \subset\subset \Omega$ tal que $a(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$, i.e., A é o conjunto em que o efeito viscoelástico é não efetivo.

iii) $b \in C^0(\overline{\Omega})$ é uma função não-negativa tal que

$$b(x) \geq b_0 > 0 \quad \text{q.s. em } \omega'',$$

em que ω'' é uma vizinhança de ∂A .

Observação 3.5. Algumas considerações quanto ao conjunto A definido acima, merecem ser apresentadas:

i) O conjunto A é fechado. Com efeito, sejam $(x_n) \subset A$ e $x \in \Omega$ tais que $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. Como $a(\cdot)$ é contínua, então $a(x_n) \rightarrow a(x)$, mas $a(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $a(x) = 0$, e assim $x \in A$.

ii) Como A é fechado, segue que $\partial\Omega \cap A = \emptyset$. Assim, o conjunto ω' está bem definido. Como ω' é compacto, $a(x) > 0$, para todo $x \in \omega'$ e $a(\cdot)$ é contínua, existe $M > 0$ tal que $a(x) \geq M > 0$, para todo $x \in \omega'$. Assim, $\partial\omega' = \partial\Omega \cup \partial(\omega'' \cup A)$.

Suposição 3.6 (Princípio de Continuação Única). Dado $T > 0$, a única solução v no espaço $C((0, T); L^2(\Omega)) \cap C((0, T); H^{-1}(\Omega))$ para o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla v] + V(x, t)v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{sobre } \omega'', \end{cases}$$

em que $V \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$, é a solução trivial, isto é, $v \equiv 0$.

Consideramos o espaço de Hilbert

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

munido da topologia dada pela norma

$$\|u\|_1^2 = \int_{\Omega} \underbrace{(1 - g_0 a(x))}_{=\kappa(x)} |\nabla u|^2 \, dx,$$

a qual é equivalente a norma usual de $H_0^1(\Omega)$ levando (3.7) em consideração.

Dado $a(\cdot)$ satisfazendo o item ii) da Suposição 3.4, definimos o espaço

$$H_a^1 = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 \, dx < \infty, u|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \quad (3.8)$$

com produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$(u, v)_{H_a^1} = \int_{\Omega} a(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{H_a^1}^2 = \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx.$$

Observe que:

i) o traço de ordem zero de u está bem definido em $\partial\Omega$ nas condições do conjunto H_a^1 .

De fato, temos $u \in L^2(\omega')$ e

$$\int_{\omega'} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{M} \int_{\omega'} a(x) |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{M} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx < \infty,$$

ou seja, $u \in H^1(\omega')$. Logo, considerando a aplicação traço de ordem zero

$$\gamma_0 : H^1(\omega') \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega \cup \partial(\omega'' \cup A)),$$

temos que $\gamma_0(u)$ está bem definido quase sempre em $\partial\Omega$.

ii) H_a^1 é um espaço de Hilbert munido do produto interno definido acima. De fato, seja $(u_n) \subset H_a^1$ uma sequência de Cauchy. Então,

$$\|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{a(\cdot)} \nabla u_n - \sqrt{a(\cdot)} \nabla u_m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0, \text{ quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Como $L^2(\Omega)$ é completo, existem $u \in L^2(\Omega)$ e $v \in [L^2(\Omega)]^3$, tais que $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ e $\sqrt{a(\cdot)} \nabla u_n \rightarrow v$ em $[L^2(\Omega)]^3$. Em particular, do fato que $a(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$ e da convergência $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$, temos que $a(\cdot) \nabla u_n \rightarrow a(\cdot) \nabla u$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Pela imersão $[L^2(\Omega)]^3 \hookrightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ e pela unicidade do limite em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$, resulta que $\sqrt{a(\cdot)} v = a(\cdot) \nabla u \in [L^2(\Omega)]^3$. Em particular, $a(\cdot) \nabla u = \sqrt{a(\cdot)} v$ em $[L^2(\Omega \setminus A)]^3$, o que implica em $\sqrt{a(\cdot)} (\sqrt{a(\cdot)} \nabla u - v) = 0$, q.s. em $\Omega \setminus A$, isto é, $\sqrt{a(\cdot)} \nabla u - v = 0$, q.s. em $\Omega \setminus A$, e ainda, $\sqrt{a(\cdot)} \nabla u = v$ q.s. em $\Omega \setminus A$. Além disso,

$$\int_{\omega'} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{M} \int_{\omega'} a(x) |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \rightarrow 0,$$

em que concluímos que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\omega')$. Pela continuidade de γ_0 , obtemos $\gamma_0(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_0(u_n) = 0$ q.s. em $\partial\Omega$. Portanto, $u \in H_a^1$ e $u_n \rightarrow u$ em H_a^1 .

Definimos também o espaço L^2 com peso g

$$L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1) = \left\{ \eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow H_a^1 / \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_{H_a^1}^2 ds < \infty \right\} \quad (3.9)$$

munido com o produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$(\eta, \zeta)_{L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)} = \int_0^\infty g(s)(\eta(s), \zeta(s))_{H_a^1} ds \quad \text{e} \quad \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)}^2 = \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_{H_a^1}^2 ds.$$

Sob as notações acima, definimos o seguinte espaço de fase com o intuito de obter os resultados de existência e unicidade de solução local para o modelo (3.5), além de sua extensão global e decaimento uniforme,

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1),$$

munido com a norma $\|(u, v, \eta)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)}^2$.

Denotando por U a função vetorial $U = (u, v, \eta)$, em que $v = \partial_t u$, podemos formular o seguinte problema de Cauchy em \mathcal{H}

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) + \mathbb{B}U(t) = \mathcal{A}U(t), & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.10)$$

em que $U_0 := (u_0, u_1, \eta_0)$, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u] + \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla\eta(s)] ds - b(x)v \\ -\partial_s\eta + v \end{pmatrix}$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (u, v, \eta) \in \mathcal{H} \middle/ \begin{array}{l} v \in H_0^1(\Omega), \partial_s\eta \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1), \eta(0) = 0, \\ \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u] + \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla\eta(s)] ds \in L^2(\Omega) \end{array} \right\}$$

e $\mathbb{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador não linear $\mathbb{B}(u, v, \eta) = (0, f(u), 0)$.

Estamos em condições de estabelecer o nosso resultado de boa colocação para o problema de Cauchy (3.10), o que garantirá que o modelo (3.5) é localmente bem posto. Para obter este fato, empregaremos o Teorema 1.59 e, com esta finalidade, precisamos provar

que os operadores \mathcal{A} e \mathbb{B} são maximal monótono e localmente Lipschitz, respectivamente.

Teorema 3.7 (Local no tempo). Assumindo as Suposições 3.1, 3.3 e 3.4, temos que o modelo (3.5) gera um semigrupo não linear sobre \mathcal{H} . Além disso,

i) Se $U_0 \in \mathcal{H}$, existe uma única solução generalizada

$$u \in C([0, T_{\max}); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_{\max}); L^2(\Omega)), \quad \eta \in C([0, T_{\max}); L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)).$$

ii) Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte

$$(u, \partial_t u, \eta) \in W^{1,\infty}([0, T_{\max}); \mathcal{H}).$$

Demonstração. Primeiramente, provaremos que \mathcal{A} é um operador maximal monótono. Seja $U = (u, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$ e considere $\nu > 0$ tal que $\nu > \max\left\{\frac{g_0}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, então

$$\begin{aligned} & ((\mathcal{A} - \nu I)U, U)_{\mathcal{H}} \\ &= \int_{\Omega} (1 - g_0 a(x)) \nabla v \nabla u \, dx - \nu \int_{\Omega} (1 - g_0 a(x)) |\nabla u|^2 \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \operatorname{div}[\kappa(x) \nabla u] + \int_0^{\infty} g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla \eta] \, ds \right\} v \, dx - \int_{\Omega} b(x) |v|^2 \, dx - \nu \int_{\Omega} |v|^2 \, dx \\ &- \int_0^{\infty} \int_{\Omega} g(s) (\partial_s \eta) \eta \, dx \, ds - \int_0^{\infty} \int_{\Omega} g(s) a(x) \nabla (\partial_s \eta) \nabla \eta \, dx \, ds + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} g(s) v \eta \, dx \, ds \\ &+ \int_0^{\infty} \int_{\Omega} g(s) a(x) \nabla v \nabla \eta \, dx \, ds - \nu \int_0^{\infty} \int_{\Omega} g(s) |\eta|^2 \, dx \, ds - \nu \int_0^{\infty} \int_{\Omega} g(s) a(x) |\nabla \eta|^2 \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes, note que

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} [(\partial_s \eta) \eta + a(x) \nabla (\partial_s \eta) \nabla \eta] \, dx \, ds &= - \int_0^{\infty} g(s) (\partial_s \eta, \eta)_{H_a^1} \, ds \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(s) \frac{d}{ds} \|\eta(s)\|_{H_a^1}^2 \, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g'(s) \|\eta(s)\|_{H_a^1}^2 \, ds \leq 0, \end{aligned}$$

pois $g'(s) \leq 0$, para todo $s \in (0, \infty)$, $g(s) \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow \infty$ e $\eta(0) = 0$. Ainda, usando

as Desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s) \int_\Omega v \eta \, dx \, ds &\leq \int_0^\infty \left(\int_\Omega g(s) |v|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega g(s) |\eta|^2 \, dx \right)^{1/2} \, ds \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_\Omega g(s) |v|^2 \, dx \, ds + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_\Omega g(s) |\eta|^2 \, dx \, ds \\
&= \frac{g_0}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds,
\end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned}
((\mathcal{A} - \nu I)U, U)_{\mathcal{H}} &\leq - \int_\Omega b(x) |v|^2 \, dx - (\nu - \frac{g_0}{2}) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - (\nu - \frac{1}{2}) \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds + \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\eta(s)\|_{H_1^1}^2 \, ds \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Da escolha de ν e da Suposição 3.4, a desigualdade acima mostra a dissipatividade do operador $\mathcal{A} - \nu I$.

Agora, vamos mostrar que $R(I - (\mathcal{A} - \nu I)) = \mathcal{H}$, ou seja, $R((1 + \nu)I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Com efeito, dados $(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{H}$, vamos mostrar que existe $(u, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\begin{cases} (1 + \nu)u - v = f_1, \\ (1 + \nu)v - \{\operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u] + \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla \eta] \, ds\} + b(x)v = f_2, \\ (1 + \nu)\eta + \partial_s \eta - v = f_3. \end{cases} \quad (3.11)$$

No que segue, procedemos formalmente. Seja $s > 0$. Multiplicando (3.11)₃ por $e^{(1+\nu)\tau}$, temos

$$(1 + \nu)\eta(\tau) e^{(1+\nu)\tau} + \partial_\tau \eta(\tau) e^{(1+\nu)\tau} - v e^{(1+\nu)\tau} = f_3(\tau) e^{(1+\nu)\tau},$$

ou ainda,

$$\frac{d}{d\tau} [\eta(\tau) e^{(1+\nu)\tau}] = f_3(\tau) e^{(1+\nu)\tau} + v e^{(1+\nu)\tau}, \quad \forall \tau > 0.$$

Integrando em $(0, s)$, temos

$$\eta(s) = \int_0^s f_3(\tau) e^{(1+\nu)(\tau-s)} \, d\tau + \frac{v}{1 + \nu} (1 - e^{-(1+\nu)s}). \quad (3.12)$$

