

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Tese de Doutorado

**Ondas Periódicas para Equações Não-Lineares do
Tipo Klein-Gordon e Schrödinger: Existência e
Estabilidade Orbital**

Guilherme de Loreno

Maringá - PR

2023

Guilherme de Loreno

Ondas Periódicas para Equações Não-Lineares do Tipo Klein-Gordon e Schrödinger: Existência e Estabilidade Orbital

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorim Natali

Maringá - PR

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

M386o Loreno, Guilherme de
Ondas periódicas para equações não-lineares do tipo Klein-Gordon e Schrödinger : existência e estabilidade orbital / Guilherme de Loreno. -- Maringá, 2023.
139 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2023.

1. Estabilidade orbital. 2. Ondas estacionárias. 3. Ondas viajantes. 4. Equações dispersivas. 5. Equação de Klein-Gordon. 6. Equação de Schrödinger. 7. Orbital stability. 8. Standing waves. 9. Travelling waves. 10. Dispersive equations. 11. Klein-Gordon equation. 12. Schrödinger equation. I. Natali, Fábio Matheus Amorin, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

Guilherme de Loreno

Ondas Periódicas para Equações Não-Lineares do Tipo Klein-Gordon e Schrödinger: Existência e Estabilidade Orbital

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali - UEM (Presidente)

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava - IME-USP

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo - UFAL

Prof. Dr. Mahendra Panthee - IMECC-UNICAMP

Prof. Dr. Rafael Borro Gonzalez - UEM

Aprovado em: 24 de março de 2023.

Local de defesa: Videoconferência - Google Meet (<https://meet.google.com/dzz-rnrb-wde>).

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e meu irmão, por todo apoio e incentivo em meus estudos. Com certeza sem eles esse trabalho não teria se concretizado.

Ao meu orientador, o Professor Dr. Fábio Natali, por todo conhecimento compartilhado e pela incalculável colaboração na realização dessa tese, pela confiança depositada em mim, por toda paciência nos (tantos) seminários e visitas à sua sala, por toda ajuda prestada e pelas valiosas discussões e contribuições. Agradeço-lhe também por, mesmo durante o período de pandemia, não deixou de dar suporte, ajuda e conselhos, o que foi de substancial importância durante esse período tão complicado.

À todos os meus amigos de mestrado e doutorado que, com certeza, de alguma forma me ajudaram em principalmente nas dúvidas sanadas, nas proveitosas discussões, pelos bons momentos divididos no decorrer das disciplinas e pelas inúmeras horas de estudos compartilhados. Agradeço-lhes por todo auxílio prestado em minhas dificuldades. Um agradecimento especial à meu grande amigo, que o mestrado me deu, Jean Geovane da Silva, por toda sua ajuda e por sempre estar ao meu lado e por ser uma pessoa quem sempre esteve ao meu lado. Agradeço também, ao Vitor Martinez por sua ajuda nos corredores e sacadas da UEM. E por fim, mas não menos importante, meu agradecimento também ao meu amigo e colega de labuta Gabriel Bittencourt pela ajuda, amizade e pelo companheirismo todo esse tempo que convivemos. Também agradeço-lhe pela frutífera parceria firmada ao longo do doutorado.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas que acreditaram em mim e que, direta ou indiretamente, fazem parte dessa minha conquista.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nessa tese estudamos a estabilidade orbital para três modelos dispersivos: dois do tipo Klein-Gordon e uma do tipo Schrödinger. Em um primeiro momento, usando uma adaptação da teoria de Grillakis, Shatah e Strauss, estabelecemos que as soluções do tipo onda viajante com perfil cnoidal para a equação cúbica de Klein-Gordon (não-linear) são orbitalmente instáveis no espaço de Sobolev das funções periódicas com a propriedade de média zero. Posteriormente, determinamos que as soluções do tipo onda estacionária com perfil cnoidal associadas à equação não-linear quártica de Klein-Gordon são orbitalmente instáveis no espaço de Sobolev periódico das funções pares e isso foi feito por meio do uso de um resultado de estabilidade linear devido a Shatah e Strauss.

Por fim, fizemos um estudo completo de estabilidade orbital de ondas periódicas para a equação fracionária de Schrödinger. De modo que em um primeiro momento mostramos a existência de ondas periódicas com perfil *single-lobe* via um problema de minimização e mostramos ainda que tais minimizadores são únicos. Adicionalmente, mostramos a existência de soluções (explícitas) de ondas de pequena amplitude de modo que tais soluções também solucionam o problema de minimização. Ainda, realizando experimentos numéricos com o uso do Método de Iteração de Petviashvili fomos capazes de determinar o nosso resultado de estabilidade/instabilidade fazendo uso da teoria clássica de Grillakis, Shatah e Strauss e de uma ligeira adaptação (ao contexto periódico) de um resultado que consiste na construção de um funcional da Lyapunov adequado.

Palavras-Chave: Estabilidade orbital, ondas estacionárias, ondas viajantes, equações dispersivas, equação de Klein-Gordon, equação de Schrödinger.

Abstract

In this thesis we study the orbital stability for three dispersive models: two Klein-Gordon type equation and one of Schrödinger type equation. In a first moment, using an adaptation of the theory of Grillakis, Shatah and Strauss, we establish that the travelling wave type solutions with a cnoidal profile for to the (nonlinear) cubic Klein-Gordon equation are orbitally unstable in the periodic Sobolev space of functions with the property of zero mean. Next, we determine that the standing wave solutions with a cnoidal profile associated with the nonlinear quintic Klein-Gordon equation are orbitally unstable in the periodic Sobolev space of even functions and this was done by using a linear stability result due to Shatah and Strauss.

Finally, we perform a complete study of the orbital stability of periodic waves for the fractional Schrödinger equation. First we show the existence of periodic waves with *single-lobe* profile via a minimization problem and we show that such minimizers are unique. Additionally, we show the existence of (explicit) solutions of small amplitude waves and such solutions solve the minimization problem. Also, performing numerical experiments by using the Petviashvili Iteration Method we were able to determine our stability/instability result by using the classical theory of Grillakis, Shatah and Strauss and a slight adaptation (to the periodic context) of a result consisting of the construction of a suitable Lyapunov functional.

Palavras-Chave: Orbital stability, standing waves, travelling waves, dispersive equations, Klein-Gordon equation, Schrödinger equation.

Sumário

Introdução	1
1 Fatos Básicos e Notações	15
2 Instabilidade Orbital para a Equação Cúbica de Klein-Gordon	20
2.1 Existência de Ondas Viajantes do Tipo Cnoidal	21
2.2 Análise Espectral	27
2.2.1 Propriedades Espectrais	28
2.3 Instabilidade Orbital das Ondas Cnoidais	40
2.3.1 Boa Colocação	40
2.3.2 Convexidade da Função d	49
2.3.3 O Resultado de Instabilidade	51
3 Instabilidade Orbital para a Equação Quíntica de Klein-Gordon	52
3.1 Existência de Ondas Estacionárias do Tipo Cnoidal	53
3.2 Análise Espectral	55
3.2.1 Repasse à Teoria de Floquet	58
3.2.2 Propriedades Espectrais	61
3.3 Instabilidade Orbital das Ondas Cnoidais	66
3.3.1 Boa Colocação	67
3.3.2 Convexidade da Função d	68
3.3.3 O Resultado de Instabilidade	71
4 Estabilidade Orbital para a Equação Cúbica de Schrödinger Fracionária	77
4.1 Existência de Ondas Periódicas Positivas	78
4.1.1 Existência de Ondas Periódicas via Minimizadores	79
4.1.2 Existência de Ondas de Pequena Amplitude	86
4.2 Análise Espectral	94
4.2.1 Fatos Básicos sobre Operadores Positivos	95
4.2.2 Propriedades Espectrais	98
4.3 Unicidade do Minimizador Real	104
4.4 Estabilidade/Instabilidade Orbital	112
4.4.1 Boa colocação	113
4.4.2 Convexidade da Função d	120
4.4.3 O Resultado de Estabilidade/Instabilidade	125
Considerações finais	129
Referências	131

Introdução

O estudo da estabilidade orbital de ondas viajantes e ondas estacionárias para modelos do tipo dispersivo não-linear vem sendo bastante explorado nas últimas décadas. Podemos dizer que um dos principais motivos para esse aumento de interesse é sua aplicabilidade física, comumente encontrada na modelagem de vários fenômenos, como por exemplo, fluxos de água (em um canal ou águas rasas na superfície oceânica), íons, ondas eletromagnéticas e comportamento de partículas. Dessa forma, o estudo de existência de soluções bem como um estudo qualitativo da dinâmica das soluções, como, por exemplo, a estabilidade orbital envolvendo esses tipos de modelos mostram-se bastante importantes. Equações dispersivas podem ser encaradas como equações diferenciais parciais as quais as suas soluções se dispersam no espaço conforme o tempo evolui. Uma propriedade interessante desse tipo de modelo é a presença de simetrias, que ajudam a entender melhor como se dá o comportamento de suas soluções no espaço.

O estudo de estabilidade é uma ótima ferramenta para entender melhor os fenômenos descritos por cada equação dada. Aqui, estabilidade orbital é no sentido de estabilidade de uma órbita gerada por simetrias, a saber, rotação e/ou translações, que sem grande rigor, nada mais é do que responder a seguinte pergunta:

se $\phi \in X$ é uma onda periódica, em que X é um espaço de Hilbert (adequado), e $u \in C([0, T], X)$ é solução (da equação) com dado inicial $u_0 \in X$, isto é, $u(0) = u_0$, de modo que u_0 está “próximo” de ϕ , então a solução $u(t)$ permanece “perto” (módulo simetrias) de ϕ para todo tempo $t > 0$?

Em caso de afirmativo, dizemos que a onda ϕ é orbitalmente estável em X . Nosso interesse é em ondas periódicas do tipo viajante e estacionária, que são tipos particulares de soluções periódicas de certas equações, e que voltaremos comentar mais sobre elas posteriormente. O estudo de tais tipo de solução, da perspectiva matemática, não é só relevante pelo fato de serem um tipo particular de soluções de uma equação diferencial (no nosso contexto, não-linear), mas porque em muitas situações uma análise de algumas quantidades conservadas associadas à equação ajudam determinar (ou até mesmo determinam) como se dá o comportamento do fluxo gerado pelas soluções perto da solução de onda estacionária/viajante em um espaço de Sobolev periódico adequado.

Destacamos ainda que nossa abordagem é totalmente voltada ao contexto periódico e uma das motivações para esse estudo é dar uma contribuição importante e relevante nesse ramo de pesquisa que, ao contrário do estudo de estabilidade de ondas solitárias, não recebe tanta atenção. Adicionalmente, fenômenos de natureza periódica, oscilatória

ou vibratória, são abundantes no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos e etc. Dessa forma, podemos dizer ainda que a modelagem de muitos problemas físicos no contexto periódico se apresenta muitas vezes mais satisfatória, de modo que o estudo de estabilidade de ondas periódicas se mostra bastante importante em vários campos da física. Nesse sentido, podemos mencionar, por exemplo, que algumas equações dispersivas não lineares admitem soluções periódicas que mantêm a sua forma e viajam com velocidade constante (chamadas de ondas periódicas viajantes) ou que possuem um padrão oscilatório estacionário (conhecidas como ondas periódicas estacionárias), as quais tem várias aplicações em dinâmica de fluidos, óptica não-linear e hidrodinâmica. Inclusive, convém enfatizar que esses dois tipos de soluções comentadas anteriormente são nossos objetos de estudo no que se refere soluções no contexto periódico. E a principal diferença entre esses dois tipos de soluções é que as ondas viajantes transportam energia de uma região do espaço que as contém para outra, enquanto que as ondas estacionárias não possuem essa característica, de modo ainda que as ondas estacionárias podem ser formadas pela superposição de duas ondas viajantes de mesma frequência viajando em direções opostas.

Nessa presente tese, abordamos a existência de solução e a estabilidade/instabilidade de três modelos do tipo dispersivo, a saber,

- a equação cúbica de Klein-Gordon:

$$u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 = 0, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \quad (1)$$

- a equação quártica de Klein-Gordon:

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \quad (2)$$

- a equação fracionária de Schrödinger com não-linearidade cúbica:

$$iu_t - (-\Delta)^s u + |u|^2 u = 0, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

em que $s \in (0, 1)$ e $(-\Delta)^s$ é o laplaciano fracionário (consulte Capítulo 1 para mais detalhes).

Em (1) consideramos $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e em (2) e (3) consideramos $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$. As três equações acima descritas podem ser interpretadas como um sistema Hamiltoniano abstrato da forma

$$u_t = JE'(u)$$

em que $J : X \rightarrow X$ é um operador anti-simétrico definido em um espaço de Hilbert $X = (X, (\cdot, \cdot)_X)$ conveniente, enquanto $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional energia associado a respectiva equação e $E' : X \rightarrow X'$ denota a sua derivada de Fréchet. O espaço X é comumente chamado de *espaço energia* por se tratar do espaço de definição do funcional energia E .

Na sequência, vamos detalhar brevemente a nossa abordagem para cada um dos modelos não-lineares especificados anteriormente, assim com as literaturas à eles associados.

O Capítulo 2 é devotado ao estudo relacionado a existência e estabilidade orbital da equação cúbica de Klein-Gordon no caso real dada em (1). Tal equação inicialmente foi proposta como uma generalização relativística da equação de Schrödinger clássica, descrevendo partículas livres, no entanto também possui várias aplicações em física e engenharia, incluindo teoria quântica de campos, fenômenos de ondas dispersivas e sistemas vibratórios em mecânica clássica (veja, por exemplo, [54]). Podemos mencionar ainda as aplicações em transições ferroelétricas, crescimentos de cristais, deslocamentos, física de plasmas, mecânica dos fluidos e outras relacionadas. Especificamente, a não linearidade cúbica tem sido usada como uma equação modelo na teoria de campos (ver [38]).

Bronski, Johnson e Kapitula em [29], provaram estabilidade espectral para uma classe geral de equações diferenciais parciais usando a técnica de lápis quadrático com o objetivo de obter uma maneira precisa de contar o Índice Hamiltoniano de Krein \mathcal{K}_{Ham} . Se $\mathcal{K}_{\text{Ham}} = 0$, a onda periódica é dita ser espectralmente estável e resultados de estabilidade orbital podem ser determinados se o problema de Cauchy associado tem boa colocação global no tempo para dados iniciais arbitrários no espaço energia. Até onde sabemos, embora nossa onda periódica cnoidal em (6) possa ser espectralmente estável de acordo com Bronski, Johnson e Kapitula em [29], não podemos concluir um resultado de estabilidade orbital no espaço energia, pois o modelo (1) não tem boa colocação global no tempo para dados arbitrários $(u_0, v_0) \in H_{\text{per}}^1 \times L_{\text{per}}^2$ uma vez que a evolução correspondente $(u(t), v(t)) \in H_{\text{per}}^1 \times L_{\text{per}}^2$ pode ter *blow-up* em tempo finito (veja [79]). Contudo, mesmo com as dificuldades comentadas anteriormente, nos propomos a estudar esse problema de estabilidade/instabilidade orbital referente à equação (1), de modo ainda que sob condições adequadas no dado inicial $(u_0, v_0) \in H_{\text{per}}^1 \times L_{\text{per}}^2$ conseguimos estabelecer, por meio da Teoria do Poço Potencial e do Método de Galerkin, um resultado de boa colocação global associado a (1) (veja Teorema 2.21).

Descrevemos agora em linhas gerais os pontos principais do Capítulo 2. Um aspecto importante no que se refere a equação (1) é a existência de ondas periódicas viajantes da forma

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (4)$$

em que $c \in \mathbb{R}$ representa a velocidade da onda e $\varphi = \varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função L -periódica suave. Primeiro mostramos a existência de ondas viajantes como em (4), aqui estamos interessados no caso em que a onda periódica $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que muda de sinal. Substituído (4) em (1), temos que φ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$-(1 - c^2)\varphi'' + \varphi - \varphi^3 = 0. \quad (5)$$

Para $1 - c^2 > 0$, uma solução explícita de (5), dependendo de uma função elíptica de Jacobi

do tipo cnoidal, se expressa como

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \operatorname{cn} \left(\frac{4K(k)}{L}x, k \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

em que $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ é o módulo da função elíptica e $K : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a integral elíptica completa de primeira espécie. O parâmetro $\omega := 1 - c^2 > 0$ então depende suavemente de $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e pode ser escrito como

$$\omega = \frac{1}{16} \frac{L^2}{K(k)^2(2k^2 - 1)}. \quad (7)$$

A onda cnoidal em (6) é uma típica onda periódica com a propriedade de média zero (veja Observação 2.5). Estudos recentes para a existência e estabilidade de ondas periódicas com a condição de média zero foram determinados, por exemplo, em [6], [8], [96] e [97]. Entretanto, convém destacar que nenhum dos trabalhos supracitados abordam uma equação de Klein-Gordon, indicando assim que nossa abordagem no que corresponde estabilidade orbital da equação (1) por meio de soluções periódicas com média zero se mostra bastante relevante e expressiva.

Antes de continuar, vejamos que sendo (1) invariante por translações, vamos relembrar o critério geral de estabilidade/instabilidade para sistemas Hamiltonianos estabelecidos em [56] devido a Grillakis, Shatah e Strauss. É bem sabido que (1) admite as seguintes quantidades conservadas $E, F : X := H_{\text{per}}^1 \times L_{\text{per}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$E(u, u_t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[u_x^2 + u_t^2 + u^2 \left(1 - \frac{u^2}{2} \right) \right] dx$$

e

$$F(u, u_t) = \int_0^L u_x u_t dx.$$

Definindo $G := E - cF$ vemos que qualquer solução de (5) satisfaz $G'(\varphi, c\varphi') = 0$, isto é, $(\varphi, c\varphi')$ é um ponto crítico do funcional G . Levando em conta que para cada $c \in I := (-1, 1)$ a solução φ_c determinada em (6) tem média zero (isto é, a integral de φ sobre o intervalo $[0, L]$ é igual a zero) e a fim de aplicarmos a teoria de [56], vamos focar nossa atenção ao subespaço $H_{\text{per}}^1 \cap L_{\text{per},m}^2 \times L_{\text{per},m}^2$. Aqui, $L_{\text{per},m}^2$ indica o subespaço fechado de L_{per}^2 constituído de funções com média zero.

Nesse contexto, as condições de estabilidade/instabilidade descritas em [56] são dadas como: se

- (i) existe uma curva suave de soluções para (5), da forma $c \in I \mapsto \varphi_c \in H_{\text{per}}^2 \cap L_{\text{per},m}^2$, em que para cada $c \in I$, a função $\varphi := \varphi_c$ tem período $L > 0$;
- (ii) o operador linearizado restrito ao espaço de média zero, definido como

$$\mathcal{L}_{\Pi} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{L} \int_0^L \varphi^2 f dx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (f, g) \in D(\mathcal{L}_{\Pi})$$

em que \mathcal{L} é dado por¹

$$\mathcal{L} \equiv G''(\varphi, c\varphi') = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - 3\varphi^2 + 1 & c\partial_x \\ -c\partial_x & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

tem apenas um autovalor negativo, que é simples e o zero é um autovalor simples associado com a autofunção $(\varphi', c\varphi'')$;

(iii) a função $d : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(c) = G(\varphi, c\varphi')$, $c \in I$, é não-degenerada, ou seja, $d''(c) \neq 0$, para todo $c \in I$.

Então, de acordo com [56], se $d''(c) < 0$ temos instabilidade orbital e se $d''(c) > 0$, $c \in I$, temos estabilidade orbital (veja Definição 2.16 para uma definição precisa de estabilidade). Em outras palavras, determinar a convexidade da função d desempenha um importante papel em nossa análise. Uma vez que, $G'(\varphi, c\varphi') = 0$, imediatamente deduzimos que $d'(c) = -F(\varphi, c\varphi')$, $c \in I$, o que implica

$$d''(c) = - \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx + 2(1 - \omega) \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx, \quad (9)$$

em que foi usado que $\omega = 1 - c^2$.

Como já determinamos a ocorrência de (i), via a dedução da solução explícita em (6), na sequência descrevemos brevemente como obtemos (ii) e (iii) em nosso caso. Associado ao operador em (8) está o operador auxiliar (veja Seção 3.2)

$$\mathcal{L}_1 = -\omega\partial_x^2 - 3\varphi^2 + 1, \quad (10)$$

que tem exatamente dois autovalores negativos simples e o zero é um autovalor simples com autofunção φ' . Tal operador surge no momento que calculamos a forma quadrática associado ao operador \mathcal{L} . Esses fatos até nos permitem decidir a simplicidade do autovalor zero e calcular a quantidade de autovalores negativos de \mathcal{L} , que é na verdade dois. No entanto, ainda assim, em um primeiro momento, não somos capazes de obter estabilidade ou instabilidade da solução φ , pois nesse caso não conseguimos determinar o item (ii) para o operador \mathcal{L} . Para contornar essa dificuldade, ao invés de \mathcal{L}_1 consideramos o operador de restrição $\mathcal{L}_{1\Pi} : D(\mathcal{L}_{1\Pi}) = H_{\text{per}}^2 \cap L_{\text{per,m}}^2 \subset L_{\text{per,m}}^2 \rightarrow L_{\text{per,m}}^2$ definido por

$$\mathcal{L}_{1\Pi} f := \mathcal{L}_1 f + \frac{3}{L} \int_0^L \varphi^2 f dx.$$

Associado a $\mathcal{L}_{1\Pi}$ está o espaço de restrição $S_1 := [1] \subset \text{Ker}(\mathcal{L}_1)^\perp = [\varphi']^\perp$ e o número $D_1 := (\mathcal{L}_1^{-1}1, 1)_{L_{\text{per}}^2}$. Convém destacarmos que o operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ será útil no que tange obtermos propriedades espectrais do operador restrito ao espaço de média zero \mathcal{L}_Π . A partir desse ponto estamos em posição de aplicar o Teorema do Índice para operadores

¹Aqui $D(\mathcal{L}_\Pi)$ é a interseção do domínio de \mathcal{L} com o espaço de média zero. De modo que qualquer imagem de \mathcal{L}_Π continua pertencendo a um espaço de média zero.

auto-adjuntos (veja [67, Teorema 5.3.2]) que nos dá informações espectrais precisas e convenientes relativo a $\mathcal{L}_{1\Pi}$ em termos de propriedades espectrais associados a \mathcal{L}_1 . Sendo mais preciso, em virtude de $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$, temos

$$n(\mathcal{L}_{1\Pi}) = n(\mathcal{L}_1) - n_0 - z_0 \quad (11)$$

e

$$z(\mathcal{L}_{1\Pi}) = z(\mathcal{L}_1) + z_0, \quad (12)$$

em que $n(\mathcal{A}) \in \mathbb{N}$ e $z(\mathcal{A}) \in \mathbb{N}$ indicam o número de autovalores negativos e a dimensão do núcleo, respectivamente, de um operador linear \mathcal{A} . Além disso, os números $n_0 \in \mathbb{N}$ e $z_0 \in \mathbb{N}$ são definidos, respectivamente, como

$$n_0 := \begin{cases} 1, & \text{se } D_1 < 0 \\ 0, & \text{se } D_1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad z_0 := \begin{cases} 1, & \text{se } D_1 = 0 \\ 0, & \text{se } D_1 \neq 0. \end{cases}$$

Seja $L > 0$ fixo. Em nossa abordagem, consideremos a velocidade da onda $c \in (-1, 1)$ apenas no intervalo $[0, 1)$. O restante dos casos podem ser analisados similarmente. Provamos que se $c \in [0, 1)$, então existe um único $c^* > 0$ tal que para qualquer $c \in [0, c^*)$ temos $D_1 < 0$. Tendo em vista (11) e (12) deduzimos que $\mathcal{L}_{1\Pi}$ tem apenas um autovalor negativo que é simples e o zero é um autovalor simples cuja autofunção φ' . Como mencionado anteriormente, o operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ está fortemente relacionado com o operador \mathcal{L}_Π . Sendo mais preciso, alguns fatos estabelecidos na análise espectral de $\mathcal{L}_{1\Pi}$ implicam por meio do uso da fórmula do índice em (11) para \mathcal{L}_Π ao invés de $\mathcal{L}_{1\Pi}$, que o número de autovalores negativos do operador restrição \mathcal{L}_Π é igual a 1 e o zero é um autovalor esimples com autofunção associada $(\varphi', c\varphi'')$, ou seja, obtemos assim a condição (ii). Um fato importante que nos permite aplicar a teoria [56] no que se refere o item (ii) é que estamos usando fortemente o fato que as formas quadráticas do operador \mathcal{L} e \mathcal{L}_Π coincidem sob o espaço de média zero $L^2_{\text{per},m} \times L^2_{\text{per},m}$.

Também, usando a expressão explícita da onda cnoidal em (6) e alguns cálculos algébricos mostramos que $d''(c) < 0$, $c \in [0, c^*)$. Por conseguinte, podemos aplicar a teoria abstrata [56], como descrito acima, para concluir a instabilidade orbital, no espaço energia X , da onda cnoidal para $c \in [0, c(k_1)) \subset [0, c^*)$, em que $k_1 \simeq 0,802$.

O Capítulo 3 é dedicado a apresentarmos resultados no que se refere à existência e estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas associados à equação Quíntica de Klein-Gordon em (2).

A estabilidade orbital de equações de Klein-Gordon no caso complexo tem sido extensivamente estudado nas últimas décadas. Em [121], Shatah deu condições suficientes de estabilidade orbital para a n -dimensional equação de Klein-Gordon

$$u_{tt} - \Delta u + u + f(|u|)\arg(u) = 0.$$

Em [55], Grillakis determinou condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas estacionárias da forma $u(x, t) = e^{ict}\varphi(x)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, relacionadas com a seguinte

equação

$$u_{tt} - \Delta u + u - f(|u|^2)u = 0.$$

Esse resultado foi generalizado por Jeanjean e Le Coz em [64] e eles usaram o Teorema do Passo da Montanha para mostrar a existência de minimizadores para um funcional adequado sob certas restrições.

Consideremos a equação de Klein-Gordon não-linearidade do tipo potência $p \in \mathbb{N}$ colocada em \mathbb{R}^n :

$$u_{tt} - \Delta u + u - |u|^{p-1}u = 0. \quad (13)$$

Para o caso $p \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, Shatah em [121] provou um resultado de estabilidade orbital para ondas estacionárias quando $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$. Um resultado interessante dado em [122] por Shatah e Strauss provou que soluções do tipo ondas estacionárias são orbitalmente instáveis quando $p \geq 1 + \frac{4}{n}$ e $|c| < 1$. Wu em [132] provou instabilidade orbital para ondas estacionárias quando $n = 1$, $1 < p < 5$, $c \in (-1, 1)$ e $|c| = 2^{-1}\sqrt{p-1}$. O principais argumentos usados foram um argumento de modulação combinado com uma identidade virial de acordo com os trabalhos pioneiros [17] e [89].

Ainda no caso $n = 1$, contexto periódico, e levando em conta ondas estacionárias, a existência e estabilidade foram estabelecidas por Natali e Pastor em [102] para a equação cúbica de Klein-Gordon (complexa), isto é, com $p = 3$ em (13). Nesse trabalho, os autores mostraram resultados de estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas do tipo *dnoidal* e instabilidade orbital de ondas estacionárias do tipo *cnoidal*. A principal ferramenta utilizada pelos autores foi a teoria clássica de Grillakis, Shatah e Strauss, contida em [56] e [57] adaptada ao contexto periódico. Em [95], Natali e Cardoso consideraram o caso $p = 5$ para mostrar a instabilidade orbital de soluções de ondas estacionárias *dnoidais* no espaço de Sobolev $H_{\text{per}}^1 \times L_{\text{per}}^2$ restrito as funções periódicas pares. A principal ferramenta foi uma abordagem computacional baseada em [103] por Neves, que é útil para decidir o comportamento do espectro não-positivo do operador linearizado associado. Depois disso, a instabilidade orbital foi determinada usando os argumentos em [56]. Em [11], Angulo e Natali também mostraram o mesmo resultado para o caso $p = 5$ usando uma abordagem diferente para decidir a quantidade e multiplicidade de autovalores não positivos do operador linearizado associado.

O estudo da estabilidade espectral de ondas periódicas tem contribuições importantes para as equações do tipo Klein-Gordon no caso complexo, com não linearidades gerais do tipo potência como (13). De fato, Demirkaya *et al.* em [40] obteve a estabilidade espectral de ondas periódicas associadas à equação de Klein-Gordon (13) para $n = 1$, $p = 3$ e $p = 5$. Estudo similar, para $p = 1$ e $p = 2$, também foi feito em [59] por Hakkaev. Em ambos os casos, soluções positivas explícitas do tipo *dnoidal* foram determinadas e provaram a estabilidade espectral dessas ondas. Nos dois casos $p = 3$ e $p = 5$, sabe-se que um perfil cnoidal também é uma solução periódica, mas questões relativas à estabilidade

espectral/orbital nunca foram tratadas na literatura atual até o momento. Nossa intenção é dar uma resposta positiva quanto à estabilidade orbital para o caso $p = 5$.

Agora, descrevemos nossa abordagem contida no Capítulo 3. Quanto a existência de soluções, um aspecto matemático importante sobre a equação (2) é a existência de soluções periódicas de ondas estacionárias da forma

$$u(x, t) = e^{ict} \varphi_c(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (14)$$

em que $c \in \mathbb{R}$ representa a frequência da onda e $\varphi = \varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave periódica de período $L > 0$ fixado. De fato, substituindo (14) em (2), temos que φ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$-\varphi'' + \omega\varphi - \varphi^5 = 0, \quad (15)$$

em que $\omega := 1 - c^2 > 0$.

No contexto periódico e para um $L > 2\pi$ fixo, podemos encontrar uma solução explícita para a equação (15) que depende da função elíptica de Jacobi do tipo *cnoidal* como

$$\varphi(x) = \frac{a \operatorname{cn}(bx, k)}{\sqrt{1 - q \operatorname{sn}^2(bx, k)}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

em que $k \in (0, 1)$ é chamado de módulo da função elíptica e $(a, b, c, q) \in \mathbb{R}^4$ dependem suavemente do parâmetro $k \in (0, 1)$. Especificamos a dependência de $c \in (-1, 1)$ em termos de $k \in (0, 1)$ para um $L > 2\pi$ fixo. De fato, para $c \in (-1, 1)$, vemos que $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$. O parâmetro $\omega \in (0, 1]$ é então dado por

$$\omega = \frac{-16 (\operatorname{K}(k))^2 ((-k^2 + 1) \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + k^4 - k^2 + 1)}{(k^2 - 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}) L^2}.$$

Desta forma, conseguimos construir uma curva suave de soluções

$$c \in I = (-1, 1) \mapsto \varphi \in H_{\text{per},e}^2,$$

todas com o mesmo período $L > 2\pi$. Aqui, $H_{\text{per},e}^2$ indica o espaço H_{per}^2 constituído por funções pares. Agora, é bem conhecido que a equação (2) admite as quantidades conservadas $E, F : X := H_{\text{per}}^1 \times L_{\text{per}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$E(u, u_t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(|u_x|^2 + |u_t|^2 + |u|^2 - \frac{|u|^6}{3} \right) dx$$

e

$$F(u, u_t) = \operatorname{Im} \int_0^L \bar{u} u_t dx = \int_0^L (\operatorname{Re} u \operatorname{Im} u_t - \operatorname{Im} u \operatorname{Re} u_t) dx,$$

em que $(u, u_t) = (\operatorname{Re}(u), \operatorname{Im}(u_t), \operatorname{Im}(u), \operatorname{Re}(u_t))$. Ademais, definimos para $c \in I$, o funcional de Lyapunov $G := E - cF$. De (15), obtemos $G'(\varphi, c\varphi, 0, 0) = 0$, ou seja, $(\varphi, c\varphi, 0, 0)$ é um ponto crítico de G . Assim, o segundo passo é estudar a quantidade e multiplicidade dos

autovalores não-positivos associados ao operador linearizado $\mathcal{L} := G''(\varphi, c\varphi, 0, 0)$ dado por

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{L}}_1 & 0 \\ 0 & \vec{\mathcal{L}}_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

em que

$$\vec{\mathcal{L}}_1 = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi^4 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{L}}_2 = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - \varphi^4 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

restrito ao espaço periódico par. Para isso e devido ao formato diagonal do operador \mathcal{L} em (16) basta estudar o espectro não-positivo dos seguintes operadores de Hill

$$\mathcal{L}_1 = -\partial_x^2 + \omega - 5\varphi^4 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 = -\partial_x^2 + \omega - \varphi^4. \quad (18)$$

De acordo com os argumentos contidos em [103] por Neves, podemos provar que o operador \mathcal{L}_2 tem um único autovalor negativo que é simples. Com relação ao operador \mathcal{L}_1 , determinamos que o número de autovalores negativos é dois. Para obter o mesmo cenário para os operadores \mathcal{L}_i , $i = 1, 2$ restritos às funções periódicas pares, precisamos usar alguns argumentos adicionais da teoria geral para operadores diferenciais com potenciais periódicos em Brown e Eastham [27]. Assim, denotando por \mathcal{L}_e a restrição de \mathcal{L} em (16) às funções periódicas pares, obtemos que o núcleo de \mathcal{L}_e é unidimensional e o número de autovalores negativos, indicados por $n(\mathcal{L}_e)$, também é três. Agora, consideremos a função $d : I := (-1, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(c) = G(\varphi, c\varphi, 0, 0)$. Uma vez que $G'(\varphi, c\varphi, 0, 0) = 0$, prontamente inferimos que

$$d''(c) = - \int_0^L (\varphi(x))^2 dx + 2c^2 \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi(x))^2 dx, \quad c \in I. \quad (19)$$

Denotando por $p(d'') \in \mathbb{N}$ como o número de autovalores positivos associados à segunda derivada da função d e visando determinar a quantidade $n(\mathcal{L}_e) - p(d'') \in \mathbb{N}$ vemos novamente, como no caso da Klein-Gordon cúbica, que a convexidade da função d se mostra como sendo um dos pilares fundamentais da nossa análise. De fato, usando a forma explícita da solução φ e (19) fomos capazes de determinar a existência de um $c^* \in (0, 1)$ e $L_0 > 2\pi$ tais que $d''(c) < 0$, para todo $c \in (-1, c^*] \cup (c^*, 1)$ e $L > 2\pi$ e $d''(c) < 0$, para todo $c \in (-1, 1)$ e $L \in (2\pi, L_0)$. Esses fatos e as propriedades espectrais do operador \mathcal{L}_e mencionadas anteriormente nos permitem concluir que $n(\mathcal{L}_e) - p(d'')$ é um número ímpar. Conseqüentemente, a onda periódica φ é linearmente instável para perturbações restritas às funções periódicas pares. A instabilidade linear da onda φ juntamente com o principal resultado em [123] por Shatah e Strauss (veja também [100, Teorema 3.2] de Natali e Pastor) nos permitem concluir o nosso resultado de instabilidade orbital (não-linear) restrito ao espaço das funções periódicas pares.

O Capítulo 4 tem por objetivo apresentarmos resultados relativos à existência e estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas para a equação fracionária não-linear de Schrödinger no caso de *focusing* dada em (3).

A equação fracionária não-linear de Schrödinger foi introduzida por Laskin em [76] e [77] e aparece em diversas aplicações físicas como dinâmica de fluidos, mecânica quântica, na descrição de estrelas de Boson e dinâmica de ondas de água ([63], [68] e [113]). Quando $s = 1$, obtemos que $(-\Delta)^s = -\Delta$ é o conhecido operador laplaciano e (3) se reduz à equação cúbica não-linear de Schrödinger no caso *focusing*. Até onde sabemos, existem muitas aplicações para esta equação específica, como óptica, mecânica quântica, condensados de Bose-Einstein, propagação de feixe de laser e modelagem de DNA. Do ponto de vista matemático, a equação cúbica de Schrödinger descreve ondas não-lineares e fenômenos dispersivos ondulatórios.

Uma solução de onda periódica estacionária para a equação (3) tem a forma

$$u(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (20)$$

em que $\varphi : \mathbb{T} = [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave 2π -periódica e $\omega \in \mathbb{R}$ representa a frequência de onda que é considerada positiva. Substituindo (20) em (3), obtemos a seguinte equação diferencial com derivada fracionária

$$(-\Delta)^s \varphi + \omega \varphi - \varphi^3 = 0. \quad (21)$$

A equação (3) admite as quantidades conservadas $E, F : H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ que são dadas como

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 - \frac{1}{2} |u|^4 dx$$

e

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx.$$

E para $\omega > 0$, vamos considerar o funcional padrão de Lyapunov definido como sendo $G := E + \omega F$. Por (21), obtemos $G'(\varphi, 0) = 0$, ou seja, $(\varphi, 0)$ é um ponto crítico de G . Além disso, o operador linearizado em torno do par $(\varphi, 0)$ é dado por

$$\mathcal{L} := G''(\varphi, 0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

em que

$$\mathcal{L}_1 = (-\Delta)^s + \omega - 3\varphi^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 = (-\Delta)^s + \omega - \varphi^2. \quad (23)$$

Para o caso $s = 1$, temos o trabalho pioneiro de Angulo [5] no qual o autor estabeleceu resultados de estabilidade orbital para ondas estacionárias positivas e periódicas com perfil *dnoidal*. Para isso, o autor combinou a teoria clássica de Floquet para os operadores de Hill \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 em (23) com as abordagens de estabilidade de Grillakis Shatah e Strauss em [56] e de Weinstein em [131]. No interessante trabalho de Gustafson *et al.* em [58], os autores obtiveram soluções de ondas periódicas cnoidais usando um método variacional para provar resultados de estabilidade em relação a perturbações com o mesmo período $L > 0$ e resultados de estabilidade orbital no espaço constituído por funções antiperiódicas

com período $\frac{L}{2}$. Referências adicionais sobre a estabilidade orbital/espectral de ondas periódicas podem ser encontradas em [52], [53], [78] e [98].

Quando $s \in (0, 1)$, a estabilidade orbital de soluções de ondas estacionárias reais, pares e anti-periódicas $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de (3) foi estudada por Claassen e Johnson em [34]. Os autores determinaram a existência de soluções reais através de um problema de minimização no contexto de funções antiperiódicas (denotadas por $L_a^2(0, L)$) e estabeleceram que o operador linearizado associado atuando em $L_a^2(0, L)$ não é degenerado. Fazendo a suposição adicional de que $\frac{d}{d\omega} \int_0^L \psi^2 dx > 0$ (a conhecida condição de Vakhitov-Kolokolov), os autores foram capazes de mostrar que ψ é orbitalmente estável em relação a perturbações anti-periódicas em um subespaço adequado de $H^s(0, L) \cap L_a^2(0, L)$.

Nosso objetivo neste trabalho é mostrar que a solução de onda estacionária em (20), em que $\varphi = \varphi_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma onda periódica positiva e *single-lobe* (ver Definição 4.2), é orbitalmente estável/instável. Além dos resultados de estabilidade/instabilidade orbital, nossa intenção é apresentar uma afirmação precisa sobre a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg no contexto periódico dada por

$$\|f\|_{L_{\text{per}}^4(\mathbb{T})}^4 \leq C \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4-\frac{1}{s}} + C \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^4, \quad \forall f \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}). \quad (24)$$

Apresentamos agora os pontos principais do Capítulo 4. Primeiro, mostramos a existência de uma solução *single-lobe* periódica φ para a equação (21). No entanto, uma vez que não é possível determinar soluções explícitas associadas à (21) a abordagem feita nesse caso é um diferente da feita para as equações (5) e (15), a saber, a abordagem empregada para (21) é baseada em um método variacional via um problema de minimização. Sendo mais preciso, dado $\tau > 0$ fixado e seguindo argumentos semelhantes como em [96] e [97], precisamos resolver o seguinte problema de minimização restrito

$$\inf \left\{ \mathcal{B}_\omega(u) := \int_{-\pi}^{\pi} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 + \omega |u|^2 dx ; u \in H_{\text{per},e}^s, \int_{-\pi}^{\pi} |u|^4 dx = \tau \right\}, \quad (25)$$

em que $\omega, \tau > 0$ e $s \in (\frac{1}{4}, 1]$. Diferente das abordagens [60], [96] e [97], vemos que $u \in H_{\text{per},e}^s$ em (25) é complexo, então uma eventual solução Φ para o problema mencionado é uma função de valor complexo. Aqui, $H_{\text{per},e}^s$ representa o subespaço de H_{per}^s composto de funções pares. Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, vemos que $e^{-i\theta} \Phi$ também é um minimizador para (25), então podemos assumir $\Phi = e^{i\theta_0} \varphi$, em que $\theta_0 \in \mathbb{R}$ é um número real fixo e φ é uma função 2π -periódica com valor real (consulte Observações 4.4, 4.5 e 4.6 na Seção 4.1.1 para detalhes adicionais). Essa suposição permite considerar uma solução de valor real $\varphi \in H_{\text{per}}^s$ para o problema (25) que é par. Além disso, podemos considerar que φ tem um perfil *single-lobe* para todos $\omega > \frac{1}{2}$ (ver Proposição 4.7).

Outra maneira de construir soluções periódicas reais para a equação (21) pode ser determinada usando a teoria da bifurcação local e global em [30]. Primeiro, construímos soluções periódicas de pequena amplitude de forma similar a [28] de Bruel e Dhara (veja também [97] por Natali, Le e Pelinovsky) para $\omega > \frac{1}{2}$ e próximo ao ponto de bifurcação $\frac{1}{2}$.

Usando o fato de que φ minimiza o problema (25), vemos que $n(\mathcal{L}) = 1$. Como \mathcal{L} em (22) é um operador diagonal, é possível obter pelo fato $(\mathcal{L}_1\varphi, \varphi)_{L^2_{\text{per}}} = -2\|\varphi\|_{L^4_{\text{per}}}^4 < 0$ que $n(\mathcal{L}_1) = 1$ e $n(\mathcal{L}_2) = 0$. Isto significa pelo fato de $\mathcal{L}_2\varphi = 0$ que 0 é o primeiro autovalor para \mathcal{L}_2 . Uma simples aplicação do Teorema da Oscilação (em [62]) nos dá $\varphi > 0$, de modo que a solução é positiva. Em seguida, usando alguns fatos relativos à teoria dos operadores positivos como em Albert [1], o Teorema da Oscilação e fato de φ ser uma solução *single-lobe* positiva, obtemos $z(\mathcal{L}_1) = 1$, ou seja, $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$. Todos os fatos relativos à análise espectral para os operadores \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 em (23) nos permitem concluir que $n(\mathcal{L}) = 1$ e $z(\mathcal{L}) = 2$, já que \mathcal{L} em (22) é um operador diagonal. Em particular, como $z(\mathcal{L}_1) = 1$, podemos usar o Teorema da Função Implícita para construir uma curva suave

$$\omega \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \mapsto \varphi = \varphi_\omega \in H^s_{\text{per}} \quad (26)$$

de ondas periódicas pares e positivas com período fixo que resolve (21). Esse fato nos permite considerar a função $\mathbf{d} : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{d}(\omega) = E(\varphi, 0) + \omega F(\varphi, 0)$$

e, conseqüentemente,

$$\mathbf{d}''(\omega) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^L \varphi^2 dx, \quad \omega \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

que nos possibilita estudar a convexidade da função \mathbf{d} apenas analisando o sinal da quantidade

$$\mathbf{q} := \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 dx.$$

A estratégia para provar a estabilidade orbital é baseada em uma adaptação dos argumentos em [56] por Grillakis, Shatah e Strauss e [101] por Natali e Pastor (veja também [98]), no contexto periódico. Observemos que $n(\mathcal{L}) = 1$ e $z(\mathcal{L}) = 2$ são úteis para considerar a solução de onda estacionária em (20) contendo apenas uma simetria (rotação), mas a estabilidade orbital pode ser considerada com a órbita gerada pela onda φ contendo duas simetrias (a saber, rotação e translação). Para isso, precisamos empregar o resultado de estabilidade em [101] e a existência de soluções globais no tempo são fundamentais para nossa análise. Como podemos obter um resultado global de boa colocação para o caso $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ de acordo com a desigualdade (24), a estabilidade orbital da onda pode ser estabelecido desde que a condição de Vakhitov-Kolokolov $\mathbf{q} > 0$ seja satisfeita.

Com relação à instabilidade orbital, podemos aplicar o *teorema de instabilidade* em [56] e o fato de que $n(\mathcal{L}) = z(\mathcal{L}) = 1$ sobre o espaço $L^2_{\text{per},e}$. Observemos que a instabilidade orbital no espaço $H^s_{\text{per},e}$ será considerada na órbita gerada por uma única simetria. Mesmo considerando um subespaço menor, a instabilidade orbital pode ser considerada em todo o espaço de energia H^s_{per} e a órbita gerada pelas duas simetrias. Para isso, o único requisito é que $\mathbf{q} < 0$.

Para obter o sinal da quantidade $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$ usamos uma abordagem numérica, que foi realizada em parceria com H. Borluk e G. Muslu (veja [12] e [21] para mais detalhes

adicionais). Para isso e sendo mais preciso, primeiro usamos o método de iteração de Petviashvili para gerar as soluções periódicas de ondas estacionárias da equação fracionária de Schrödinger. Então verificamos se $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 dx$ está aumentando ou diminuindo em relação a $\omega > \frac{1}{2}$ para determinar o sinal de $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}$. De modo que verificamos numericamente que $\mathfrak{q} < 0$ para $s \in (0, \frac{1}{2})$ e $\omega > \frac{1}{2}$, existe $s^* \simeq 0.6$ tal que $\mathfrak{q} > 0$ para $s \in [s^*, 1)$ e $\omega > \frac{1}{2}$ e para $s \in (\frac{1}{2}, s^*)$ existe $\omega_c > \frac{1}{2}$ que cumpre $\mathfrak{q} < 0$, caso $\omega \in (\frac{1}{2}, \omega_c)$ e $\mathfrak{q} > 0$, caso $\omega \in (\omega_c, \infty)$. Tais conclusões, pelo descrito anteriormente, são fundamentais para a obtenção dos nossos resultados de estabilidade e instabilidade orbital.

Com isso, finalizamos a nossa breve abordagem a respeito dos tópicos acima comentados. Nos capítulos seguintes, temos a descrição completa e detalhada do que nos propomos a fazer. O Capítulo 1 é dedicado a uma sucinta descrição de alguns fatos básicos e notações que usaremos ao longo do trabalho, o Capítulo 2 é voltado ao estudo da equação cúbica de Klein-Gordon, o Capítulo 3 tem como tema central a equação quártica de Klein-Gordon e, concluindo, no Capítulo 4 lidamos com a equação cúbica fracionária de Schrödinger.

Publicações Decorrentes do Doutorado

Artigos publicados

- Bittencourt Moraes, G. and de Loreno, G., *Cnoidal waves for the quintic Klein-Gordon and Schrödinger equations: existence and orbital instability*. J. Math. Anal. Appl. 513 (2022), 126203.
- Bittencourt Moraes, G., Borluk, H., de Loreno, G., Muslu, G. and Natali, F., *Orbital stability of periodic standing waves for the cubic fractional nonlinear Schrödinger equation*. J. Differential Equations 341 (2022), 263-291.
- Bittencourt Moraes, G., de Loreno, G. and Natali F., *Orbital stability of periodic traveling waves for the “abcd” Boussinesq systems*. Communications on Pure and Applied Analysis, 2023, 22(3): 922-945.

Artigos submetidos

- Natali, F. and de Loreno, G., *Odd Periodic waves for some Klein-Gordon type Equations: existence and stability*. Preprint (2020).
- Bittencourt Moraes, G., de Loreno, G., Natali, F. and Pastor, A., *Cnoidal waves for the cubic nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations*. Preprint (2021).

Apresentações de trabalhos

- *Estabilidade orbital de ondas cnoidais para uma equação de Schrödinger*. Webinar de Jovens Pesquisadores em EDP e Matemática Aplicada. Universidade Federal Fluminense e Universidade Estadual de Maringá, 2021.
- *Instabilidade Orbital de Ondas Cnoidais para a Equação cúbica de Klein-Gordon*. Seminários do PMA. Universidade Estadual de Maringá, 2022.
- *Ondas Periódicas para Equações Não-Lineares do Tipo Klein-Gordon e Schrödinger: Existência e Estabilidade Orbital*. III EAEPMA-Encontro de alunos e ex-alunos do PMA. Universidade Estadual de Maringá, 2023.

Capítulo 1

Fatos Básicos e Notações

Seja $L > 0$ um número real fixado. Para um número real $s \geq 0$, o espaço de Sobolev periódico real/completo $H_{\text{per}}^s([0, L])$ pode ser definido como

$$H_{\text{per}}^s([0, L]) = \left\{ f \in L^2([0, L]) ; f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \Theta_n, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |f_n|^2 < \infty \right\}, \quad (1.1)$$

em que, para $f \in L^2([0, L]) := \{f : [0, L] \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ é mensurável e } |f|^2 \text{ é integrável}\}$,

$$\Theta_n(x) = e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \quad \text{e} \quad f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

são os coeficientes de Fourier de f . Quando não houver perigo de confusão, omitiremos o intervalo $[0, L]$ do espaço $H_{\text{per}}^s([0, L])$ e denotaremos simplesmente por H_{per}^s . O espaço H_{per}^s é um espaço de Hilbert com produto interno e norma denotados, respectivamente, por $(\cdot, \cdot)_{H^s} : H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^s \rightarrow \mathbb{C}$ e $\|\cdot\|_{H^s} : H_{\text{per}}^s \rightarrow \mathbb{R}$. Em especial, se $s = 0$, então $H_{\text{per}}^0([0, L])$ é isometricamente isomorfo ao espaço $L^2([0, L])$ e nesse caso escrevemos a identificação $H_{\text{per}}^0([0, L]) \equiv L_{\text{per}}^2([0, L])$. Também, introduzimos

$$H_{\text{per}}^\infty([0, L]) = \bigcap_{s=1}^{\infty} H_{\text{per}}^s([0, L]).$$

Mais detalhes acerca das estruturas dos espaços mencionados anteriormente podem ser encontramos em [117, Seção 5.10] e [106, Seção 3.6]. As vezes para simplificar a escrita para nos referirmos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é periódica de período $L > 0$ escrevemos apenas que f é L -periódica.

Complementamos que, para $p \geq 1$, consideramos o espaço

$$L_{\text{per}}^p([0, L]) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ é } L\text{-periódica e } f|_{[0, L]} \in L^p([0, L])\}^1$$

equipado com a norma natural

$$\|f\|_{L_{\text{per}}^p} \equiv \|f\|_{L^p} = \left(\int_0^L |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L_{\text{per}}^p([0, L]).$$

¹Uma descrição mais formal por ser encontrada em [51, Páginas 238 e 239]

E no caso particular $p = 2$ o produto interno em $L^2_{\text{per}}([0, L])$ é dado explicitamente por

$$(f, g)_{H^0} \equiv (f, g)_{L^2} = \int_0^L f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2_{\text{per}}([0, L]).$$

É importante salientar ainda que, por [106, Proposição 3.193] e [3, Teorema 5.1], é válida a seguinte cadeia de imersões contínuas, densas e compactas

$$H^r_{\text{per}} \hookrightarrow H^s_{\text{per}} \hookrightarrow L^2_{\text{per}}, \quad \forall r, s > 0, r > s. \quad (1.2)$$

Ainda, pelo Lema de Sobolev ([106, Teorema 3.195]) ocorre a imersão contínua

$$H^s_{\text{per}} \hookrightarrow C_{\text{per}}([0, L], \mathbb{C}), \quad \forall s > \frac{1}{2}. \quad (1.3)$$

Também, de [117, Teorema A.1] e [2, Corolário 13.3], temos as imersões contínuas

$$H^1_{\text{per}} \hookrightarrow L^p_{\text{per}} \hookrightarrow L^q_{\text{per}}, \quad \forall p, q \in [1, \infty], p \geq q. \quad (1.4)$$

De modo particular, quando $s = m \in \mathbb{N}$, de acordo com [106, Proposição 3.194], $f \in H^m_{\text{per}}$ se, e somente se, $f^{(j)} \in L^2_{\text{per}}$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, sendo $f^{(j)}$ a derivada de ordem $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ vista no sentido distribucional (veja [106, Definição 3.29]) e a norma em H^m_{per} pode ser escrita como

$$\|f\|_{H^m} = \left(\sum_{j=0}^m \|f^{(j)}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^m_{\text{per}}. \quad (1.5)$$

Notemos que se $f \in H^s_{\text{per}}$, com $s \geq 1$, então em virtude de (1.3) e [106, Proposição 3.32], temos que derivada $f^{(1)}$ coincide com a derivada clássica f' de f .

E quando $s \in (0, 1]$, de acordo com [13], a norma em H^s_{per} pode ser escrita como

$$\|f\|_{H^s} = \left(\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^s_{\text{per}}, \quad (1.6)$$

em que

$$(-\Delta)^s : H^{2s}_{\text{per}}([0, L]) \subset L^2_{\text{per}}([0, L]) \longrightarrow L^2_{\text{per}}([0, L])$$

é o laplaciano fracionário definido via série de Fourier, para todo $f \in H^{2s}_{\text{per}}([0, L])$, por

$$(-\Delta)^s f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2\pi}{L} |n| \right)^{2s} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Aqui, $\mathcal{F} : L^2_{\text{per}}([0, L]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definida como $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, para todo $f \in L^2_{\text{per}}([0, L])$, é a transformada de Fourier agindo em $L^2_{\text{per}}([0, L])$, de modo que podemos escrever $\hat{f}(n) = f_n$, para $n \in \mathbb{Z}$ e com

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}; \|\alpha\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

²Para evitar confusões, convém enfatizarmos que em virtude de [106, Corolário 2.54 e Corolário 2.56], que as normas dadas em (1.5) e (1.6) coincidem no caso $s = m = 1$.

conhecido como espaço das sequências de Hilbert. Para detalhes acerca da transformada de Fourier agindo em L^2_{per} (consulte [106, Seções 2.2 e 2.3]).

Outro modo ainda (por vezes mais conveniente) de se definir o laplaciano fracionário é via multiplicador de Fourier, para todo $f \in H^s_{\text{per}}([0, L])$, como

$$\widehat{(-\Delta)^s f}(n) = \left| \frac{2\pi}{L} n \right|^{2s} \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Detalhes adicionais acerca do laplaciano fracionário (no contexto periódico) podem ser encontrados em [118].

Para $s \in [0, \infty]$ denotamos por

$$\begin{aligned} H^s_{\text{per,e}} &:= \{f \in H^s_{\text{per}} ; f \text{ é par}\}, & H^s_{\text{per,m}} &:= \{f \in H^s_{\text{per}} ; (f, 1)_{L^2} = 0\} \\ L^2_{\text{per,o}} &:= \{f \in L^2_{\text{per}} ; f \text{ é ímpar}\} & \text{e } L^2_{\text{per,m}} &:= \{f \in L^2_{\text{per}} ; (f, 1)_{L^2} = 0\}. \end{aligned}$$

Para $s \geq 0$ no que se refere o espaço de funções de média zero $H^s_{\text{per,m}}$ convém ressaltar que tal espaço é um subespaço fechado de H^s_{per} . E isso se dá pelo fato que definindo $K : H^s_{\text{per}} \rightarrow \mathbb{R}$ por $K(f) = (f, 1)_{L^2}$, então K é um operador fechado, pois é contínuo (veja [22, Observação 6, Capítulo 2]), e o núcleo de K coincide com $H^s_{\text{per,m}}$, o que mostra que $H^s_{\text{per,m}} \subset H^s_{\text{per}}$ é fechado. Ainda, se $s \in (0, 1]$, então em $H^s_{\text{per,m}}$ é válida a *Desigualdade de Poincaré* dada por

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{L^{2s}}{(2\pi)^{2s}} \cdot \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^2}^2, \quad \forall f \in H^s_{\text{per,m}}, \quad (1.9)$$

De fato, dado qualquer $f \in H^s_{\text{per,m}} \subset H^s_{\text{per}}([0, L])$, por (1.8) e pela Identidade de Parseval ([106, Corolário 2.54]), vemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2s} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^2}^2 &= L \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2s} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f}(n)|^2 \\ &= L \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2s} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \left| \frac{2\pi}{L} n \right|^s \widehat{f}(n) \right|^2 \\ &= L \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{f}(n)|^2. \end{aligned}$$

Disso e pela Identidade de Parseval, obtemos

$$\|f\|_{L^2}^2 = L \cdot \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2 = L \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq L \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{f}(n)|^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{2s} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^2}^2,$$

como afirmado.

Usando (1.9) não é difícil verificar que

$$(f, g)_{H^s_{\text{per,m}}} := ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} f, (-\Delta)^{\frac{s}{2}} g)_{L^2}, \quad \forall f, g \in H^s_{\text{per,m}}$$

define um produto interno em $H^s_{\text{per,m}}$. E, conseqüentemente,

$$\|f\|_{H^s_{\text{per,m}}} := \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^2}, \quad \forall f \in H^s_{\text{per,m}} \quad (1.10)$$

define uma norma em $H_{\text{per},m}^s$ equivalente ao induzido de H_{per}^s .

Quando necessário e como podemos identificar $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ e as notações acima também podem ser no caso vetorial/completo na seguinte maneira: para cada $f \in H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^s$ escrevemos $f = f_1 + if_2 \equiv (f_1, f_2)$, em que $f_j \in H_{\text{per}}^s$, $j = 1, 2$. Ocasionalmente por conveniência usamos as seguintes notações

$$\mathbb{H}_{\text{per}}^s = H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^s, \mathbb{H}_{\text{per},e}^s = H_{\text{per},e}^s \times H_{\text{per},e}^s, \mathbb{L}_{\text{per}}^2 = L_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2 \quad \text{e} \quad \mathbb{L}_{\text{per},e}^2 = L_{\text{per},e}^2 \times L_{\text{per},e}^2.$$

De maneira geral, $\|\cdot\|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ denota a norma do espaço normado $M = (M, \|\cdot\|_M)$. E dados $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$, para $n \in \mathbb{N}$ fixo, escrevemos

$$[m_1, m_2, \dots, m_n] := \{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_n m_n \in M ; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\},$$

com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. E dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é limitado longe do zero se $\inf\{\|x\|_M \in \mathbb{R}_+ ; x \in A\} \neq 0$. Dessa forma, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ é limitada longe do zero se, e somente se, $\inf\{\|x_n\|_M \in \mathbb{R}_+ ; n \in \mathbb{N}\} \neq 0$ (veja [72, página 273]).

Adicionalmente, dado um outro espaço normado $N = (N, \|\cdot\|_N)$ e um operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset M \rightarrow N$, em que $D(\mathcal{A})$ representa o domínio do operador \mathcal{A} , denotamos por $R(\mathcal{A}) \subset N$ e $\text{Ker}(\mathcal{A}) \subset M$ a imagem e o núcleo de \mathcal{A} , respectivamente. Adicionalmente, dado um subespaço $P \subset D(\mathcal{A})$ denotamos por $\mathcal{A}|_P$ como sendo o operador \mathcal{A} restrito ao subespaço P , em outras palavras, $\mathcal{A}|_P := \mathcal{A} : P \subset D(\mathcal{A}) \subset M \rightarrow N$. Também, indicamos por $n(\mathcal{A}), p(\mathcal{A}) \in \mathbb{N}$ e $z(\mathcal{A}) \in \mathbb{N}$ o número de autovalores negativos, número de autovalores positivos e a dimensão do núcleo do operador \mathcal{A} , respectivamente. Ainda, se $H = (H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert e $H = M = N$, então representamos por $\rho(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{A}), \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}$ e $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}$ o conjunto resolvente, o espectro, o espectro discreto e o espectro essencial de \mathcal{A} , respectivamente, (veja a definição mais detalhada em [73, Definição 7.2-1] e [15, Definição B.44]) de modo que vale a decomposição

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}) \cup \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}). \quad (1.11)$$

No que concerne um operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2$, escrevemos \mathcal{A}_e para indicar o operador \mathcal{A} restrito ao espaço $D(\mathcal{A}) \cap L_{\text{per},e}^2$ e \mathcal{A}_o para representar o operador \mathcal{A} restrito ao espaço $D(\mathcal{A}) \cap L_{\text{per},o}^2$. Notação análoga para $L_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2$ ao invés de L_{per}^2 .

Além disso, se $H = (H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert e $M \subset H$, então escrevemos

$$M^\perp = \{v \in H ; (v, m)_H = 0, \forall m \in M\}.$$

denominado complemento ortogonal de M .

Agora, estabelecemos algumas propriedades básicas referentes a integrais elípticas e funções elípticas de Jacobi. Para $k \in (0, 1)$ e $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, as integrais

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}(\vartheta)}} \quad \text{e} \quad E(\theta, k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \text{sen}(\vartheta)} d\vartheta \quad (1.12)$$

são as integrais elípticas completas de primeira e segunda espécie, respectivamente, e denotamos por $K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ e $E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, de modo que $K, E : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Fundamentados nas integrais elípticas, acima apresentadas, definimos as funções elípticas de Jacobi. Para $k \in (0, 1)$ fixo e $y \in [0, 1]$ consideremos

$$u(y; k) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\text{sen}(\vartheta)}} \equiv F(\theta, k)$$

em que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ satisfaz $y = \text{sen}(\theta)$. Sendo $k \in (0, 1)$ fixo, a função u é estritamente crescente na variável y e a inversa de u define a função snoidal que é descrita por $\text{sn}(u; k) \equiv \text{sen}(\theta)$ e $\theta = \text{am}(u; k)$ é designada como a função amplitude de u . As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal e dnoidal, são definidas, respectivamente, em termos da snoidal da seguinte maneira:

$$\text{cn}(u; k) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u; k)} \quad \text{e} \quad \text{dn}(u; k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)}. \quad (1.13)$$

Desse modo, para $k \in (0, 1)$, os símbolos $\text{sn}(\cdot; k)$, $\text{dn}(\cdot; k)$ e $\text{cn}(\cdot; k)$ representam as funções elípticas de Jacobi do tipo *snoidal*, *dnoidal* e *cnoidal*, respectivamente. Também, ressaltamos que as funções elípticas de Jacobi são estendidas periodicamente de forma

$$\text{sn}(u; k) = \text{sn}(u + 4K(k); k), \quad \text{cn}(u; k) = \text{cn}(u + 4K(k); k) \quad \text{e} \quad \text{dn}(u; k) = \text{dn}(u + 2K(k); k). \quad (1.14)$$

As funções $\text{dn}(\cdot; k)$ e $\text{cn}(\cdot; k)$ são pares, enquanto que $\text{sn}(\cdot; k)$ é uma função ímpar. Quando o contexto nos permitir, omitimos o parâmetro $k \in (0, 1)$ e escrevemos apenas sn , dn e cn para denotar as funções *snoidal*, *dnoidal* e *cnoidal*, respectivamente. Para uma definição precisa e propriedades adicionais de integrais elípticas e funções elípticas de Jacobi consulte [23] ou também [31, Seção 2.3].

Por fim, dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}$, escrevemos $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$ e $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+$, para representar a parte real, a parte imaginária e o módulo, respectivamente, do número $z \in \mathbb{C}$.

Capítulo 2

Instabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Viajante para a Equação Cúbica de Klein-Gordon

Neste capítulo, mostraremos a existência e estabilidade orbital de soluções do tipo ondas periódicas viajante para a Equação Cúbica de Klein-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (2.1)$$

em que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica na variável espacial e com período $L > 0$ fixado. Antes de começar necessitamos dar sentido formal ao conceito de ondas do tipo viajantes.

Definição 2.1 (Onda Viajante). Uma função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é dita solução do tipo onda viajante periódica, com período $L > 0$, de (2.1) se existem $c \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e periódica de período $L > 0$ de modo que

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (2.2)$$

solucionando (2.1) no sentido usual.

É bem sabido que (2.1) pode ser visto como um sistema Hamiltoniano abstrato. Mais precisamente, definindo

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

vemos que (2.1) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}U(t) = JE'(U(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.4)$$

em que $U = (u, u_t) =: (u, v) \in X$, com $X := H_{\text{per}}^1([0, L]) \times L_{\text{per}}^2([0, L])$ e $E' : X \rightarrow X'$ indicando a derivada de Fréchet da quantidade conservada $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[u_x^2 + v^2 + u^2 \left(1 - \frac{u^2}{2} \right) \right] dx. \quad (2.5)$$

Nesse caso, E' é dada explicitamente por

$$E'(u, v) = \begin{pmatrix} u - u^3 - u_{xx} \\ u_t \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Além disso, (2.1) também admite a quantidade conservada $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(u, v) = \int_0^L u_x v \, dx. \quad (2.7)$$

de modo que $F' : X \rightarrow X'$ é também dada explicitamente por

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} -v_x \\ u_x \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Suponhamos que (2.1) admita soluções do tipo onda viajante da forma (2.2), como dada na Definição 2.1. Substituindo o perfil (2.2) em (2.1) temos a seguinte equação diferencial ordinária

$$-\omega\varphi'' + \varphi - \varphi^3 = 0, \quad (2.9)$$

com $\omega := 1 - c^2 \in (0, 1]$, ou seja, $c \in (-1, 1)$.

Dessa forma, na seção subsequente nosso objetivo é estabelecer existência de solução para a equação diferencial dada em (2.9). E, conseqüentemente, estabelecer também a existência de soluções ondas viajantes de (2.1), no sentido da Definição 2.1.

2.1 Existência de Ondas Viajantes do Tipo Cnoidal

Nosso propósito nessa seção é apresentar alguns fatos no que tange a existência de soluções periódicas $\varphi_c := \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para a equação diferencial ordinária não-linear escrita como

$$-\omega\varphi'' + \varphi - \varphi^3 = 0, \quad (2.10)$$

em que $\omega := 1 - c^2$ e $c \in (-1, 1)$, isto é, $\omega \in (0, 1]$.

Para tanto, multipliquemos ambos os lados da equação por φ' e integrando o resultado sobre o intervalo $[a, \zeta)$, com $a, \zeta \in \mathbb{R}$ arbitrários, obtemos a equação diferencial ordinária (2.10) na forma de quadratura como

$$(\varphi')^2 = \frac{1}{2\omega} (2\varphi^2 - \varphi^4 + 4A), \quad (2.11)$$

em que $A = A_c \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração arbitrária. Notemos que se definirmos

$$P(\lambda) := -\lambda^4 + 2\lambda^2 + 4A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

então

$$(\varphi'_c)^2 = \frac{1}{2\omega} P(\varphi_c). \quad (2.13)$$

Suponhamos que o polinômio P tem 2 raízes complexas da forma $\pm i\beta_1 \in \mathbb{C}$ e duas raízes reais $\pm\beta_2 \in \mathbb{R}$. Nesse caso, por (2.12), podemos escrever

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + \beta_1^2)(\beta_2^2 - \lambda^2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\beta_2 > 0$. Disso e a partir de (2.13) resulta que $\varphi(x) \in [-\beta_2, \beta_2]$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, ondas periódicas que mudam de sinal, com propriedade de média zero, fazem sentido em nosso contexto (veja Figura 2.1).