Substituindo a expressão de u dada por (3.11)₁ e (3.12) em (3.11)₂, obtemos

$$\begin{aligned} & [(1 + \nu) + b(x)]v - \frac{1}{1 + \nu} \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla v] - \frac{1}{1 + \nu} \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-(1+\nu)s}) \operatorname{div}[a(x)\nabla v] \, ds \\ &= f_2 + \frac{1}{1 + \nu} \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla f_1] + \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{(1+\nu)(\tau-s)} \operatorname{div}[a(x)\nabla f_3(\tau)] \, d\tau \, ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A identidade acima nos inspira a definir a seguinte forma bilinear, a qual será contínua e coerciva em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_\Omega [(1 + \nu) + b(x)]zw \, dx + \frac{1}{1 + \nu} \int_\Omega \kappa(x)\nabla z \cdot \nabla w \, dx \\ &+ \frac{1}{1 + \nu} \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-(1+\nu)s}) \, ds \int_\Omega a(x)\nabla z \cdot \nabla w \, dx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

para cada $z, w \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, fazendo

$$\begin{aligned} f_1^* &:= \frac{1}{1 + \nu} \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla f_1], \\ f_2^* &:= f_2, \\ f_3^* &:= \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{(1+\nu)(\tau-s)} \operatorname{div}[a(x)\nabla f_3(\tau)] \, d\tau \, ds, \end{aligned}$$

e identificando $L^2(\Omega)$ com o seu dual topológico $[L^2(\Omega)]'$, podemos concluir que $f_1^*, f_2^*, f_3^* \in H^{-1}(\Omega)$. De fato, isso é óbvio para f_1^* and f_2^* , uma vez que $f_1 \in H_0^1(\Omega)$ e $f_2 \in L^2(\Omega)$. Agora, como g é não-crescente, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^s g(s) e^{(1+\nu)(\tau-s)} \|a(\cdot)\nabla f_3(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \, d\tau \, ds \\ & \leq \|\sqrt{a(\cdot)}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^\infty \int_\tau^\infty g(s) e^{(1+\nu)(\tau-s)} \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla f_3(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \, ds \, d\tau \\ & \leq \|\sqrt{a(\cdot)}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^\infty g(\tau) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla f_3(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \, d\tau \int_\tau^\infty e^{(1+\nu)(\tau-s)} \, ds \, d\tau \\ & \leq \frac{\|\sqrt{a(\cdot)}\|_{L^\infty(\Omega)}}{1 + \nu} \int_0^\infty g(\tau) \|\sqrt{a(\cdot)}\nabla f_3(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \, d\tau \\ & \leq \frac{\|\sqrt{a(\cdot)}\|_{L^\infty(\Omega)}}{1 + \nu} \sqrt{g_0} \left(\int_0^\infty g(\tau) \|f_3(\tau)\|_{H_a^1}^2 \, d\tau \right)^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

visto que $f_3 \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)$. Assim, se $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, segue que

$$\langle f_3^*, \varphi \rangle = - \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{(1+\nu)(\tau-s)} \int_\Omega a(x) \nabla f_3(\tau) \cdot \nabla \varphi \, dx \, d\tau \, ds,$$

e conseqüentemente,

$$|\langle f_3^*, \varphi \rangle| \leq \frac{\|\sqrt{a(\cdot)}\|_{L^\infty(\Omega)}}{1+\nu} \sqrt{g_0} \left(\int_0^\infty g(\tau) \|f_3(\tau)\|_{H_a^1}^2 \, d\tau \right)^{1/2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

o que implica que $f_3^* \in H^{-1}(\Omega)$. Do Teorema de Lax-Milgram, existe um único $\widehat{v} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(\widehat{v}, w) = \langle f_1^* + f_2^* + f_3^*, w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $\widehat{u} = \frac{1}{1+\nu}(f_1 + \widehat{v})$, então

$$\widehat{u}, \widehat{v} \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad (1+\nu)\widehat{u} - \widehat{v} = f_1. \quad (3.15)$$

Além disso, de (3.12) temos

$$\widehat{\eta}(s) = \int_0^s f_3(\tau) e^{(1+\nu)(\tau-s)} \, d\tau + \frac{\widehat{v}}{1+\nu} (1 - e^{-(1+\nu)s}), \quad s > 0, \quad (3.16)$$

que implica que $\widehat{\eta} \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)$, uma vez que temos $f_3 \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)$ e $\widehat{v} \in H_0^1(\Omega)$.

Tomando sua derivada com respeito à s , também obtemos

$$\partial_s \widehat{\eta}(s) = -(1+\nu) \left[\widehat{\eta}(s) - \frac{\widehat{v}}{1+\nu} \right] + f_3(s),$$

que estabelece que

$$\widehat{\eta}, \partial_s \widehat{\eta} \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1), \quad \widehat{\eta}(0) = 0 \quad \text{e} \quad (1+\nu)\widehat{\eta}(s) + \partial_s \widehat{\eta}(s) - \widehat{v} = f_3(s).$$

Por fim, voltando à identidade (3.13) e substituindo as identidades para \widehat{u} e $\widehat{\eta}$ dadas em (3.15) e (3.16), concluímos que

$$\operatorname{div}[\kappa(x) \nabla \widehat{u}] + \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla \widehat{\eta}] \, ds = [(1+\nu) + b(x)]\widehat{v} - f_2,$$

e uma vez que o lado direito da expressão acima está em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\operatorname{div}[\kappa(x)\nabla\widehat{u}] + \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla\widehat{\eta}] \, ds \in L^2(\Omega). \quad (3.17)$$

Portanto, de (3.15)–(3.17) obtemos que $(\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{\eta}) \in D(\mathcal{A})$ e satisfaz (3.11), como desejado. Assim, o operador \mathcal{A} é maximal monótono.

A prova de que \mathbb{B} é localmente Lipschitz, segue de forma análoga àquela já feita antes do Teorema 2.9.

Dos fatos provados acima, empregando o Teorema 1.59, concluimos a prova. \blacksquare

3.1.1 Sequência de modelos truncados com termos fonte truncados

O Princípio de Continuação Única (Suposição 3.6) que utilizaremos neste modelo, tal como nos do Capítulo 2, é válido para termos de fonte Lipschitz contínuos, propriedade não garantida para f nas condições da Suposição 2.1. Neste sentido, tal como anteriormente, não apenas mostraremos a existência e unicidade de uma solução global (u, η) , como também construiremos uma sequência de soluções fortes $(u_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$, associadas a modelos truncados, cujos termos fonte f_k são Lipschitz contínuos.

Tendo isso em vista e utilizando novamente as ideias presentes em [44], consideramos a seguinte sequência de modelos aproximados com termos fonte truncados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u_k - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u_k] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla \eta_k^t(\cdot, s)] \, ds \\ \qquad \qquad \qquad + b(x)\partial_t u_k + f_k(u_k) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t \eta_k^t + \partial_s \eta_k^t = \partial_t u_k \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_k = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad \eta_k^t = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0k}(x), \quad \partial_t u_k(x, 0) = u_{1k}(x), \quad \eta_k^0(x, s) = \eta_{0k}(x, s), \quad x \in \Omega, \quad s \in (0, \infty), \\ \eta_k^t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty), \end{array} \right. \quad (3.18)$$

em que $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k})$ é uma sequência a ser definida através da convergência (3.22) abaixo, a história passada do novo modelo é definida por

$$u_k(x, -s) = u_k^0(x, -s) := u_k^0(x, 0) - \eta_k^0(x, s), \quad \text{para todo } (x, s) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (3.19)$$

a função auxiliar η_k^t é dada por

$$\eta_k^t(x, s) = u_k(x, t) = u_k(x, t - s), \text{ para todo } (x, t, s) \in \Omega \times [0, \infty) \times (0, \infty) \quad (3.20)$$

e para cada $k \in \mathbb{N}$, f_k é definida como em (2.19). Além disso, ressaltamos que f_k é globalmente Lipschitz, graças ao Lema 2.12.

Façamos agora $W_k(t) = (u_k(t), \partial_t u_k(t), \eta_k^t)$. Assim o modelo (3.18) pode ser reformulado como o seguinte problema de Cauchy em \mathcal{H} :

$$\begin{cases} \partial_t W_k(t) + \mathbb{B}_k W_k(t) = \mathcal{A}W_k(t), \\ W_k(0) = (u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}), \end{cases} \quad (3.21)$$

em que $\mathbb{B}_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador não linear dado por $\mathbb{B}_k(u, v, \eta) = (0, f_k(u), 0)$ o qual é, para cada $k \in \mathbb{N}$, globalmente Lipschitz, uma vez que f_k o é. Assim, de forma análoga ao que foi feito para o Teorema 3.7, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução (u_k, η_k) para o problema (3.21), com $u_k \in C([0, T_{\max}^k]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_{\max}^k]; L^2(\Omega))$ e $\eta_k \in C([0, T_{\max}^k]; L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1))$.

Consideramos $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$. Uma vez que $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} , existe uma sequência $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k})_{k \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$ tal que

$$(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}) \longrightarrow (u_0, u_1, \eta_0) \text{ em } \mathcal{H}. \quad (3.22)$$

Multiplicando (3.18)₁ por $\partial_t u_k$ e empregando a Fórmula de Green, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(x)} \nabla u_k(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F_k(u_k(t)) \, dx \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds + \int_{\Omega} b(x) \partial_t u_k(t)^2 \, dx \\ + \int_0^\infty (-g'(s)) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds = 0, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k), \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que F_k é como em (2.23). Assim, de (3.23), obtemos a identidade de energia para o

modelo truncado (3.18), i.e.,

$$\begin{aligned} E_{u_k, \eta_k}(t_2) - E_{u_k, \eta_k}(t_1) \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} b(x) \partial_t u_k^2(x, t) \, dx \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\infty} \int_{\Omega} g'(s) a(x) |\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds \, dt, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t_1 < t_2 < T_{\max}^k$, em que

$$\begin{aligned} E_{u_k, \eta_k}(t) = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u_k(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(x)} \nabla u_k(x, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ + \int_{\Omega} F_k(u_k(x, t)) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds \end{aligned}$$

é o funcional de energia associado ao modelo truncado.

Como podemos obter a estimativa (2.25) novamente, utilizamo-a juntamente com as Suposições 3.3 e 3.4 e a convergência (3.22) para obtermos a estimativa

$$\begin{aligned} E_{u_k, \eta_k}(t) + \int_0^t \int_{\Omega} b(x) \partial_t u_k^2(x, t) \, dx \, dt + \int_0^t \int_0^{\infty} \int_{\Omega} -g'(s) a(x) |\nabla \eta_k^t(x, s)|^2 \, dx \, ds \, dt \\ \leq \frac{1}{2} \left[\|u_{1k}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(x)} \nabla u_{0k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ + \int_{\Omega} F_k(u_{0k}) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta_{0k}|^2 \, dx \, ds \\ = C_R, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k), \end{aligned} \tag{3.24}$$

com $C_R > 0$ sendo uma constante dependente de R (responsável pela limitação dos dados iniciais do modelo truncado), mas independente de t e k . Neste sentido, para cada $k \in \mathbb{N}$, a solução (u_k, η_k) do modelo (3.18) não sofre blow-up em tempo finito, ou seja, $T_{\max}^k = \infty$. Disso, segue que

$$(u_k, \partial_t u_k, \eta_k) \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}).$$

Da limitação uniforme dada em (3.24), obtemos uma subsequência de (u_k, η_k) , que denotaremos da mesma forma, tal que

$$u_k \xrightarrow{*} u \text{ em } L^{\infty}(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \tag{3.25}$$

$$\partial_t u_k \xrightarrow{*} \partial_t u \text{ em } L^{\infty}(0, \infty; L^2(\Omega)), \tag{3.26}$$

$$a(x) \partial_t u_k \rightharpoonup a(x) \partial_t u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0. \tag{3.27}$$

$$\sqrt{a(\cdot)}\nabla\eta_k^t \rightharpoonup \sqrt{a(\cdot)}\nabla\eta \text{ em } L_g^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \quad (3.28)$$

Neste sentido, do Teorema de Compacidade de Aubin–Lions–Simon, temos

$$u_k \longrightarrow u \text{ em } L^\infty(0, T; L^r(\Omega)), \quad \forall r \geq 2, \quad \forall T > 0.$$

Além disso, temos que as convergências (2.34), (2.35), (2.37) e (2.38) acontecem.