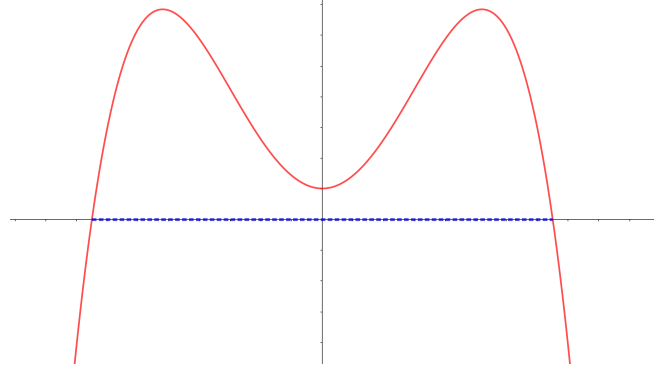


Figura 2.1: Comportamento do polinômio P . A existência do intervalo pontilhado $[-\beta_2, \beta_2]$ possibilita considerarmos soluções que mudam de sinal.

Posteriormente, devemos notar que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + \beta_1^2)(\lambda^2 - \beta_2^2) = \lambda^4 - \beta_2^2\lambda^2 + \beta_1^2\lambda^2 - \beta_1^2\beta_2^2 = \lambda^4 + (\beta_1^2 - \beta_2^2)\lambda^2 - \beta_1^2\beta_2^2,$$

o que, por igualdade de polinômios e (2.12), implica

$$\beta_2^2 - \beta_1^2 = 2 \quad \text{e} \quad \beta_1^2\beta_2^2 = 4A.$$

Definamos,

$$\psi(x) := \frac{1}{\beta_2}\varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13), vemos que

$$(\psi')^2 = -\frac{\beta_2^2}{2\omega} \left(\psi^2 + \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} \right) (\psi^2 - 1). \quad (2.15)$$

Na sequência, definamos implicitamente $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi^2(x) = \cos^2(\eta(x)) \quad (2.16)$$

de modo que $\eta(0) = 0$. Notemos que diferenciando a relação acima, pela Regra da Cadeia, temos que $2\psi\psi' = -2\cos(\eta)\sin(\eta)$, o que gera $(\psi')^2 = \sin^2(\eta)(\eta')^2$. Substituindo essa última igualdade em (2.15), segue que

$$(\eta')^2 = -\frac{\beta_2^2}{2\omega} \frac{1}{\sin^2(\eta)} \left(\cos^2(\eta) + \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} \right) (\cos^2(\eta) - 1),$$

e usando a Identidade Trigonométrica Fundamental, determinamos que

$$(\eta')^2 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\omega} (1 - k^2 \sin^2(\eta)), \quad (2.17)$$

com

$$k^2 := \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} = \frac{\beta_2^2}{2\beta_2^2 - 2} \in (0, 1), \quad (2.18)$$

uma vez que $\beta_2 > \sqrt{2}$, pois $\beta_2^2 - \beta_1^2 = 2$. Denotemos por $b^2 := \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\omega}$. Assim, de (2.17) resulta que

$$1 = \frac{\eta'}{\sqrt{b^2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\eta)}} \quad (2.19)$$

e donde decorre

$$\int_0^x 1 \, ds = \frac{1}{\sqrt{b^2}} \int_0^x \frac{\eta'(s)}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\eta(s))}} \, ds,$$

com $x \in (0, L)$. Uma mudança de variável nos permite escrever

$$\sqrt{b^2} \cdot x = \int_0^{\eta(x)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(t)}} = F(\eta(x), k) \quad (2.20)$$

em que a última igualdade ocorre devido a definição da *integral elíptica de primeira espécie* dada em (1.12) ou também [23, Fórmula 110.02]. Como $F(\eta(x), k) = \operatorname{sn}^{-1}(\operatorname{sen}(\eta(x)); k)$ a partir de (2.20) deduzimos que

$$\operatorname{sen}(\eta(x)) = \operatorname{sn}(\sqrt{b^2} \cdot x; k) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2(\eta(x)) = \operatorname{sn}^2(bx; k).$$

Disso, de (2.16), da Identidade Trigonométrica Fundamental e de [23, Formula 121.00], podemos concluir, para todo $x \in \mathbb{R}$, que

$$\psi^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(\eta(x)) = 1 - \operatorname{sn}^2(bx; k) = \operatorname{cn}^2(bx; k).$$

E por consequência de (2.14), temos

$$\varphi(x) = \beta_2 \psi(x) = \beta_2 \operatorname{cn}(bx; k), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por fim, estabelecemos que uma solução explícita da equação (2.10) é dada por

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) = \beta_2 \operatorname{cn}(bx; k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

em que $c \in (-1, 1)$,

$$k^2 = \frac{\beta_2^2}{2\beta_2^2 - 2} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{\beta_2^2 - 1}{\omega}.$$

Sabemos que a função cnoidal tem período $4K$ (ver (1.14) ou [23, Página 19]) e, dessa forma, se $L_c > 0$ denota o período minimal de φ_c , então

$$L_c = \frac{4K(k)}{b} = \frac{4\sqrt{\omega}}{\sqrt{\beta_2^2 - 1}} K(k), \quad k \in (0, 1)$$

e como $\omega = 1 - c^2 > 0$, vemos que *a priori* o período de φ_c depende de $c \in (-1, 1)$. Provemos agora que dado $L > 0$ existe uma família de ondas viajantes com diferentes velocidades e de mesmo período $L > 0$.

De fato, inicialmente devemos salientar que

$$k \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{quando } \beta_2 \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad k \longrightarrow 1, \quad \text{quando } \beta_2 \rightarrow \sqrt{2}$$

e, como consequência,

$$L_c \longrightarrow 0, \text{ quando } \beta_2 \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad L_c \longrightarrow \infty, \text{ quando } \beta_2 \rightarrow \sqrt{2}$$

o que nos permite concluir $0 < L_c < \infty$, para todo $c \in (-1, 1)$.

Definamos $\Omega := \{(\beta_2, c) \in \mathbb{R}^2 ; c \in (-1, 1), \beta_2 > \sqrt{2}\}$. Claramente, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e definamos também a aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma: \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\beta_2, c) &\longmapsto \frac{4\sqrt{\omega}}{\sqrt{\beta_2^2 - 1}} K(k) = L_c. \end{aligned}$$

Seja $L > 0$ arbitrariamente fixado. Devido ao fato que $0 < L_c < \infty$ e L_c ser uma função estritamente decrescente (isso será mostrado depois), para $c \in (-1, 1)$, existe $c_0 \in (-1, 1)$ tal que $L_{c_0} = L$. Afirmamos que, para qualquer $(\beta_2, c) \in \Omega$,

$$\frac{d}{d\beta_2} L_c = \frac{d}{d\beta_2} \Gamma(\beta_2, c) < 0. \quad (2.21)$$

Com efeito, a partir de (2.18), temos que

$$\frac{\sqrt{2}k}{\beta_2} = \frac{1}{\sqrt{\beta_2^2 - 1}}.$$

Nesses termos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta_2} \left(\frac{4\sqrt{\omega}}{\sqrt{\beta_2^2 - 1}} K(k(\beta_2)) \right) &= \frac{4\sqrt{2}\sqrt{\omega}k}{\beta_2} K'(k) \frac{d}{d\beta_2} k(\beta_2) + 4\sqrt{\omega} K(k) \frac{d}{d\beta_2} \left(\frac{\sqrt{2}k}{\beta_2} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}\omega}{\beta_2} \left[kk' K'(k) + k' K(k) - \frac{k}{\beta_2} K(k) \right], \end{aligned}$$

em que, com certo abuso de notação, $k' := \frac{d}{d\beta_2} k(\beta_2)$. Com intuito de provarmos (2.21), tendo em vista que $\frac{4\sqrt{2}\omega}{\beta_2} > 0$, temos que provar que

$$kk' K'(k) + k' K(k) - \frac{k}{\beta_2} K(k) < 0.$$

Para tanto primeiro lembremos que, por [23, Fórmula (710.00)],

$$K'(k) = \frac{E(k) - (1 - k^2) K(k)}{k(1 - k^2)}, \quad k \in (0, 1)$$

e, além disso,

$$\frac{d}{d\beta_2} k(\beta_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}(\beta_2^2 - 1)^{3/2}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} kk' K'(k) + k' K(k) - \frac{k}{\beta_2} K(k) &= \frac{kk' E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{k}{\beta_2} K(k) \\ &= -\frac{E(k)}{\sqrt{2}(\beta_2^2 - 1)^{3/2}(1 - k^2)} - \frac{k}{\beta_2} K(k). \end{aligned}$$

Desse fato e em virtude de $E(k) > 0$, $K(k) > 0$, $(\beta_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}(1 - k^2) > 0$ e $\frac{k}{\beta_2} > 0$ para todo $k \in (0, 1)$, segue que

$$kk'K'(k) + k'K(k) - \frac{k}{\beta_2}K(k) < 0,$$

como queríamos. Dessa maneira,

$$\frac{d}{d\beta_2}L_c = \frac{d}{d\beta_2}\Gamma(\beta_2, c) < 0, \quad \forall (\beta_2, c) \in \Omega.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita ([125, Teorema 2-12]), existe um intervalo $J(c_0) \subset (-1, 1)$, sendo uma vizinhança do valor $c_0 \in (-1, 1)$, e uma única função $\Lambda : J(c_0) \rightarrow (\sqrt{2}, \infty)$ de modo que

$$\Gamma(\Lambda(c), c) = L, \quad \forall c \in J(c_0).$$

Como $c_0 \in (-1, 1) =: I$ foi escolhido arbitrariamente, segue da unicidade da função Λ , que podemos estender o seu domínio de definição em todo intervalo $I = (-1, 1)$. Colecionando todas as informações acima, podemos estabelecer os seguinte resultado.

Proposição 2.2 (Curva Suave de Ondas Cnoidais). Seja $L > 0$ arbitrariamente fixado. Se $c \in (-1, 1)$, então existe um único $\beta_2 \in (\sqrt{2}, \infty)$ tal que a onda cnoidal, dada por

$$\varphi_c(x) = \beta_2 \operatorname{cn}(bx; k), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

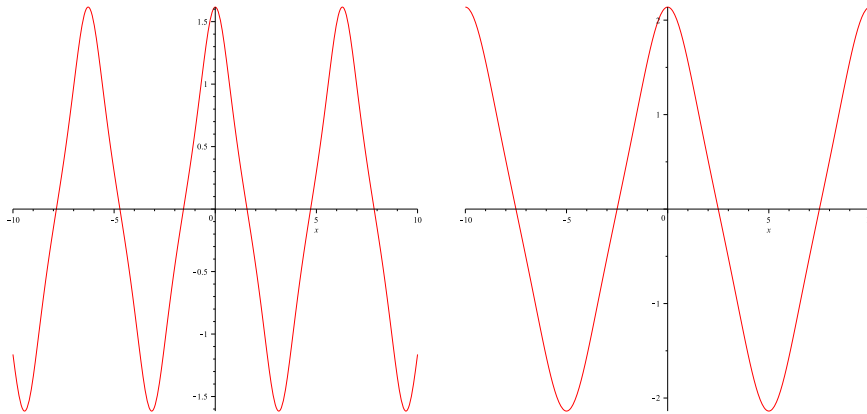
em que

$$k^2 = \frac{\beta_2^2}{2\beta_2^2 - 2} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{\beta_2^2 - 1}{\omega} = \frac{\beta_2^2 - 1}{1 - c^2},$$

é uma solução periódica para (2.10) com período minimal $L > 0$. Adicionalmente, a curva de soluções

$$c \in I = (-1, 1) \longmapsto \varphi_c = \varphi \in H_{\text{per}}^2([0, L])$$

é suave.



(a) Solução φ com $k = 0.9$ e $L = 2\pi$.

(b) Solução φ com $k = 0.8$ e $L = 10$.

Figura 2.2: Comportamento de φ .

Observação 2.3. Seja $L > 0$ fixo. Para $c \in (-1, 1)$ a solução dada em (2.22) pode ser escrita em termos do módulo $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ como

$$\varphi_c(x) = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \operatorname{cn}\left(\frac{4K(k)}{L}x; k\right).$$

De fato, uma vez que

$$k^2 = \frac{\beta_2^2}{2\beta_2^2 - 2} \in (0, 1),$$

obtemos

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2k^2 - 1}}, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Por outro lado,

$$L = \frac{4\sqrt{\omega}}{\sqrt{\beta_2^2 - 1}} K(k) = 4K(k)\sqrt{\omega(2k^2 - 1)} = \frac{4K(k)}{b},$$

implicando que

$$b = \frac{4K(k)}{L}, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Além disso, a velocidade da onda $c \in (-1, 1)$ e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$ dependem de $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ e são expressos por

$$c = \pm \frac{1}{4} \frac{\sqrt{-(2k^2 - 1)(-32K(k)^2k^2 + L^2 + 16K(k)^2)}}{(2k^2 - 1)K(k)} \quad (2.23)$$

e

$$\omega = \frac{1}{16} \frac{L^2}{K(k)^2(2k^2 - 1)}. \quad (2.24)$$

□

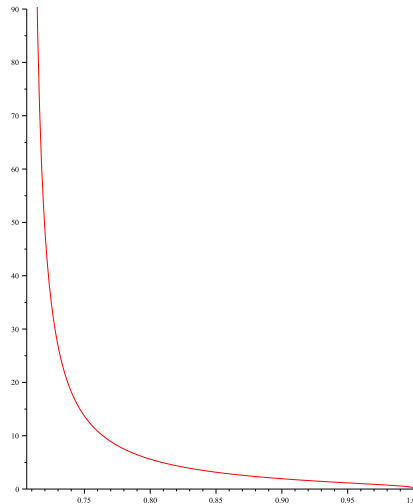


Figura 2.3: Comportamento de $\omega > 0$, com $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ e $L = 10$.

Observação 2.4. Se considerarmos $c \in (0, 1)$, como dado em (2.23), então vemos que

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{-(2k^2 - 1)(-32K(k)^2k^2 + L^2 + 16K(k)^2)}}{(2k^2 - 1)K(k)} < 1 \\
\Leftrightarrow & \quad (-(2k^2 - 1)(-32K(k)^2k^2 + L^2 + 16K(k)^2)) < 16(2k^2 - 1)^2 K(k)^2 \\
\Leftrightarrow & \quad -(-32K(k)^2k^2 + L^2 + 16K(k)^2) < 16(2k^2 - 1)K(k)^2 \\
\Leftrightarrow & \quad 16(2k^2 - 1)K(k)^2 - L^2 < 16(2k^2 - 1)K(k)^2 \\
\Leftrightarrow & \quad -L^2 < 0.
\end{aligned}$$

O que implica que o período $L > 0$ pode ser escolhido em $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$, quando $k \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. \square

Observação 2.5. Devemos ressaltar que a solução φ com perfil cnoidal determinada na Proposição 2.2 tem a propriedade de média zero, ou seja, $(\varphi, 1)_{L^2} = 0$ e isso é uma consequência imediata de [23, Fórmula (312.01)]. \square

2.2 Análise Espectral

Seja $L > 0$ fixado. Para $c \in (-1, 1)$, consideremos $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty([0, L])$ a solução periódica com perfil cnoidal de (2.10) dada na Proposição 2.2. O nosso objetivo nessa subseção é estudar o espectro não-positivo do operador linearizado

$$\mathcal{L} : H_{\text{per}}^2([0, L]) \times H_{\text{per}}^1([0, L]) \subset \mathbb{L}_{\text{per}}^2([0, L]) \longrightarrow \mathbb{L}_{\text{per}}^2([0, L])$$

dado por

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - 3\varphi^2 + 1 & c\partial_x \\ -c\partial_x & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

O operador \mathcal{L} em (2.25) é obtido considerando as quantidades conservada E e F definidas em (2.5) e (2.7), respectivamente. Sendo mais preciso, definindo o funcional de Lyapunov $G = E - cF$, temos $G' = E' - cF'$ e, em razão de (2.6), (2.8) e (2.10), inferimos que

$$G'(\varphi, c\varphi') = \begin{pmatrix} \varphi - \varphi^3 - \varphi'' \\ c\varphi' \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} -c\varphi'' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1 - c^2)\varphi'' + \varphi - \varphi^3 \\ c\varphi' - c\varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(\varphi, c\varphi')$ é um ponto crítico do funcional G . Ademais,

$$\mathcal{L} \simeq G''(\varphi, c\varphi') \quad (2.26)$$

em que \simeq significa que estamos identificando o operador \mathcal{L} com $G''(\varphi, c\varphi')$ por meio de um isomorfismo de Riesz conveniente (detalhes em [124, Lema 3.3]) e ainda, por (2.10), vemos que $(\varphi', c\varphi'') \in \text{Ker}(\mathcal{L})$. Vemos também que como decorrência de (2.26) e do exposto em [15, Página 92] que o operador \mathcal{L} é um operador auto-adjunto, logo $\sigma(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}$ ¹. De

¹Veja [73, Teorema 10.4-2]

forma complementar, o espectro de \mathcal{L} é um conjunto discreto em \mathbb{R} . Com efeito, primeiro lembremos que, por (1.11), vale $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{L}) \cup \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$. Agora, dado $\zeta \in \rho(\mathcal{L})$ pela definição do conjunto $\rho(\mathcal{L})$, temos que o operador

$$R(\zeta) \equiv (\mathcal{L} - \zeta I_d)^{-1} : \mathbb{L}_{\text{per}}^2 \rightarrow H_{\text{per}}^2 \times H_{\text{per}}^1 \subset \mathbb{L}_{\text{per}}^2$$

é bem definido e é limitado. Como as imersões $H_{\text{per}}^2 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$ e $H_{\text{per}}^1 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$ são compactas (veja (1.2)) dada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(R(\zeta))$ limitada podemos extrair uma subsequência convergente de $((\mathcal{L} - \zeta I_d)^{-1}(f_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{L}_{\text{per}}^2$, ou seja, $R(\zeta)$ é um operador compacto. Equivalentemente, \mathcal{L} tem resolvente compacto. E por consequência de [65, Teorema 6.29, Capítulo 3], inferimos que $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \emptyset$ e $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{L})$ consistindo de autovalores isolados, com multiplicidade finita. Em outras palavras, o espectro de \mathcal{L} é um conjunto discreto (e donde enumerável, veja [85, Corolário 2, Capítulo V, Seção 3]), como afirmado.

Na próxima subseção vamos explorar mais algumas propriedades espectrais úteis relacionadas ao operador \mathcal{L} em (2.25).

2.2.1 Propriedades Espectrais

As informações espectrais do operador \mathcal{L} estão intimamente relacionadas com as do operador $\mathcal{L}_1 : H_{\text{per}}^2([0, L]) \subset L_{\text{per}}^2([0, L]) \rightarrow L_{\text{per}}^2([0, L])$ definido como

$$\mathcal{L}_1 = -\omega \partial_x^2 - 3\varphi^2 + 1, \quad (2.27)$$

com $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$. Com efeito, a forma quadrática associado ao operador \mathcal{L} é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} Q(u, v) &:= (\mathcal{L}(u, v), (u, v))_{L^2 \times L^2} \\ &= (-u'' - 3\varphi^2 u + u + cv', u)_{L^2} + (-cu' + v, v)_{L^2} \\ &= (-u'' - c^2 u'' + c^2 u'' - 3\varphi^2 u + u + cv', u)_{L^2} + (-cu' + v, v)_{L^2} \\ &= (-(1 - c^2)u'' - c^2 u'' - 3\varphi^2 u + u + cv', u)_{L^2} + (-cu' + v, v)_{L^2} \quad (2.28) \\ &= (-(1 - c^2)u'' - 3\varphi^2 u + u, u)_{L^2} + (-c^2 u'' + cv', u)_{L^2} + (-cu' + v, v)_{L^2} \\ &= \int_0^L (\omega u'^2 + u^2 - 3\varphi^2 u^2) dx + \|cu' - v\|_{L^2}^2 \\ &= Q_1(u) + \|cu' - v\|_{L^2}^2, \quad (u, v) \in D(\mathcal{L}) \end{aligned}$$

em que

$$Q_1(u) := \int_0^L (\omega u'^2 + u^2 - 3\varphi^2 u^2) dx, \quad \forall u \in H_{\text{per}}^1([0, L])$$

representa a forma quadrática associada ao operador \mathcal{L}_1 . Desse modo, a ideia inicial é estudar o espectro não-negativo do operador \mathcal{L}_1 . E na sequência procederemos a fim de contar o número de autovalores negativos do operador \mathcal{L} e provar que seu núcleo é simples, com $\text{Ker}(\mathcal{L}) = [(\varphi', c\varphi'')]$.

Para começar observemos que derivando (2.10), obtemos

$$\mathcal{L}_1(\varphi') = -\omega\varphi''' + \varphi' - 3\varphi^2\varphi' = 0 \quad (2.29)$$

isto é, $\lambda = 0$ é autovalor de \mathcal{L}_1 com autofunção associada φ' . Na sequência, temos por [15, Teorema 11.21] que \mathcal{L}_1 é auto-adjunto e sendo um operador de Hill, o Teorema de Oscilação ([90, Teorema 2.1]) nos garante que o espectro de \mathcal{L}_1 é formado por uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ de autovalores que satisfaz

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} < \cdots, \quad (2.30)$$

em que a igualdade $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, significa que o autovalor é duplo². Agora, de (2.29) é facilmente visto que $\varphi' \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1)$. Adicionalmente, a sequência dada em (2.30) forma um conjunto discreto. Com efeito, é sabido, de (1.11), que ocorre a decomposição espectral dada por $\sigma(\mathcal{L}_1) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{L}_1) \cup \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_1)$. E, como anteriormente, usando a imersão compacta $H_{\text{per}}^2 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$, é possível provar que \mathcal{L}_1 tem resolvente compacto. E por consequência de [65, Teorema 6.29, Capítulo 3], inferimos que $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_1) = \emptyset$ e $\sigma(\mathcal{L}_1) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{L}_1)$ consistindo de autovalores isolados (com multiplicidade finita) e, logo, $\sigma(\mathcal{L}_1)$ é um conjunto discreto como afirmado. Por outro lado, como $\lambda = 0 \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1)$ podemos concluir em razão de [75, Teorema 4.4], que $\text{R}(\mathcal{L}_1) \subset L_{\text{per}}^2$ é um conjunto fechado. Consequentemente, por [15, Observação B.29], é válido

$$\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = \text{R}(\mathcal{L}_1)^\perp \quad \text{e} \quad \text{Ker}(\mathcal{L}_1)^\perp = \text{R}(\mathcal{L}_1). \quad (2.31)$$

Além disso, uma vez que φ' tem exatamente dois zeros no intervalo semi-aberto $[0, L)^3$ e em virtude de [90, Teorema 2.14] (ou [48, Teorema 3.1.2]) temos que o zero é o segundo ou terceiro autovalor de \mathcal{L}_1 . O próximo resultado nos diz que o zero é na verdade o terceiro autovalor.

Lema 2.6. Seja $L > 0$ fixado. Se $c \in [0, 1)$ e $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ é a solução cnoidal obtida na Proposição 2.2, então o operador \mathcal{L}_1 em (2.27) tem exatamente 2 autovalores negativos que são simples. O zero é um autovalor simples com autofunção associada φ' . Ademais, o restante o espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores e limitado longe do zero.

Demonstração. Inicialmente, consideremos o seguinte problema de fronteira associado ao operador \mathcal{L}_1 :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(f) = \lambda f \\ f(0) = f(L) \quad \text{e} \quad f'(0) = f'(L), \end{cases} \quad (2.32)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in H_{\text{per}}^2$. Conforme a Proposição 2.2, a solução $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ pode ser escrita como $\varphi(x) = \beta_2 \text{cn}(bx; k)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Tendo em vista, para $x \in \mathbb{R}$, a transformação

²Mais informações acerca de \mathcal{L}_1 pode ser encontrado, por exemplo, em [103].

³Toda função ímpar e L -periódica tem dois zeros no intervalo $[0, L)$, a saber $x = 0$ e $x = \frac{L}{2}$.

$\Psi(x) = f(b^{-1}x)$ temos que $\Psi''(x) = b^{-2}f''(b^{-1}x)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(f) = \lambda f &\Rightarrow -\omega f'' - 3\varphi^2 + f = \lambda f \\ &\Rightarrow -\omega f''(b^{-1}x) - 3\beta_2^2 \text{cn}^2(x; k) + f(b^{-1}x) = \lambda f(b^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow -\omega f'' - 3\beta_2^2(1 - \text{sn}^2) \cdot f + f = \lambda f \\ &\Rightarrow \frac{-(\beta_2^2 - 1)}{b^2} f'' - (3\beta_2^2 - 1 + \lambda)f + 3\beta_2^2 \text{sn}^2 f = 0 \\ &\Rightarrow \frac{f''}{b^2} + \frac{(3\beta_2^2 - 1 + \lambda)}{\beta_2^2 - 1} f - \frac{3\beta_2^2}{\beta_2^2 - 1} \text{sn}^2 f = 0 \end{aligned}$$

Desse fato e como, de acordo com a Observação 2.3, temos

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2k^2 - 1}}, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

obtemos

$$\mathcal{L}_1(f) = \lambda f \Rightarrow \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (\rho - 6k^2 \text{sn}^2) \Psi = 0, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

em que

$$\rho := \frac{\lambda + 3\beta_2^2 - 1}{\beta_2^2 - 1} \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Nesses termos, determinamos o seguinte problema equivalente a (2.32):

$$\begin{cases} \Psi'' + (\rho - 6k^2 \text{sn}^2) \Psi = 0 \\ \Psi(0) = \Psi(4K) \quad \text{e} \quad \Psi'(0) = \Psi'(4K) \end{cases} \quad (2.34)$$

que é uma equação chamada *Forma Jacobiana da Equação de Lamé*, a qual é em um certo sentido mais vantajoso de se lidar, pois tem autovalores $\rho \in \mathbb{R}$ bem conhecidos, a saber, (2.34) tem os 5 primeiros autovalores $\rho \in \mathbb{R}$ conhecidos (veja, por exemplo [5] ou [66]) que, para $k \in (0, 1)$, são dados por

$$\rho_0 = 2(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \quad (2.35)$$

$$\rho_1 = 1 + k^2 \quad (2.36)$$

$$\rho_2 = 1 + 4k^2 \quad (2.37)$$

$$\rho_4 = 4 + k^2 \quad (2.38)$$

$$\text{e } \rho_4 = 2(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \quad (2.39)$$

que são todos simples e com autofunções dadas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= k^2 \text{sn}^2(x; k) - \frac{1}{3}(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \\ \phi_1(x) &= (\text{sn}(x; k))' \\ \phi_2(x) &= (\text{cn}(x; k))' \\ \phi_3(x) &= (\text{dn}(x; k))' \\ \text{e } \phi_4(x) &= k^2 \text{sn}^2(x; k) - \frac{1}{3}(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.33), temos

$$\lambda = \beta_2^2 \rho - 3\beta_2^2 - \rho + 1. \quad (2.40)$$

Disso e dos valores $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, em (2.35)-(2.39) determinamos que os 5 primeiros autovalores de \mathcal{L}_1 são dados por

$$\lambda_0 := \frac{1 - 2k^2 - 2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}{2k^2 - 1}, \quad (2.41)$$

$$\lambda_1 := -\frac{3k^2}{2k^2 - 1},$$

$$\lambda_2 := 0,$$

$$\lambda_3 := \frac{-3k^2 + 3}{2k^2 - 1},$$

$$\text{e } \lambda_4 := \frac{1 - 2k^2 + 2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}{2k^2 - 1}, \quad (2.42)$$

para $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, de modo que também são todos simples. Adicionalmente, as autofunções associadas são dadas, respectivamente, como

$$f_0(x) = k^2 \text{sn}^2(bx; k) - \frac{1}{3}(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}), \quad (2.43)$$

$$f_1(x) = (\text{sn}(bx; k))',$$

$$f_2(x) = (\text{cn}(bx; k))',$$

$$f_3(x) = (\text{dn}(bx; k))',$$

$$\text{e } f_4(x) = k^2 \text{sn}^2(bx; k) - \frac{1}{3}(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.44)$$

também para $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

De modo particular, vemos que os dois primeiros autovalores de \mathcal{L}_1 , a saber $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ são negativos e simples. Bem como o autovalor $\lambda_2 = 0$ também é simples com autofunção φ' . Além disso, do fato já estabelecido que $\sigma(\mathcal{L}_1) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{L}_1)$, determinamos que o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores e limitado longe do zero. Dessa forma, concluimos o resultado. \blacksquare

Observação 2.7. A partir do Lema 2.6, se $h \in H_{\text{per}}^2([0, L])$ é uma autofunção associada a um autovalor negativo $-\kappa^2 < 0$ de \mathcal{L}_1 , então por (2.28) vemos que

$$Q(h, ch') = Q_1(h) = (\mathcal{L}_1 h, h)_{L^2} = -\kappa^2 \|h\|_{L^2}^2 < 0.$$

Mas, denotando por $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ o menor (a saber, o primeiro) autovalor de \mathcal{L} , pelo Teorema Min-Max ([115, Teorema XIII.2]), temos que

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \min_{(f,g) \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \setminus \{0\}} \frac{(\mathcal{L}(f, g), (f, g))_{L^2 \times L^2}}{\|(f, g)\|_{L^2 \times L^2}^2} \leq \frac{(\mathcal{L}(h, ch'), (h, ch'))_{L^2 \times L^2}}{\|(h, ch')\|_{L^2 \times L^2}^2} \\ &= \frac{Q_1(h)}{\|(h, ch')\|_{L^2 \times L^2}^2} < 0, \end{aligned}$$

o que implica $\sigma_0 < 0$ e que o número de autovalores negativos de \mathcal{L} é pelo menos 1, isto é, $n(\mathcal{L}) \geq 1$. \square

Notemos que, dado $f \in H_{\text{per},m}^2([0, L])$, não necessariamente ocorre que $\mathcal{L}_1 f \in L_{\text{per},m}^2([0, L])$. Mas, se definirmos

$$\mathcal{L}_{1\Pi} f := \mathcal{L}_1 f + \frac{3}{L} \int_0^L \varphi^2 f \, dx, \quad \forall f \in H_{\text{per},m}^2([0, L]) \quad (2.45)$$

então

$$\mathcal{L}_{1\Pi} : H_{\text{per},m}^2([0, L]) \subset L_{\text{per},m}^2([0, L]) \rightarrow L_{\text{per},m}^2([0, L]) \quad (2.46)$$

está bem definido. De fato, para qualquer $f \in H_{\text{per},m}^2([0, L])$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathcal{L}_{1\Pi} f \, dx &= \int_0^L \mathcal{L}_1 f \, dx + \left(\int_0^L \varphi^2 f \, dx \right) \cdot \left(\int_0^L \frac{3}{L} \, dx \right) \\ &= -\omega \int_0^L f'' \, dx - 3 \int_0^L \varphi^2 f \, dx + \int_0^L f \, dx + 3 \int_0^L \varphi^2 f \, dx = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

ou em outros termos, $\mathcal{L}_{1\Pi} f \in L_{\text{per},m}^2([0, L])$ mostrando que $\mathcal{L}_{1\Pi}$ está bem definido sobre espaços de média zero da forma em (2.46). Adicionalmente, seguindo o descrito em [67, Seção 5.3] não é difícil verificar que $\mathcal{L}_{1\Pi}$ é um *operador de restrição* de \mathcal{L}_1 , com *espaço admissível* $A_1 := L_{\text{per},m}^2([0, L])$, *espaço de restrição* $S_1 := [1] \subset \text{Ker}(\mathcal{L}_1)^\perp$ e matriz de restrição

$$D_1 := (\mathcal{L}_1^{-1} 1, 1)_{L^2}. \quad (2.48)$$

A partir desse ponto, estamos em posição de aplicar o Teorema do Índice ([67, Teorema 5.3.2]) que nos dá uma forma precisa de obter algumas propriedades espectrais úteis do operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ por meio do operador \mathcal{L}_1 . Mais precisamente, pelo Teorema do Índice, temos que

$$n(\mathcal{L}_{1\Pi}) = n(\mathcal{L}_1) - n_0 - z_0 \quad (2.49)$$

e

$$z(\mathcal{L}_{1\Pi}) = z(\mathcal{L}_1) + z_0 \quad (2.50)$$

em que $n_0 := n(D_1)$ e $z_0 := z(D_1)$. Ou equivalentemente,

$$n_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } D_1 < 0, \\ 0, & \text{se } D_1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad z_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } D_1 = 0, \\ 0, & \text{se } D_1 \neq 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

Observação 2.8. É conveniente observarmos que pelo fato de φ^2 ser par e de φ' ser ímpar temos que essas funções são ortogonais em $L_{\text{per}}^2 = L_{\text{per},e}^2 \oplus L_{\text{per},o}^2$, isto é, $(\varphi^2, \varphi')_{L^2} = 0$ e como consequência $\varphi' \in \text{Ker}(\mathcal{L}_{1\Pi})$. Também, para todo $f, g \in H_{\text{per},m}^2([0, L])$,

$$(\mathcal{L}_{1\Pi} f, g)_{L^2} = (\mathcal{L}_1 f, g)_{L^2} + \frac{3}{L} (\varphi^2, f)_{L^2} \cdot \overbrace{(g, 1)_{L^2}}^0 = (\mathcal{L}_1 f, g)_{L^2}.$$

Em particular, as formas quadráticas de $\mathcal{L}_{1\Pi}$ e \mathcal{L}_1 coincidem sob o espaço $H_{\text{per},m}^2([0, L])$. \square

O próximo resultado nos dá uma informação espectral precisa do operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ em (2.45)-(2.46). Aqui e no que se segue, vamos apenas considerar o caso $c \in [0, 1)$. O caso restante pode ser analisado, por simetria, de forma similar.

Lema 2.9. Seja $L > 0$ fixado. Se $\varphi \in H_{\text{per}}^{\infty}$ é a solução cnoidal obtida na Proposição 2.2, então existe $c^* \in (0, 1)$ tal que:

- (i) para todo $c \in [0, c^*)$, o operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ tem exatamente um autovalor negativo que é simples. O zero é um autovalor simples com autofunção φ' ;
- (ii) Para todo $c \in (c^*, 1)$, o operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ tem exatamente dois autovalores negativos que são simples. O zero é um autovalor simples com autofunção φ' ;
- (iii) Se $c = c^*$, o operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ tem exatamente um autovalor negativo que é simples e o zero é um autovalor duplo.

Demonstração. Inicialmente, notemos que uma vez que a função

$$k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) \mapsto c = \sqrt{1 - \frac{1}{16} \frac{L^2}{K(k)^2(2k^2 - 1)}} \in [0, 1)$$

é crescente (veja (2.23) e Figura 2.3), é suficiente trabalharmos com o parâmetro $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$ em vez de $c \in [0, 1)$. Consideremos o primeiro e o quinto autovalores $\lambda_0 < 0$ e $\lambda_4 > 0$ de \mathcal{L}_1 dados em (2.41) e (2.42) com respectivas autofunções $f_0, f_4 \in H_{\text{per}}^{\infty}$ dadas em (2.43) e (2.44), respectivamente.

Assim,

$$f_0(x) - f_4(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{1 - k^2 + k^4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\lambda_4 f_0 - \lambda_0 f_4) &= \lambda_4 \mathcal{L}_1(f_0) - \lambda_0 \mathcal{L}_1(f_4) \\ &= \lambda_4 \lambda_0 f_0 - \lambda_0 \lambda_4 f_4 \\ &= \lambda_0 \lambda_4 (f_0 - f_4) \\ &= -\frac{2\lambda_0 \lambda_4}{3} \sqrt{1 - k^2 + k^4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\frac{3}{2\sqrt{1 - k^2 + k^4}} \mathcal{L}_1 \left(\frac{\lambda_4 f_0 - \lambda_0 f_4}{\lambda_0 \lambda_4} \right) = 1. \quad (2.52)$$

Então,

$$(\mathcal{L}_1^{-1} 1, 1)_{L^2} = \left(-\frac{3(\lambda_4 f_0 - \lambda_0 f_4)}{2\sqrt{1 - k^2 + k^4} \lambda_0 \lambda_4}, 1 \right)_{L^2} = -\frac{3}{2} \frac{\lambda_4 (f_0, 1)_{L^2} - \lambda_0 (f_4, 1)_{L^2}}{\sqrt{1 - k^2 + k^4} \lambda_0 \lambda_4}. \quad (2.53)$$

Em contrapartida, por [23, Fórmula (310.02)], determinamos que

$$\begin{aligned} (f_0, 1)_{L^2} &= \int_0^L k^2 \text{sn}^2(bx; k) - \frac{1}{3} \left(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4} \right) dx \\ &= \frac{4k^2}{b} \int_0^{K(k)} \text{sn}^2(u; k) du - \frac{L}{3} \left(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4} \right) \\ &= \frac{4}{b} (K(k) - E(k)) - \frac{L}{3} \left(1 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(f_4, 1)_{L^2} &= \int_0^L k^2 \operatorname{sn}^2(bx; k) - \frac{1}{3} \left(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}\right) dx \\
&= \frac{4k^2}{b} \int_0^{K(k)} \operatorname{sn}^2(u; k) du - \frac{L}{3} \left(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}\right) \\
&= \frac{4}{b} (K(k) - E(k)) - \frac{L}{3} \left(1 + k^2 - \sqrt{1 - k^2 + k^4}\right)
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&\lambda_4(f_0, 1)_{L^2} - \lambda_0(f_4, 1)_{L^2} \\
&= \frac{4(\lambda_4 - \lambda_0)}{b} (K(k) - E(k)) - \frac{L(k^2 - 1)}{3} (\lambda_4 - \lambda_0) - \frac{\lambda_4 - \lambda_0}{3} L \sqrt{1 - k^2 + k^4} \\
&= \frac{4L(\lambda_4 - \lambda_0)}{4K(k)} (K(k) - E(k)) - \frac{L(k^2 - 1)}{3} (\lambda_4 - \lambda_0) - \frac{\lambda_4 - \lambda_0}{3} L \sqrt{1 - k^2 + k^4} \\
&= \frac{L(\lambda_4 - \lambda_0)}{K(k)} (K(k) - E(k)) - \frac{L(k^2 + 1)}{3} (\lambda_4 - \lambda_0) - \frac{\lambda_4 + \lambda_0}{3} L \sqrt{1 - k^2 + k^4} \\
&= \frac{2L\sqrt{1 - k^2 + k^4} (K(k) - 2E(k))}{(2k^2 - 1)K(k)}, \tag{2.54}
\end{aligned}$$

pois

$$\lambda_4 - \lambda_0 = \frac{4\sqrt{1 - k^2 + k^4}}{2k^2 - 1}, \quad \lambda_4 + \lambda_0 = \frac{-4k^2 + 2}{2k^2 - 1} \quad \text{e} \quad b = \frac{4K(k)}{L}.$$

Disso de (2.53), (2.54) e como

$$\lambda_0 \lambda_4 = \frac{-3}{(2k^2 - 1)^2}$$

temos bem definida (ver Observação 2.10) a quantidade

$$\begin{aligned}
D_1 = (\mathcal{L}_1^{-1} 1, 1)_{L^2} &= \frac{-3 \cdot 2L\sqrt{k^4 - k^2 + 1} (K(k) - 2E(k))}{2 \cdot (2k^2 - 1)K(k)\sqrt{1 - k^2 + k^4}} \cdot \frac{(2k^2 - 1)^2}{-3} \\
&= -\frac{L(2k^2 - 1)}{K(k)} (2E(k) - K(k)). \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$-\frac{L(2k^2 - 1)}{K(k)} < 0, \quad \forall k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

e, ainda,

$$E(0) = K(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$E(k) \longrightarrow 1, \quad K(k) \longrightarrow \infty, \quad \text{quando} \quad k \rightarrow 1$$

e

$$\frac{d}{dk} (k E(k)) = 2E(k) - K(k) =: \mathcal{T}(k),$$

com

$$\mathcal{T}'(k) = \frac{(1 - k^2)(E(k) - K(k)) - k^2 E(k)}{k(1 - k^2)} < 0,$$

para todo $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, isto é, $\mathcal{T} : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente decrescente e contínua (veja Figura 2.4).

Desses fatos, garantimos a existência de um $k^* \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ tal que $k^* \simeq 0,908$ que cumpre $2E(k^*) - K(k^*) = 0$ e

$$\begin{cases} 2E(k) - K(k) > 0, & \text{se } k \in (0, k^*) \\ 2E(k) - K(k) < 0, & \text{se } k \in (k^*, 1). \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} D_1 = (\mathcal{L}_1^{-1} 1, 1)_{L^2} < 0, & \text{se } k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, k^*\right) \\ D_1 = (\mathcal{L}_1^{-1} 1, 1)_{L^2} > 0, & \text{se } k \in (k^*, 1). \end{cases} \quad (2.56)$$

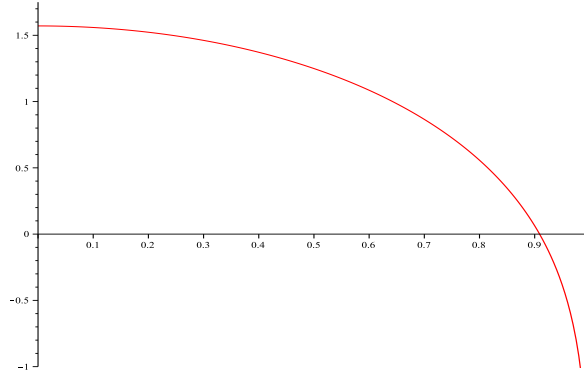


Figura 2.4: Comportamento de \mathcal{T} , com $k \in (0, 1)$.

Para $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, k^*\right)$, a partir de (2.49), (2.50), e do Lema 2.6 inferimos que

$$n(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 2 - 1 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad z(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 1 + 0 = 1$$

ou seja, $\mathcal{L}_{1\Pi}$ tem apenas um autovalor negativo e o zero é um autovalor simples. Esse fato estabelece o item (i). Por outro lado, para $k \in (k^*, 1)$, obtemos

$$n(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 2 - 0 - 0 = 2 \quad \text{e} \quad z(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 1 + 0 = 1,$$

o que nos permite concluir (ii). Finalmente, em $k = k^*$,

$$n(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 2 - 0 - 1 = 1 \quad \text{e} \quad z(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 1 + 1 = 2,$$

o que implica (iii). Para completar a prova, observemos que usando o valor explícito de $c \in [0, 1)$, em (2.23), resulta que o valor $k^* \simeq 0,908$ define (veja Observação 2.4) unicamente um valor

$$c^* \simeq 0,16\sqrt{36,16 - 0,64L^2} \in (0, 1) \quad (2.57)$$

como enunciado. ■

Observação 2.10. Devemos aqui salientar que a quantidade $(\mathcal{L}_1^{-1} 1, 1)_{L^2} \in \mathbb{R}$ que aparece na Proposição 2.9 e em (2.48) é bem definida. De fato, primeiro lembremos que pelo Lema 2.6, $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$, com φ' ímpar. Por outro lado, de (2.31), temos que o operador

\mathcal{L}_1 satisfaz $\text{Ker}(\mathcal{L}_1)^\perp = \text{R}(\mathcal{L}_1)$. Ainda, é evidente que $(\varphi', 1)_{L^2} = 0$. Consequentemente, $1 \in [\varphi']^\perp = \text{Ker}(\mathcal{L}_1)^\perp = \text{R}(\mathcal{L}_1)$. O operador $\mathcal{L}_1 : \text{D}(\mathcal{L}_1) \subset L^2_{\text{per}} \rightarrow \text{R}(\mathcal{L}_1)$ é sobrejetor. Mas, tal operador não é injetor, já que $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) \neq \{0\}$. Dessa forma, temos que um elemento $f \in \text{D}(\mathcal{L}_1)$ tal que $\mathcal{L}_1(f) = 1$, isto é, $\mathcal{L}_1^{-1} 1 = f$ não é *a priori* unicamente determinado. No entanto, uma vez que \mathcal{L}_1 é invariante, ou seja, leva função par em função par, vemos que f mencionada anteriormente é necessariamente uma função par. Dessa forma, a fim de encontrarmos soluções $f \in \text{D}(\mathcal{L}_1)$ da equação $\mathcal{L}_1(f) = 1$ é suficiente considerarmos o operador restrito $\mathcal{L}_{1e} : H^2_{\text{per},e} \subset L^2_{\text{per},e} \rightarrow \text{R}(\mathcal{L}_1) \cap L^2_{\text{per},e}$, e nesse caso, $\text{Ker}(\mathcal{L}_{1e}) = \{0\}$ e assim \mathcal{L}_{1e} é um operador bijetor. Nesses termos, dada $f \in \text{D}(\mathcal{L}_{1e})$ tal que $\mathcal{L}_{1e}(f) = 1$, temos que tal função é unicamente determinada e, consequente, a quantidade $(\mathcal{L}_{1e}^{-1} 1, 1)_{L^2} = (\mathcal{L}_1^{-1} 1, 1)_{L^2} \in \mathbb{R}$ fica (unicamente) bem definida. \square

Voltemos nossa atenção ao operador \mathcal{L} definido em (2.25). Primeiramente, provemos o seguinte resultado.

Lema 2.11. Seja $L > 0$ fixado. Se $c \in [0, 1)$ e $\varphi = \varphi_c \in H^\infty_{\text{per}}$ é a solução cnoidal obtida na Proposição 2.2, então o núcleo de \mathcal{L} é simples, com $\text{Ker}(\mathcal{L}) = [(\varphi', c\varphi'')]$.

Demonstração. Notemos que $(f, g) \in \text{Ker}(\mathcal{L})$ se, e somente se,

$$\begin{cases} -f'' + f - 3\varphi^2 f + cg' = 0 & (2.58) \\ -cf' + g = 0 & (2.59) \end{cases}$$

A partir de (2.59), temos que

$$g = cf' \quad \Rightarrow \quad g' = cf''.$$

Substituindo a relação acima em (2.58), vemos que deve ocorrer que

$$0 = -f'' + f - 3\varphi^2 f + c^2 f'' = -(1 - c^2)f'' - 3\varphi^2 f + f = \mathcal{L}_1(f),$$

ou seja, $f \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1)$. Pelo Lema 2.6, temos $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$. Logo, o par $(f, g) \in \text{Ker}(\mathcal{L})$ é unicamente determinado por $f = \alpha_0 \varphi'$ e $g = \alpha_0 \cdot cf' = \alpha_0 \cdot c\varphi''$, para algum $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. E o resultado segue. \blacksquare

Referente ao operador \mathcal{L} temos também a seguinte proposição.

Proposição 2.12. Seja $L > 0$ fixado. Se $c \in [0, 1)$ e $\varphi \in H^\infty_{\text{per}}$ é a solução cnoidal obtida na Proposição 2.2, então o operador \mathcal{L} , em (2.25), tem dois autovalores negativos que são simples e o zero é o terceiro autovalor com autofunção $(\varphi', c\varphi'')$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores e limitado longe do zero.

Demonstração. Para $c = 0$, em virtude de (2.25), vemos que $\omega = 1 - c^2 = 1$ e

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - 3\varphi^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Uma vez que o operador \mathcal{L} , em (2.60), é diagonal e em razão do Lema 2.6, inferimos que⁴ $n(\mathcal{L}) = 2$. Agora, segue pelo Lema 2.11, da finitude da quantidade de autovalores negativos de \mathcal{L} e da continuidade dos autovalores (veja [65, Capítulo 4, Seção 3.5]), em termos de $c \in [0, 1)$, que $n(\mathcal{L}) = 2$ para todo $c \in [0, 1)$. Esse fato juntamente com o Lema 2.11 e o fato já estabelecido que $\sigma(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto discreto provam o desejado. ■

Em resumo, partir do Lema 2.11 e Proposição 2.12 estabelecemos algumas propriedades espectrais úteis no que diz respeito o operador \mathcal{L} , a saber,

$$n(\mathcal{L}) = 2 \quad \text{e} \quad z(\mathcal{L}) = 1, \quad \text{com} \quad \text{Ker}(\mathcal{L}) = [(\varphi', c\varphi'')].$$

Em posse dessas informações, na sequência nosso objetivo é aplicar o Teorema do Índice no operador auto-adjunto \mathcal{L} , dado em (2.25). Para esse fim, primeiramente, com a mesma motivação da definição do operador $\mathcal{L}_{1\Pi}$ em (2.45)-(2.46), definamos

$$\mathcal{L}_{\Pi} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{L}(\varphi^2, f)_{L^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall (f, g) \in H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1, \quad (2.61)$$

então, analogamente ao feito em (2.47), é possível mostrar que

$$\mathcal{L}_{\Pi} : H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1 \subset L_{\text{per},m}^2 \times L_{\text{per},m}^2 \rightarrow L_{\text{per},m}^2 \times L_{\text{per},m}^2 \quad (2.62)$$

está bem definido. E mais ainda, seguindo o explanado em [67, Seção 5.3], afirmamos que \mathcal{L}_{Π} é um *operador de restrição* associado ao operador \mathcal{L} . Para mostrarmos tal fato, inicialmente com a intenção de simplificarmos a notação denotemos por $\mathcal{X} := L_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2$. Fixemos o *espaço admissível*

$$\mathcal{A} := L_{\text{per},m}^2 \times L_{\text{per},m}^2 = \{(f, g) \in L_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2 ; (f, 1)_{L^2} = (g, 1)_{L^2} = 0\} = [(1, 0), (0, 1)]^{\perp}.$$

Notemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. Dessa forma, se $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow \text{R}(\Pi) \subset \mathcal{X}$ é a *projeção ortogonal* agindo em \mathcal{X} , então $\Pi(\mathcal{X}) = \mathcal{A}$, pois em decorrência de [16, Propriedade 1, Página 284] o subespaço $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ é fechado, de modo que $\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{\perp}$ (veja também [15, Exemplo B.3]).

Além disso, definamos $\mathcal{S} := \mathcal{A}^{\perp} \subset \mathcal{X}$. Por [73, Lema 3.3-6], vemos que

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}^{\perp} = ([(1, 0), (0, 1)]^{\perp})^{\perp} = [(1, 0), (0, 1)].$$

Afirmação. Temos que $\mathcal{S} \subset \text{Ker}(\mathcal{L})^{\perp}$.

De fato, primeiro lembremos que pelo Lema 2.11, $\text{Ker}(\mathcal{L})^{\perp} = [(\varphi', c\varphi'')]^{\perp}$, $c \in (-1, 1)$. Agora, seja $(p, q) \in \mathcal{S} = [(0, 1), (1, 0)]$ arbitrário. Assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(p, q) = \beta(0, 1) + \alpha(1, 0) = (\alpha, \beta).$$

Observemos que pelo fato de que $\varphi', \varphi'' \in L_{\text{per},m}^2$ obtemos, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$((p, q), \gamma(\varphi', c\varphi''))_{\mathcal{X}} = ((\alpha, \beta), \gamma(\varphi', c\varphi''))_{\mathcal{X}} = \alpha\gamma \cdot (\varphi', 1)_{L^2} + \beta\gamma \cdot (\varphi'', 1)_{L^2} = 0$$

⁴Veja Lei da Inércia de Sylvester em [112, Teorema 4.3].

o que implica que $(p, q) \in \text{Ker}(\mathcal{L})^\perp$. Por conseguinte, $\mathcal{S} \subset \text{Ker}(\mathcal{L})^\perp$, como afirmado, e de modo que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$ é o *espaço restrição* de \mathcal{A} .

Assim, uma vez que $\Pi(\mathcal{X}) = L_{\text{per},m}^2 \times L_{\text{per},m}^2$ e $D(\mathcal{L}) \cap \mathcal{A} = H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1$ podemos escrever $\mathcal{L}_\Pi : D(\mathcal{L}_\Pi) = D(\mathcal{L}) \cap \mathcal{A} \subset \Pi(\mathcal{X}) \rightarrow \Pi(\mathcal{X})$, isto é, \mathcal{L}_Π é um *operador restrição* associado com \mathcal{A} , como afirmado. Nesses termos, a *matriz restrição* associada a \mathcal{L}_Π toma a forma

$$D = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}^{-1}(1,0), (1,0))_{\mathbb{L}^2} & (\mathcal{L}^{-1}(1,0), (0,1))_{\mathbb{L}^2} \\ (\mathcal{L}^{-1}(1,0), (0,1))_{\mathbb{L}^2} & (\mathcal{L}^{-1}(0,1), (0,1))_{\mathbb{L}^2} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Além disso, da mesma forma que em (2.49) e (2.50), o Teorema do Índice ([67, Teorema 5.3.2]) nos permite estabelecer que

$$n(\mathcal{L}_\Pi) = n(\mathcal{L}) - N_0 - Z_0 \quad (2.64)$$

e

$$z(\mathcal{L}_\Pi) = z(\mathcal{L}) + Z_0, \quad (2.65)$$

em que $N_0 := n(D)$ e $Z_0 := z(D)$, dependem do sinal do determinante da matriz D , pois como consequência do contido em [83, página 270] temos $\det(D) = \mu_1 \mu_2$, sendo $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ os autovalores da matriz D e dessa forma,

$$N_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } \det(D) < 0 \\ 0, & \text{se } \det(D) \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } \det(D) = 0 \\ 0, & \text{se } \det(D) \neq 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

Observação 2.13. Convém observarmos que como já justificado na Observação 2.8, temos que $(\varphi^2, \varphi')_{L^2} = 0$ e como consequência $(\varphi', c\varphi'') \in \text{Ker}(\mathcal{L}_\Pi)$. E de modo análogo ao feito na Observação 2.8, é possível mostrar que as formas quadráticas dos operadores \mathcal{L}_Π e \mathcal{L} coincidem sob o espaço $H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1$, bem como sob o espaço $H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1$. Informação a qual é crucial no nosso contexto, a saber, o de estudarmos estabilidade orbital sobre um espaço periódico de Sobolev composto de funções com média zero (conveniente) e de podermos aplicarmos a teoria de estabilidade/instabilidade de [56]. \square

De modo a contar o número de autovalores negativos do operador \mathcal{L}_Π , em (2.61)-(2.62), precisamos usar o Lema 2.9.

Proposição 2.14. Seja $L > 0$ fixado. Se $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ é a solução cnoidal obtida na Proposição 2.2, então existe $c^* \in (0, 1)$ tal que:

- (i) para todo $c \in [0, c^*)$, o operador \mathcal{L}_Π tem exatamente 1 autovalor negativo que é simples. Zero é um autovalor simples com autofunção $(\varphi', c\varphi'')$;
- (ii) Para todo $c \in (c^*, 1)$, o operador \mathcal{L}_Π tem exatamente 2 autovalores negativos que são simples. Zero é um autovalor simples com autofunção $(\varphi', c\varphi'')$;
- (iii) Se $c = c^*$, o operador \mathcal{L}_Π tem um autovalor negativo que é simples e o zero é um autovalor duplo.

Demonstração. Em primeiro lugar, dado $c \in [0, 1)$, definamos

$$\tilde{f} := -\frac{3}{2\sqrt{1-k^2+k^4}} \left(\frac{\lambda_4 f_0 - \lambda_0 f_4}{\lambda_0 \lambda_4} \right) \quad \text{e} \quad \tilde{g} := 1 + c\tilde{f}'.$$

Em razão de (2.52) vemos que $\mathcal{L}_1^{-1}1 = \tilde{f}$. Por outro lado, associado ao operador \mathcal{L}_Π temos a matriz de restrição D definida em (2.63). Observemos que $(f, g) \in D(\mathcal{L})$ é tal que $\mathcal{L}(f, g) = (1, 1)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} -f'' - 3\varphi^2 f + f + cg' \\ -cf' + g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -f'' - 3\varphi^2 f + f + cg' & (2.67) \\ -cf' + g = 1 & (2.68) \end{cases}$$

De (2.68), temos

$$-cf'' + g' = 0 \Leftrightarrow -c^2 f'' + cg' = 0 \Leftrightarrow cg' = c^2 f''$$

e substituindo em (2.67), vemos que

$$\begin{aligned} -f'' - 3\varphi^2 f + f + c^2 f'' = 1 & \Leftrightarrow (c^2 - 1)f'' - 3\varphi^2 f + f = 1 \\ & \Leftrightarrow -\omega f'' - 3\varphi^2 f + f = 1 \\ & \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 f = 1 \\ & \Leftrightarrow f = \tilde{f} \quad \text{e} \quad g = 1 + c\tilde{f}' = \tilde{g}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, $\mathcal{L}(\tilde{f}, \tilde{g}) = (1, 1)$. Assim, em virtude dos fatos que

$$(1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1), \quad \mathcal{L}^{-1}(1, 0) = \mathcal{L}^{-1}(1, 1) - \mathcal{L}^{-1}(0, 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}(0, 1) = (0, 1)$$

deduzimos que as entradas da matriz D , em (2.63), são dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} a_{11} &:= (\mathcal{L}^{-1}(1, 0), (1, 0))_{\mathbb{L}^2} = (\mathcal{L}^{-1}(1, 1) - \mathcal{L}^{-1}(0, 1), (1, 0))_{\mathbb{L}^2} \\ &= (\mathcal{L}^{-1}(1, 1), (1, 0))_{\mathbb{L}^2} - (\mathcal{L}^{-1}(0, 1), (1, 0))_{\mathbb{L}^2} \quad (2.69) \\ &= ((\tilde{f}, \tilde{g}), (1, 0))_{\mathbb{L}^2} - ((0, 1), (1, 0))_{\mathbb{L}^2} \\ &= (\tilde{f}, 1)_{L^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21} &:= (\mathcal{L}^{-1}(1, 0), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} = (\mathcal{L}^{-1}(1, 1) - \mathcal{L}^{-1}(0, 1), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} \\ &= (\mathcal{L}^{-1}(1, 1), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} - (\mathcal{L}^{-1}(0, 1), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} \\ &= ((\tilde{f}, \tilde{g}), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} - ((0, 1), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} \quad (2.70) \\ &= (\tilde{g}, 1)_{L^2} - (1, 1)_{L^2} \\ &= (1, 1)_{L^2} - (1, 1)_{L^2} = 0 \end{aligned}$$

e

$$a_{22} := (\mathcal{L}^{-1}(0, 1), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} = ((0, 1), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} = (1, 1)_{L^2} = L. \quad (2.71)$$

De (2.69), (2.70), (2.71) e (2.55), obtemos

$$\det(D) = a_{11} \cdot a_{22} = L \cdot (\tilde{f}, 1)_{L^2} = L \cdot (\mathcal{L}_1^{-1}(1), 1)_{L^2} = L \cdot D_1,$$

em que a quantidade $D_1 \in \mathbb{R}$ é dada em (2.48) e tem o seu comportamento descrito em (2.56). Desse modo, o resultado segue por uma aplicação direta do Lema 2.11, Proposição 2.12, de (2.64), (2.65) e (2.66). Desse modo, vale destacar que o $c^* \in (0, 1)$ enunciado é o mesmo dado em (2.57). \blacksquare

Observação 2.15. A respeito das quantidades $(\mathcal{L}^{-1}(1, 0), (1, 0))_{\mathbb{L}^2}$, $(\mathcal{L}^{-1}(1, 0), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} \in \mathbb{R}$ e $(\mathcal{L}^{-1}(0, 1), (0, 1))_{\mathbb{L}^2} \in \mathbb{R}$ que aparecem no Teorema 2.14, comentários análogos aos desenvolvidos na Observação 2.10 são válidos. \square

2.3 Instabilidade Orbital das Ondas Cnoidais

A finalidade dessa seção é determinar um resultado de estabilidade orbital baseado na clássica teoria de Grillakis-Shatah-Strauss contida em [56] para as ondas periódicas com perfil cnoidal $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ dadas em (2.22) para a equação de Klein-Gordon (2.1). Seja $L > 0$ fixo e consideremos o espaço energia restrito $X_m := H_{\text{per},m}^1([0, L]) \times L_{\text{per},m}^2([0, L]) \subset X$. É bem sabido que a equação (2.1) é invariante por translações. Assim, podemos definir, para $x, r \in \mathbb{R}$ e $U = (u, v) \in X_m$ a simetria de translação explicitamente como

$$\mathbf{T}_r U(x) = (u(x+r), v(x+r)).$$

No que segue, para $c \in (-1, 1)$, definimos $\Phi := (\varphi, c\varphi')$.

Na sequência, precisamos formalizar o conceito de estabilidade orbital em nosso contexto.

Definição 2.16 (Estabilidade Orbital). A onda periódica $\Phi \in X_m$ é dita orbitalmente estável se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: se $(u_0, v_0) \in X_m$ satisfaz $\|(u_0, v_0) - (\varphi, c\varphi')\|_X < \delta$ e $\vec{u} = (u, u_t)$ é uma solução de (2.1) no intervalo $[0, t_0)$, para algum $t_0 > 0$, com $\vec{u}(0) = (u_0, v_0)$, então \vec{u} pode ser continuada em $0 \leq t < \infty$ e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \inf_{r \in \mathbb{R}} \|\vec{u}(t) - \mathbf{T}_r \Phi\|_X < \varepsilon.$$

Caso contrário, Φ é dita orbitalmente instável. Em particular, isso aconteceria no caso de soluções que não podem ser continuadas.

Antes de prosseguirmos no estudo da estabilidade orbital, precisamos dar atenção a boa colocação da equação (2.1).

2.3.1 Boa Colocação

Como podemos ver na Definição 2.16, para conseguirmos determinar um resultado de estabilidade orbital precisamos antes estabelecer um resultado de boa colocação associado

com a equação de Klein-Gordon (2.1), isto é, um resultado de boa colocação associado ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.72)$$

com $(u_0, v_0) \in Y$ e $Y \subset X$ apropriado. E isso será feito fazendo uso da bem conhecida *Teoria do Poço de Potencial* (para detalhes adicionais veja [32], [86, Capítulo 1] e [128]). Primeiramente, para $L > 0$ e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$ fixados, consideremos o funcional $P_\omega : H_{\text{per},m}^1([0, L]) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$P_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \omega u_x^2 + u^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^L u^4 dx = \frac{\omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} \|u\|_{L^4}^4. \quad (2.73)$$

Aqui, em virtude de (1.10),

$$\|u\|_{H_{\text{per},m}^1} = \|\nabla u\|_{L^2} = \|u_x\|_{L^2}, \quad \forall u \in H_{\text{per},m}^1. \quad (2.74)$$

Para um $L > 0$ fixado, uma função φ é solução equação diferencial ordinária associada à equação de Klein-Gordon se, e somente se, $\varphi \in H_{\text{per},m}^1 \setminus \{0\}$ e $P'_\omega(\varphi) = 0$, isto é, φ é um ponto crítico (não-trivial) de P_ω (ver [81, página 7]). Logo, como tais pontos críticos P_ω em $H_{\text{per},m}^1$ são únicos, vemos que são dados em termos das soluções cnoidais como em (2.22).

Relacionado com o funcional P_ω em (2.73), temos a Variedade de Nehari

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_{\text{per},m}^1 \setminus \{0\}; \int_0^L \omega u_x^2 + u^2 dx = \int_0^L u^4 dx \right\}.$$

De modo análogo a [81, Teorema 3.5, Lema 3.6 e Corolário 3.7] é possível provar que o funcional P_ω satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha ([105, Teorema 1.15]). Além disso, a quantidade

$$d_\omega := \inf_{v \in H_{\text{per},m}^1 \setminus \{0\}} \max_{t \in \mathbb{R}_+} P_\omega(tv) \quad (2.75)$$

é um nível crítico do funcional P_ω .

Na sequência provaremos um resultado relacionado a quantidade definida em (2.75).

Lema 2.17. Seja $\omega \in (0, 1]$ e $d_\omega \in \mathbb{R}$ a quantidade definida em (2.75). Existe $c^\dagger \in (0, 1)$ tal que se $c \in (0, c^\dagger)$ e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$, então $d_\omega < \infty$ e $d_\omega > 0$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que usando resultado clássicos contidos em [105, Capítulo 4] (veja também [81, Proposição 3.12]), temos que

$$d_\omega = \min_{v \in \mathcal{N}} P_\omega(v) = P_\omega(\varphi_\omega).$$

Em contrapartida, notemos que $\varphi = \varphi_\omega \in H_{\text{per},m}^1$ e

$$P_\omega(\varphi_\omega) = \frac{\omega}{2} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \varphi^2(x) dx - \frac{1}{4} \int_0^L \varphi^4(x) dx. \quad (2.76)$$

No que segue $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Agora, fazendo uma mudança de variável, usando as expressões explícitas da Observação 2.3 e as fórmulas (731.02) e (361.02) de [23], obtemos que

$$\begin{aligned} I_1(k) &:= \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx = \frac{2k^2}{2k^2-1} \frac{4K(k)}{L} \int_0^{4K(k)} \operatorname{sn}^2(u; k) \operatorname{dn}^2(u; k) du \\ &= \frac{2k^2}{2k^2-1} \frac{16K(k)}{L} \int_0^{K(k)} \operatorname{sn}^2(u; k) \operatorname{dn}^2(u; k) du \quad (2.77) \\ &= \frac{32K(k)}{3(2k^2-1)L} \left((2k^2-1)E(k) + (1-k^2)K(k) \right). \end{aligned}$$

Na sequência, observemos que uma mudança de variável, a Observação 2.3 e a fórmula (312.02) de [23] nos permitem escrever

$$\begin{aligned} I_2(k) &:= \int_0^L (\varphi(x))^2 dx = \frac{2k^2}{2k^2-1} \frac{L}{4K(k)} \int_0^{4K(k)} \operatorname{cn}^2(u; k) du \\ &= \frac{2k^2}{2k^2-1} \frac{L}{K(k)} \int_0^{K(k)} \operatorname{cn}^2(u; k) du \quad (2.78) \\ &= \frac{2k^2}{2k^2-1} \frac{L}{K(k)} \frac{1}{k^2} (E(k) - (1-k^2)K(k)). \end{aligned}$$

De modo análogo, por [23, Fórmula (312.04)], temos que

$$\begin{aligned} I_3(k) &:= \int_0^L (\varphi(x))^4 dx = \frac{4k^4}{(2k^2-1)^2} \cdot \frac{L}{4K(k)} \int_0^{4K(k)} \operatorname{cn}^4(u; k) du \\ &= \frac{4Lk^4}{(2k^2-1)^2} \int_0^{K(k)} \operatorname{cn}^4(u; k) du \quad (2.79) \\ &= \frac{4L}{3(2k^2-1)^2} \left[(2-3k^2)(1-k^2)K(k) + 2(2k^2-1)E(k) \right]. \end{aligned}$$

De (2.76)-(2.79) e da forma explícita de $\omega \in (0, 1]$ em (2.24), segue que

$$\begin{aligned} P_\omega(\varphi_\omega) &= \frac{\omega}{2} I_1(k) + \frac{1}{2} I_2(k) - \frac{1}{4} I_3(k) \\ &= -\frac{L(K(k)-2) \left((k^4 - \frac{5}{3}k^2 + \frac{2}{3})K(k) + E(k) \left(\frac{4}{3}k^2 - \frac{2}{3} \right) \right)}{K(k)(2k^2-1)^2} \quad (2.80) \\ &= \sqrt{\omega} \cdot P_1(\varphi_1). \end{aligned}$$

Além disso, por (2.80), vemos que $P_\omega(\varphi_\omega) = 0$ se, e somente se,

$$P_1(\varphi_1) = -\frac{4(K(k)-2) \left((k^4 - \frac{5}{3}k^2 + \frac{2}{3})K(k) + E(k) \left(\frac{4}{3}k^2 - \frac{2}{3} \right) \right)}{3(2k^2-1)^{3/2}} = 0$$

isto é, se, e somente se, $K(k) - 2 = 0$, o que ocorre se, e somente se,

$$k^\dagger := k \simeq 0.802 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, k^*\right). \quad (2.81)$$

Usando a expressão explícita para $c \in [0, 1)$ em (2.23), obtemos que o valor $k^\dagger \simeq 0.802$, em (2.81), define (veja Observação 2.4) unicamente um valor $c^\dagger > 0$ dado por

$$c^\dagger \simeq 0.43 \sqrt{5.24 - 0.28L^2} \quad (2.82)$$

e de modo que $c^\dagger < c^*$, em que $c^* > 0$ é dado em (2.57).