Nosso objetivo agora, é passar o limite no termo

$$- \int_0^\infty g(s) \operatorname{div} [a(x) \nabla \eta_k^t(x, s)] \, ds,$$

seguindo os mesmos argumentos presentes em [21], a saber, para cada $i = 1, 2$ e cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} & - \left\langle \int_0^\infty g(s) \partial_{x_i} [a(\cdot) \partial_{x_i} \eta_k^t(\cdot, s)] \, ds, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \int_0^\infty g(s) \langle a(\cdot) \partial_{x_i} \eta_k^t(\cdot, s), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \, ds \\ &= \int_0^\infty g(s) \langle a(\cdot) [\partial_{x_i} u_k(\cdot, t) - \partial_{x_i} u_k(\cdot, t - s)], \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \, ds \quad (3.29) \\ &= \langle g_0 a(\cdot) \partial_{x_i} u_k(\cdot, t), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \\ &\quad - \int_0^\infty g(s) \langle a(\cdot) \partial_{x_i} u_k(\cdot, t - s), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \, ds. \end{aligned}$$

De (3.25) e uma vez que $a(\cdot) \in C^\infty(\Omega)$, temos

$$\langle g_0 \partial_{x_i} [a(\cdot) \partial_{x_i} u_k(\cdot, t)], \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \rightarrow \langle g_0 \partial_{x_i} [a(\cdot) \partial_{x_i} u(\cdot, t)], \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)},$$

para cada $i = 1, 2$. Disto, somando de 1 até 2, obtemos

$$g_0 \operatorname{div} [a(x) \nabla u_k(x, t)] \rightarrow g_0 \operatorname{div} [a(x) \nabla u(x, t)] \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.30)$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, se $t < 0$, então de (3.19), (3.20) e (3.22), obtemos

$$\langle \partial_{x_i} u_k(\cdot, t), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = \langle \partial_{x_i} u_k^0(\cdot, t), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \rightarrow \langle \partial_{x_i} u^0(\cdot, t), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}, \quad (3.31)$$

para cada $i = 1, 2$. Consequentemente, de (3.25) e (3.31), independente de $t - s \geq 0$ ou $t - s < 0$, temos

$$\langle \partial_{x_i} u_k(\cdot, t - s), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \rightarrow \langle \partial_{x_i} u(\cdot, t - s), \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)},$$

para cada $i = 1, 2$. Uma vez que $a(\cdot) \in C^\infty$ e g é uma função constante na variável x , concluímos

$$\int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u_k(x, t - s)] \, ds \rightarrow \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(x, t - s)] \, ds \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.32)$$

para todo $t \geq 0$. Portanto, (3.29), (3.30) e (3.32) implicam na seguinte convergência

$$\int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla \eta_k^t(x, s)] \, ds \rightarrow \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla \eta^t(x, s)] \, ds \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.33)$$

para cada $t \geq 0$.

Passagem ao limite em (3.18)₁:

Tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\theta \in C_0^\infty(0, T)$, multiplicando (3.18)₁ por $\varphi\theta$, integrando sobre $\Omega \times (0, T)$ e utilizando a Fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta' \int_\Omega \partial_t u_k \cdot \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega \kappa(x) \nabla u_k \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega f_k(u_k) \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \theta \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \nabla \eta_k^t(x, s) \cdot \nabla \varphi \, dx \, ds \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega b(x) \partial_t u_k \cdot \varphi \, dx \, dt = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Levando (2.37), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) e (3.33) em consideração, passando o limite em (3.34), existe uma solução $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\eta \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)$ com

$\partial_t u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta' \int_\Omega \partial_t u \cdot \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega \kappa(x) \nabla u \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega f(u) \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \theta \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) \nabla \eta^t(x, s) \cdot \nabla \varphi \, dx \, ds \, dt + \int_0^T \theta \int_\Omega b(x) \partial_t u \cdot \varphi \, dx \, dt = 0, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\theta \in C_0^\infty(0, T)$, no qual concluimos que

$$\partial_t^2 u - \operatorname{div}[\kappa(x) \nabla u] - \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla \eta^t(x, s)] \, ds + f(u) + b(x) \partial_t u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)). \quad (3.35)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \eta_k^t(x, s)|^2 \, dx & \leq 2 \int_\Omega |\nabla u_k(x, t)|^2 \, dx + 2 \int_\Omega |\nabla u_k(x, t-s)|^2 \, dx \\ & = 2 \int_\Omega |\nabla u_k(x, t)|^2 \, dx \\ & + 2 \int_{\substack{\Omega \\ t-s > 0}} |\nabla u_k(x, t-s)|^2 \, dx + 2 \int_{\substack{\Omega \\ t-s \leq 0}} |\nabla u_k(x, t-s)|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Da limitação de $E_{u_k, \eta_k}(\tau)$, com $\tau \geq 0$, as duas primeiras integrais do lado direito de (3.36) são limitadas. A terceira integral também é limitada. De fato, é suficiente observar que de (3.19), para $s \in (0, \infty)$, obtemos

$$u_k(\cdot, -s) = u_k^0(\cdot, -s) = u_k^0(\cdot, 0) - \eta_k^0(\cdot, s) \in H^1(\Omega).$$

Logo, para cada $t \in [0, \infty)$, concluimos que

$$\eta_k^t(\cdot, s) \rightharpoonup \eta^t(\cdot, s) \text{ em } H^1(\Omega).$$

Portanto, para cada $t \in [0, \infty)$, segue que

$$\int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(\cdot) \nabla \eta^t(\cdot, s)] \, ds \in H^{-1}(\Omega). \quad (3.37)$$

Combinando (3.35) com as convergências (2.38) e (3.37), uma vez que $b(x) \partial_t u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\operatorname{div}[\kappa(x) \nabla u] \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$ e $f(u) \in L^\infty(0, T; L^r(\Omega))$,

aplicando o Lema 1.46 (Lions–Magenes) e a Proposição 1.47 (Lions), deduzimos que

$$\partial_t^2 u - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla\eta^t(x,s)] \, ds + f(u) + b(x)\partial_t u = 0 \quad (3.38)$$

em $C_w(0, T; L^r(\Omega) + H^{-1}(\Omega))$. Com isso, uma vez que a regularidade obtida em (3.38) é satisfeita, podemos avaliar u , $\partial_t u$ e η^t em $t = 0$, garantindo que $(u(0), \partial_t u(0), \eta^0) \in \mathcal{H}$.

Neste sentido, iremos recuperar a regularidade temporal, ou seja, devemos mostrar que a solução do modelo (3.5) está na classe

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0,$$

e, além disso

$$(u_k, \partial_t u_k) \longrightarrow (u, \partial_t u) \text{ em } C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \times C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

Definindo $z_{m,n} = u_m - u_n$, $\eta_{m,n}^t = \eta_m^t - \eta_n^t$, $m, n \in \mathbb{N}$, de (3.18), temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\partial_t z_{m,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} \nabla z_{m,n}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_{m,n}^t|^2 \, dx \, ds \\ & + \int_\Omega b(x) \partial_t z_{m,n}^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty (-g'(s)) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_{m,n}^t|^2 \, dx \, ds \\ & = - \int_\Omega [f_m(u_m(t)) - f_n(u_n(t))] [\partial_t u_m(t) - \partial_t u_n(t)] \, dx. \end{aligned}$$

Integrando a identidade acima de 0 até $t \in (0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|\partial_t z_{m,n}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} \nabla z_{m,n}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_{m,n}^t|^2 \, dx \, ds + \int_0^t \int_\Omega b(x) \partial_t z_{m,n}^2(s) \, dx \, ds \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\|u_{1m} - u_{1n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} [\nabla u_{0m} - \nabla u_{0n}] \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla(\eta_{0m} - \eta_{0n})|^2 \, dx \, ds \\ & + \left| \int_0^t \int_\Omega [f_m(u_m(s)) - f_n(u_n(s))] [\partial_t z_{m,n}(s)] \, dx \, ds \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\|u_{1m} - u_{1n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} [\nabla u_{0m} - \nabla u_{0n}] \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla(\eta_{0m} - \eta_{0n})|^2 \, dx \, ds \\
& + \left| \int_0^t \|f_m(u_m(s)) - f_n(u_n(s))\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t z_{m,n}(s)\|_{L^2(\Omega)} \, ds \right|. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Assim, levando em consideração as convergências (2.38), (3.22) e (3.26), obtemos a convergência à zero quando $m, n \rightarrow \infty$ dos termos do lado direito de (3.39), i.e., $(u_k, \partial_t u_k) \in C([0, T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ é uma sequência de Cauchy e então $(u, \partial_t u) \in C([0, T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$, ou em outras palavras,

$$\begin{aligned}
u_k & \longrightarrow u \text{ em } C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)), \forall T > 0. \\
\sqrt{a(\cdot)} \nabla \eta_k^t & \longrightarrow \sqrt{a(\cdot)} \nabla \eta^t \text{ em } L_g^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).
\end{aligned} \quad (3.40)$$

Além disso, uma vez que $b(\cdot)$ é uma função não-negativa, de (3.39) deduzimos que

$$\sqrt{b(\cdot)} \partial_t u_k \longrightarrow \sqrt{b(\cdot)} \partial_t u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

A obtenção dos dados iniciais, isto é, $(u(0), \partial_t u(0), \eta^0) = (u_0, u_1, \eta_0)$ em \mathcal{H} , segue como no Capítulo 2, mas levando em conta a identidade (3.20). Já a prova da unicidade de solução para o modelo (3.5) segue essencialmente as mesmas ideias da prova de unicidade para o problema (2.1).

Por fim, como a convergência (2.57) acontece, podemos passar o limite no funcional de energia associado ao modelo truncado (3.18), obtendo o funcional de energia para o modelo original (3.5), dado por

$$\begin{aligned}
E_{u,\eta}(t) & = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} \nabla u(x, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
& \quad + \int_\Omega F(u(x, t)) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta^t(x, s)|^2 \, dx \, ds,
\end{aligned}$$

e ainda, obtemos também a identidade de energia dada por

$$\begin{aligned}
& E_{u,\eta}(t_2) - E_{u,\eta}(t_1) \\
& = - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega b(x) \partial_t u^2(x, t) \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta^t(x, s)|^2 \, dx \, ds \, dt,
\end{aligned}$$

para cada $0 \leq t_1 \leq t_2 < T_{\max}$.

Assim, de $E_{u,\eta}(t) \leq E_{u,\eta}(0) < \infty$, para cada $t \in [0, T_{\max})$, uma vez que $E_{u,\eta}(0)$ é independente de t , segue que a solução não sofre blow-up em tempo finito, ou seja, no Teorema 3.7, temos que $T_{\max} = \infty$. Nesta perspectiva, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.8 (Global no tempo). Assumindo as Suposições 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, então dados $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$, o modelo (3.5) possui uma única solução global na classe

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \eta \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1), \quad \forall T > 0.$$

Além disso, a identidade de energia é verificada

$$\begin{aligned} E_{u,\eta}(t_2) - E_{u,\eta}(t_1) \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} b(x) \partial_t u^2(x, t) \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\infty} g'(s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta^t(x, s)|^2 \, dx \, ds \, dt, \end{aligned} \quad (3.41)$$

com

$$\begin{aligned} E_{u,\eta}(t) = \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} \nabla u(x, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ + \int_{\Omega} F(u(x, t)) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta^t(x, s)|^2 \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Observação 3.9. É importante ressaltar que o resultado de boa colocação para o modelo (3.5) pode ser obtido mesmo na ausência do termo de amortecimento friccional $b(x) \partial_t u$.