Como

$$\lim_{k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^+} P_\omega(\varphi_\omega) = \infty,$$

vemos, para um $c \in (0, c^\dagger)$ e $\omega = 1 - c^2$ fixados, que $d_\omega = P_\omega(\varphi_\omega) > 0$ (veja Figura 2.5).

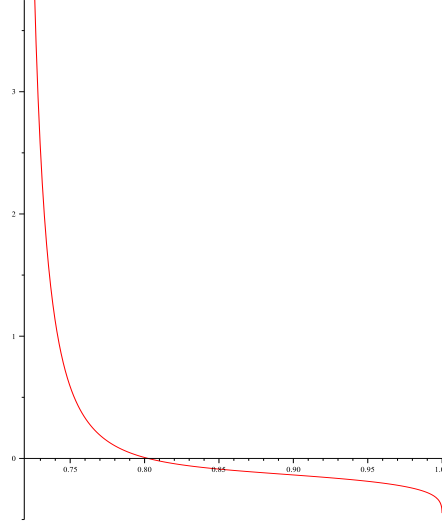


Figura 2.5: Comportamento de $P_\omega(\varphi_\omega)$, com $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Conseqüentemente, por (2.75), temos $P_\omega(\varphi_\omega) \leq P_1(\varphi_1)$ de forma que

$$d_\omega = \sqrt{\omega}d_1 \leq d_1 < \infty \quad \forall k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, k^\dagger\right).$$

ou, equivalentemente, $d_\omega < \infty$ para todo $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$, com $c \in [0, c^\dagger)$. ■

Tendo em vista do Lema 2.17, para $c \in (0, c^\dagger)$ e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$, podemos definir

$$W_\omega = \left\{ u \in H_{\text{per},m}^1 ; 0 \leq P_\omega(\lambda u) < d_\omega, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \right\}. \quad (2.83)$$

Aqui, o conjunto $W_\omega \subset H_{\text{per},m}^1$ é denominado *Poço de Potencial*. Observemos que, uma vez que $\lambda\theta \in [0, 1]$, para todos $\lambda, \theta \in [0, 1]$, temos que se $u \in W_\omega$, então $\theta u \in W_\omega$ também. Ainda, convém lembrarmos que são válidas as imersões $H_{\text{per},m}^1 \hookrightarrow H_{\text{per}}^1 \hookrightarrow L_{\text{per}}^4 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$ (veja (1.4) e (2.74)) e, em particular, existem $c_0, c_1 > 0$ de modo que

$$\|u\|_{L^4} \leq c_0 \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}, \quad \forall u \in H_{\text{per},m}^1 \quad (2.84)$$

e

$$\|u\|_{L^2} \leq c_1 \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}, \quad \forall u \in H_{\text{per},m}^1. \quad (2.85)$$

Lema 2.18. Sejam $c \in (0, c^\dagger)$ e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$ fixos. Se $\rho > 0$ é tal que

$$\rho < \frac{2\sqrt{\omega}}{c_1^2} \quad \text{e} \quad \frac{\omega}{2}\rho^2 + \frac{c_1^2}{2}\rho^2 < d_\omega$$

e se definirmos $B := \{u \in H_{\text{per},m}^1 ; \|u\|_{H_{\text{per},m}^1} < \rho\}$, então $B \subset W_\omega$.

Demonstração. Seja $u \in B$ qualquer. Afirmamos que para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$0 \leq P_\omega(\lambda u) < d_\omega. \quad (2.86)$$

Com efeito, consideremos

$$P_\omega(\lambda u) = \frac{\lambda^2 \omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda^4 \omega}{4} \|u\|_{L^4}^4.$$

Notemos que em virtude de (2.84), podemos escrever

$$\begin{aligned} P_\omega(\lambda u) &\geq \frac{\lambda^2 \omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda^4}{4} c_1^4 \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^4 \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \left(\omega - \frac{\lambda^4}{4} c_1^4 \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Desse modo, $P_\omega(\lambda u) \geq 0$ desde que

$$\omega - \frac{\lambda^4}{4} c_1^4 \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \geq 0. \quad (2.87)$$

Contudo, uma vez que $\lambda \in [0, 1]$, em particular $\lambda \leq 1$, inferimos

$$\omega - \frac{c_1^4}{4} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \leq \omega - \frac{\lambda^4}{4} c_1^4 \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2.$$

Assim, para que (2.87) ocorra é suficiente que

$$\omega - \frac{c_1^4}{4} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{c_1^4}{4} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \geq -\omega \Leftrightarrow \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \leq \frac{4\omega}{c_1^4}.$$

Mas, $u \in B$ e, donde,

$$\|u\|_{H_{\text{per},m}^1} < \rho < \frac{2\sqrt{\omega}}{c_1^2} \quad \Leftrightarrow \quad \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 < \frac{4\omega}{c_1^4}$$

e, conseqüentemente,

$$P_\omega(\lambda u) \geq 0. \quad (2.88)$$

Por outro lado, como em particular $\lambda \leq 1$, obtemos em razão de (2.85) que

$$P_\omega(\lambda u) \leq \frac{\lambda^2 \omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{\omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{\omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{c_1^2}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2$$

e já que $u \in B$, isto é, $\|u\|_{H_{\text{per},m}^1} < \rho$, com $\frac{\omega}{2} \rho^2 + \frac{c_1^2}{2} \rho^2 < d_\omega$, segue que

$$P_\omega(\lambda u) < d_\omega. \quad (2.89)$$

De (2.88) e (2.89), segue portanto (2.86) e, por conseguinte, $B \subset W_\omega$. \blacksquare

Lema 2.19. Sejam $c \in (0, c^\dagger)$ e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$ fixos. Se

$$W_\star := \left\{ u \in H_{\text{per},m}^1 ; \int_0^L \omega u_x^2 + u^2 dx > \int_0^L u^4 dx \quad \text{e} \quad P_\omega(u) < d_\omega \right\}$$

então $W_\omega = W_\star \cup B$, em que $B \subset H_{\text{per},m}^1$ é a bola definida no Lema 2.18.

Demonstração. Análogo a [86, Lemma 2.4], em que prova-se que $W_\omega = W_\star \cup \{0\}$ e nesse caso, pelo Lema 2.18, $W_\omega = W_\omega \cup B = W_\star \cup \{0\} \cup B = W_\star \cup B$, pois $0 \in B$. ■

Uma consequência importante do Lema 2.19 é o seguinte corolário.

Corolário 2.20. Sejam $c \in (0, c^\dagger)$ e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$ fixos. O conjunto $W_\omega \subset H_{\text{per},m}^1$ definido em (2.83) é aberto e limitado.

Demonstração. Começemos provando que W_ω é aberto. Para tanto, consideremos os funcionais $L, J : H_{\text{per},m}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$L(u) = \omega \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{L^4}^4$$

e

$$J(u) = \frac{\omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} \|u\|_{L^4}^4.$$

Claramente, os funcionais L e J são contínuos e

$$W_L = \{u \in H_{\text{per},m}^1 ; L(u) > 0\} = L^{-1}(0, \infty)$$

e

$$W_J = \{u \in H_{\text{per},m}^1 ; J(u) < d_\omega\} = J^{-1}(-\infty, d_\omega)$$

onde $W_L, W_J \subset H_{\text{per},m}^1$ são abertos, pois são imagens inversas de abertos por funções contínuas ([73, Teorema 1.3-4]). Notemos ainda que $W_\star = W_L \cap W_J$ e, assim, $W_\star \subset H_{\text{per},m}^1$ é aberto. Por outro lado, pela Lema 2.19, $W_\omega = W_\star \cup B$, com $B \subset H_{\text{per},m}^1$ aberto. Portanto, $W_\omega \subset H_{\text{per},m}^1$ é aberto.

Provemos agora que o poço de potencial W_ω é limitado, ou seja, que existe $r > 0$ tal que $W_\omega \subset B(0, r) := \{u \in H_{\text{per},m}^1 ; \|u\|_{H_{\text{per},m}^1} < r\}$. Para tanto, seja $u \in W_\omega$ qualquer. Pelo Lema 2.19, $u \in W_\omega = W_\star \cup B$. Dessa forma, se $u \in B$ então o resultado segue para $r = \rho > 0$. Agora, se $u \in W_\star$, então em particular

$$\omega \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{L^4}^4 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\|u\|_{L^4}^4 > -\left(\omega \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_\omega(u) &= \frac{\omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} \|u\|_{L^4}^4 \\ &> \frac{\omega}{2} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} \left(\omega \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right) \\ &= \frac{\omega}{4} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 + \frac{\omega}{4} \|u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{\omega}{4} \|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 \end{aligned}$$

e, donde,

$$\|u\|_{H_{\text{per},m}^1}^2 < \frac{4}{\omega} P_\omega(u) < \frac{4}{\omega} d_\omega \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{H_{\text{per},m}^1} < 2 \frac{\sqrt{d_\omega}}{\sqrt{\omega}}$$

e nesse caso o resultado segue para $r = 2 \frac{\sqrt{d_\omega}}{\sqrt{\omega}} > 0$.

Em todo caso, o resultado segue para $r = \max\left\{2 \frac{\sqrt{d_\omega}}{\sqrt{\omega}}, \rho\right\} > 0$. Portanto, W_ω é limitado em $H_{\text{per},m}^1$. ■

O exposto acima nos coloca em condições de enunciar o nosso resultado de boa colocação.

Teorema 2.21 (Boa Colocação). O problema de Cauchy associado com (2.1), é globalmente bem colocado em $X_m = H_{\text{per},m}^1 \times L_{\text{per},m}^2$. Mais precisamente, existe $c^\dagger \in (0, 1)$ tal que se $c \in [0, c^\dagger)$ e $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$ então para cada dado inicial $u_0 \in W_\omega$ e $v_0 \in L_{\text{per},m}^2$ em (2.72) satisfazendo

$$\frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2}^2 + P_1(u_0) < d_\omega, \quad (2.90)$$

com $d_\omega > 0$ dado em (2.75) e $W_\omega \subset H_{\text{per},m}^1$ é o conjunto em (2.83), existe uma única solução fraca $u \in C(\mathbb{R}_+, H_{\text{per},m}^1)$ para o problema (2.72) tal que $u_t \in C(\mathbb{R}_+, L_{\text{per},m}^2)$. Além disso, para cada $T > 0$, existe uma vizinhança $V \subset X_m$ de (u_0, v_0) tal que a aplicação dado-solução

$$(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in V \subset X_m \longmapsto (u, u_t) \in C([0, T], X_m)$$

é contínua.

Demonstração. Consideremos $c^\dagger \in (0, 1)$ dado em (2.82) e $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$, para $c \in [0, c^\dagger)$, o que torna bem definido o poço de potencial $W_\omega \subset H_{\text{per},m}^1$ em (2.83). A demonstração segue do Método de Galerkin⁵ juntamente com o Método do Poço de Potencial. De fato, primeiramente lembremos que H_{per}^1 é separável⁶, logo por [22, Proposição 3.25] o subespaço $H_{\text{per},m}^1$ também o é. Como consequência, existe $(w_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H_{\text{per},m}^1$ tal que $\overline{[(w_j)_{j \in \mathbb{N}}]} = H_{\text{per},m}^1$. Com tal sequência é possível construir uma outra (a qual continuaremos denotando por $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$) de modo que existem $(u_{0,m})_{m \in \mathbb{N}} \subset W_\omega$ e $(u_{1,m})_{m \in \mathbb{N}} \subset H_{\text{per},m}^1$ tais que

$$\begin{cases} u_{0,m} \longrightarrow u_0 & \text{em } H_{\text{per},m}^1 \\ u_{1,m} \longrightarrow u_1 & \text{em } L_{\text{per},m}^2 \\ u_{0,m}, u_{1,m} \in V_m := [w_1, w_2, \dots, w_m], & m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} \|u_{1,m}\|_{L^2}^2 + P_1(u_{0,m}) < d_\omega, & m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dessa forma, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, existe $u_m(t) \in V_m$, com $t \in (0, T_m)$ e $T_m > 0$, tal que soluciona o problema aproximado

$$\begin{cases} (u_m''(t), w_j)_{L^2} + (\nabla u_m(t), \nabla w_j)_{L^2} + (u_m(t), w_j)_{L^2} - (u_m^3(t), w_j)_{L^2} = 0 \\ u_m(0) = u_{0,m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j, \quad \alpha_{jm} = (u_0, w_j)_{L^2} \\ u_m'(0) = u_{1,m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_j, \quad \beta_{jm} = (u_1, w_j)_{L^2}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases} \quad (2.91)$$

Assim, o Teorema de Carathéodory ([37, Capítulo 2, Teorema 1.1]) pode ser usado para garantir que (2.91) tem uma solução absolutamente contínua dada por u_m , para cada $m \in \mathbb{N}$, definida em $[0, T_m)$, para algum $T_m > 0$. Precisamos mostrar as estimativas *a priori* para concluir que, para todo $T > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, podemos considerar $T = T_m$.

⁵Para mais detalhes [47, Seção 7.1.2] e [70, Seção 3.4].

⁶Segue do teorema da Seção 4.9.3 de [107].

Recordemo-nos que estamos no contexto em que $\omega \in (0, 1]$. No caso $\omega = 1$ o restante da prova segue de maneira idêntica a [86, Capítulo 1, página 32] de modo a podermos estabelecer a existência de uma solução fraca $u \in L^\infty(0, T; H_{\text{per},m}^1)$, com $u_t \in L^\infty(0, T; L_{\text{per},m}^2)$, para todo $T > 0$. Para o caso $\omega \in (0, 1)$ precisamos fazer algumas ligeiras modificações. A estimativa *a priori* para obter a existência global de soluções no tempo pode ser obtida de maneira usual. Com efeito, como para todo $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, T_m]$, é valido $E(u_m(t), u'_m(t)) = E(u_{0,m}, u_{1,m})$, então temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 &= E(u_{0,m}, u_{1,m}) - \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4}^4 \\ &\leq E(u_{0,m}, u_{1,m}) + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Lembremos que $u_{0,m} \in W_\omega$, logo⁷ $u_m(t) \in W_\omega = W_\star \cup \{0\}$ (veja Lema 2.19) para todo $t \in [0, T_m]$, isto é,

$$\omega \int_0^L (\nabla u_m(t))^2 dx + \int_0^L u_m^2(t) dx > \int_0^L u_m^4(t) dx$$

o que implica

$$\|u_m(t)\|_{L^4}^4 < \omega \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4}^4 < \frac{\omega}{4} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^2}^2.$$

Disso e de (2.92), vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 &< E(u_{0,m}, u_{1,m}) + \frac{\omega}{4} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \\ &= E(u_{0,m}, u_{1,m}) + \frac{\omega}{4} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq E(u_{0,m}, u_{1,m}) + \frac{\omega}{4} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

em que $E(u_{0,m}, u_{1,m}) > 0$, pois $u_{0,m} \in W_\omega$. Assim, da última desigualdade, obtemos

$$\|\nabla u_m(t)\|_{L^2} < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega}{2}}} \sqrt{2E(u_{0,m}, u_{1,m})},$$

e tendo em vista que a norma de $H_{\text{per},m}^1$ é dada pela norma do gradiente (veja (2.74)) inferimos que

$$\|u_m(t)\|_{H_{\text{per},m}^1} < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega}{2}}} \sqrt{2E(u_{0,m}, u_{1,m})} \leq c_0, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (2.93)$$

para algum $c_0 > 0$. Consequentemente, $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_{\text{per},m}^1)$, para todo $T > 0$.

Na sequência, de (2.92), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2}^2 \leq E(u_{0,m}, u_{1,m}) + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4}^4 - \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq E(u_{0,m}, u_{1,m}) + \frac{1}{4} \|u_m(t)\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

⁷Ver (2.28) de [86, Capítulo 1]. Em que usa-se forte o fato de $W_{1,\omega}$ ser aberto e que $u_{0,m} \in W_\omega$.

Desse fato, da imersão $H_{\text{per},m}^1 \hookrightarrow L_{\text{per}}^4$ (veja (2.84)) e de (2.93), obtemos

$$\|u'_m(t)\|_{L^2}^2 \leq 2E(u_{0,m}, u_{1,m}) + \frac{1}{2}c_1 \|u_m(t)\|_{H_{\text{per},m}^1}^4 \leq c_2, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

para certos $c_1, c_2 > 0$. Donde, segue que $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; L_{\text{per},m}^2)$ para todo $T > 0$.

A passagem ao limite prova-se de maneira padrão fazendo uso do Método de Compacidade de Aubin-Lions (ver [86]). Também de modo padrão mostra-se as condições iniciais. E por fim a unicidade pode ser obtida de maneira usual fazendo uso de uma Desigualdade do Tipo Gronwall (que podem ser encontradas, por exemplo, em [4, Capítulo 1]). Esses fatos nos permitem concluir que existe $u \in L^\infty(0, T; H_{\text{per},m}^1)$ solução (fraca) da equação (2.1) satisfazendo $u_t \in L^\infty(0, T; L_{\text{per},m}^2)$ para todo $T > 0$. E ainda, $E(u(t), u'(t)) = E(u_0, v_0)$ e $F(u(t), u'(t)) = F(u_0, v_0)$, $t \in [0, T]$, de modo que $u \in C(\mathbb{R}_+, H_{\text{per},m}^1)$ e $u_t \in C(\mathbb{R}_+, L_{\text{per},m}^2)$ como requerido. ■

Observação 2.22. Dadas as condições iniciais $u_0 \in W_\omega$ e $v_0 \in L_{\text{per},m}^2$, conseguimos obter nosso resultado de boa colocação no Teorema 2.21 sob a condição:

$$\frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + P_1(u_0) < d_\omega, \quad \omega \in (0, 1] \quad (2.94)$$

Devemos enfatizar que a rigor deveríamos impor que $\frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + P_\omega(u_0) < d_\omega$. No entanto, como em particular $0 < \omega \leq 1$, então é fácil ver que

$$\frac{1}{2}\omega \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L \omega (\nabla u_0)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L (\nabla u_0)^2 dx$$

o que mostra que a condição (2.94) não altera nossa análise e tampouco as conclusões. \square

Observação 2.23. É importante ressaltar que o Teorema 2.21 pode ser considerado em um espaço mais suave. De fato, de acordo com [86, Observação 2.3, página 34] (ou [32, Teorema 2])⁸ é possível considerar $u_0 \in H_{\text{per}}^2 \cap W_\omega$ e $v_0 \in H_{\text{per},m}^1$ satisfazendo (2.90) com o propósito de obter (usando o Método de Galerkin) que a solução $u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ do problema de Cauchy para a equação (2.1) satisfaz $u \in L^\infty(0, T; H_{\text{per}}^2 \cap H_{\text{per},m}^1)$, $u_t \in L^\infty(0, T; H_{\text{per},m}^1)$ e $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L_{\text{per},m}^2)$. Assim, soluções fortes em $H_{\text{per}}^2 \cap H_{\text{per},m}^1 \times H_{\text{per},m}^1$ podem ser consideradas nesse caso. \square

Observação 2.24. Tendo em vista as considerações feitas na Observação 2.23 (referentes a boa colocação da equação no espaço de média zero $H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1$), o Hamiltoniano dado em (2.4) e o descrito em [67, Seção 5.2], faz sentido vermos a equação (2.1) restrita ao espaço constituído por soluções de média zero. De fato, nesse contexto de soluções podemos considerar o funcional energia $E : X \rightarrow \mathbb{R}$, em (2.5), definido em

⁸Nas referências aqui citadas, a equação por elas consideradas não contém uma não-linearidade cúbica. No entanto, os argumentos e as estimativas são feitas de modo análogo no nosso contexto, sem maiores problemas.

$Y_m := H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1 \subset X$, de modo a termos o Hamiltoniano (2.4) bem definido sob o espaço de média zero $H_{\text{per},m}^2 \times H_{\text{per},m}^1$. Portanto, estamos aptos a considerar o problema de determinar estabilidade orbital de ondas periódicas com a propriedade de média zero usando a abordagem abstrata de Grillakis, Shatah e Strauss em [56] no contexto periódico, condicionada ao espaço $Y_m \subset L_{\text{per},m}^2 \times L_{\text{per},m}^2$. Dessa maneira, nossa abordagem relativa a estabilidade orbital para a equação (2.1) segue nesse sentido. \square

2.3.2 Convexidade da Função d

Seja $L > 0$ fixado. Para $c \in (-1, 1)$, consideremos $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty([0, L])$ a onda com perfil cnoidal dada em (2.22). A existência da curva suave

$$c \in I = (-1, 1) \longmapsto \varphi_c \in H_{\text{per}}^2([0, L])$$

determinada na Proposição 2.2 nos permite definir a função real $d : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(c) = E(\varphi, c\varphi') - cF(\varphi, c\varphi'). \quad (2.95)$$

Já vimos que $E(\varphi, c\varphi') - cF(\varphi, c\varphi') = G'(\varphi, c\varphi') = 0$, o que implica

$$\begin{aligned} d'(c) &= E(\varphi, c\varphi') \frac{d}{dc}(\varphi, c\varphi) - cF'(\varphi, c\varphi) \frac{d}{dc}(\varphi, c\varphi) - F(\varphi, c\varphi) \\ &= -F(\varphi, c\varphi') \\ &= -c \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx, \quad \forall c \in I. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d''(c) &= -\frac{d}{dc} \left(c \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx \right) \\ &= -\int_0^L (\varphi'(x))^2 dx - c \frac{d}{dc} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx \\ &= -\int_0^L (\varphi'(x))^2 dx - c \left(\frac{d\omega}{dc} \right) \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx \\ &= -\int_0^L (\varphi'(x))^2 dx - c(-2c) \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx \\ &= -\int_0^L (\varphi'(x))^2 dx + 2(1-\omega) \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx, \quad \forall c \in I, \end{aligned} \quad (2.96)$$

em que foi usado o fato que $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$. No que se refere o resultado de instabilidade/estabilidade orbital que queremos determinar, baseado nos preceitos de [56], o sinal de d'' ,⁹ isto é, a convexidade de d possui uma fundamental importância. Por isso, no que segue faremos um estudo do sinal de d'' utilizando (2.96).

⁹O sinal de d'' determina a convexidade de d , pois uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, é convexa se, e somente se, $f'' \geq 0$ em I (veja [85, Teorema 11, Capítulo VIII]). Aqui, d'' é comumente chamada de matriz Hessiana associada a função d em (2.95).

Usando as expressões explícitas da Observação 2.3 e as fórmulas (731.02) e (361.02) de [23], obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx &= \frac{2k^2}{2k^2-1} \frac{4K(k)}{L} \int_0^{4K(k)} \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{dn}^2(u, k) du \\ &= \frac{32K(k)}{3(2k^2-1)L} \left((2k^2-1)E(k) + (1-k^2)K(k) \right) =: R_L(k), \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right). \end{aligned}$$

Além disso, uma vez que $\omega \in (0, 1]$, em (2.24), é uma função de $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$, de (2.96) e pela Regra da Cadeia ([125, Teorema 2-2]), inferimos, para todo $c \in I$, que

$$d''(c) = -R_L(k) + 2(1-\omega)R'_L(k) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} \quad (2.97)$$

Notemos que

$$-R_L(k) = - \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx = -\|\varphi'\|_{L^2} < 0, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) \quad (2.98)$$

de modo que $R'_L(k) < 0$, para todo $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$. Também,

$$\frac{Q(k)}{L^2} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} < 0, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right), \quad (2.99)$$

para alguma função $Q : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Por outro lado, voltando a nossa atenção a expressão em (2.97), vemos que

$$\begin{aligned} d''(c) &= -R_L(k) + 2\omega R'_L(k) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} + 2R'_L(k) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} \\ &= 2R'_L(k) \frac{Q(k)}{L^2} - R_L(k) - 2\omega R'_L(k) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Na sequência, definamos

$$\alpha := \alpha_L(k) = 2R'_L(k)Q(k) \quad \text{e} \quad \beta_L := \beta_L(k) = R_L(k) + 2\omega R'_L(k) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1}, \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right).$$

É necessário destacar que $\alpha_L, \beta_L > 0$ de modo que, para $c \in [0, 1)$,

$$d''(c) = \frac{\alpha_L(k)}{L^2} - \beta_L(k), \quad k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$$

e, assim, é fácil ver que a positividade de d'' depende da escolha de $L > 0$. Entretanto, usando forma explícita de $d''(c)$, para $c \in [0, 1)$, a saber,

$$\begin{aligned} d''(c) &= - \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx + 2(1-\omega) \frac{d}{dk} \int_0^L (\varphi'(x))^2 dx \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} \\ &= \frac{-32K(k)}{3(2k^2-1)L} \left((2k^2-1)E(k) + (1-k^2)K(k) \right) + \\ &\quad + \frac{64(1-\omega)}{3L} \frac{d}{dk} \left(\frac{K(k)}{(2k^2-1)} \left((2k^2-1)E(k) + (1-k^2)K(k) \right) \right) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

e após alguns cálculos numéricos conseguimos determinar a existência (veja Figura 2.6) de um $L_0 \simeq 5$ tal que

$$d''(c) < 0, \forall c \in [0, 1) \text{ e } L > L_0.$$

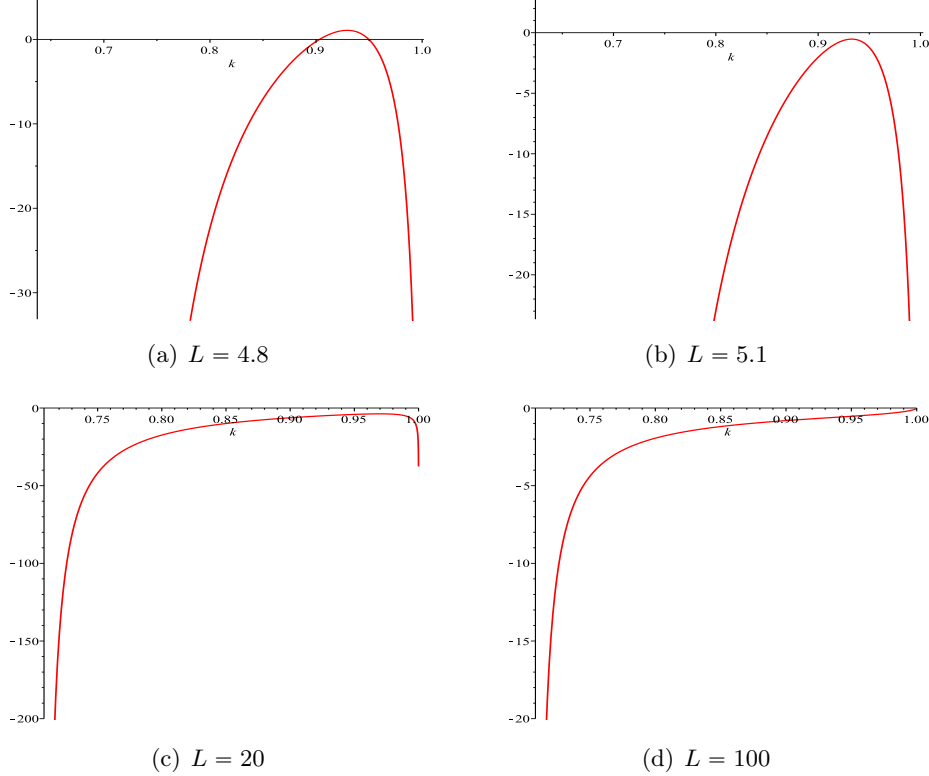


Figura 2.6: Gráfico de d'' em função de $k \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ para diferentes valores de $L > 0$.

2.3.3 O Resultado de Instabilidade

A análise feita ao longo da Seção 2.3 nos dá o seguinte resultado de instabilidade orbital no que diz respeito a equação cúbica de Klein-Gordon em (2.1).

Teorema 2.25 (Instabilidade Orbital das Ondas Cnoidais). Seja $L > L_0 \simeq 5$ fixado. Se $c \in [0, c^\dagger)$, em que $c^\dagger > 0$ é dado em (2.82), e $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ é solução do tipo cnoidal dada na Proposição 2.2, então a onda periódica Φ é orbitalmente instável X_m no sentido da Definição 2.16.

Demonstração. Pela Proposição 2.12, existe um único autovalor negativo do operador \mathcal{L}_Π , o qual é simples. Além disso, $\lambda = 0$ é um autovalor simples associado a autofunção $(\varphi', c\varphi'')$. O resultado então segue de a partir de [56, Teorema 3 e 4.7] e do fato que $d''(c) < 0$ para todo $c \in [0, c^\dagger) \subset [0, c^*)$ e $L > L_0$, em que $c^* > 0$ é dado em (2.57). ■

Observação 2.26. Convém observarmos que a instabilidade orbital em um subespaço implica instabilidade no espaço “maior”. Além do mais, salientamos ainda que estamos usando fortemente esse fato no Teorema 2.25, pois *a priori* concluimos instabilidade da onda em um subespaço de $X_m = H_{\text{per},m}^1 \times L_{\text{per},m}^2$ (veja Observação 2.24). Logo, a onda é instável em X_m também. □

Capítulo 3

Instabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária para a Equação Quíntica de Klein-Gordon

Neste capítulo, mostraremos a existência e instabilidade orbital de soluções do tipo ondas periódicas estacionárias para a Equação Quíntica de Klein-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (3.1)$$

em que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função periódica na variável espacial e com período $L > 0$ fixado. Antes de começar necessitamos dar sentido formal ao conceito de ondas do tipo estacionárias.

Definição 3.1 (Onda Estacionária). Uma função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ é dita solução do tipo onda estacionária periódica, com período $L > 0$, de (3.1) se existem $c \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e periódica de período $L > 0$ de modo que

$$u(x, t) = e^{ict} \varphi(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (3.2)$$

solucionando (3.1) no sentido usual.

É fácil ver que (3.1) pode ser visto como um sistema Hamiltoniano abstrato. Sendo mais preciso, definindo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

vemos que (3.1) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} U(t) = J E'(U(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.4)$$

em que $U = (u, v) := (u, u_t) = (\operatorname{Re}(u), \operatorname{Im}(u_t), \operatorname{Im}(u), \operatorname{Re}(u_t)) \in X$, com

$$X := H_{\text{per}}^1([0, L]) \times L_{\text{per}}^2([0, L]) \times H_{\text{per}}^1([0, L]) \times L_{\text{per}}^2([0, L])$$

e $E' : X \rightarrow X'$ indicando a derivada de Fréchet da quantidade conservada $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[|u_x|^2 + |v|^2 + |u|^2 - \frac{|u|^6}{3} \right] dx. \quad (3.5)$$

Assim sendo, a derivada E' é dada explicitamente por

$$E'(u, v) = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(u_{xx}) + \operatorname{Re}(u) - \operatorname{Re}(|u|^4 u) \\ \operatorname{Im}(v) \\ \operatorname{Im}(u_{xx}) + \operatorname{Im}(u) - \operatorname{Im}(|u|^4 u) \\ \operatorname{Re}(v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in X. \quad (3.6)$$

Além disso, (3.1) possui uma outra quantidade conservada $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(u, v) = \operatorname{Im} \int_0^L \bar{u}v \, dx = \int_0^L (\operatorname{Re}(u) \operatorname{Im}(v) - \operatorname{Im}(u) \operatorname{Re}(v)) \, dx. \quad (3.7)$$

Nesse caso a derivada de Fréchet $F' : X \rightarrow X'$, de F , é dada por

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(v) \\ \operatorname{Re}(u) \\ -\operatorname{Re}(v) \\ -\operatorname{Im}(u) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in X. \quad (3.8)$$

Suponhamos que (3.1) admita soluções do tipo onda viajante da forma (3.2), como dada na Definição 3.1. Substituindo o perfil (3.2) em (3.1) temos a seguinte equação diferencial ordinária

$$-\varphi'' + \omega\varphi - \varphi^5 = 0, \quad (3.9)$$

com $\omega := 1 - c^2 \in (0, 1]$, ou seja, $c \in (-1, 1)$.

Dessa forma, na seção posterior temos por objetivo estabelecer a existência de solução para a equação diferencial dada em (3.9). E, conseqüentemente, estabelecer também a existência de soluções ondas estacionárias de (3.1), no sentido da Definição 3.1.

3.1 Existência de Ondas Estacionárias do Tipo Cnoidal

Nosso intuito nessa seção é apresentar alguns fatos no que concerne a existência de soluções periódicas $\varphi_c := \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de período fixado $L > 0$, para a equação diferencial ordinária não-linear escrita como

$$-\varphi'' + \omega\varphi - \varphi^5 = 0, \quad (3.10)$$

em que $\omega := 1 - c^2$ e $c \in (-1, 1)$, isto é, $\omega \in (0, 1]$.