3.2 Equivalência entre modelos

Assumindo a Suposição 3.4 e realizando a mudança de variável (3.2), se u é solução de (3.1), é fácil ver que o par (u, η) verifica (3.5). Em seguida, vamos mostrar que se o par (u, η) é uma solução de (3.5) (ao menos no sentido clássico – ver o Teorema 3.7), então u é uma solução de (3.1). De fato, suponha que (u, η) é solução de (3.5). Assim, em particular, η satisfaz (3.5)₂ com $\partial_t u$ dado em um espaço conhecido (ver Teorema 3.7). Portanto, seguindo [37, Grasselli e Pata, Seções 3 e 4], temos que η pode ser explicitamente

dado por

$$\eta^t(\cdot, s) = \begin{cases} u(\cdot, t) - u^0(\cdot, t - s), & s \geq t, \\ u(\cdot, t) - u(\cdot, t - s), & s < t. \end{cases} \quad (3.42)$$

Consequentemente, voltando à (3.5)₁ e substituindo (3.42), verificamos que u satisfaz o modelo (3.1).

3.3 Decaimento Uniforme da Energia

O objetivo desta seção é estabelecer um resultado de estabilidade assintótica para o modelo (3.5).

Denotando por $U = (u, \partial_t u, \eta)$ a única solução do problema de Cauchy (3.10), como feito no Teorema 3.8, então o par (u, η) é a correspondente solução para o modelo equivalente (3.5). Nesta perspectiva, apresentamos o seguinte resultado de estabilidade para o modelo (3.5), o qual pode ser demonstrado de forma similar ao Teorema 2.19 (realizando as devidas substituições), se estivermos munidos da identidade de energia e da Desigualdade de Observabilidade para o modelo (3.5).

Teorema 3.10 (Estabilidade Uniforme). Seja $T_0 > 0$ dado como nos Lemas 3.11 e 3.12. Considere h_0 e q definidas em (2.111) e (2.113) (com as devidas substituições), respectivamente, e (u, η) a solução generalizada do problema (2.1) com $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $r < E_{u,\eta}(0) < R$. Então,

$$E_{u,\eta}(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t \geq T_0 \quad (3.43)$$

e $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$, em que $S(t)$ é a solução da equação diferencial ordinária não linear

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \\ S(0) = E_{u,\eta}(0). \end{cases} \quad (3.44)$$

3.3.1 Desigualdade de Observabilidade para o modelo truncado

O objetivo desta subseção é apresentar a Desigualdade de Observabilidade para o modelo truncado (3.18), para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado e suficientemente grande e $T \geq T_0$, em que $T_0 > 0$ é uma constante de observabilidade a qual independe de k .

Primeiramente, observamos que o dado inicial $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ do modelo equivalente (3.5) pode ser nulo ou não nulo.

No primeiro caso, quando $(u_0, u_1, \eta_0) = (0, 0, 0)$, uma vez que (3.22) acontece, podemos considerar $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}) = (0, 0, 0)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e a correspondente solução do modelo truncado (3.18) deve ser $(u_k, \eta_k) \equiv (0, 0)$. Então, a Desigualdade de Observabilidade dada em (3.46) abaixo, é trivialmente satisfeita.

No segundo caso, existem constantes $r, R > 0$ tais que $r < E_{u,\eta}(0) < R$. Além disso, da convergência dos dados iniciais dado em (3.22), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, a sequência $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k})$ satisfaz

$$r < E_{u_k, \eta_k}(0) < R. \quad (3.45)$$

Nosso objetivo aqui, é provar a Desigualdade de Observabilidade para o modelo truncado e tal como no Capítulo 2, se (3.22) e (3.45) forem satisfeitas, então a constante da Desigualdade de Observabilidade para as soluções aproximadas pode ser tomada independente de k .

Lema 3.11 (Desigualdade de Observabilidade - Truncado). Sejam $r, R > 0$, $T \geq T_0$ e $k \geq 1$. Sob as hipóteses do Teorema 3.8 e admitindo a Suposição 3.6, existe $C = C(k, r, R, T) > 0$ tal que a correspondente solução (u_k, η_k) de (3.18) com $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}) \in D(\mathcal{A})$ distante da origem (i.e., verificando (3.45)) satisfaz a Desigualdade de Observabilidade

$$E_{u_k, \eta_k}(0) \leq C \left[\int_0^T \int_0^\infty -g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^t(s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k(t)|^2 dx dt \right]. \quad (3.46)$$

Ainda, se $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}) \rightarrow (u_0, u_1, \eta_0)$ em \mathcal{H} tal que $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $r < E_{u,\eta}(0) < R$, então existe $T^* \geq T_0$ tal que C pode ser escolhido independente de k , sempre que $T \geq T^*$.

Demonstração. Realizaremos a prova deste lema através de um argumento de contradição. Se o Lema 3.11 é falso, para toda constante $C > 0$, existem dados iniciais $(u_{0k}^C, u_{1k}^C, \eta_{0k}^C) \in D(\mathcal{A})$ verificando (3.45) cuja correspondente solução (u_k^C, η_k^C) viola (3.46).

Em particular, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente, obtemos a existência de dados iniciais $(u_{0k}^m, u_{1k}^m, \eta_{0k}^m)$ verificando (3.45) e cuja correspondente solução (u_k^m, η_k^m) satisfaz a Desigualdade de Observabilidade Inversa

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{E_{u_k^m, \eta_k^m}(0)}{\int_0^T \int_0^\infty -g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^m(x, s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k^m(x, t)|^2 dx dt} = +\infty, \quad (3.47)$$

De (3.47), temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_0^\infty -g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^m(x, s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k^m(x, t)|^2 dx dt}{E_{u_k^m, \eta_k^m}(0)} = 0. \quad (3.48)$$

Utilizando a definição do funcional de energia associado à solução (u_k^m, η_k^m) , a estimativa (3.45) e argumentos similares aos necessários para a obtenção de (2.25), concluímos que $E_{u_k^m, \eta_k^m}(0) \lesssim R$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, de (3.48) temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\int_0^T \int_0^\infty -g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^m(x, s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k^m(x, t)|^2 dx dt \right] = 0. \quad (3.49)$$

Além disso, de (3.6) segue que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^m(x, s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k^m(x, t)|^2 dx dt \right] = 0. \quad (3.50)$$

Por outro lado, como $E_{u_k^m, \eta_k^m}(t) \leq E_{u_k^m, \eta_k^m}(0) \lesssim R$, para todo $t > 0$, existe uma subsequência de (u_k^m, η_k^m) , que permanecerá com a mesma notação, tal que

$$u_k^m \xrightarrow{*} u_k \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.51)$$

$$\partial_t u_k^m \xrightarrow{*} \partial_t u_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.52)$$

$$u_k^m \rightarrow u_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad \forall q \geq 2, \quad (3.53)$$

em que (3.53) é obtida utilizando o Teorema de Compacidade de Aubin–Lions–Simon.

Para obter o resultado desejado, temos dois casos a considerar, a saber: $u_k \neq 0$ ou $u_k = 0$.

Caso 1: $u_k \neq 0$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, (u_k^m, η_k^m) é a solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k^m - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u_k^m] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla \eta_k^m(s)] \, ds \\ \quad + b(x)\partial_t u_k^m + f_k(u_k^m) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t \eta_k^m + \partial_s \eta_k^m = \partial_t u_k^m \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.54)$$

com condições iniciais e de fronteiras dadas por

$$\begin{cases} u_k^m = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad \eta_k^m = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_k^m(x, 0) = u_{0k}^m(x), \quad \partial_t u_k^m(x, 0) = u_{1k}^m(x), \quad \eta_k^{0m}(x, s) = \eta_{0k}^m(x, s), \quad x \in \Omega, \quad s \in (0, \infty), \\ \eta_k^m(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Considerando (3.54)₁ e utilizando as convergências (3.50)–(3.53) na passagem do limite, quando $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\partial_t^2 u_k - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u_k] + f_k(u_k) = 0 \quad \text{em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (3.55)$$

Definimos a seguinte função auxiliar

$$z_k^m = \kappa(x)u_k^m + a(x) \int_0^\infty g(s)\eta_k^m(s) \, ds, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.56)$$

Utilizando (3.54)₂, integrando por partes e observando que $\eta_k^m(0) = 0$ em $\Omega \times [0, \infty)$, temos para quase todo $t > 0$, que

$$\begin{aligned} \partial_t z_k^m(t) &= \kappa(x)\partial_t u_k^m(t) + a(x) \int_0^\infty g(s)\partial_t[\eta_k^m(s)] \, ds \\ &= \kappa(x)\partial_t u_k^m(t) + a(x) \int_0^\infty g(s)[- \partial_s \eta_k^m(s) + \partial_t u_k^m(t)] \, ds \end{aligned}$$

$$= \partial_t u_k^m(t) + a(x) \int_0^\infty g'(s) \eta_k^m(s) \, ds.$$

Seja ω^* um subconjunto fechado de Ω tal que $A \subset\subset \omega^*$. Assim, a seguinte Desigualdade do tipo Poincaré é válida:

$$\int_{\Omega \setminus \omega^*} |\eta_k^m(x, s)|^2 \, dx \leq \frac{1}{a_0 \lambda_1} \int_{\Omega \setminus \omega^*} a(x) |\nabla \eta_k^m(x, s)|^2 \, dx, \quad (3.57)$$

em que $a(x) \geq a_0 > 0$, para todo $x \in \overline{\Omega \setminus \omega^*}$. Observamos que a constante positiva a_0 depende de ω^* . Então, de (3.49), (3.52) e (3.57), concluímos que

$$\partial_t z_k^m \rightharpoonup \partial_t u_k \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega \setminus \omega^*)). \quad (3.58)$$

Por outro lado, procedendo de forma análoga ao que foi feito anteriormente e passando o limite em (3.56), quando $m \rightarrow \infty$, obtemos de (3.50), (3.53) e (3.57) que

$$z_k^m \rightarrow \kappa(\cdot) u_k \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega \setminus \omega^*)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega \setminus \omega^*)),$$

e, conseqüentemente,

$$\partial_t z_k^m \rightarrow \kappa(\cdot) \partial_t u_k \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega \setminus \omega^*)). \quad (3.59)$$

Das convergências (3.58) e (3.59), segue que $\kappa(\cdot) \partial_t u_k = \partial_t u_k$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega \setminus \omega^*))$. Contudo, uma vez que $\kappa(x) - 1 = -g_0 a(x) \leq g_0 a_0 < 0$ em $\Omega \setminus \omega^*$, para todo $\omega^* \supset\supset A$, temos

$$\partial_t u_k \equiv 0 \quad \text{q.s. em } (\Omega \setminus \omega^*) \times (0, T) \quad \text{para todo } \omega^* \supset\supset A,$$

o que implica em

$$\partial_t u_k \equiv 0 \quad \text{q.s. em } \omega' \times (0, T). \quad (3.60)$$

Observando a convergência (3.50) e lembrando que $b(x) \geq b_0 > 0$ em ω'' , em que ω'' é uma vizinhança de ∂A , concluímos que

$$\partial_t u_k \equiv 0 \quad \text{q.s. em } \omega'' \times (0, T). \quad (3.61)$$

Retornando à (3.55), tomando $w_k = \partial_t u_k$, obtemos

$$\partial_t^2 w_k - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla w_k] + f'_k(u_k)w_k = 0 \quad \text{em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (3.62)$$

De (3.60), (3.61) e (3.62) e considerando o Princípio de Continuação Única (Suposição 3.6), concluímos que

$$w_k \equiv 0 \quad \text{q.s. em } \Omega \times (0, T). \quad (3.63)$$

Disto e de (3.55), deduzimos que $u_k \equiv 0$ e a contradição desejada é obtida.