Em [95] (veja também [10]) os autores mostraram que a equação (3.10) admite soluções periódicas com perfil dnoidal da forma

$$\phi(x) = \frac{\alpha \operatorname{dn}(\varrho x; k)}{\sqrt{1 - \eta \operatorname{sn}^2(\varrho x; k)}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

em que $k \in (0, 1)$ e $\alpha, \varrho, \eta \in \mathbb{R}$ dependem suavemente de $k \in (0, 1)$. Motivado por esses trabalhos, podemos considerar o ansatz

$$\varphi(x) = \frac{a \operatorname{cn}\left(\frac{4K(k)}{L}x; k\right)}{\sqrt{1 - q \operatorname{sn}^2\left(\frac{4K(k)}{L}x; k\right)}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

em (3.10) para obter que φ é uma solução periódica cnoidal, com período $L > 0$, de (3.10). Os parâmetros $a, q \in \mathbb{R}$ são dados por

$$a = \frac{2(K(k))^2(k^2 - 1 - \sqrt{(k^4 - k^2 + 1)})(-k^2 - 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1})L^2)^{\frac{1}{4}}}{L} \quad (3.12)$$

e

$$q = k^2 - 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}. \quad (3.13)$$

Adicionalmente, $\omega \in (0, 1]$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{L^2 a^2 - 16q^2 k^2 K(k)^2 + 16qk^2 K(k)^2}{L^2 q^2} \\ &= \frac{-16(K(k))^2((-k^2 + 1)\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + k^4 - k^2 + 1)}{(k^2 - 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1})L^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

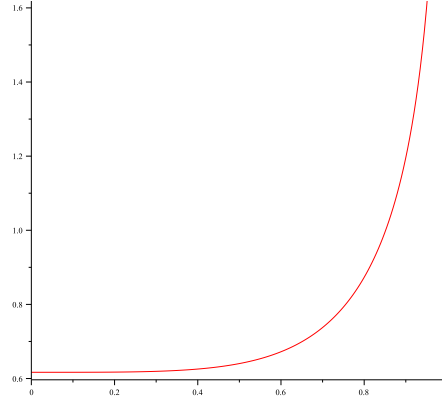


Figura 3.1: Comportamento de $\omega > 0$, com $k \in (0, 1)$ e $L = 8$.

Para um $L > 0$ fixo, é claro que os parâmetros $a, q \in \mathbb{R}$ and $\omega \in (0, 1]$ em (3.12)-(3.14) dependem suavemente do parâmetro $k \in (0, 1)$. Uma vez que a dependência de $\omega \in (0, 1]$ em termos de $k \in (0, 1)$ é estritamente monotônica (veja Figura 3.1), vemos que $a \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ também dependem suavemente de $\omega \in (0, 1]$. Dessa forma, para cada $c \in (-1, 1)$, podemos determinar uma curva suave

$$c \in (-1, 1) \mapsto \varphi_c = \varphi \in H_{\text{per}}^{\infty}$$

de soluções periódicas para a equação (3.10). Entretanto, devemos notar que por (3.14) temos $\omega \in \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, 1\right]$ e devido ao fato que $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$, devemos assumir $L > 2\pi$. Nesses termos, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Proposição 3.2 (Curva Suave de Ondas Cnoidais). Seja $L > 2\pi$ fixado. A equação (3.10) tem soluções L -periódicas com perfil cnoidal dadas por (3.11), em que os parâmetros $a \in \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}}, +\infty\right)$, $q \in (-2, -1)$ e $\omega \in I := \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, 1\right)$ dependem suavemente de $k \in (0, 1)$ e são dados explicitamente em (3.12), (3.13) e (3.14), respectivamente. Além disso, uma vez que $\omega = 1 - c^2 \in I$ temos que

$$c \in (-1, 1) \subset \mathbb{R} \mapsto \varphi = \varphi_c \in H_{\text{per},e}^2([0, L])$$

é uma curva suave de soluções periódicas de (3.10).

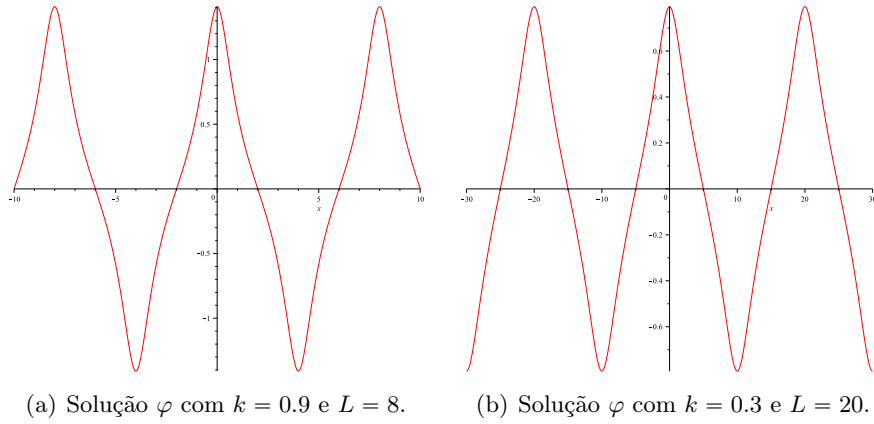


Figura 3.2: Comportamento de φ .

3.2 Análise Espectral

Seja $L > 2\pi$ fixado. Consideremos $c \in (-1, 1)$, $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$ e $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ como a solução de (3.10) dada na Proposição 3.2. Nessa seção, vamos estudar propriedades espectrais dos operadores matriciais $\vec{\mathcal{L}}_1, \vec{\mathcal{L}}_2 : H_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2 \subset \mathbb{L}_{\text{per}}^2 \longrightarrow \mathbb{L}_{\text{per}}^2$ definidos por

$$\vec{\mathcal{L}}_1 = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi^4 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{L}}_2 = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - \varphi^4 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Os operadores $\vec{\mathcal{L}}_1$ e $\vec{\mathcal{L}}_2$ são a parte real e a parte imaginária do operador linear completo $\mathcal{L} : H_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2 \times H_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2 \subset \mathbb{L}_{\text{per}}^2 \times \mathbb{L}_{\text{per}}^2 \longrightarrow \mathbb{L}_{\text{per}}^2 \times \mathbb{L}_{\text{per}}^2$ dado por

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi^4 & -c & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x^2 + 1 - \varphi^4 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Aqui também o operador \mathcal{L} , em (3.16), é obtido a partir das quantidades conservadas E e F definidas em (3.5) e (3.7), respectivamente. Mais precisamente, definindo o funcional de Lyapunov $G = E - cF$, temos $G' = E' - cF'$ e, em virtude de (3.6), (3.8) e (3.10),

obtemos que

$$G'(\varphi, c\varphi, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\varphi'' + \varphi - \varphi^5 \\ c\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} c\varphi \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi'' + (1 - c^2)\varphi - \varphi^5 \\ c\varphi - c\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(\varphi, c\varphi, 0, 0)$ é um ponto crítico do funcional G . Ademais,

$$\mathcal{L} \simeq G''(\varphi, c\varphi, 0, 0) \quad (3.17)$$

em que \simeq significa que estamos identificando o operador \mathcal{L} com $G''(\varphi, c\varphi, 0, 0)$ por meio de um isomorfismo de Riesz conveniente (detalhes em [124, Lema 3.3]). E ainda, por (3.10), vemos que

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \\ -c\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varphi'' + \omega\varphi - \varphi^5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} \begin{pmatrix} \varphi' \\ c\varphi' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi''' + \omega\varphi' - 5\varphi^4\varphi' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$(0, 0, \varphi, -c\varphi), (\varphi', c\varphi', 0, 0) \in \text{Ker}(\mathcal{L}). \quad (3.18)$$

Em outras palavras, $\lambda = 0$ é um autovalor do operador \mathcal{L} com autofunções associadas $(0, 0, \varphi, -c\varphi)$ e $(\varphi', c\varphi', 0, 0)$. Vemos também que como decorrência de (3.17) e do exposto em [15, Página 92] que o operador \mathcal{L} é um operador auto-adjunto, logo $\sigma(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}$. De modo que, em virtude do formato diagonal do operador \mathcal{L} temos que¹

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\vec{\mathcal{L}}_1) \cup \sigma(\vec{\mathcal{L}}_2). \quad (3.19)$$

Dessa forma, a fim de conseguirmos analisar o espectro do operador \mathcal{L} precisamos obter algumas propriedades espectrais no que diz respeito aos operadores $\vec{\mathcal{L}}_1$ e $\vec{\mathcal{L}}_2$ e para tanto necessitamos apresentar alguns resultados preliminares.

Lema 3.3. Seja $L > 2\pi$ fixo. Consideremos $c \in (-1, 1)$, $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$ e $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ a solução com perfil cnoidal dado pela Proposição 3.2. Consideremos o operador auto-adjunto², $\mathcal{L}_1 : H_{\text{per}}^2([0, L]) \subset L_{\text{per}}^2([0, L]) \longrightarrow L_{\text{per}}^2([0, L])$ dado por

$$\mathcal{L}_1 := -\partial_x^2 + \omega - 5\varphi^4. \quad (3.20)$$

Um número $\lambda \leq 0$ é um autovalor do operador $\vec{\mathcal{L}}_1$ dado em (3.15) se, e somente se, o número

$$\gamma := \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1} \right) \leq 0$$

é um autovalor do operador \mathcal{L}_1 . Além disso, existe uma relação biunívoca entre as autofunções do operador $\vec{\mathcal{L}}_1$ associadas ao autovalor $\lambda \leq 0$ e as autofunções do operador \mathcal{L}_1 associadas ao autovalor $\gamma \leq 0$.

¹Veja [91, Página 110] ou [111, Página 666]

²Veja [15, Teorema 11.21] para justificativa desse fato.

Demonstração. A prova parcial pode ser encontrada em [95, Proposição 3.1]. Mas aqui incluímos os detalhes.

\Rightarrow) Primeiramente, suponhamos que $\lambda \leq 0$ seja um autovalor do operador $\vec{\mathcal{L}}_1$. Assim, existe $(g, h) \in D(\vec{\mathcal{L}}_1) \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $\vec{\mathcal{L}}_1(f, g) = \lambda(f, g)$, isto é,

$$\begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi^4 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda g \\ \lambda h \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Notemos que (3.21) é equivalente a

$$\begin{cases} -g'' + g - 5\varphi^4 g - ch = \lambda g \\ -cg + h = \lambda h. \end{cases} \quad (3.22)$$

Da segunda igualdade em (3.22), vem que

$$\lambda h - h = -cg \quad \Leftrightarrow \quad h = -\frac{cg}{\lambda - 1}. \quad (3.23)$$

Agora, se $\gamma := \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1}\right)$ e $\lambda \leq 0$, então $\gamma \leq 0$. Ainda, como a função g satisfaz a primeira igualdade de (3.22) e h cumpre (3.23), segue que $g \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(g) &= -g'' + (1 - c^2)g - 5\varphi^4 g \\ &= -g'' + g - 5\varphi^4 g - ch - c^2 g - \frac{c^2 g}{\lambda - 1} \\ &= \lambda g - c^2 g - \frac{c^2 g}{\lambda - 1} = \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1}\right) g = \gamma g. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De (3.24) garantimos que $\gamma \leq 0$ é autovalor do operador \mathcal{L}_1 , com autofunção associada $g \in H_{\text{per}}^2$.

\Leftarrow) Reciprocamente suponhamos que $\gamma < 0$ seja um autovalor do operador \mathcal{L}_1 . Logo, existe uma função $g \in D(\mathcal{L}_1) \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{L}_1(g) = \gamma g$. Definamos uma função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$y(x) = x^2 - (1 + c^2 + \gamma)x + \gamma.$$

Evidentemente, y é uma função quadrática de modo que seu discriminante $\Delta = (1 + c^2 + \gamma)^2 - 4\gamma$ satisfaz $\Delta > 0$, pois $-4\gamma > 0$ e $(1 + c^2 + \gamma)^2 \geq 0$. Assim, a função y admite duas raízes reais (distintas). Ademais, o produto das raízes de y é dado por $\frac{\gamma}{1} = \gamma < 0$. Logo, existe um único $\lambda < 0$ que cumpre $y(\lambda) = 0$, ou seja, $\lambda^2 - (1 + c^2 + \gamma)\lambda + \gamma = 0$. Ou ainda,

$$\gamma = \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1}\right). \quad (3.25)$$

Definamos, $h := -\frac{cg}{\lambda - 1} \in H_{\text{per}}^2 \leftrightarrow L_{\text{per}}^2$. Observemos que

$$\begin{aligned} -g'' + g - 5\varphi^4 g - ch &= -g'' + (1 - c^2)g - 5\varphi^4 g + c^2 g - ch \\ &= \gamma g + c^2 g + \frac{c^2}{\lambda - 1} g \\ &= \lambda g - \frac{\lambda c^2 g}{\lambda - 1} + \frac{\lambda c^2 g}{\lambda - 1} = \lambda g \end{aligned}$$

o que por sua vez implica em (3.21), ou seja, $\vec{\mathcal{L}}_1(g, h) = \lambda(g, h)$. Assim, $\lambda < 0$ é um autovalor do operador $\vec{\mathcal{L}}_1$.

Se $\gamma = 0$, então notemos que o único número $\lambda \leq 0$ que satisfaz (3.25) é $\lambda = 0$. Desse modo, para concluir essa implicação do resultado, basta aplicar o mesmo procedimento anterior para $\lambda = 0$.

Por fim, podemos concluir que existe uma relação biunívoca entre os autovalores estritamente negativos do operador \mathcal{L}_1 com os autovalores estritamente negativos do operador $\vec{\mathcal{L}}_1$. O mesmo pode ser dito com respeito às autofunções associadas a esses autovalores. ■

E de maneira similar ao Lema 3.3 temos o seguinte resultado:

Lema 3.4. Seja $L > 2\pi$ fixo. Consideremos $c \in (-1, 1)$, $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$ e $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ a solução com perfil cnoidal dado pela Proposição 3.2. Consideremos o operador auto-adjunto³, $\mathcal{L}_2 : H_{\text{per}}^2([0, L]) \subset L_{\text{per}}^2([0, L]) \longrightarrow L_{\text{per}}^2([0, L])$ dado por

$$\mathcal{L}_2 := -\partial_x^2 + \omega - \varphi^4. \quad (3.26)$$

Um número $\lambda \leq 0$ é um autovalor do operador $\vec{\mathcal{L}}_2$ dado em (3.15) se, e somente se, o número

$$\gamma := \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1} \right) \leq 0$$

é um autovalor do operador \mathcal{L}_2 . Além disso, existe uma relação biunívoca entre as autofunções do operador $\vec{\mathcal{L}}_2$ associadas ao autovalor $\lambda \leq 0$ e as autofunções do operador \mathcal{L}_2 associadas ao autovalor $\gamma \leq 0$.

Observação 3.5. Pelos Lemas 3.3 e 3.4, temos que a dimensão de $\text{Ker}(\mathcal{L}_i)$ é igual a dimensão de $\text{Ker}(\vec{\mathcal{L}}_i)$, $i = 1, 2$. □

Observação 3.6. Notemos que os operadores \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 , dados em (3.20) e (3.26), respectivamente, são indexados pelo parâmetro $\omega \in (0, 1]$, o que nos permite às vezes de modo conveniente escrever $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_{1, \omega}$ e $\mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_{2, \omega}$, para cada $\omega \in (0, 1]$ fixo. □

Antes de apresentar a teoria espectral no que concerne o operador \mathcal{L} dado em (3.16) precisamos relembrar alguns fatos básicos sobre a Teoria de Floquet. Nosso breve resumo apresentado na sequência é baseado em resultados contidos, por exemplo, em [48], [90] e [103]. Uma breve descrição também pode ser encontrada em [31, Seção 2.4].

3.2.1 Repasse à Teoria de Floquet

Consideremos $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty([0, L])$ a solução obtida na Proposição 3.2 e

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_s : H_{\text{per}}^2([0, L]) \subset L_{\text{per}}^2([0, L]) \longrightarrow L_{\text{per}}^2([0, L])$$

o operador de Hill, dado por

$$\mathcal{P} = -\partial_x^2 + g(s, \varphi), \quad s \in \mathcal{V}, \quad (3.27)$$

³Veja [15, Teorema 11.21] para justificativa desse fato.

em que $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{V} \times L_{\text{per}}^2([0, L]) \rightarrow L_{\text{per}}^2([0, L])$ é um potencial suave e $L := L_s > 0$, para $s \in \mathcal{V}$. Aqui, g é chamado de potencial e é importante ressaltar que consideramos g um potencial par, ou seja, para cada $s \in \mathcal{V}$, a aplicação

$$g(x) \equiv g(s, \varphi)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

satisfaz a propriedade $g(-x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, podemos escrever $g : \mathcal{V} \times L_{\text{per,e}}^2([0, L]) \rightarrow L_{\text{per,e}}^2([0, L])$. Ainda, o operador \mathcal{P} é auto-adjunto. De fato, primeiramente escrevamos $\mathcal{P} = R + A$, em que $R := -\partial_x^2 + 1$ e $A := g - 1$, e notemos que $D(R) = D(\mathcal{P}) = H_{\text{per}}^2$ e $D(A) = L_{\text{per}}^2$. A partir do Lema de Lax-Milgram ([22, Corolário 5.8]), inferimos que $R : D(R) \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2$ é sobrejetor. Além disso, sendo R um operador simétrico, temos por [16, Teorema 20.5] que R é um operador auto-adjunto. Em contrapartida, A é um operador simétrico e em virtude do comportamento do potencial g , obtemos que A é um operador limitado. Nesses termos, segue de [15, Teorema B.41] que $\mathcal{P} = A + R$ é auto-adjunto e donde $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}$.

De acordo com o Teorema da Oscilação ([90, Teorema 2.1]), o espectro de \mathcal{P} é formado por uma sequência de autovalores $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} \dots, \quad (3.28)$$

em que a igualdade $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, significa que o autovalor é duplo. Afirmamos que $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{P}) = \emptyset$. De fato, consideremos o operador auxiliar $T : \mathcal{P} - R : H_{\text{per}}^2 \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2$. Assim, é válido que $T(u) = gu - u$, para qualquer que seja $u \in H_{\text{per}}^2$. A partir do exposto na demonstração de [15, Teorema 11.21] temos que $\sigma_{\text{ess}}(R) = \emptyset$. Dessa forma, usando a imersão compacta $H_{\text{per}}^2 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$ (veja (1.2)) e a limitação de g inferimos que T é um operador compacto. Esses fatos e o Teorema do Espectro Essencial⁴, nos permitem concluir que $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{P}) = \sigma_{\text{ess}}(R) = \emptyset$, como afirmado. Consequentemente, $\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P})$ forma um conjunto discreto de autovalores. Além disso, o espectro de \mathcal{P} é caracterizado pelo número de zeros das autofunções, mais precisamente, se $p \in D(\mathcal{P})$ é uma autofunção associada ao autovalor λ_{2n-1} ou λ_{2n} , para algum $n \in \mathbb{N}$, então p tem exatamente $2n$ zeros no intervalo $[0, L)$. Em particular, a autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ não tem zeros em $[0, L]$ e pode ser assumida par.

Pela teoria clássica de Floquet existe $p \in C_b^\infty([0, L])$ uma solução periódica não-trivial da equação

$$-f'' + g(s, \varphi)f = 0, \quad (3.29)$$

em que $f \in C_b^\infty([0, L])$. Aqui, $C_b^\infty([0, L]) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é limitada e suave}\}$. Também pela teoria de Floquet, obtemos a existência de uma solução $y \in C_b^\infty([0, L])$ de (3.29) que é linearmente independente com p de modo que $\{p, y\}$ é uma base fundamental de soluções da equação de Hill (3.29). Vale destacar que sendo p periódica, então y é um função par ou ímpar. E como é bem sabido que as duas soluções de (3.29) são univocamente

⁴[15, Teoremas B.46 e B.48].

determinadas por uma função par e uma ímpar, segue que se p é ímpar, então y é par e vice-versa. Ainda, como uma consequência da Fórmula de Abel ([43, Teorema 4.10]), temos que o Wronskiano $W(p, y)$ de p e y satisfaz

$$W(p, y)(x) = W(p, y)(0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

em que $W(p, y) = py' - yp'$.

Adicionalmente, existe $\theta \in \mathbb{R}$ (dependendo de y e p) tal que

$$y(x + L) = y(x) + \theta p(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.31)$$

A constante $\theta \in \mathbb{R}$ “mede o quanto” a função y é periódica. Para ser mais preciso, $\theta = 0$ se, e somente se, y é periódica. Esse critério é bastante útil para estabelecer se o núcleo de \mathcal{P} é 1-dimensional desde que provemos que $\theta \neq 0$. No que tange tal fato, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.7. Se $\lambda = 0$ é um autovalor de \mathcal{P} , com autofunção associada $p \in D(\mathcal{P})$, e $\theta \in \mathbb{R}$ é a constante dada por (3.31), então $\lambda = 0$ é simples se, e somente se, $\theta \neq 0$. Ademais, se p tem 2 zeros sobre $[0, L)$, então $\lambda_1 = 0$ se $\theta < 0$, e $\lambda_2 = 0$ se $\theta > 0$.

Demonstração. Consulte [99, Teorema 3.2] e [103, Teorema 3.1]. ■

Precisamos também da noção de família isonercial de operadores auto-adjuntos.

Definição 3.8 (Índice de Inércia). Seja $s \in \mathcal{V}$. O índice de inércia do operador auto-adjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}_s$, em (3.27), é o par $\text{in}(\mathcal{P}_s) := (\text{n}(\mathcal{P}_s), \text{z}(\mathcal{P}_s)) \in \mathbb{N}^2$.

Definição 3.9 (Família Isonercial de Operadores). Sejam $s \in \mathcal{V}$ e \mathcal{P}_s o operador dado em (3.27). A família de operadores lineares $\{\mathcal{P}_s : H_{\text{per}}^2 \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2 ; s \in \mathcal{V}\}$ é dita ser isonercial se $\text{in}(\mathcal{P}_s)$ é constante para qualquer $s \in \mathcal{V}$, isto é, $\text{in}(\mathcal{P}_s) = \text{in}(\mathcal{P}_r)$, para todo $r, s \in \mathcal{V}$.

O próximo resultado é bastante útil para determinar o comportamento do espectro não-positivo do operador linear $\mathcal{P} = \mathcal{P}_s$, para $s \in \mathcal{V}$, em (3.27) apenas o conhecendo para um valor fixo $s_0 \in \mathcal{V}$.

Teorema 3.10. Seja $s \in \mathcal{V}$. Se $\lambda = 0$ é um autovalor de \mathcal{P}_s e g é continuamente diferenciável em todas as variáveis, então a família de operadores $\{\mathcal{P}_s : H_{\text{per}}^2 \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2 ; s \in \mathcal{V}\}$ é isonercial.

Demonstração. Veja [99, Teorema 3.1]. ■

Observação 3.11. Convém observarmos que os operadores \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 dados em (3.20) e (3.26), são casos particulares do operador \mathcal{P} em (3.27). □

Em posse das informações acima, na próxima subseção vamos estabelecer mais algumas propriedades espectrais úteis relacionadas ao operador \mathcal{L} em (3.16).

3.2.2 Propriedades Espectrais

Seja $L > 2\pi$ fixo e consideremos $c \in (-1, 1)$, $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$ e $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ a solução com perfil cnoidal dada na Proposição 3.2.

Consideremos também, agora, o operador linear \mathcal{L}_1 dado em (3.20). Observemos que derivando (3.10), vemos que

$$\mathcal{L}_1(\varphi') = -\varphi''' + \omega\varphi' - 5\varphi^4\varphi' = 0, \quad (3.32)$$

isto é, $\lambda = 0$ é um autovalor com autofunção associada sendo $p = \varphi'$. Então, pelo apresentado na Subseção 3.2.1, existe uma função $y \in C_b^\infty([0, L])$ que satisfaz a equação de Hill

$$-y'' + \omega y - 5\varphi^4 y = 0, \quad (3.33)$$

de modo que $\{\varphi', y\}$ é o conjunto fundamental de soluções. Ademais, uma vez que φ' é ímpar (pois φ é par), temos que y é par, o que implica que $y'(0) = 0$. Ainda, como decorrência de (3.30), vemos que

$$1 = W(\varphi', y)(0) = \varphi'(0)y'(0) - y(0)\varphi''(0) \Rightarrow -y(0)\varphi''(0) = 1 \Rightarrow y(0) = \frac{-1}{\varphi''(0)}.$$

Aqui, é possível verificar que

$$\varphi''(0) = \frac{-32K(k)^{\frac{5}{2}} \sqrt{-k^2 + s(k) + 1} \sqrt{k^2 + s(k) + 1} (-k^2 + s(k) + 2)}{L^{\frac{5}{2}}}, \quad k \in (0, 1)$$

em que $s(k) := \sqrt{k^4 - k^2 + 1}$, de modo que o numerador de $\varphi''(0)$ é estritamente negativo em $(0, 1)$, pois o fato que $3(1 - k^2) > 0$ implica $-k^2 + s(k) + 2 > 0$, para todo $k \in (0, 1)$. Donde, $\varphi''(0) \neq 0$.

Assim, estabelecemos que y satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} -y'' + \omega y - 5\varphi^4 y = 0 \\ y(0) = -\frac{1}{\varphi''(0)} \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

E derivando a relação (3.31), determinamos que

$$y'(x + L) = y'(x) + \theta\varphi''(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a identidade acima no ponto $x = 0$ e usando o fato que $y'(0) = 0$, temos também que a constante $\theta \in \mathbb{R}$, é dada por

$$\theta = \frac{y'(L)}{\varphi''(0)}. \quad (3.35)$$

Fixemos $L = 8$ e $k_0 = 0.5$. Por (3.14) e como $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$, obtemos valores $c_0 \in (-1, 1)$ e $\omega_0 \in (0, 1]$ de modo que $1 - c_0^2 = \omega_0 \simeq 0.6403$ e que a solução φ , como dada em (3.11)-(3.13), pode ser determinada por

$$\varphi(x) = \frac{1.2604 \operatorname{cn}(0.8428 x; 0.5)}{\sqrt{1 + 1.6513 \operatorname{sn}^2(0.8428 x; 0.5)}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

Uma vez que, $\varphi''(0) \simeq -2.3742$, podemos resolver o problema de valor inicial em (3.34). Na verdade, usando um programa computacional, vemos que $y(8) \simeq -32.7368$. Consequentemente, obtemos que a constante $\theta \in \mathbb{R}$ dada em (3.35) satisfaz

$$\theta \simeq \frac{-32.7368}{-2.3742} = 13.7883 > 0.$$

A Proposição 3.7 e o fato de φ' ter 2 zeros no intervalo $[0, L)$ (veja Figura 3.2) nos permitem concluir que $\lambda = 0$ é um autovalor simples e $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{1, \omega_0}$ tem dois autovalores negativos, isto é, $\text{in}(\mathcal{L}_{1, \omega_0}) = (2, 1)$ para um valor fixado $\omega_0 \in (0, 1]$. Graças ao Teorema 3.10, inferimos que a família de operadores $\{\mathcal{L}_{1, \omega} ; \omega \in (0, 1]\}$ é isoinercial e, assim, concluimos que

$$\text{in}(\mathcal{L}_{1, \omega}) = (2, 1), \quad \omega \in (0, 1].$$

A Tabela 3.1 ilustra alguns valores (aproximados) de $\theta \in \mathbb{R}$ para valores diferentes de $L > 2\pi$.

$L = 7$		$L = 4\pi$		$L = 20$		$L = 100$	
k	θ	k	θ	k	θ	k	θ
0.01	8.07	0.01	83.77	0.01	537.53	0.01	335953.53
0.1	8.07	0.1	83.77	0.1	537.53	0.1	335954.32
0.3	8.07	0.3	83.79	0.3	537.64	0.3	336023.83
0.5	8.08	0.5	83.94	0.5	538.61	0.5	336629.65
0.7	8.17	0.7	84.83	0.7	544.29	0.7	340184.46
0.9	8.98	0.9	93.24	0.9	598.25	0.9	373904.20
0.99	17.31	0.99	179.76	0.99	1153.37	0.99	720856.38

Tabela 3.1: Valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para valores diferentes de $L > 2\pi$.

Resumindo o exposto acima, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Lema 3.12. Seja $L > 2\pi$ fixo e consideremos $c \in (-1, 1)$. Se $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ é a solução cnoidal dada na Proposição 3.2, então o operador \mathcal{L}_1 dado em (3.20) tem exatamente 2 autovalores negativos, que são simples, e o zero é o terceiro autovalor, que é simples, com autofunção φ' . Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.

Na sequência, consideremos o operador \mathcal{L}_2 dado em (3.26). Notemos que de (3.10), vemos que

$$\mathcal{L}_2(\varphi) = -\varphi'' + \omega\varphi - \varphi^5 = 0,$$

ou seja, $\lambda = 0$ é um autovalor com autofunção associada sendo $p = \varphi$. Então, usando argumentos contidos na Subseção 3.2.1, existe uma função $y \in C_b^\infty([0, L])$ que satisfaz a equação de Hill

$$-y'' + \omega y - \varphi^4 y = 0, \quad (3.37)$$

de modo que $\{\varphi, y\}$ é o conjunto fundamental de soluções. Ademais, uma vez que φ é par, temos que y é ímpar, o que implica que $y(0) = 0$. Ainda, como decorrência de (3.30),

vemos que

$$1 = W(\varphi, y)(0) = \varphi(0)y'(0) - y(0)\varphi'(0) \Rightarrow y'(0)\varphi(0) = 1 \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{\varphi(0)}.$$

Aqui, é possível verificar que

$$\varphi(0) = \frac{2\sqrt{\mathbb{K}(k)}^4 \sqrt{-k^2 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 1} \sqrt{k^2 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 1}}{\sqrt{L}}, \quad k \in (0, 1)$$

de modo que é fácil ver que $\varphi(0)$ é estritamente positivo em $(0, 1)$. Donde, $\varphi(0) \neq 0$.

Assim, estabelecemos que y satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} -y'' + \omega y - \varphi^4 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{\varphi(0)}. \end{cases} \quad (3.38)$$

E aplicando $x = 0$ na relação (3.31), vemos que $y(L) = y(0) + \theta\varphi(0)$ e usando o fato que $y(0) = 0$, asseguramos que a constante $\theta \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\theta = \frac{y(L)}{\varphi(0)}. \quad (3.39)$$

Fixemos $L = 8$ e $k_0 = 0.5$. Novamente, por (3.14) e como $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$, obtemos valores $c_0 \in (-1, 1)$ e $\omega_0 \in (0, 1]$ de modo que $1 - c_0^2 = \omega_0 \simeq 0.6403$ e que a solução φ , como dada em (3.11)-(3.13), é determinada, nesse caso também, por (3.36), com $\varphi(0) \simeq 1.260$. Por outro lado, podemos resolver numericamente o problema de valor inicial em (3.38) para obter $y(8) \simeq -13.1854$. Por conseguinte, obtemos que $\theta \in \mathbb{R}$ dado em (3.39) satisfaz

$$\theta \simeq \frac{-13.1854}{1.260} = -10.4602 < 0.$$

Assim, a Proposição 3.7 e o fato que φ tem dois zeros no intervalo $[0, L)$ (veja Figura 3.2) nos permitem concluir que $\lambda = 0$ é um autovalor simples e $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{2, \omega_0}$ tem um autovalor negativo, isto é, $\text{in}(\mathcal{L}_{2, \omega_0}) = (1, 1)$ para um valor fixado $\omega_0 \in (0, 1)$. Por consequência do Teorema 3.10, vemos que a família de operadores $\{\mathcal{L}_{2, \omega} ; \omega \in (0, 1]\}$ é isoinercial. Dessa forma, inferimos que

$$\text{in}(\mathcal{L}_{2, \omega}) = (1, 1), \quad \omega \in (0, 1].$$

A Tabela 3.2 ilustra alguns valores (aproximados) de $\theta \in \mathbb{R}$ para valores diferentes de $L > 2\pi$.

Resumindo o exposto acima, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Lema 3.13. Seja $L > 2\pi$ fixado e consideremos $c \in (-1, 1)$. Se $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ é a solução com perfil cnoidal dada na Proposição 3.2, então o operador \mathcal{L}_2 em (3.26) tem exatamente 1 autovalor negativo, que é simples, e o zero é o segundo autovalor, que é simples, com autofunção associada sendo φ . Adicionalmente, o restante o espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.

$L = 7$		$L = 4\pi$		$L = 20$		$L = 100$	
k	θ	k	θ	k	θ	k	θ
0.01	-7.80	0.01	-25.13	0.01	-63.66	0.01	-1591.55
0.1	-7.80	0.1	-25.13	0.1	-63.66	0.1	-1591.60
0.3	-7.82	0.3	-25.21	0.3	-63.85	0.3	-1596.19
0.5	-8.01	0.5	-25.81	0.5	-65.38	0.5	-1634.50
0.7	-8.93	0.7	-28.77	0.7	-72.88	0.7	-1821.97
0.9	-14.52	0.9	-46.79	0.9	-118.53	0.9	-2963.34
0.99	-63.10	0.99	-203.36	0.99	-515.12	0.99	-12878.20

Tabela 3.2: Valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para valores diferentes de $L > 2\pi$.

Por decorrência dos Lemas 3.3 e 3.4, Observação 3.5 e dos Lemas 3.12 e 3.13, temos:

Teorema 3.14. Seja $L > 2\pi$ fixado e consideremos $c \in (-1, 1)$. Se $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ é a solução com perfil cnoidal dada na Proposição 3.2, então as seguintes propriedades espectrais ocorrem:

- i) o operador $\vec{\mathcal{L}}_1$ dado em (3.15) tem exatamente 2 autovalores negativos, que são simples, e o zero é o terceiro autovalor, que é simples, com autofunção $(\varphi', c\varphi')$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores e limitado longe do zero.
- ii) o operador $\vec{\mathcal{L}}_2$ dado em (3.15) tem exatamente 1 autovalor negativo, que é simples, e o zero é o segundo autovalor, que é simples, com autofunção $(\varphi, -c\varphi)$. Além disso, o restante do espectro é discreto e limitado longe do zero.

Agora, nossa intenção é analisar o operador linearizado completo \mathcal{L} definido em (3.16), contando o seu número de autovalores negativos e provando que seu núcleo é bidimensional. Para tanto, primeiro de tudo, já vimos em (3.18) que $(\varphi', c\varphi', 0, 0), (0, 0, \varphi, -c\varphi) \in \text{Ker}(\mathcal{L})$ e, assim, pelo Teorema 3.14 e por (3.19), determinamos que

$$\text{Ker}(\mathcal{L}) = [(\varphi', c\varphi', 0, 0), (0, 0, \varphi, -c\varphi)]. \quad (3.40)$$

Ademais, como resultado de (3.28) e das Observações 3.3 e 3.4, estabelecemos que o restante do espectro de \mathcal{L} é constituído por um conjunto discreto de autovalores e limitado longe do zero. Ainda, novamente pelo Teorema 3.14 e por (3.19), obtemos

$$n(\mathcal{L}) = n(\vec{\mathcal{L}}_1) + n(\vec{\mathcal{L}}_2) = 2 + 1 = 3. \quad (3.41)$$

Voltemos nossa atenção ao operador \mathcal{L} restrito ao espaço das funções pares. Mais precisamente,

$$\mathcal{L}_e := \mathcal{L} : (H_{\text{per},e}^2 \times L_{\text{per},e}^2) \times (H_{\text{per},e}^2 \times L_{\text{per},e}^2) \subset \mathbb{L}_{\text{per},e}^2 \times \mathbb{L}_{\text{per},e}^2 \longrightarrow \mathbb{L}_{\text{per},e}^2 \times \mathbb{L}_{\text{per},e}^2. \quad (3.42)$$

Antes de continuarmos nossa análise no que se refere o operador \mathcal{L}_e , precisamos estabelecer o seguinte lema.

Lema 3.15. Seja $a > 0$ fixo. Sejam $\frac{1}{p}, q, w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções localmente integráveis, a -periódicas, com $p > 0$ e $w > 0$, e o problema de autovalor com condições de fronteira:

$$\begin{cases} -(py')' + qy = \lambda wy, & \lambda \in \mathbb{R}. \\ y(0) = y\left(\frac{a}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Se p, q e w são funções pares e se, para $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ é o n -ésimo autovalor de (3.43), com autofunção associada $\chi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então χ_{n-1} é ímpar, para $n \geq 1$.

Demonstração. Veja [27, Teoremas 2.3.4 (a) e 2.8.1]. ■

No que se refere o operador \mathcal{L}_e , temos o seguinte resultado.

Teorema 3.16. Seja $L > 2\pi$ fixado. E consideremos $c \in (-1, 1)$ e $1 - c^2 = \omega \in (0, 1]$. Se $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ é a solução com perfil cnoidal dada na Proposição 3.2, então o operador \mathcal{L}_e definido em (3.42) tem exatamente 3 autovalores negativos, que são simples, e o zero é um autovalor simples, com autofunção $(0, 0, \varphi, -c\varphi)$. Adicionalmente, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores e limitado longe do zero.

Demonstração. A fim de provarmos esse teorema, notemos que, é suficiente provarmos que todas as autofunções associadas com autovalores negativos dos operadores de \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 , dados, respectivamente, em (3.20) e (3.26), são funções pares. De fato, se $g_i \in H_{\text{per},e}^2([0, L])$ é uma autofunção do operador \mathcal{L}_i , para $i \in \{1, 2\}$, com autovalor $\gamma_i < 0$, então como vimos nos Lemas 3.3 e 3.4

$$\vec{g}_i = \left(g_i, -\frac{c}{\mu_i - 1} g_i \right) \in H_{\text{per},e}^2 \times L_{\text{per},e}^2$$

é uma autofunção do operador $\vec{\mathcal{L}}_i$, dado em (3.15), com autovalor $\mu_i < 0$ que é a solução negativa de $\gamma_i = \mu_i \left(1 - \frac{c^2}{\mu_i - 1} \right)$.

Agora, a partir do Lema 3.12, podemos considerar $\alpha_0, \alpha_1 < 0$ os autovalores negativos do operador \mathcal{L}_1 , com autofunções associadas $\phi_0, \phi_1 \in H_{\text{per}}^2$, respectivamente. Tais autovalores são os dois primeiros autovalores de \mathcal{L}_1 que são simples e $\alpha_0 < \alpha_1 < 0$. Além disso, $\alpha_2 := 0$ é o terceiro autovalor, com autofunção φ' . Também pelo Lema 3.13 podemos considerar $\zeta_0 < 0$ o único (e o primeiro) autovalor do operador \mathcal{L}_2 com autofunção associada $\chi_0 \in H_{\text{per}}^2$.

Do contido na Seção 3.2.1 (ou consulte também [90, Teorema 1.1]), vemos imediatamente que $\phi_0, \chi_0 \in H_{\text{per},e}^2$. Na sequência, provemos que $\phi_1 \in H_{\text{per},e}^2$. Para isso, no intervalo $\left[0, \frac{L}{2}\right]$ consideremos o problema de autovalor, para $\kappa \in \mathbb{R}$ e $y \in D(\mathcal{L}_1)$,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(y) \equiv y'' + (\omega - 5\varphi^4)y = \kappa y \\ y(0) = y\left(\frac{L}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Notemos que se $y \in D(\mathcal{L}_1)$ é ímpar e tal que $\mathcal{L}_1(y) = \kappa y$, para algum $\kappa \in \mathbb{R}$, então y satisfaz (3.44). De fato, como y é L -periódica, então $y\left(\frac{L}{2}\right) = y\left(-\frac{L}{2}\right)$ e sendo y ímpar, temos também que $y\left(\frac{L}{2}\right) = -y\left(-\frac{L}{2}\right)$. Donde, $2 \cdot y\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ e $y\left(\frac{L}{2}\right) = 0$. Ainda, novamente pelo fato de y ser ímpar, vemos que $y(0) = 0$, mostrando o afirmado.

Do mostrado anteriormente e em razão de (3.32), inferimos em particular que φ' satisfaz (3.44), para $\kappa = \alpha_2 = 0$. Temos também que, $\mathcal{L}_1(\phi_1) = \alpha_1\phi_1$, mas ϕ_1 pode ser ímpar ou par, pois ϕ_1 é a solução de uma equação de Hill (com potencial par). Por outro lado, é importante ressaltarmos que pelo Lema 3.15 o menor autovalor do problema (3.44) tem uma função ímpar associada. Agora, suponhamos, por um momento, que o menor autovalor de (3.44) é $\alpha_1 < 0$, isto é, ϕ_1 é uma função ímpar. Como, $\alpha_2 = 0 > \alpha_1$ e $\mathcal{L}_1(\varphi') = 0$ obtemos por [27, Teorema 2.5.2] que φ' tem infinitos zeros o que é uma contradição, pois $\varphi'(x) < 0$, para todo $x \in (0, \frac{L}{2})$.

Desse modo, $\alpha_1 < 0$ não pode ser o menor autovalor, ϕ_1 não é uma função ímpar e então $\alpha_2 = 0$ é o menor autovalor do problema (3.44). Consequentemente, ϕ_1 é uma função periódica par, ou seja, $\phi_1 \in H_{\text{per},e}^2$.

Do explicado acima, concluímos que \mathcal{L}_e tem 3 autovalores negativos, que são todos simples. Na sequência, como já sabemos que $\text{Ker}(\mathcal{L}) = [(\varphi', c\varphi', 0, 0), (0, 0, \varphi, -c\varphi)]$ e φ' é uma função ímpar, inferimos que $\text{Ker}(\mathcal{L}_e) = [(0, 0, \varphi, -c\varphi)]$. Em outras palavras, o zero é um autovalor simples do operador \mathcal{L}_e e núcleo de \mathcal{L}_e é 1-dimensional. ■

3.3 Instabilidade Orbital das Ondas Cnoidais

O objetivo dessa seção é estabelecer um resultado de instabilidade orbital no que tange a equação quíntica de Klein-Gordon dada em (3.1).

Consideremos $L > 2\pi$ fixado e também o espaço energia complexo dado por

$$X = H_{\text{per}}^1([0, L]) \times L_{\text{per}}^2([0, L]) \times H_{\text{per}}^1([0, L]) \times L_{\text{per}}^2([0, L]).$$

É bem sabido que a equação (3.1) é invariante sobre duas simetrias básicas, a saber, a translação e a rotação. Em outras palavras, se $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução de (3.1), então também o são, as funções dadas por

$$e^{-i\theta}u(x, t) \quad \text{e} \quad u(x + r, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

para todo $\theta, r \in \mathbb{R}$.

No que segue, para $c \in (-1, 1)$, $\varphi_c = \varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ é a solução periódica com perfil cnoidal dada na Proposição 3.2. Definamos

$$\Phi := (\varphi, ic\varphi) = (\varphi, c\varphi, 0, 0) \in X.$$

Nossa intenção é obter um resultado de instabilidade orbital associado a onda periódica par φ em (3.11) sobre o subespaço restrito $X_e := H_{\text{per},e}^1 \times L_{\text{per},e}^2 \times H_{\text{per},e}^1 \times L_{\text{per},e}^2 \subset X$. Para tanto, é necessário considerar o espaço X com apenas a simetria de rotação, já que a translação não é invariante sobre o espaço X_e , isto é, dada uma função em X pode ocorrer de sua translação não ser uma função par.

Seja $U = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in X$ e $\theta \in \mathbb{R}$. A simetria de rotação é dada explicitamente por

$$\mathbf{R}(\theta)U = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Podemos estabelecer a seguinte definição.

Definição 3.17 (Estabilidade Orbital). A onda periódica $\Phi \in X_e$ é dita orbitalmente estável se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: se $U_0 \in X_e$ satisfaz $\|U_0 - \Phi\|_X < \delta$, e U é uma solução de (3.1) no intervalo $[0, t_0)$, para algum $t_0 > 0$, com $U(0) = U_0$, então U pode ser continuada em $0 \leq t < \infty$ e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|U(t) - \mathbf{R}(\theta)\Phi\|_X < \varepsilon.$$

Caso contrário, Φ é dita orbitalmente instável. Em particular, isso aconteceria no caso de soluções que não podem ser continuadas.

Antes de darmos sequência no nosso estudo da estabilidade orbital, precisamos voltar à atenção para a boa colocação da equação (3.1).

3.3.1 Boa Colocação

Como podemos ver na Definição 3.17, antes de podermos estabelecer nosso resultado de estabilidade, precisamos apresentar um resultado de boa colocação (ao menos) local associado com a equação de Klein-Gordon (3.1), isto é, um resultado de boa colocação associado ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (3.45)$$

com $(u_0, v_0) \in X_e$. Nesse caso, temos bem estabelecido o seguinte resultado.

Teorema 3.18 (Boa Colocação). O problema de Cauchy (3.45) é localmente bem colocado em X_e . Mais precisamente, para cada $U_0 = (u_0, v_0) \in X_e$ existe um número $T > 0$ e uma única solução $U \in C([0, T], X_e)$ da equação (3.45) com $U(0) = U_0$ e para cada $T_0 \in (0, T)$ a aplicação dado-solução

$$U_0 \in X_e \longmapsto U \in C([0, T_0], X_e)$$

é contínua.

Demonstração. Esse resultado segue usando a teoria clássica de semigrupos (contida, por exemplo, em [110] e [129]) e argumentos de densidade. Veja [95, Teorema 2.1] ou [31, Teorema 3.7]. ■

3.3.2 Convexidade da Função d

Seja $L > 2\pi$ fixado. Para $c \in (-1, 1)$, consideremos a solução com perfil cnoidal $\varphi_c = \varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ dada na Proposição 3.2. Vemos que a função real $d : (-1, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(c) = E(\varphi, c\varphi, 0, 0) - cF(\varphi, c\varphi, 0, 0)$$

é bem definida e suave, graças a existência da curva suave de soluções

$$c \in I = (-1, 1) \mapsto \varphi_c \in H_{\text{per}}^2([0, L])$$

determinada na Proposição 3.2. Ademais, o fato já conhecido $G'(\varphi, c\varphi, 0, 0) = 0$, implica que

$$\begin{aligned} d'(c) &= E(\varphi, c\varphi, 0, 0) \frac{d}{dc}(\varphi, c\varphi, 0, 0) - cF'(\varphi, c\varphi, 0, 0) \frac{d}{dc}(\varphi, c\varphi, 0, 0) - F(\varphi, c\varphi, 0, 0) \\ &= G'(\varphi, c\varphi, 0, 0) \frac{d}{dc}(\varphi, c\varphi, 0, 0) - F(\varphi, c\varphi, 0, 0) = -F(\varphi, c\varphi, 0, 0), \end{aligned}$$

isto é,

$$d'(c) = -F(\varphi, c\varphi, 0, 0) = -c \int_0^L (\varphi(x))^2 dx, \quad c \in (-1, 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d''(c) &= -\frac{d}{dc} \left(c \int_0^L (\varphi(x))^2 dx \right) \\ &= -\int_0^L (\varphi(x))^2 dx - c \frac{d}{dc} \int_0^L (\varphi(x))^2 dx \\ &= -\int_0^L (\varphi(x))^2 dx - c \left(\frac{d\omega}{dc} \right) \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi(x))^2 dx \\ &= -\int_0^L (\varphi(x))^2 dx - c(-2c) \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi(x))^2 dx \\ &= -\int_0^L (\varphi(x))^2 dx + 2c^2 \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi(x))^2 dx \\ &= -\int_0^L (\varphi(x))^2 dx + 2(1-\omega) \frac{d}{d\omega} \int_0^L (\varphi(x))^2 dx, \quad c \in (-1, 1). \end{aligned} \tag{3.46}$$

em que foi usado o fato que $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$.

Um dos principais fatos para o estudo da convexidade da função d por meio do estudo do sinal de d'' em (3.46) é obter uma expressão conveniente para a integral $\int_0^L (\varphi(x))^2 dx$. Com esse fim, primeiro observemos que a partir de (3.11) e para $b := \frac{4K(k)}{L}$, temos

$$\int_0^L (\varphi(x))^2 dx = \int_0^L \frac{a^2 \text{cn}^2(bx; k)}{1 - q \text{sn}^2(bx; k)} dx = \frac{a^2 L}{K(k)} \int_0^{K(k)} \frac{\text{cn}^2(u; k)}{1 - q \text{sn}^2(u; k)} du, \quad k \in (0, 1).$$

No que segue, $k \in (0, 1)$. Usando os valores explícitos em (3.12), (3.13) e [23, Fórmula 411.03], obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L (\varphi(x))^2 dx &= \frac{a^2 L}{K(k)} \frac{\pi(1-q)(1-\Lambda_0(\beta, k))}{2\sqrt{q(1-q)(q-k^2)}} \\ &= \frac{2\pi(1-q)\sqrt{K(k)^2 q(q-2k^2)} L^2 (1-\Lambda_0(\beta, k))}{L K(k) \sqrt{q(1-q)(q-k^2)}} \\ &= \frac{-2\pi(\Lambda_0(\beta, k) - 1)}{\sqrt{s(k) + 1}} \sqrt{k^2 + s(k) + 1} \sqrt{2 - k^2 + s(k)} =: R(k), \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que

$$s(k) := \sqrt{k^4 - k^2 + 1}$$

e $\Lambda_0 : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indica a função Lambda de Heumann (veja [23, Fórmula 150.03]) definida por

$$\Lambda_0(\beta, k) := \frac{2}{\pi} (E(k) F(\beta, k') + K(k) E(\beta, k') - K(k) F(\beta, k')),$$

com

$$\beta := \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1-q}}\right) \quad \text{e} \quad k' := \sqrt{1-k^2}.$$

Por (3.46), (3.47) e pela Regra da Cadeia, vem que

$$d''(c) = -R(k) + 2c^2 R'(k) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}. \quad (3.48)$$

Primeiro, observemos que para todo $k \in (0, 1)$, temos

$$-R(k) = -\int_0^L (\varphi(x))^2 dx = -\|\varphi\|_{L^2}^2 < 0. \quad (3.49)$$

Por outro lado, podemos plotar o gráfico da função $R' : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (veja Figura 3.3, página 70) para mostrar a existência de um número $k^* \simeq 0.593$ tal que

$$R'(k) < 0, \quad k \in (0, k^*).$$

Usando o valor explícito de $\omega = 1 - c^2 \in (0, 1]$ dado em (3.14), vemos que $k^* \simeq 0.593$ define unicamente um valor $c^* \in (0, 1)$ dado por⁵

$$c^* \simeq \frac{0.65 \sqrt{-99.87 + 2.33L^2}}{L} > 0. \quad (3.50)$$

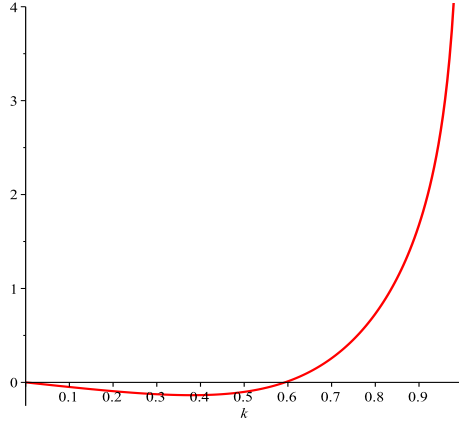
Adicionalmente, temos que $\omega \in (0, 1]$ é uma função positiva e estritamente crescente em termos de $k \in (0, 1)$, ou seja,

$$\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} > 0. \quad (3.51)$$

Logo, inferimos por (3.48), e pelo fato $R'(k) < 0$, para todo $k \in (0, k^*)$, e (3.51) que

$$d''(c) < 0, \quad \forall c \in (-1, -c^*] \cup [c^*, 1). \quad (3.52)$$

⁵A fim de tornar o radicando em (3.50) bem definido seria necessário considerar o valor de $L > 2\pi$ ligeiramente maior do que 2π , a saber, $L > 6.4$ aproximadamente. Mas devido as aproximações numéricas feitas e pela pequenez dessa diferença, continuaremos considerando $L > 2\pi$.

Figura 3.3: Comportamento da função R' .

Nesses termos, provamos a convexidade da função d sobre o intervalo $(-1, -c^*] \cup [c^*, 1)$. Nossa próxima análise é feita considerando $k \in (k^*, 1)$, ou seja, para $c \in (-c^*, c^*)$. Em verdade, para o caso $(k^*, 1)$, não temos uma resposta precisa para a convexidade da função d , pois nesse caso essa convexidade depende de uma eventual escolha do período $L > 2\pi$. De fato, voltemos para a expressão em (3.46), a qual nos possibilita escrever, para $k \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} d''(c) &= -R(k) - 2\omega R'(k) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} + 2R'(k) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} \\ &= 2R'(k) Q(k)L^2 - R(k) - 2\omega R'(k) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}, \quad c \in (-1, 1) \end{aligned} \quad (3.53)$$

em que $Q : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é uma função definida como

$$\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} = Q(k)L^2.$$

Na sequência, definimos

$$\alpha = \alpha(k) := 2R'(k)Q(k) \quad \text{e} \quad v = v(k) := R(k) + 2\omega R'(k) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}, \quad \forall k \in (0, 1). \quad (3.54)$$

Convém enfatizarmos que $\alpha > 0$ e $v > 0$ dependem apenas do módulo $k \in (0, 1)$, uma vez que R , Q e o produto de $\omega \in (0, 1]$ com $\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}$ depende apenas de $k \in (0, 1)$. Em virtude de (3.53) e (3.54), determinamos para todo $c \in (-c^*, c^*)$ que

$$d''(c) = \alpha(k)L^2 - v(k). \quad (3.55)$$

A relação (3.55) mostra que a positividade de d'' depende de uma eventual escolha de $L > 2\pi$. Já que (3.55) envolve funções complicadas de se manipular, como a função Lambda de Heumann, podemos determinar a convexidade de d usando cálculos numéricos (por meio do uso de um *software*). Desse modo, obtemos a existência de um $L_0 \simeq 20.354$ tal que se $L \in (2\pi, L_0)$, então

$$d''(c) < 0, \quad \forall c \in (-c^*, c^*).$$

Para o caso $L > L_0$, lidamos com um cenário complicado para a convexidade de d . Na verdade, de acordo com os *plots* na Figura 3.4, podemos ver que para alguns valores de $L > L_0$, temos $d''(c) < 0$ para alguns valores de $k \in (k^*, 1)$, mas quando $L > 2\pi$ se torna grande temos que $d''(c) > 0$, para $k \in (k^*, 1)$. Esse último fato nos impede de usar a teoria abstrata em [57, Teorema 5.1] para instabilidade linear, pois a diferença $n(\mathcal{L}_e) - p(d'') = 3 - 1 = 2$ é par.

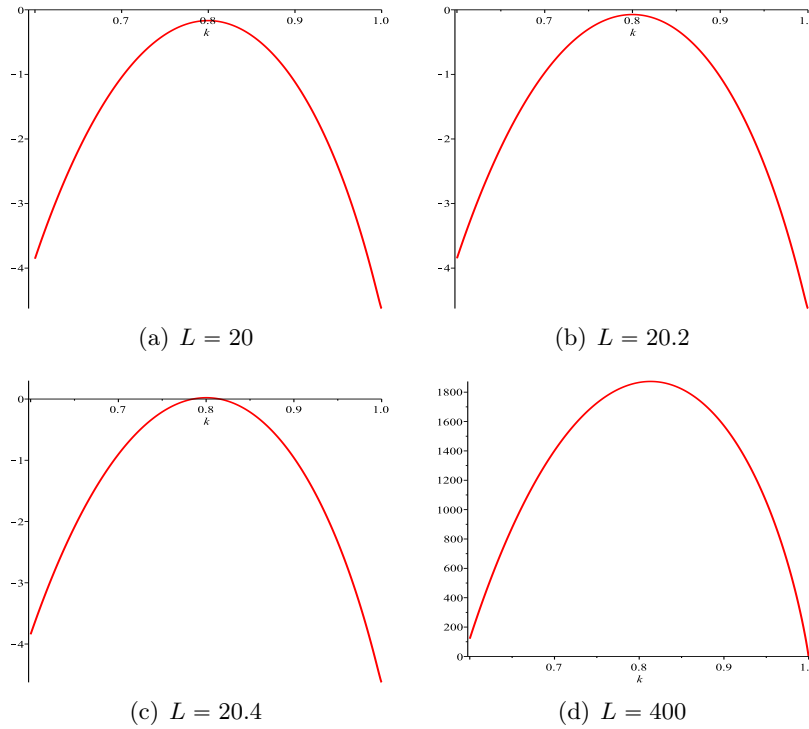


Figura 3.4: Gráfico de d'' para alguns valores de $L > 2\pi$ no intervalo $(k^*, 1)$.

3.3.3 O Resultado de Instabilidade

Seja $L > 2\pi$ fixado. Como anteriormente, consideremos $\varphi = \varphi_c \in H_{\text{per}}^\infty$ a solução com perfil cnoidal dada na Proposição 3.2. Usando argumentos da Subseção 3.3.2 juntamente com o Teorema 3.16, estabelecemos que a diferença $n(\mathcal{L}_e) - p(d''(c)) = 3 - 0 = 3$, é um número ímpar, para todo $c \in (-1, -c^*] \cup [c^*, 1)$. Para o caso $L \in (2\pi, L_0)$, também estabelecemos que a diferença, $n(\mathcal{L}_e) - p(d''(c)) = 3 - 0 = 3$, isto é, a diferença acima também é um número ímpar, para todo $c \in (-c^*, c^*)$. Esses fatos nos colocam em posição de concluir instabilidade linear de ondas periódicas de acordo com [57, Teorema 5.1] e nossa intenção é determinar a instabilidade (não-linear) orbital. Para tanto, usamos o principal resultado de [123], devido a Shatah e Strauss, dado a seguir.

Teorema 3.19. Em um espaço de Banach $Y = (Y, \|\cdot\|_Y)$, consideremos a equação de evolução

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{A}(u) + \mathcal{K}(u), \quad u \in Y, \quad t > 0 \quad (3.56)$$

em que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset Y \rightarrow Y$ é um operador linear e $\mathcal{K} : Y \rightarrow Y$ é uma não-linearidade. Se

- (a) \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo (ou semigrupo fortemente contínuo) em Y ;
- (b) o espectro do operador \mathcal{A} intersecta $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$, ou equivalentemente, $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \neq \emptyset$;
- (c) $\mathcal{K}(0) = 0$, $\mathcal{K} : Y \rightarrow Y$ é contínua, e existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\|\mathcal{K}(u)\|_Y \leq \alpha \|u\|_Y^2$ para todo $\|u\|_Y < \rho$,

então a solução nula é não-linearmente instável.

Demonstração. Veja [123, Teorema 1]. ■

Lembremos que a solução nula de (3.56) é dita não-linearmente estável se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dado $u_0 \in Y$, se $\|u_0\|_Y < \delta$, então a solução $u(t)$ de (3.56), com $u(0) = u_0$, existe para todo $t \geq 0$ e satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_Y < \varepsilon.$$

Caso contrário, é dita não-linearmente instável.

Tendo em mente o conceito de solução não-linearmente estável comentado acima, temos, como consequência do Teorema 3.19, o seguinte resultado de instabilidade orbital no que tange a equação quíntica de Klein-Gordon em (3.1).

Teorema 3.20 (Instabilidade Orbital das Ondas Cnoidais). Seja $L > 2\pi$ fixo. Para $c \in (-1, 1)$, consideremos $\varphi_c = \varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ a solução com perfil cnoidal estabelecida na Proposição 3.2.

- i) Se $c \in (-1, -c^*] \cup [c^*, 1)$, em que $c^* \in (0, 1)$ é dado em (3.50), então a onda periódica $\Phi = (\varphi, c\varphi, 0, 0) \in X_e$ é orbitalmente instável em X_e no sentido da Definição 3.17.
- ii) Para $L \in (2\pi, L_0)$, em que $L_0 \simeq 20.354$, a onda periódica Φ é orbitalmente instável para todo $c \in (-1, 1)$.

Demonstração. Nossa intenção é aplicar o Teorema 3.19. Com esse fim, inicialmente dado $U_0 \in X_e$ consideremos $U \in C([0, T], X_e)$ a solução de (3.1), para algum $T > 0$, com $U(0) = U_0$ (veja Teorema 3.18). Na sequência, consideremos a seguinte perturbação da onda $\Phi = (\varphi, c\varphi, 0, 0)$ sobre o espaço $Y = X_e$ dada por

$$V(t) = \mathbf{R}(-ct)U(t) - \Phi, \quad t \in (0, T) \quad (3.57)$$

em que $c \in (-1, 1)$, de modo que $V_0 := V(0)$. Uma vez que $J^{-1} = -J$, da mesma forma que em [55, Equação (0.3)] podemos ver pelas equações (3.1) e (3.10) que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= J\mathcal{L}V + J^{-1}(E'(\Phi + V) - E'(\Phi) - E''(\Phi)V) \\ &= J\mathcal{L}V + J(E'(\Phi) - E'(\Phi + V) + E''(\Phi)V) \\ &= J\mathcal{L}V + JNV, \end{aligned} \quad (3.58)$$

com

$$\begin{aligned} N(V) &= [E'(\Phi) - E'(\Phi + V)] + E''(\Phi)V \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u)_{xx} - \operatorname{Re}(u) + \operatorname{Re}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - \operatorname{Re}(|\varphi|^4\varphi) \\ -\operatorname{Im}(v) \\ \operatorname{Im}(u)_{xx} - \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) \\ -\operatorname{Re}(v) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(u)_{xx} + \operatorname{Re}(u) - |\varphi|^4 \operatorname{Re}(u) - 4|\varphi|^2\varphi^2 \operatorname{Re}(u) \\ \operatorname{Im}(v) \\ -\operatorname{Im}(u)_{xx} + \operatorname{Im}(u) - |\varphi|^4 \operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Re}(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - \operatorname{Re}(|\varphi|^4\varphi) - |\varphi|^4 \operatorname{Re}(u) - 4|\varphi|^2\varphi^2 \operatorname{Re}(u) \\ 0 \\ \operatorname{Im}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - |\varphi|^4 \operatorname{Im}(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$V = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} v, \operatorname{Im} u, \operatorname{Re} v) \in X_e$, para certas $u, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, e J é a matriz definida em (3.3). Por simplicidade, em (3.58), denotemos por $\mathcal{A} := J\mathcal{L}$ e $\mathcal{K} := JN$. Desse modo,

$$\mathcal{K}(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{Im}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - |\varphi|^4 \operatorname{Im}(u) \\ 0 \\ \operatorname{Re}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - \operatorname{Re}(|\varphi|^4\varphi) - |\varphi|^4 \operatorname{Re}(u) - 4|\varphi|^2\varphi^2 \operatorname{Re}(u) \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

O procedimento é similar ao determinado em [100, Teorema 3.2] e, assim, é suficiente mostrarmos que (3.58) tem a solução nula como uma solução não-linearmente instável. Provemos, então, que os itens **(a)**-**(c)** no Teorema 3.19 ocorre em nosso contexto.

(a) Provemos que $\mathcal{A} = J\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo em X_e . Para tanto, primeiro observemos que podemos escrever $\mathcal{A} = A + P$, em que os operadores $P : X_e \rightarrow X_e$ e $A : D(A) \subset X_e \rightarrow X_e$ são dados por

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(-\partial_x^2 + 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(-\partial_x^2 + 1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^4 & -c \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 5\varphi^4 & c & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $D(A) = H_{\text{per},e}^2 \times H_{\text{per},e}^1 \times H_{\text{per},e}^2 \times H_{\text{per},e}^1$. Já que P é um operador limitado, vemos por [110, Capítulo 3, Teorema 1.1] que é suficiente provarmos que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo em X_e . Notemos que, em consequência de (1.2), temos $\overline{D(A)} = X_e$. Ainda, é fácil ver, devido a periodicidade das funções do espaço H_{per}^2 , que

$$((-\partial_x^2 + 1)f, f)_{L^2} = (-f'', f)_{L^2} + (f, f)_{L^2} = \|f'\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \geq 0, \quad f \in H_{\text{per}}^2$$

isto é, o operador $(-\partial_x^2 + 1) : H_{\text{per}}^2 \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2$ é positivo. Como visto na Subseção 3.2.1, o operador $R = (-\partial_x^2 + 1)$ é auto-adjunto, de modo que $B = (\partial_x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ está bem definido e é auto-adjunto também⁶. Agora, definamos para todos $F = (u_1, u_2, v_1, v_2)$ e $G = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in X_e$,

$$(F, G)_{X_e} := (B(u_1), B(\tilde{u}_1))_{L^2} + (u_2, \tilde{u}_2)_{L^2} + (B(v_1), B(\tilde{v}_1))_{L^2} + (v_2, \tilde{v}_2)_{L^2}. \quad (3.60)$$

É fácil ver que $(\cdot, \cdot)_{X_e} : X_e \times X_e \rightarrow \mathbb{R}$ define um produto interno em X_e que é equivalente ao produto interno natural de X_e .

Por outro lado, dados $V_1 = (p, v, q, w), V_2 = (\tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{q}, \tilde{w}) \in D(A)$ arbitrários, vemos que $A(V_1) = (w, -(\partial_x^2 + 1)q, v, -(\partial_x^2 + 1)p)$ e $A(V_2) = (\tilde{w}, -(\partial_x^2 + 1)\tilde{q}, \tilde{v}, -(\partial_x^2 + 1)\tilde{p})$. Desses fatos e em virtude de B ser auto-adjunto, obtemos

$$\begin{aligned} & (A(V_1), V_2)_{X_e} \\ &= ((\partial_x^2 + 1)q, \tilde{p})_{L^2} + (B(w), B(\tilde{v}))_{L^2} + (-(\partial_x^2 + 1)p, \tilde{q})_{L^2} + (-(\partial_x^2 + 1)v, \tilde{w})_{L^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & (V_1, A(V_2))_{X_e} \\ &= (p, (\partial_x^2 + 1)\tilde{q})_{L^2} + (B(v), B(\tilde{w}))_{L^2} + (Q, -(\partial_x^2 + 1)\tilde{p})_{L^2} + (w, -(\partial_x^2 + 1)\tilde{v})_{L^2} \end{aligned}$$

donde inferimos que $(A(V_1), V_2)_{X_e} + (V_1, A(V_2))_{X_e} = 0$. Disso, da arbitrariedade dos elementos $V_1, V_2 \in D(A)$ e como $\overline{D(A)} = X_e$, vem que A é anti-simétrico, de modo que vale $A = -A^*$, isto é, A é anti-adjunto ou ainda por [129, Lemma 1.6.2] o operador iA é auto-adjunto⁷. Pelo Teorema de Stone ([129, Teorema 3.9.1]), segue que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo em X_e . Dessa forma, pelo comentado inicialmente, $\mathcal{A} = A + P$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo em X_e , como queríamos provar.

(b) Afirmamos que $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{Re}(\lambda) > 0\} \neq \emptyset$. Com efeito, pelos argumentos contidos na Subseção 2.3.2 juntamente com o Teorema 3.16, obtemos que a diferença dada por $n(\mathcal{L}_e) - p(d''(c)) = 3 - 0 = 3$ é um número ímpar, para todo $c \in (-1, -c^*] \cup [c^*, 1)$. Para o caso, $L \in (2\pi, L_0)$ também obtemos que $n(\mathcal{L}_e) - p(d''(c)) = 3$, que é um número ímpar, para todo $c \in (-c^*, c^*)$. Assim, pelo [57, Teorema 5.1] nossa afirmação segue.

(c) O operador $\mathcal{K} = JN : X_e \rightarrow X_e$ está bem definido e, claramente, cumpre $\mathcal{K}(0) = 0$. Provemos agora que existem $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tais que para todo $V \in X_e$ satisfazendo $\|V\|_{X_e} \leq \rho$, temos

$$\|\mathcal{K}(V)\|_{X_e} \leq \alpha \|V\|_{X_e}^2, \quad (3.61)$$

em que $\|\cdot\|_{X_e} : X_e \rightarrow \mathbb{R}$ é a norma natural em X_e , a saber, para $F = (u_1, u_2, v_1, v_2) \in X_e$,

$$\|F\|_{X_e}^2 = \|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2 + \|v_1\|_{H^1}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2.$$

⁶Veja [120, Proposição 5.13]

⁷Consulte [134, Seção 19.8] para detalhes de operadores anti-simétricos e anti-adjuntos.