Caso 2: $u_k = 0$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$\alpha_k^m = [E_{u_k^m, \eta_k^m}(0)]^{1/2}, \quad v_k^m = \frac{1}{\alpha_k^m} u_k^m \quad \text{e} \quad \zeta_k^m = \frac{1}{\alpha_k^m} \eta_k^m. \quad (3.64)$$

Assim, (v_k^m, ζ_k^m) é a solução do seguinte modelo

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k^m - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla v_k^m] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla \zeta_k^m(s)] \, ds \\ \quad + b(x)\partial_t v_k^m + \frac{1}{\alpha_k^m} f_k(u_k^m) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t \zeta_k^m + \partial_s \zeta_k^m = \partial_t v_k^m \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (3.65)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_k^m} \int_\Omega f_k(u_k^m) \partial_t v_k^m \, dx &= \frac{1}{(\alpha_k^m)^2} \int_\Omega f_k(\alpha_k^m v_k^m) \partial_t (\alpha_k^m v_k^m) \, dx \\ &= \frac{1}{(\alpha_k^m)^2} \frac{d}{dt} \int_\Omega F_k(\alpha_k^m v_k^m) \, dx \\ &= \frac{1}{(\alpha_k^m)^2} \frac{d}{dt} \int_\Omega F_k(u_k^m) \, dx. \end{aligned}$$

Assim, o funcional de energia associado à (3.65) é dado por

$$\begin{aligned} E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\partial_t v_k^m(t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \kappa(x) |\nabla v_k^m(t)|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \zeta_k^m(x, s)|^2 \, dx \, ds + \frac{1}{(\alpha_k^m)^2} \int_\Omega F_k(u_k^m) \, dx. \end{aligned} \quad (3.66)$$

De (3.64) e (3.66), segue que

$$E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t) = \frac{1}{(\alpha_k^m)^2} E_{u_k^m, \eta_k^m}(t) = \frac{1}{E_{u_k^m, \eta_k^m}(0)} E_{u_k^m, \eta_k^m}(t), \quad t \geq 0,$$

e, conseqüentemente,

$$E_{v_k^m, \zeta_k^m}(0) = 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.67)$$

Por outro lado, de (3.48) e da definição de α_k^m , temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\int_0^T \int_0^\infty (-g'(s)) \int_\Omega a(x) |\nabla \zeta_k^m(s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t v_k^m(x, t)|^2 dx dt \right] = 0, \quad (3.68)$$

e a Suposição 3.3 implica que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \zeta_k^m(s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t v_k^m(x, t)|^2 dx dt \right] = 0. \quad (3.69)$$

Repetindo os passos necessários para a obtenção de (3.41), temos que a energia $E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t)$ satisfaz a identidade

$$\frac{d}{dt} E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \zeta_k^m(s)|^2 dx ds - \int_\Omega b(x) |\partial_t v_k^m(t)|^2 dx, \quad t > 0,$$

e $E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t)$ é uma função não-crescente com

$$\begin{aligned} & E_{v_k^m, \zeta_k^m}(T) - E_{v_k^m, \zeta_k^m}(0) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\infty g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \zeta_k^m(s)|^2 dx ds dt - \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t v_k^m(t)|^2 dx dt, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Passando o limite quando $m \rightarrow +\infty$ e observando (3.67) e (3.68), concluimos que

$$1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} E_{v_k^m, \zeta_k^m}(0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} E_{v_k^m, \zeta_k^m}(T).$$

Para finalizar a prova, vamos mostrar que a energia $E_{v_k^m, \zeta_k^m}(T)$ vai uniformemente à zero, isto é,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_{v_k^m, \zeta_k^m}(T) = 0, \quad (3.70)$$

e assim, a contradição desejada será obtida para esse caso.

No que segue, nosso objetivo é obter (3.70). Com efeito, uma vez que temos $E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t) \leq E_{v_k^m, \zeta_k^m}(0) = 1$, existe uma subsequência de (v_k^m, ζ_k^m) , que ainda será denotada por (v_k^m, ζ_k^m) , tal que

$$v_k^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_k \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.71)$$

$$\partial_t v_k^m \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t v_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.72)$$

$$v_k^m \rightarrow v_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad \forall q \geq 2, \quad (3.73)$$

em que, na última convergência, utilizamos o Teorema de Compacidade de Aubin-Lions-Simon. Passando o limite em (3.65)₁, quando $m \rightarrow \infty$, utilizando (3.69), definindo

$$\tilde{z}_k^m = \kappa(x)v_k^m + a(x) \int_0^\infty g(s)\zeta_k^m(s) \, ds, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

e procedendo de forma análoga à (3.63), obtemos

$$\partial_t v_k \equiv 0 \text{ q.s. em } \omega'' \times (0, T), \text{ o que implica em } v_k \equiv 0 \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T). \quad (3.74)$$

Combinando (3.71)-(3.74), temos

$$v_k^m \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.75)$$

$$\partial_t v_k^m \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.76)$$

$$v_k^m \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad \forall q \geq 2. \quad (3.77)$$

Uma vez que $\alpha_k^m = [E_{u_k^m, \eta_k^m}(0)]^{1/2}$ e $E_{u_k^m, \eta_k^m}(0) \lesssim R$, existe $\alpha_k \geq 0$ tal que $\alpha_k^m \rightarrow \alpha_k$, quando $m \rightarrow \infty$ (em verdade, existe uma subsequência que manteremos com a mesma notação de (α_k^m)).

Neste ponto da prova, faz-se necessário dividi-la em dois subcasos, a saber: $\alpha_k > 0$ e $\alpha_k = 0$.

Subcaso I: $\underline{\alpha_k > 0}$

De $\alpha_k^m \rightarrow \alpha_k$, temos

$$\alpha_k^m v_k^m \longrightarrow \alpha_k v_k \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2.$$

Por outro lado, temos também que

$$\alpha_k^m v_k^m = u_k^m \longrightarrow u_k \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2.$$

Assim, $v_k \equiv 0$ q.s. em $\Omega \times (0, T)$. Além disso, $E_{v_k^m, \zeta_k^m}(0) \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$.

Subcaso II: $\underline{\alpha_k = 0}$

Utilizando os mesmos argumentos apresentados para a obtenção da convergência (2.91), temos

$$\frac{1}{\alpha_k^m} f_k(\alpha_k^m v_k^m) \longrightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega \times (0, T)), \quad \forall q \geq 2. \quad (3.78)$$

Consideramos $\theta \in C_0^\infty(0, T)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tais que $\text{supp } \varphi \subset \Omega \setminus A$ de acordo com a Figura 3.2.

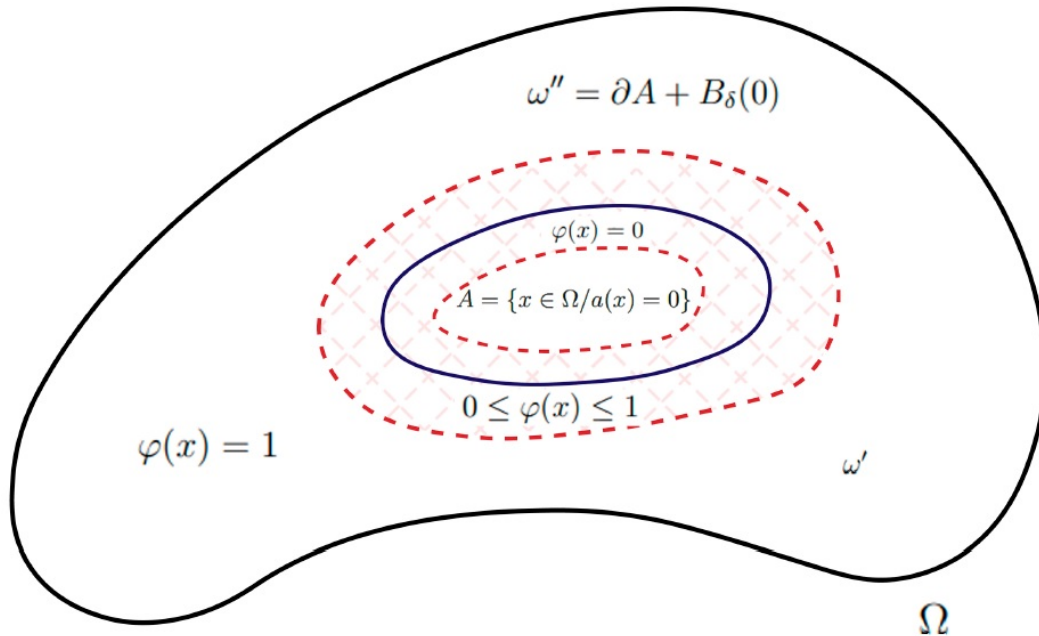


Fig. 3.2: A função cut-off φ .

Observamos que, uma vez que, $a(x)$ positiva e limitada inferiormente em $\text{supp } \varphi$,

deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) |\zeta_k^m|^2 \, dx &= \int_{\text{supp}\varphi} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) |\zeta_k^m|^2 \, dx \\
&\leq \max_{x \in \text{supp}\varphi} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) \int_{\text{supp}\varphi} |\zeta_k^m|^2 \, dx \\
&\leq C(\varphi, \lambda_1) \int_{\text{supp}\varphi} |\nabla\zeta_k^m|^2 \, dx \\
&\leq C(\varphi, \lambda_1, a) \int_{\Omega} a(x) |\nabla\zeta_k^m|^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

A estimativa dada em (3.79) irá desempenhar um papel essencial na obtenção da convergência da expressão abaixo. Se multiplicarmos (3.65)₁ por $\theta\varphi\phi_k^m$, em que $\phi_k^m(x) := \int_0^\infty g(s)\zeta_k^m(x, s) \, ds$, e integrarmos por partes sobre $\Omega \times (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t v_k^m \partial_t \phi_k^m \varphi \theta \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t v_k^m \phi_k^m \varphi \theta' \, dx \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla v_k^m \cdot \nabla \phi_k^m \varphi \theta \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla v_k^m \cdot \nabla \varphi \phi_k^m \theta \, dx \, dt \\
& + \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega} a(x) \nabla \zeta_k^m(s) \cdot \nabla \varphi \phi_k^m \theta \, dx \, ds \, dt \\
& + \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega} a(x) \nabla \zeta_k^m \cdot \nabla \phi_k^m \varphi \theta \, dx \, ds \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} b(x) \partial_t v_k^m \phi_k^m \varphi \theta \, dx \, dt + \frac{1}{\alpha_k^m} \int_0^T \int_{\Omega} f_k(\alpha_k^m v_k^m) \phi_k^m \varphi \theta \, dx \, dt \\
& =: J_{1m} + J_{2m} + \dots + J_{7m} + J_{8m} = 0.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Das convergências (3.69), (3.73)-(3.75) e (3.77) e considerando a estimativa (3.79), concluímos que os termos $J_{2m}, J_{3m}, J_{4m}, J_{5m}, J_{6m}$ e J_{8m} vão à zero quando m vai para infinito. De fato, começamos com $J_{2m} := - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t v_k^m \phi_k^m \varphi \theta' \, dx \, dt$. Como $\partial_t v_k^m \rightharpoonup 0$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, é suficiente mostrar que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \phi_k^m \varphi \theta' \, dx \, dt = 0.$$

Utilizando as propriedades das funções a , φ e g , temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \zeta_k^m(x, s) \varphi \theta' \, dx \, ds \, dt \right| \\ & \leq C(a, \theta, \varphi, \lambda_1) \int_0^T \int_{\Omega \setminus A} \left[\int_0^\infty g(s) \, ds \right] \int_0^\infty g(s) a(x) |\nabla \zeta_k^m(x, s)|^2 \, ds \, dx \, dt, \end{aligned}$$

em que, juntamente com a convergência (3.69), implica no limite desejado. Utilizando ideias similares e levando em consideração (2.94), concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} J_{3m} = \cdots = \lim_{m \rightarrow +\infty} J_{6m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} J_{8m} = 0.$$

Com o intuito de obtermos $\lim_{m \rightarrow +\infty} J_{7m} = 0$, utilizamos a convergência (3.69) e observamos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega b(x) \partial_t v_k^m \zeta_k^m(x, s) \varphi \theta \, dx \, ds \, dt \right| \\ & \leq C(\theta, \varphi, b) \int_0^T \int_0^\infty g(s) \left[\int_\Omega b(x) |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \right]^{1/2} \left[\int_\Omega |\varphi| |\zeta_k^m(x, s)|^2 \, dx \right]^{1/2} \, ds \, dt \\ & \leq \widehat{C}(a, \theta, \varphi, b, g, \lambda_1) \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt \\ & \quad + \widehat{C}(a, \theta, \varphi, b, g, \lambda_1) \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \zeta_k^m(x, s)|^2 \, dx \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{m \rightarrow +\infty} J_{1m} = 0$. Contudo, uma vez que $\partial_t \zeta_k^m + \partial_s \zeta_k^m = \partial_t v_k^m$, temos

$$\begin{aligned} J_{1m} &= -g_0 \int_0^T \theta \int_\Omega \varphi |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt - \int_0^T \theta \int_0^\infty g'(s) \int_\Omega \varphi \zeta_k^m(s) \partial_t v_k^m \, dx \, ds \, dt \\ &:= L_{1m} + L_{2m}, \end{aligned}$$

e observando que $\lim_{m \rightarrow +\infty} L_{2m} = 0$, obtemos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega \theta \varphi |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt = 0. \quad (3.81)$$

Podemos considerar $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno tal que $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ em

$[\varepsilon, T - \varepsilon]$ e $\text{supp } \theta \subset (0, T)$. Então, de (3.80) e (3.81), concluímos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\omega'} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt = 0. \quad (3.82)$$

Da convergência (3.69), obtemos ainda que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\omega''} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt = 0. \quad (3.83)$$

Das duas convergências acima e tomando $\omega = \omega' \cup \omega''$, temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\omega} |\partial_t v_k^m|^2 \, dx \, dt = 0. \quad (3.84)$$

Como $\partial_t v_k^m \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega \times (0, T))$, consideramos μ a medida de defeito microlocal associada à sequência $(\partial_t v_k^m)$ em $L^2_{loc}(\Omega \times (0, T))$ (garantida pelo Teorema 1.66 conforme a Observação 1.68). Da convergência (3.84), temos que $\mu = 0$ em $\omega \times (0, T)$, isto é, $\text{supp } \mu \subset (\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$.

Por outro lado, das convergências acima, juntamente com o fato de que $a(x) = 0$ em A (logo, de (3.4), $\kappa(x) \equiv 1$ em A), concluímos

$$\partial_t^2 v_k^m - \Delta v_k^m = -b(x) \partial_t v_k^m - \frac{1}{\alpha_k^m} f_k(\alpha_k^m v_k^m) \quad \text{em } A, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Com isso, se \square é o operador de D'Alembert em A , dado por $\square = \partial_t^2 - \Delta$, obtemos

$$\square v_k^m = -b(x) \partial_t v_k^m - \frac{1}{\alpha_k^m} f_k(\alpha_k^m v_k^m) \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2(A \times (0, T)),$$

em que a última convergência vem de (3.69) e (3.78). Então, procedendo como na obtenção de (2.98), temos

$$\square \partial_t v_k^m \rightarrow 0 \quad \text{em } H_{loc}^{-1}(A \times (0, T)). \quad (3.85)$$

Da convergência (3.85), concluímos dois fatos:

- i) O $\text{supp } \mu$ está contido no conjunto característico do operador de ondas $\{(t, x, \tau, \xi) \in \mathbb{R} \times A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 / \sigma_2(\square) = \tau^2 - |\xi|^2 = 0\}$, em que $\sigma_2(\square)$ denota o sím-

bolo principal do operador de D'Alembert em A (este fato é garantido pelo Teorema 1.69).

ii) O $\text{supp } \mu$ é uma união de curvas do tipo

$$t \in I \cap (0, \infty) \mapsto m_{\pm}(t) = \left(t, x(t), \pm \frac{1}{\sqrt{1 + |\dot{x}|^2}}, \mp \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + |\dot{x}|^2}} \right),$$

em que $t \in I \mapsto x(t) \in \text{int } A$ é uma geodésica associada à métrica $G = K^{-1}$ (este fato é garantido pelo Teorema 1.74 e pela Proposição 1.75).

Uma vez que $a(x) = 0$ no conjunto A , então $\kappa(x) = 1 - g_0 a(x) = 1$ em A e todas as geodésicas da métrica $G = K^{-1}$, em que K denota a matriz $K = (K_{ij})$ tal que $K_{ij} = \kappa(x)\delta_{ij}$ e δ_{ij} é a função delta de Kronecker, são linhas retas no conjunto A , i.e., toda geodésica da métrica $G = K^{-1}$ que passa por A não permanece dentro de A . Além disso, todas as geodésicas da métrica G tocam a fronteira $\partial\Omega$ de Ω . Uma vez que $a(x) > 0$ em $\omega' = \Omega \setminus [\omega'' \cup A]$ e $b(x) > 0$ em ω'' , o conjunto $\omega = \omega' \cup \omega''$ controla geometricamente Ω , ou seja, ele satisfaz a Condição Geométrica de Controle. Em outras palavras, toda geodésica de Ω viajando com velocidade constante igual a 1 e partindo de $t = 0$, encontra ω em um tempo $t < T_0$, para um certo $T_0 > 0$.

Assim, se $T > T_0$, todo raio bicaracterístico entra na região ω antes do tempo T , então obtemos que $\mu = 0$ em $\Omega \setminus \omega$, em especial, em A . Com isso, concluímos que $\text{supp } \mu = \emptyset$, ou seja, $\mu = 0$ em $\Omega \times (0, T)$. Assim, da Observação 1.68, deduzimos que

$$\partial_t v_k^m \longrightarrow 0 \text{ em } L_{loc}^2(\Omega \times (0, T)).$$

Retornando à (3.65), multiplicando por θv_k^m e utilizando a integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} |\partial_t v_k^m(t)|^2 dx dt - \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \partial_t v_k^m(t) v_k^m(t) dx dt \\ & + \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla v_k^m(t)|^2 dx dt + \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \left[\int_0^{\infty} g(s) a(x) \nabla \zeta_k^m(s) ds \right] \nabla v_k^m(t) dx dt \\ & + \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} b(x) \partial_t v_k^m(t) v_k^m(t) dx dt + \frac{1}{(\alpha_k^m)^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} f(\alpha_k^m v_k^m) \alpha_k^m v_k^m dx dt = 0. \end{aligned}$$

Procedendo como no caso anterior, temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla v_k^m(t)|^2 dx dt + \frac{1}{(\alpha_k^m)^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} f_k(\alpha_k^m v_k^m) \alpha_k^m v_k^m dx dt = 0$$

e

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(\alpha_k^m v_k^m) dx dt = 0.$$

Os limites acima, juntamente com (3.69), implicam, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, em

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t) dt = 0. \quad (3.86)$$

Uma vez que a energia é não-crescente, concluímos que

$$\int_0^T E_{v_k^m, \zeta_k^m}(t) dt \geq T E_{v_k^m, \zeta_k^m}(T). \quad (3.87)$$

Por fim, combinando (3.86) e (3.87), obtemos o limite em (3.70).

A prova de que a constante C pode ser obtida independente de k , sempre que $T \geq T^*$, é essencialmente a mesma da prova feita para o Lema 2.15 e por isso, não será feita aqui.

3.3.2 Desigualdade de Observabilidade para o modelo original

Nesta subseção, iremos obter a Desigualdade de Observabilidade para o modelo equivalente (3.5), utilizando a Desigualdade de Observabilidade para o modelo truncado obtido na subseção anterior

Lema 3.12 (Desigualdade de Observabilidade). Sejam $T \geq T_0$ e $r, R > 0$. Sob as hipóteses do Teorema 3.8 e a Suposição 3.6, existe uma constante $C = C(r, R, T) > 0$ tal que, toda solução (u, η) do modelo (3.5) satisfaz

$$E_{u, \eta}(0) \leq C \left[\int_0^T \int_0^{\infty} -g'(s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta^t(x, s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_{\Omega} b(x) |\partial_t u(t)|^2 dx dt \right],$$

sempre que $r < E_{u, \eta}(0) < R$.

Demonstração. Segue de (3.46), para todo $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$ e toda solução do modelo

truncado (3.18), a seguinte desigualdade

$$E_{u_k, \eta_k}(0) \leq C \left[\int_0^T \int_0^\infty -g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^t(s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k(t)|^2 dx dt \right], \quad (3.88)$$

sempre que $r < E_{u_k, \eta_k}(0) < R$, em que $C > 0$ é uma constante independente de k .

De (3.40), deduzimos que

$$\int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k(x, t)|^2 dx dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u(x, t)|^2 dx dt. \quad (3.89)$$

Assim, de (2.57), (3.88) e (3.89), obtemos a Desigualdade de Observabilidade para o modelo equivalente (3.5).

3.4 Caso Focusing

Esta seção é destinada à prova da boa colocação do modelo da onda com amortecimento viscoelástico localmente distribuído com memória passada dado em (3.90). Provaremos também a extensão global de solução e o decaimento uniforme da energia no caso em que os dados iniciais pertencem ao espaço $\mathcal{H}_1 = V_1 \times H_1 \times L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)$ a ser definido com detalhes posteriormente.

3.4.1 Teorema do Passo da Montanha e Variedade de Nehari para o modelo da onda com memória localizada

Nesta subseção, como na subseção 2.2.1, enfatizamos a forte conexão entre a boa colocação do modelo (3.90) e o bem conhecido nível do passo da montanha. Mais precisamente, definindo o funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \kappa(x) |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u) dx,$$

em que $F(t) = \int_0^t f(s) ds$, os pontos críticos do funcional J são as soluções fracas do problema elíptico

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [\kappa(x) \nabla u] = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Relacionado ao funcional J , temos (em relação àquela apresentada na Seção 2.2.1) uma nova *variedade de Nehari*

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \middle/ \int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f(u)u dx \right\}.$$

Se f satisfaz a Suposição 3.1, é possível provar que o funcional J satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (ver [7]) e o nível

$$d = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \max_{t \geq 0} J(tv) > 0,$$

chamado de *nível do passo da montanha* é o nível crítico de J . É possível obter como na Subseção 2.2.1, a caracterização (2.119) e a afirmação dada em (2.120). Além disso, denotamos por W , W_1 e W_2 os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} W &:= \{u \in H_0^1(\Omega) / J(u) < d\}, \\ W_1 &:= \left\{ u \in W \middle/ \int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla u|^2 dx > \int_{\Omega} f(u)u dx \right\} \cup \{0\}, \\ W_2 &:= \left\{ u \in W \middle/ \int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla u|^2 dx < \int_{\Omega} f(u)u dx \right\}. \end{aligned}$$

É possível mostrar que $V_1 = \overline{\text{Span}[\mathcal{D}(\Omega) \cap W_1]}^{H_0^1(\Omega)}$ e $V_2 = \overline{\text{Span}[\mathcal{D}(\Omega) \cap W_2]}^{H_0^1(\Omega)}$ são conjuntos estáveis relacionados ao modelo (3.90) (em verdade, provaremos um resultado similar ao Lema 3.1 de [5], o que provará a afirmação).

3.4.2 Boa Colocação

Estudaremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \int_0^\infty g(s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(\cdot, t-s)] ds + b(x) \partial_t u = f(u) & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x, s) = u^0(x, s), \quad \partial_t u(x, s) = \partial_t u^0(x, s), & (x, s) \in \Omega \times (-\infty, 0], \end{cases} \quad (3.90)$$

em que todas as suposições para este modelo, são as mesmas das feitas para o modelo (3.1).

Definimos a nova variável η como em (3.2) e, utilizando (3.3) e (3.4), reescrevemos o modelo (3.90) como o modelo autônomo

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla\eta^t(\cdot, s)] \, ds + b(x)\partial_t u = f(u) \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t \eta + \partial_s \eta = \partial_t u \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad \eta = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), \quad \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), \quad x \in \Omega, \quad s \in (0, \infty), \\ \eta^t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty), \end{array} \right. \quad (3.91)$$

em que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = u^0(x, 0), \quad x \in \Omega, \\ u_1(x) = \partial_t u^0(x, t)|_{t=0}, \quad x \in \Omega, \\ \eta^0(x, s) = u^0(x, 0) - u^0(x, -s), \quad (x, s) \in \Omega \times (0, \infty). \end{array} \right.$$

Seja $\mathcal{V}_1 := \mathcal{D}(\Omega) \cap W_1$, o qual é um simples conjunto que não é um espaço vetorial. Definimos os seguintes espaços vetoriais

$$\mathcal{V}_1^* := \operatorname{Span} \mathcal{V}_1, \quad V_1 := \overline{\mathcal{V}_1^*}^{H_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad H_1 := \overline{\mathcal{V}_1^*}^{L^2(\Omega)}.$$

Observamos que $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_1^* \subset V_1 \subset H_1$, o que implica em $\overline{V_1}^{L^2(\Omega)} = H_1$. Além disso, é fácil mostrar que $V_1 \xrightarrow{c} H_1$.

Considerando os espaços definidos em (3.8) e (3.9), podemos definir o espaço de fase $\mathcal{H}_1 = V_1 \times H_1 \times L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)$, munido com a norma dada por

$$\|(u, v, \eta)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|u\|_1^2 + \|v\|_2^2 + \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)}^2.$$

Consideramos

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (u, v, \eta) \in \mathcal{H}_1 \left/ \begin{array}{l} v \in V_1, \quad \partial_s \eta \in L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1), \quad \eta(0) = 0, \\ \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u] + \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla\eta(s)] \, ds \in H_1 \end{array} \right. \right\}$$

e os operadores não lineares $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ dado por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -v \\ -\operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla\eta(s)] \, ds + b(x)v \\ \partial_s\eta - v \end{pmatrix}$$

e $\mathbb{B} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, dado por $\mathbb{B}(u, v, \eta) = (0, -f(u), 0)$. Nesse sentido, estamos aptos a reformular o modelo (3.91) no seguinte problema de Cauchy em \mathcal{H}_1

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathbb{B}U(t) = 0, & t > 0, \\ U(0) = (u_0, u_1, \eta_0) =: U_0, \end{cases}$$

em que $U(t) = (u(t), \partial_t u(t), \eta(t))$.

O operador \mathcal{A} é maximal monótono e o operador \mathbb{B} está bem definido e é localmente Lipschitz ao fazermos as devidas substituições como na Seção 3.1.

Nesta perspectiva, utilizando o Teorema 1.59, nosso resultado de existência de solução local no tempo é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 3.13 (Local no tempo). Assumindo as Suposições 3.1, 3.3 e 3.4, temos que o modelo (3.91) gera um semigrupo não linear sobre \mathcal{H}_1 . Além disso,

i) Se $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_1$, existe uma única solução generalizada

$$u \in C([0, T_{\max}); V_1) \cap C^1([0, T_{\max}); H_1), \quad \eta \in C([0, T_{\max}); L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)).$$

ii) Se $(u_0, u_1, \eta_0) \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte

$$(u, \partial_t u, \eta) \in W^{1,\infty}([0, T_{\max}); \mathcal{H}_1).$$

Para obter a extensão global de solução do modelo (3.91), tomamos $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_1$ fixo, porém arbitrário, então existe $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R}_+; H_a^1)$ tal que

$$(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (u_0, u_1, \eta_0) \text{ em } \mathcal{H}_1.$$

Assim, consideramos a seguinte seqüência de modelos aproximados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u_k - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u_k] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla \eta_k^t(\cdot, s)] \, ds \\ \qquad \qquad \qquad + b(x)\partial_t u_k = f(u_k) \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t \eta_k + \partial_s \eta_k = \partial_t u_k \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_k = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad \eta_k = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0k}(x), \quad \partial_t u_k(x, 0) = u_{1k}(x), \quad \eta_k^0(x, s) = \eta_{0k}(x, s), \quad x \in \Omega, \quad s \in (0, \infty), \\ \eta_k^t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty), \end{array} \right. \quad (3.92)$$

em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, o modelo(3.92) possui uma única solução na classe

$$(u_k, \partial_t u_k, \eta_k) \in W^{1,\infty}(0, T_{\max}^k; \mathcal{H}_1).$$

Procedendo como na Seção 3.1, obtemos o funcional de energia associado ao modelo aproximado dado por

$$\begin{aligned} E_{u_k, \eta_k}(t) &= \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(x)}\nabla u_k(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad - \int_\Omega F(u_k(t)) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)|\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds \\ &= \frac{1}{2} \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x)|\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds + J(u_k(t)) \end{aligned}$$

e a identidade de energia para o modelo aproximado é

$$E_{u_k, \eta_k}(t_2) - E_{u_k, \eta_k}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty \int_\Omega g'(s)a(x)|\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega b(x)\partial_t u_k^2(t) \, dx \, dt,$$

para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T_{\max}^k$.

Uma importante ferramenta para a obtenção da extensão global de solução para o modelo (3.91) é dado pelo seguinte lema:

Lema 3.14. Nas hipóteses do Teorema 3.13 e admitindo a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz (Suposição 3.2), se $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R}_+; H_a^1)$ e $E_{u_k, \eta_k}(0) < d$,

para cada $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$u_k(t) \in \mathcal{V}_1^*, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k], \quad (3.93)$$

$$\left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} \nabla u_k(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 < \frac{2\theta d}{\theta - 2}, \quad \forall t \in [0, T_{\max}^k]. \quad (3.94)$$

Observação 3.15. A demonstração do Lema 3.14 é essencialmente a mesma da prova do Lema 2.26, por isso, será omitida aqui.

Agora, tendo em mente as hipóteses do Lema 3.14 e que $u_k(t) \in \mathcal{V}_1^*$, para todo $t \in [0, T_{\max}^k)$, $g(s)s > 0$, para $s \neq 0$ e $a(\cdot)$ é não negativa, da identidade de energia, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{a(\cdot)} \nabla \eta_k^t \right\|_{L_g^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))}^2 \right] &\leq E_{u_k}(0) \\ &+ \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\kappa(\cdot)} \nabla u_k(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} F(u_k(t)) \, dx \\ &\stackrel{(2.131)}{\leq} d + \frac{\theta d}{\theta - 2} + \frac{2d}{\theta - 2} = \frac{2\theta d}{\theta - 2}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_{\max}^k)$.

Neste sentido, para cada $k \in \mathbb{N}$, a solução (u_k, η_k) do modelo aproximado (3.92) não sofre blow-up em tempo finito, i.e., $T_{\max} = \infty$. Assim, podemos estender as soluções à todo o intervalo $[0, \infty)$. Munido dessa propriedade, é possível obter a extensão para o modelo original (3.91) com $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_1$, o que nos permite obter o seguinte teorema:

Teorema 3.16 (Global no tempo). Assumindo as hipóteses do Teorema 3.13, a Suposição 3.2, $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_1$ e $E_{u, \eta}(0) < d$, então a solução (u, η) do modelo (3.91), dada pelo Teorema 3.13, pode ser estendida à $[0, \infty)$. Além disso, $u(t) \in \mathcal{V}_1$, para todo $t \geq 0$.

Com o intuito de obtermos a Desigualdade de Observabilidade para o modelo (3.91) (via modelo equivalente (3.92)), consideramos a seguinte sequência de modelos aproxima-

dos com termos fonte truncados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u_k - \operatorname{div}[\kappa(x)\nabla u_k] - \int_0^\infty g(s)\operatorname{div}[a(x)\nabla \eta_k^t(\cdot, s)] \, ds \\ \qquad \qquad \qquad + b(x)\partial_t u_k = f_k(u_k) \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_t \eta_k + \partial_s \eta_k = \partial_t u_k \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_k = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad \eta_k = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0k}(x), \quad \partial_t u_k(x, 0) = u_{1k}(x), \quad \eta_k^0(x, s) = \eta_{0k}(x, s), \quad x \in \Omega, \quad s \in (0, \infty), \\ \eta_k^t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty), \end{array} \right. \quad (3.95)$$

em que $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k})$ é tomado em $\mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R}_+; H_a^1)$ convergindo para (u_0, u_1, η_0) em \mathcal{H}_1 e, para cada $k \in \mathbb{N}$, f_k é definido como em (2.19) o qual é globalmente Lipschitz.

Seguindo os mesmos passos utilizados anteriormente e procedendo como na obtenção do Teorema 3.16, podemos obter o mesmo resultado para o modelo truncado (3.95), seu funcional de energia é dado por

$$\begin{aligned} E_{u_k, \eta_k}(t) &= \frac{1}{2} \left[\|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \sqrt{\kappa(x)} \nabla u_k(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad - \int_{\Omega} F_k(u_k(t)) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds \end{aligned}$$

e satisfaz a identidade de energia dada por

$$E_{u_k, \eta_k}(t_2) - E_{u_k, \eta_k}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty \int_{\Omega} g'(s) a(x) |\nabla \eta_k^t|^2 \, dx \, ds \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} b(x) \partial_t u_k^2(t) \, dx \, dt,$$

para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$.

3.4.3 Estabilidade assintótica

Para obtermos a estabilidade assintótica para o modelo (3.91), podemos repetir os mesmos passos utilizados na Subseção 3.3.1. No entanto, algumas particularidades deste caso requerem alguns apontamentos na prova do seguinte lema.

Lema 3.17 (Desigualdade de Observabilidade - Truncado). Sejam $r, R > 0$ (como dados em (3.45)), $T \geq T_0$, $k \geq 1$ e $\tilde{R} = \max\{R, d\}$. Sob as hipóteses do Teorema 3.16 e admitindo a Suposição 3.6, existe $C = C(k, r, \tilde{R}, T) > 0$ tal que a correspondente solu-

ção (u_k, η_k) de (3.95) com $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}) \in \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R}_+; H_a^1)$ longe da origem (i.e., verificando (3.45)) satisfaz a Desigualdade de Observabilidade

$$E_{u_k, \eta_k}(0) \leq C \left[\int_0^T \int_0^\infty -g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^t(s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k(t)|^2 dx dt \right]. \quad (3.96)$$

Ainda, se $(u_{0k}, u_{1k}, \eta_{0k}) \rightarrow (u_0, u_1, \eta_0)$ em \mathcal{H}_1 , com $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_1$ e $r < E_{u, \eta}(0) < \widehat{R}$, então existe $T^* \geq T_0$ tal que C pode ser escolhido independente de k , sempre que $T \geq T^*$.

Esboço da demonstração. O índice $k_0 \in \mathbb{N}$ é estabelecido como para o Lema 3.11. (acima das desigualdades (2.63)). Supondo que (3.96) seja falso, existe $T > T_0$ e uma sequência (u_k^m, η_k^m) de soluções de (3.95) tal que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_0^\infty -g'(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^m(x, s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k^m(x, t)|^2 dx dt}{E_{u_k^m, \eta_k^m}(0)} = 0. \quad (3.97)$$

Utilizando a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz, obtemos $-F(t) < 0$, logo

$$\begin{aligned} E_{u_k^m, \eta_k^m}(0) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |u_{1k}^m|^2 + \kappa(x) |\nabla u_{0k}^m|^2 dx \\ &\quad - \int_\Omega F_k(u_{0k}^m) dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_{0k}^m|^m dx ds \\ &\lesssim \frac{1}{2} \left[\|u_{1k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\eta_{0k}^m\|_{L_g^2(\mathbb{R}_+; H_a^1)}^2 \right] \\ &\lesssim \|(u_{0k}^m, u_{1k}^m, \eta_{0k}^m)\|_{\mathcal{H}_1} \stackrel{(3.45)}{\leq} \widetilde{R}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Além disso, utilizando a Condição de Ambrosetti–Rabinowitz e lembrando que $\theta > 2$ e $u_{0k}^m \in \mathcal{V}_1^*$, segue que

$$\begin{aligned} E_{u_k^m, \eta_k^m}(0) &> \frac{1}{2} \int_\Omega |u_{1k}^m|^2 + \kappa(x) |\nabla u_{0k}^m|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{\theta} \int_\Omega f_k(u_{0k}^m) u_{0k}^m dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_{0k}^m|^m dx ds \\ &\gtrsim \frac{1}{2} \|u_{1k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left[\|\nabla u_{0k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega f_k(u_{0k}^m) u_{0k}^m dx \right] \\ &> \frac{1}{2} \|u_{1k}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Assim, de (3.6), (3.97) e (3.98), deduzimos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_\Omega a(x) |\nabla \eta_k^m(x, s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_\Omega b(x) |\partial_t u_k^m(x, t)|^2 dx dt \right] = 0.$$

Além disso, do funcional de energia do modelo truncado e de (3.98), existe uma subsequência de $(u_k^m, \eta_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$ (a qual continuaremos denotando por $(u_k^m, \eta_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$) tal que

$$\begin{aligned} u_k^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u_k \text{ em } L^\infty(0, T; V_1), \quad m \rightarrow \infty \\ \partial_t u_k^m &\overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u_k \text{ em } L^\infty(0, T; H_1), \quad m \rightarrow \infty \\ u_k^m &\rightarrow u_k \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \forall q \geq 2. \end{aligned}$$

Neste ponto, dividimos o esboço da nossa demonstração em dois casos. A saber: $u_k \neq 0$ e $u_k = 0$.

Caso 1: $u_k \neq 0$

Todos os passos desde caso são similares aos análogos do Lema 3.11, fazendo algumas substituições necessárias. Em particular, obtemos uma equação similar à (3.55), a saber,

$$\partial_t^2 u_k - \operatorname{div}[\kappa(x) \nabla u_k] = f_k(u_k) \text{ em } L^2(0, T; V_1')$$

e $\partial_t u_k \equiv 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, deduzimos que

$$-\operatorname{div}[\kappa(x) \nabla u_k(t)] = f_k(u_k(t)) \text{ em } V_1' \text{ q.s. em } (0, T).$$

Assim, uma vez que $u_k(t) \in V_1$ q.s. em $(0, T)$, temos

$$\int_\Omega \kappa(x) |\nabla u_k(t)|^2 dx = \int_\Omega f_k(u_k(t)) u_k(t) dx,$$

que implica em $u_k(t) \in \mathcal{N}$ (variedade de Nehari), mas do Lema 3.14, $u_k(t) \in \mathcal{V}_1^*$ e da suposição deste caso, $u_k(t) \neq 0$, para todo $t \geq 0$, então obtemos uma contradição.

Caso 2: $u_k = 0$

Neste caso, notamos que $\alpha_m = [E_{u_k^m, \eta_k^m}(0)]^{1/2}$ está bem definido, uma vez que (3.99)

é válido.

Apresentamos aqui, um argumento que difere do análogo ao presente no Lema 3.11, a saber,

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla v_k^m|^2 - \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) v_k^m \, dx \, dt = 0 \\ \Rightarrow & \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \kappa(x) |\nabla v_k^m|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) v_k^m \, dx \, dt = 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

em que a convergência ocorre, uma vez que (3.77) e (3.78) são válidos.

Por outro lado, da Condição de Ambrosetti–Rabinowitz, deduzimos

$$0 < \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \, dt < \frac{1}{\theta \alpha_m} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} f_k(u_k^m) v_k^m \, dx \, dt,$$

então,

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \, dt \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\theta \alpha_m} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} f_k(u_k^m) v_k^m \, dx \, dt = 0.$$

Utilizando (3.100), obtemos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) \, dx \, dt = 0.$$

Com isso, a demonstração segue similar à do Lema 3.11. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. A. Adams and J. J. Fournier. *Sobolev Spaces*, volume 140. Elsevier, 2003.
- [2] F. Alabau-Boussouira. Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems. *Applied Mathematics and Optimization*, 51(1):61–105, 2005.
- [3] F. Alabau-Boussouira and P. Cannarsa. A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 347(15-16):867–872, 2009.
- [4] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, and D. Sforza. Decay estimates for second order evolution equations with memory. *Journal of Functional Analysis*, 254(5):1342–1372, 2008.
- [5] C. O. Alves and M. M. Cavalcanti. On existence, uniform decay rates and blow up for solutions of the 2-d wave equation with exponential source. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 34(3):377–411, 2009.
- [6] C. O. Alves and G. M. Figueiredo. Multiplicity of positive solutions for a quasilinear problem in \mathbb{R}^n via penalization method equation in \mathbb{R}^n . *Advanced Nonlinear Studies*, 5(4):551–572, 2005.
- [7] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14(4):349–381, 1973.
- [8] V. Barbu. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Springer, 1976.

- [9] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM Journal on control and optimization*, 30(5):1024–1065, 1992.
- [10] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] H. Brezis. Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de hilbert. *North-Holland Math. Stud*, 5, 1973.
- [12] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [13] N. Burq and P. Gérard. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(7):749–752, 1997.
- [14] N. Burq and P. Gérard. *Contrôle optimal des équations aux dérivées partielles*. Url: <http://www.math.u-psud.fr/~burq/articles/coursX.pdf>, 2001.
- [15] M. Cavalcanti, L. Fatori, and T. F. Ma. Attractors for wave equations with degenerate memory. *Journal of differential equations*, 260(1):56–83, 2016.
- [16] M. M. Cavalcanti and V. N. D. Cavalcanti. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá, 2009.
- [17] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, R. Fukuoka, and J. A. Soriano. Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result. *Archive for rational mechanics and analysis*, 197(3):925–964, 2010.
- [18] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, and I. Lasiecka. Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping–source interaction. *Journal of Differential Equations*, 236(2):407–459, 2007.
- [19] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, I. Lasiecka, and F. A. F. Nascimento. Intrinsic decay rate estimates for the wave equation with competing viscoelastic and frictional dissipative effects. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 19(7):1987, 2014.

- [20] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, V. H. G. Martinez, and T. Özşarı. Decay rate estimates for the wave equation with subcritical semilinearities and locally distributed nonlinear dissipation. *Applied Mathematics & Optimization*, pages 1–76, 2022.
- [21] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, V. H. G. Martinez, V. A. Peralta, and A. Vicente. Stability for semilinear hyperbolic coupled system with frictional and viscoelastic localized damping. *Journal of Differential Equations*, 269(10):8212–8268, 2020.
- [22] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, M. J. Silva, and A. de Souza Franco. Exponential stability for the wave model with localized memory in a past history framework. *Journal of Differential Equations*, 264(11):6535–6584, 2018.
- [23] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, J. G. Simion Antunes, and A. Vicente. Stability for the wave equation in an unbounded domain with finite measure and with nonlinearities of arbitrary growth. *Journal of Differential Equations*, 318:230–269, 2022.
- [24] M. M. Cavalcanti, V. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, and J. A. Soriano. Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping - a sharp result. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(9):4561–4580, 2009.
- [25] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and V. Komornik. *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, 2011.
- [26] M. M. Cavalcanti and H. P. Oquendo. Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. *SIAM journal on control and optimization*, 42(4):1310–1324, 2003.
- [27] V. N. D. Cavalcanti, M. M. Cavalcanti, T. Marchiori, and C. Webler. Asymptotic behaviour of the energy to the viscoelastic wave equation with localized hereditary memory and supercritical source term. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, pages 1–51, 2022.
- [28] P. Cherrier. Une inégalité de Sobolev sur les variétés Riemanniennes. *Bull. Sci. Math*, 103(2):353–374, 1979.

- [29] I. Chueshov, M. Eller, and I. Lasiecka. On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. *Comm. Partial Differential Equations*.
- [30] C. M. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 37(4):297–308, 1970.
- [31] D. de Figueiredo, O. Miyagaki, and B. Ruf. Elliptic equations in \mathbb{R}^2 with nonlinearities in the critical growth range. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 4(2):203–203, 1996.
- [32] B. Dehman, G. Lebeau, and E. Zuazua. Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation. In *Annales scientifiques de l’Ecole normale supérieure*, volume 36, pages 525–551. Elsevier, 2003.
- [33] T. Duyckaerts, X. Zhang, and E. Zuazua. On the optimality of the observability inequalities for parabolic and hyperbolic systems with potentials. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, volume 25, pages 1–41. Elsevier, 2008.
- [34] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [35] M. Fabrizio, C. Giorgi, and V. Pata. A new approach to equations with memory. *Archive for rational mechanics and analysis*, 198(1):189–232, 2010.
- [36] C. Giorgi, J. E. M. Rivera, and V. Pata. Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 260(1):83–99, 2001.
- [37] M. Grasselli and V. Pata. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory. In *Evolution equations, semigroups and functional analysis*, pages 155–178. Springer, 2002.
- [38] Y. Guo, M. A. Rammaha, and S. Sakuntasathien. Energy decay of a viscoelastic wave equation with supercritical nonlinearities. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 69(3):1–28, 2018.

- [39] Y. Guo, M. A. Rammaha, S. Sakuntasathien, E. S. Titi, and D. Toundykov. Hadamard well-posedness for a hyperbolic equation of viscoelasticity with supercritical sources and damping. *Journal of Differential Equations*, 257(10):3778–3812, 2014.
- [40] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Number 25. American Mathematical Soc., 2007.
- [41] L. Kaitai and Z. Quande. Existence and nonexistence of global solutions for the equation of dislocation of crystals. *Journal of Differential Equations*, 146(1):5–21, 1998.
- [42] S. Kesavan. *Topics in Functional Analysis and Applications*. Wiley, New York, 1989.
- [43] I. Lasiecka, S. A. Messaoudi, and M. I. Mustafa. Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory. *Journal of Mathematical Physics*, 54(3):031504, 2013.
- [44] I. Lasiecka and D. Tataru. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. *Differential and integral Equations*, 6(3):507–533, 1993.
- [45] I. Lasiecka and D. Toundykov. Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 64(8):1757–1797, 2006.
- [46] G. Lebeau. Equations des ondes amorties, algebraic geometric methods in maths. *Physics*, pages 73–109, 1996.
- [47] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [48] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, 1968.
- [49] K. Liu and Z. Liu. Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 53(2):265–280, 2002.

- [50] P. Martinez. A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 4:419–444, 1999.
- [51] M. Milla Miranda. Traço para o dual dos espaços de sobolev. *Bol. Soc. Paran. Matemática (2a série)*, 11(2):131–157, 1990.
- [52] J. Moser. A sharp form of an inequality by trudinger. *Indiana University Mathematics Journal*, 20(11):1077–1092, 1971.
- [53] J. E. Muñoz Rivera and A. Peres Salvatierra. Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials. *Quarterly of Applied Mathematics*, 59(3):557–578, 2001.
- [54] M. Nakao. Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation. *Mathematische Annalen*, 305(1):403–417, 1996.
- [55] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [56] J. Rauch and M. Taylor. Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(4):501–523, 1975.
- [57] M. Renardy, W. Hrusa, and J. Nohel. Mathematical problems in viscoelasticity, pitman monographs and survey in pure appl. math. no. 35, 1987.
- [58] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Inc., 1987.
- [59] A. Ruiz. Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 71(5):455–467, 1992.
- [60] R. Showalter. Monotone operators in banach spaces and nonlinear partial differential equations. *AMS, Providence*, 1997.
- [61] J. G. Simion Antunes, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and A. Vicente. Exponential stability for the 2d wave model with localized memory in a past history framework and nonlinearity of arbitrary growth. *The Journal of Geometric Analysis*, 33(2):1–62, 2023.

- [62] L. R. T. Tébou. Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping. *Journal of differential equations*, 145(2):502–524, 1998.
- [63] N. S. Trudinger. On imbeddings into orlicz spaces and some applications. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17(5):473–483, 1967.
- [64] M. Visik and O. Ladyzhenskaya. On boundary value problems for pde and certain class of operators equations. *AMS Transl*, 2(10), 1958.
- [65] M. Willem. *Minimax theorems*, volume 24. Springer Science & Business Media, 1997.
- [66] L. Yuxiang. Moser-Trudinger inequality on compact Riemannian manifolds of dimension two. *Journal of Partial Differential Equations*, 14(2):163–192, 2001.
- [67] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/A: Linear Monotone Operators*. Springer Science & Business Media, 1985.
- [68] E. Zuazua. Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. *Communications in Partial Differential Equations*, 15(2):205–235, 1990.