Para provarmos (3.61), primeiro notemos que se $V = (\operatorname{Re}(u), \operatorname{Im}(v), \operatorname{Im}(u), \operatorname{Re}(v)) \in X_e$ é tal que $\|V\|_{X_e} \leq 1$, então pela definição da norma $\|\cdot\|_{X_e}$ deduzimos que

$$\|\operatorname{Re}(u)\|_{H^1}^2 + \|\operatorname{Im}(v)\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{Im}(u)\|_{H^1}^2 + \|\operatorname{Re}(v)\|_{L^2}^2 = \|V\|_{X_e}^2 \leq 1$$

implicando que

$$\|\operatorname{Re}(u)\|_{H^1}^2, \|\operatorname{Im}(v)\|_{L^2}^2, \|\operatorname{Im}(u)\|_{H^1}^2, \|\operatorname{Re}(v)\|_{L^2}^2 \leq 1 \quad (3.62)$$

Também, pela imersão $H_{\text{per}}^1 \hookrightarrow L_{\text{per}}^4$ (veja (1.4)), temos

$$\|(\operatorname{Re}(u))^2\|_{L^2}^2 = \|\operatorname{Re}(u)\|_{L^4}^4 \leq \alpha_0 \|\operatorname{Re}(u)\|_{H^1}^4 \quad \text{e} \quad \|(\operatorname{Im}(u))^2\|_{L^2}^2 = \|\operatorname{Im}(u)\|_{L^4}^4 \leq \alpha_1 \|\operatorname{Im}(u)\|_{H^1}^4 \quad (3.63)$$

para alguns $\alpha_0, \alpha_1 > 0$. Em contrapartida, levando em conta (3.59), vemos, depois de alguns cálculos, que a segunda coordenada de $\mathcal{K}(V)$ é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - |\varphi|^4 \operatorname{Im}(u) \\ = & 4\varphi^2 (\operatorname{Re}(u))^2 \operatorname{Im}(u) + 4\varphi^3 (\operatorname{Re}(u))^2 \operatorname{Im}(u) + (\operatorname{Re}(u))^4 \operatorname{Im}(u) + (\operatorname{Im}(u))^5 + \\ & + 2(\operatorname{Re}(u))^2 (\operatorname{Im}(u))^3 + 2\varphi^2 (\operatorname{Re}(u))^2 \operatorname{Im}(u) + 2\varphi^2 (\operatorname{Im}(u))^3 + \\ & + 4\varphi (\operatorname{Re}(u))^3 \operatorname{Im}(u) + 4\varphi \operatorname{Re}(u) (\operatorname{Im}(u))^3 \end{aligned} \quad (3.64)$$

enquanto a quarta coordenada de $\mathcal{K}(V)$ é dada por

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - \operatorname{Re}(|\varphi|^4 \varphi) - |\varphi|^4 \operatorname{Re}(u) - 4|\varphi|^2 \varphi^2 \operatorname{Re}(u) \\ = & 4\varphi^3 (\operatorname{Re}(u))^2 + \varphi (\operatorname{Re}(u))^4 + \varphi (\operatorname{Im}(u))^4 + 2\varphi (\operatorname{Re}(u))^2 (\operatorname{Im}(u))^2 + 2\varphi^3 (\operatorname{Re}(u))^3 + \\ & + 2\varphi^3 (\operatorname{Im}(u))^2 + 4\varphi^2 (\operatorname{Re}(u))^3 + 4\varphi^2 \operatorname{Re}(u) (\operatorname{Im}(u))^2 + 4\varphi^2 (\operatorname{Re}(u))^3 + \\ & + 4\varphi^3 (\operatorname{Re}(u))^2 + (\operatorname{Re}(u))^5 + \operatorname{Re}(u) (\operatorname{Im}(u))^4 + 2(\operatorname{Re}(u))^3 (\operatorname{Im}(u))^2 + \\ & + 2\varphi^2 (\operatorname{Re}(u))^3 + 2\varphi (\operatorname{Im}(u))^2 \operatorname{Re}(u) + 4\varphi (\operatorname{Re}(u))^4 + 4\varphi (\operatorname{Re}(u))^2 (\operatorname{Re}(u))^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Dessa forma, da Desigualdade Triangular, de (3.62), (3.63), do fato que todos os termos nas expressões em (3.64) e (3.65) terem uma potência pelo menos dois e do [106, Lema 3.197], obtemos que existem constantes $\alpha_i > 0$, $i \in \{2, 3, \dots, 9\}$, de modo que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(V)\|_{X_e}^2 &= (\|\operatorname{Im}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - |\varphi|^4 \operatorname{Im}(u)\|_{L^2})^2 + \cancel{\|0\|_{H^1}^2}^0 + \cancel{\|0\|_{H^1}^2}^0 + \\ &+ (\|\operatorname{Re}(|\varphi + u|^4(\varphi + u)) - \operatorname{Re}(|\varphi|^4 \varphi) - |\varphi|^4 \operatorname{Re}(u) - 4|\varphi|^2 \varphi^2 \operatorname{Re}(u)\|_{L^2})^2 \\ &\leq (\alpha_2 \|(\operatorname{Re}(u))^2\|_{L^2} + \alpha_3 \|(\operatorname{Im}(u))^2\|_{L^2})^2 + (\alpha_4 \|(\operatorname{Re}(u))^2\|_{L^2} + \alpha_5 \|(\operatorname{Im}(u))^2\|_{L^2})^2 \\ &\leq [\alpha_6 (\|(\operatorname{Re}(u))^2\|_{L^2} + \|(\operatorname{Im}(u))^2\|_{L^2})]^2 + [\alpha_7 (\|(\operatorname{Re}(u))^2\|_{L^2} + \|(\operatorname{Im}(u))^2\|_{L^2})]^2 \\ &\leq \alpha_8 (\|(\operatorname{Re}(u))^2\|_{L^2}^2 + \|(\operatorname{Im}(u))^2\|_{L^2}^2) \\ &\leq \alpha_9 (\|\operatorname{Re}(u)\|_{H^1}^4 + \|\operatorname{Im}(u)\|_{H^1}^4) \\ &\leq \alpha_9 (\|\operatorname{Re}(u)\|_{H^1}^4 + \|\operatorname{Im}(u)\|_{H^1}^4 + \|\operatorname{Re}(v)\|_{L^2}^4 + \|\operatorname{Im}(v)\|_{L^2}^4) \\ &\leq \alpha_9 (\|V\|_{X_e})^4. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\|\mathcal{K}(V)\|_{X_e} \leq \alpha \|V\|_{X_e}^2$, com $\|V\|_{X_e} \leq \rho := 1$ e $\alpha := \sqrt{\alpha_9} > 0$. Nesses termos, (3.61) segue, como desejado.

A partir de **(a)-(c)** e Teorema 3.19 concluímos que a solução nula de (3.57) é não-linearmente instável, ou seja, existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ que satisfaz $\|V(0)\|_{X_e} = \|V_0\|_{X_e} < \delta$ obtemos que a solução $V \in C([0, T], X_e)$ em (3.57), com $V(0) = V_0$, satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|U(t) - \mathbf{R}(ct)\Phi\|_{X_e} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|V(t)\|_{X_e} \geq \varepsilon,$$

em que se $L > 2\pi$, então $c \in (-1, c^*) \cup [c^*, 1)$ e se $L \in (0, L_0)$, então $c \in (-c^*, c^*)$. Portanto, de acordo com a Definição 3.17, temos que Φ é orbitalmente instável. E o teorema está assim provado. ■

Observação 3.21. Notemos que no Teorema 3.20 *a priori* concluímos instabilidade no espaço $X_e \subset X$. Contudo, como instabilidade em um subespaço implica instabilidade no espaço “maior”, temos que onda é instável em X também. Além do mais, a existência de um $L_0 > 0$ tal que obtemos instabilidade para todo $L \in (2\pi, L_0)$, de certa forma, vai de encontro com o determinado no Teorema 2.25 no se refere a equação cúbica de Klein-Gordon, estudo o qual foi feito também levando em conta ondas com perfil cnoidal. □

Observação 3.22. Cabe aqui observarmos que apesar de também obtermos soluções com propriedade de média zero associadas à (3.1), não fizemos para a equação quíntica de Klein-Gordon em (3.1), abordagem semelhante à feita para a equação cúbica de Klein-Gordon, sob espaços de média zero, como apresentada no Capítulo 2. Pretendemos fazer uma abordagem e uma investigação mais aprofundada nesse sentido, para a equação quíntica de Klein-Gordon, em estudos futuros. □

Capítulo 4

Estabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária para a Equação Cúbica de Schrödinger Fracionária

Neste capítulo, apresentamos resultados no que diz respeito a existência, caracterização variacional e estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas da equação de Schrödinger Fracionária

$$iu_t - (-\Delta)^s u + |u|^2 u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (4.1)$$

em que $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de valores complexos e 2π -periódica na variável espacial com $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$. O laplaciano fracionário $(-\Delta)^s : H_{\text{per}}^{2s}(\mathbb{T}) \subset L_{\text{per}}^2(\mathbb{T}) \rightarrow L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})$ é definido como um operador pseudo-diferencial

$$\widehat{(-\Delta)^s g}(n) = |n|^{2s} \widehat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad g \in H_{\text{per}}^{2s}(\mathbb{T}) \quad (4.2)$$

em que $s \in (0, 1]$. Mais detalhes no que tange o laplaciano fracionário podem ser vistas nas definições dadas em (1.7), (1.8), para $L = 2\pi$, ou também em [118].

Antes de começarmos necessitamos dar sentido formal ao conceito de ondas do tipo estacionária.

Definição 4.1 (Onda Estacionária). Uma função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ é dita solução do tipo onda estacionária periódica, com período 2π , de (4.1) se existem $\omega > 0$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e periódica de período 2π de modo que

$$u(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (4.3)$$

solucionando (4.1) no sentido usual.

A equação de Schrödinger fracionária em (4.1) admite as seguintes quantidades conservadas $E, F : H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 - \frac{1}{2} |u|^4 dx \quad (4.4)$$

e

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx. \quad (4.5)$$

De modo que se $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução de (4.1) e a escrevendo da forma $u = p + iq \equiv (p, q)$, para alguns $p, q : \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vemos que (4.1) pode ser visto como um sistema Hamiltoniano abstrato da forma

$$\frac{d}{dt}u(t) = JE'(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

em que

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $E' : H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}) \rightarrow (H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}))'$ denota a derivada de Fréchet da quantidade conservada E em (4.4). Nesse caso, E' é explicitamente dada por

$$E'(u) = \begin{pmatrix} \text{Re}((-\Delta)^s u) - |u|^2 \text{Re}(u) \\ \text{Im}((-\Delta)^s u) - |u|^2 \text{Im}(u) \end{pmatrix}, \quad u \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}). \quad (4.6)$$

Também, a derivada de Fréchet $F' : H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}) \rightarrow (H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}))'$ de F é dada por

$$F'(u) = \begin{pmatrix} \text{Re}(u) \\ \text{Im}(u) \end{pmatrix}, \quad u \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}). \quad (4.7)$$

Suponhamos que (4.1) admita soluções do tipo onda estacionária da forma (4.3), como dada na Definição 3.1. Substituindo o perfil (4.3) em (4.1) obtemos a seguinte equação diferencial com derivada fracionária

$$(-\Delta)^s \varphi + \omega \varphi - \varphi^3 = 0. \quad (4.8)$$

Dessa forma, na seção subsequente nosso objetivo é estabelecer (via caracterização variacional) a existência de solução para a equação diferencial fracionária dada em (4.8) e, conseqüentemente, estabelecer também a existência de soluções ondas estacionárias da equação (4.1), no sentido da Definição 4.1.

4.1 Existência de Ondas Periódicas Positivas

Nesta seção, vamos provar a existência de ondas periódicas que resolvem (4.8) usando três abordagens. Primeiro, usamos caracterizações variacionais por meio de uma minimização de dois funcionais sob uma restrição adequada para obter ondas periódicas pares, positivas e com perfil *single-lobe*. Posteriormente, apresentamos algumas ferramentas relativas à existência de ondas periódicas de pequena amplitude usando a teoria da bifurcação. Além disso, é possível mostrar que tais ondas também é solução para o problema de minimização apresentado na próxima subseção.

4.1.1 Existência de Ondas Periódicas via Minimizadores

Problema Variacional I

Nessa subseção, provaremos a existência de soluções periódicas pares para (4.8) por meio de um problema variacional dado em (25), citado na Introdução. Antes disso, definiremos o conceito de solução com perfil *single-lobe*.

Definição 4.2 (Solução *Single-lobe*). Dizemos que uma onda periódica satisfazendo a equação (4.8) tem perfil *single-lobe* se existe apenas um ponto de máximo e de mínimo em $[-\pi, \pi)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o ponto de máximo ocorre em $x = 0$.

Para $\tau > 0$ fixado, consideremos o conjunto

$$Y_\tau := \{u \in H_{\text{per},e}^s; \|u\|_{L^4}^4 = \tau\}. \quad (4.9)$$

E para $\omega > 0$, definamos o funcional $\mathcal{B}_\omega : H_{\text{per},e}^s \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{B}_\omega(u) := \int_{-\pi}^{\pi} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 + \omega |u|^2 dx. \quad (4.10)$$

Claro que o funcional \mathcal{B}_ω é limitado por baixo, pois

$$\mathcal{B}_\omega(u) \geq 0, \quad u \in H_{\text{per},e}^s. \quad (4.11)$$

Teorema 4.3 (Existência de Minimizador). Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ e $\tau, \omega > 0$ fixados. O problema de minimização

$$\Gamma_\omega := \inf_{u \in Y_\tau} \mathcal{B}_\omega(u) \quad (4.12)$$

tem pelo menos uma solução, ou seja, existe uma função de valores complexos $\Phi \in Y_\tau$ tal que $\mathcal{B}_\omega(\Phi) = \Gamma_\omega$. Além disso, Φ satisfaz

$$(-\Delta)^s \Phi + \omega \Phi - |\Phi|^2 \Phi = 0.$$

Demonstração. Primeiro afirmamos que o funcional \mathcal{B}_ω induz uma norma equivalente em $H_{\text{per},e}^s$, que é a norma induzida de H_{per}^s . De fato, sendo a norma em H_{per}^s dada como em (1.6) e já que o funcional \mathcal{B}_ω pode ser escrito como

$$\mathcal{B}_\omega(u) = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^2 + \omega \|u\|_{L^2}^2$$

é fácil ver que existem $c_0, c_1 > 0$ de modo que

$$0 \leq c_0 \|u\|_{H^s} \leq \sqrt{\mathcal{B}_\omega(u)} \leq c_1 \|u\|_{H^s}, \quad \forall u \in H_{\text{per}}^s \quad (4.13)$$

e nossa afirmação segue. Adicionalmente, $\Gamma_\omega \geq 0$.

A partir da suavidade do funcional \mathcal{B}_ω , em (4.10), podemos considerar uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y_\tau$ de minimizadores tais que

$$\mathcal{B}_\omega(u_n) \rightarrow \Gamma_\omega = \inf_{u \in Y_\tau} \mathcal{B}_\omega(u), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Por (4.14), em particular, temos que a sequência $(\mathcal{B}_\omega(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada¹. Disso e de (4.13) inferimos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_{\text{per},e}^s$ é limitada. Em contrapartida, sendo $H_{\text{per},e}^s$ um espaço de Hilbert, então $H_{\text{per},e}^s$ é um espaço reflexivo². Nesses termos, em virtude da reflexividade de $H_{\text{per},e}^s$, da limitação de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_{\text{per},e}^s$ e de [22, Teorema 3.18] existe $\Phi \in H_{\text{per},e}^s$ de modo que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup \Phi \text{ fraco em } H_{\text{per},e}^s, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Agora, uma vez que $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, a imersão

$$H_{\text{per},e}^s \hookrightarrow L_{\text{per},e}^4 \quad (4.16)$$

é compacta (veja [19, Teorema 2.8] ou [3, Teorema 5.1]). Consequentemente, por (4.15) e [73, Teorema 8.1-7],

$$u_n \rightarrow \Phi \text{ em } L_{\text{per},e}^4. \quad (4.17)$$

Ademais, pela Desigualdade Triangular e de Hölder Generalizada ([22, Observação 2, Seção 4.2]), vale a estimativa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} (u_n^4 - \Phi^4) dx \right| &\leq \int_0^{2\pi} |u_n^4 - \Phi^4| dx \\ &= \int_0^{2\pi} |u_n^2 + \Phi^2| \cdot |u_n^2 - \Phi^2| dx \\ &= \int_0^{2\pi} |u_n^2 + \Phi^2| \cdot |(u_n - \Phi)(u_n + \Phi)| dx \\ &= \int_0^{2\pi} |u_n^3 + u_n^2\Phi + \Phi^2u_n + \Phi^3| \cdot |u_n - \Phi| dx \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} |u_n^3 + u_n^2\Phi + \Phi^2u_n + \Phi^3|^{\frac{4}{3}} dx \right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} |u_n - \Phi|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \|u_n^3 + u_n^2\Phi + \Phi^2u_n + \Phi^3\|_{L^{\frac{4}{3}}} \cdot \|u_n - \Phi\|_{L^4} \\ &\leq \left(\|u_n^3\|_{L^{\frac{4}{3}}} + \|u_n^2\Phi\|_{L^{\frac{4}{3}}} + \|\Phi^2u_n\|_{L^{\frac{4}{3}}} + \|\Phi^3\|_{L^{\frac{4}{3}}} \right) \cdot \|u_n - \Phi\|_{L^4} \\ &\leq \left(\|u_n\|_{L^4}^3 + \|u_n\|_{L^4}^2 \|\Phi\|_{L^4} + \|\Phi\|_{L^4}^2 \|u_n\|_{L^4} + \|\Phi\|_{L^4}^3 \right) \cdot \|u_n - \Phi\|_{L^4} \end{aligned}$$

o que por (4.17) implica $\|\Phi\|_{L^4}^4 = \tau$. Devemos notar que da imersão em (4.16), existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^4} \leq c_2 \|u\|_{H^s}, \quad \forall u \in H_{\text{per}}^s.$$

Desse fato e de (4.13), vem que $\Gamma_\omega > 0$. Além disso, em virtude de \mathcal{B}_ω ser semicontínua inferiormente (pois \mathcal{B}_ω é contínua e por [2, página 43]), temos

$$\mathcal{B}_\omega(\Phi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_\omega(u_n),$$

isto é,

$$\mathcal{B}_\omega(\Phi) \leq \Gamma_\omega. \quad (4.18)$$

¹Veja [73, Lema 1.4-2]

²Vide [22, Proposição 5.1].

Por outro lado, em razão de Φ satisfazer $\|\Phi\|_{L^4}^4 = \tau$, obtemos

$$\mathcal{B}_\omega(\Phi) \geq \Gamma_\omega. \quad (4.19)$$

De (4.18) e (4.19), concluímos

$$\mathcal{B}_\omega(\Phi) = \Gamma_\omega = \inf_{u \in Y_\tau} \mathcal{B}_\omega(u).$$

Em outras palavras, a função $\Phi \in Y_\tau \subset H_{\text{per},e}^s$ é um minimizador do problema (4.12). Notemos que Φ é uma função de valores complexos tal que $\Phi \neq 0$ (já que $\tau > 0$).

Pelo Teorema dos Multiplicadores Lagrange ([14, Teorema 2.6]), existe uma constante $c_3 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(-\Delta)^s \Phi + \omega \Phi = c_3 |\Phi|^2 \Phi$. Um argumento padrão de escala nos permite escolher $c_3 = 1$. De fato, para todo $r > 0$ vemos que

$$\begin{aligned} r^2 \mathcal{B}_\omega(\Phi) = \mathcal{B}_\omega(r\Phi) &= \inf \{ \mathcal{B}_\omega(ru) \in \mathbb{R}_+ ; u \in H_{\text{per},e}^s, \|u\|_{L^4}^4 = \tau \} \\ &= \inf \{ \mathcal{B}_\omega(v) \in \mathbb{R}_+ ; v \in H_{\text{per},e}^s, \|v\|_{L^4}^4 = r^4 \tau \}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Em outras palavras, se Φ soluciona (4.12), então $\Upsilon = r\Phi$ é uma solução do problema de minimização (4.20). Da mesma forma que antes, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange existe $c_4 > 0$ tal que

$$(-\Delta)^s \Upsilon + \omega r \Upsilon = c_4 |\Upsilon|^2 \Upsilon \Rightarrow (-\Delta)^s r\Phi + \omega r\Phi = c_4 r^3 |\Phi|^2 \Phi \Rightarrow (-\Delta)^s \Phi + \omega \Phi - c_4 r^2 |\Phi|^2 \Phi = 0.$$

Escolhendo convenientemente $r = \frac{1}{\sqrt{c_4}} > 0$, determinamos que podemos escolher $c_3 = 1$, como afirmado.

Em resumo, temos que Φ é uma função complexa que é um minimizador periódico de (4.12) e que satisfaz

$$(-\Delta)^s \Phi + \omega \Phi - |\Phi|^2 \Phi = 0. \quad (4.21)$$

■

Observação 4.4 (Minimizador Real). Seja $\Phi \in H_{\text{per},e}^s$ o minimizador obtido pela Proposição 4.3. É fácil verificar que para todo $\vartheta \in \mathbb{R}$, a função $e^{-i\vartheta} \Phi$ satisfaz $\mathcal{B}_\omega(e^{-i\vartheta} \Phi) = \Gamma_\omega$ e, conseqüentemente, (4.21). Para garantir a existência de soluções reais para a equação (4.21), vamos assumir que o minimizador Φ pode ser expresso como $\Phi = e^{i\vartheta_0} \varphi$, para alguma função real par e 2π -periódica $\varphi \in H_{\text{per},e}^s$ e algum $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ adequado. Desse modo, a função $\varphi \in H_{\text{per},e}^s$ satisfaz o problema de minimização

$$\mathcal{B}_\omega(\varphi) = \mathcal{B}_\omega(e^{-i\vartheta_0} \Phi) = \Gamma_\omega \quad (4.22)$$

e a equação

$$(-\Delta)^s \varphi + \omega \varphi - \varphi^3 = 0. \quad (4.23)$$

□

Observação 4.5. No caso particular que $s = 1$, a existência de $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in H_{\text{per},e}^s$ na Observação 4.4 pode ser estabelecida. Com efeito, se $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$, para alguns $\phi_1, \phi_2 \in H_{\text{per},e}^s$, solucionam (4.21), vemos que ϕ_1 e ϕ_2 solucionam as equações

$$-\phi_1'' + \omega\phi_1 - (\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_1 = 0 \quad (4.24)$$

e

$$-\phi_2'' + \omega\phi_2 - (\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_2 = 0. \quad (4.25)$$

Multiplicando (4.24) por ϕ_2 , (4.25) por ϕ_1 e subtraindo ambos os resultados obtemos a equação $-\phi_1''\phi_2 + \phi_2''\phi_1 = 0$, de modo que após uma integração vemos que $-\phi_1'\phi_2 + \phi_2'\phi_1 = C$, em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração. Uma vez que ϕ_1 e ϕ_2 são pares, temos que ϕ_1' e ϕ_2' são ímpares e, por conseguinte, $-\phi_1'\phi_2 + \phi_2'\phi_1$ é uma função ímpar. Dessa forma, em particular, $(-\phi_1'\phi_2 + \phi_2'\phi_1)(0) = 0$ o que implica $C = 0$ e $-\phi_1'\phi_2 + \phi_2'\phi_1 = 0$, isto é, o Wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)$ de ϕ_1 e ϕ_2 é tal que $W(\phi_1, \phi_2) = 0$, o que por consequência de [36, Teorema 6, Capítulo 3] as funções ϕ_1 e ϕ_2 são linearmente dependentes, ou seja, $\phi_1 = r\phi_2$ para algum $r \in \mathbb{R}$, de modo $\Phi = (r + i)\phi_2 = e^{i\vartheta_0}\sqrt{1+r^2}\phi_2$, em que $\vartheta_0 \in (-\pi, \pi]$ é o argumento principal do número $r + i \in \mathbb{C}$. Portanto, para a função real $\varphi := \sqrt{1+r^2}\phi_2$, inferimos que

$$\Phi = e^{i\vartheta_0}\sqrt{1+r^2}\phi_2 = e^{i\vartheta_0}\varphi$$

o que nos permite determinar o resultado desejado. □

Observação 4.6. Seja $s \in (0, 1)$ fixado. Devemos mencionar que se o problema (4.12) está colocado no cenário de comprimento de onda infinito, isto é, \mathbb{R} ao invés de $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ e $\Phi \in H^s(\mathbb{R})$ é um minimizador do problema de minimização

$$\inf \left\{ \tilde{\mathcal{B}}_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 + \omega|u|^2 dx ; u \in H^s(\mathbb{R}), \|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 = \tau \right\}$$

para $\omega, \tau > 0$ fixos, então $|\Phi|$ é também um minimizador. Esse fato pode ser provado, pois se $u \in H^s(\mathbb{R})$ então $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R})}$, que aparece em $\tilde{\mathcal{B}}_\omega(u)$, pode ser caracterizada em termos da bem conhecida *seminorma de Gagliardo*, a saber,

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R})} = C_s \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^s(\mathbb{R}) \quad (4.26)$$

em que $C_s > 0$ é uma constante dependendo apenas de $s \in (0, 1)$, consulte [20, Corolário 1.15] e [42, Seção 2] para detalhes. Usando essa caracterização, é fácil provar que se $\Phi \in H^s(\mathbb{R})$ é minimizador, então $|\Phi|$ também o é (veja [42, Teorema 2.1]), e assim uma solução real $\varphi := |\Phi|$ para (4.8) pode ser considerada sem mais problemas. Até onde sabemos, não temos uma caracterização como em (4.26) no caso periódico. Com efeito, nesse caso, como apresentado em [20, Seção 1.2], até é possível definir (no contexto periódico) a seminorma de Gagliardo como

$$[u]_s := \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}).$$

Entretanto, usando a identidade de Parseval e alguns cálculos adicionais (veja [18, Proposição 1.4]) obtemos a existência de constantes $c_6 > c_5 > 0$ tais que

$$c_5 \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})} \leq [u]_s \leq c_6 \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2_{\text{per}}(\mathbb{T})}, \quad \forall u \in H^s_{\text{per}}(\mathbb{T}). \quad (4.27)$$

A desigualdade em (4.27) não pode ser usada para assegurar que $|\Phi|$ resolve (4.12) se Φ é um minimizador obtido na Proposição 4.3. Em nosso contexto, a suposição $\Phi = e^{i\vartheta_0} \varphi$ na Observação 4.4 parece adequada a fim de obter uma solução periódica real $\varphi = \varphi + i0$ para o problema (4.12).

□

Como consequência da Observação 4.4, temos a existência de uma função real $\varphi \in H^s_{\text{per}}$ satisfazendo a equação (4.23). Contudo, φ pode ser a solução constante, isto é, $\varphi \equiv \sqrt{\omega}$. Nesse caso, o operador $\mathcal{L}_1 : H^{2s}_{\text{per}} \subset L^2_{\text{per}} \rightarrow L^2_{\text{per}}$ dado por $\mathcal{L}_1 = (-\Delta)^s + \omega\varphi - \varphi^3$ se escreve como

$$\mathcal{L}_1 = (-\Delta)^s - 2\omega. \quad (4.28)$$

De acordo com [62, Exemplo 4.4], o núcleo do operador \mathcal{L}_1 , em (4.28), é bidimensional, ou seja, $\text{n}(\mathcal{L}_1) = 2$, de modo que $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [f_1, f_2]$, em que

$$f_1(x) = a_1 \cos(b_1 x) \quad \text{e} \quad f_2(x) = a_2 \sin(b_2 x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

para alguns $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$. Ainda, novamente de acordo com [62, Exemplo 4.4] os autovalores do operador $H = (-\Delta)^s$ são dados por

$$0 < 1 = 1 < 2 = 2 < 3 = 3 < \dots,$$

isto é, se $n \in \mathbb{N}^*$ e $\lambda_n \in \mathbb{R}$ denota o n -ésimo autovalor de H , então $\lambda_{2n} = \lambda_{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, os autovalores de \mathcal{L}_1 , em (4.28), são da forma

$$-2\omega < -2\omega + 1 < -2\omega + 2 < -2\omega + 3 < \dots$$

Notemos que $-2\omega < 0$, para qualquer que seja $\omega > 0$. Também,

$$\omega \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2\omega + 1 \geq 0.$$

Assim, inferimos que

$$\text{n}(\mathcal{L}_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \quad (4.29)$$

Por outro lado, de maneira geral, para φ não-constante é fácil constatar por (4.23) que $\mathcal{L}_1(\varphi') = 0$ de forma que sempre ocorre $\text{n}(\mathcal{L}_1) \leq 1$. Na verdade, $\text{n}(\mathcal{L}_1) \leq 1$ é válido independentemente de φ ser constante ou não, mas sim depende apenas do fato de φ ser um minimizador (veja Seção 4.2). Nesses termos, se $\omega > \frac{1}{2}$, então \mathcal{L}_1 não é um operador positivo e como consequência de (4.29) vemos que $\text{n}(\mathcal{L}_1) > 1$, o que gera uma contradição.

Desses fatos e do estabelecido em (4.29), concluímos que a solução constante $\varphi = \sqrt{\omega}$ é um minimizador de (4.12), para $\omega \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ e para $\omega \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ a solução φ é um minimizador de (4.12) não-constante.

O exposto anteriormente nos permite enunciar o seguinte:

Proposição 4.7 (Existência de Soluções Pares *Single-lobe*). Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ e $\tau, \omega > 0$ fixados. Seja $\varphi \in H_{\text{per},e}^s$ o minimizador periódico dado no Teorema 4.3 e Observação 4.4. Se $\omega \in (0, \frac{1}{2}]$, então φ é a solução constante e se $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$, então φ é uma solução periódica par, suave e tem perfil *single-lobe* no sentido da Definição 4.2.

Demonstração. Primeiramente, por um argumento de *bootstrapping* inferimos que $\varphi \in H_{\text{per},e}^s \cap H_{\text{per}}^\infty$, ou seja, φ é suave (veja [35, Proposição 3.1] ou [97, Proposição 2.4]).

Já estabelecemos que a solução constante $\varphi = \sqrt{\omega}$ é um minimizador de (4.12) para $\omega \in (0, \frac{1}{2}]$ e para $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$ a solução φ é um minimizador não-constante. Adicionalmente, nesse último caso, podemos considerar os rearranjos simétricos³ φ^* associados com φ de modo que $\varphi^* \in Y_\tau$. Com efeito, o rearranjo φ^* é invariante a restrição de Y_τ , uma vez que por [34, Apêndice A], $\|\varphi\|_{L^p} = \|\varphi^*\|_{L^p}$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Ademais, em virtude da Desigualdade Fracionária de Polya-Szegö, em [34, Lemma A.1] (veja também [109, Teorema 1.1]), temos

$$\int_0^{2\pi} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi^*)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi)^2 dx.$$

Logo, por (4.22), obtemos $\mathcal{B}_\omega(\varphi^*) = \Gamma_\omega$, com φ^* sendo simetricamente decrescente longe do ponto de máximo em $x = 0$. Para simplificar a notação, assumimos que $\varphi = \varphi^*$, de forma que φ tem um perfil par *single-lobe*, como de acordo com a Definição 4.2. ■

Problema Variacional II

Nessa subseção, vamos mostrar a existência de minimizadores associados a um problema de minimização diferente ao do apresentado na subseção precedente. A solução obtida por meio dessa minimização não tem muita importância dentro do que nos propomos fazer (veja Observação 4.10 para mais detalhes), porém a passo de completude tal minimização tem sua relevância.

Seja $\tau > 0$ fixado e definamos o conjunto

$$X_\tau := \{u \in H_{\text{per}}^s : \|u\|_{L^2}^2 = \tau\}. \quad (4.30)$$

e consideremos o funcional energia E dado em (2.5). Assim, estabelecemos o seguinte resultado de existência.

Teorema 4.8. Sejam $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\tau > 0$ fixados. O problema de minimização

$$\Lambda = \inf_{u \in X_\tau} E(u), \quad (4.31)$$

tem pelo menos uma solução, isto é, existe uma solução de valores complexos $\Psi \in X_\tau$ tal que $E(\Psi) = \Lambda$. Além disso, para certo $\omega \in \mathbb{R}$, a função Ψ satisfaz

$$(-\Delta)^s \Psi + \omega \Psi - |\Psi|^2 \Psi = 0.$$

³Detalhes em [82, Seção 3.3] ou [34, Apêndice A].

Demonstração. Como $s \in (\frac{1}{2}, 1]$, então em consequência da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, dada no Teorema 4.38, temos, para todo $u \in H_{\text{per}}^s$ e algum $C > 0$, que

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^2 &= 2E(u) + \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4 \\ &\leq 2E(u) + \frac{C}{2} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^{\frac{1}{s}} \|u\|_{L^2}^{4-\frac{1}{s}} + \frac{C}{2} \|u\|_{L^2}^4 \end{aligned} \quad (4.32)$$

De (4.32) e da Desigualdade de Young ([47, Apêndice B.2]), vem que

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^2 \leq 2E(u) + \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^2 + \tilde{C} \cdot \|u\|_{L^2}^{4-\frac{1}{s} \cdot \frac{-2}{s-2}} + \tilde{C} \|u\|_{L^2}^4, \quad (4.33)$$

para algum $\tilde{C} > 0$. Segue de (4.33) que

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^2 \leq 4E(u) + C(\tau), \quad \forall u \in X_\tau$$

em que $C_\tau > 0$ é uma constante dependendo de $\tau > 0$ (fixo). Dessa forma, inferimos que

$$0 \leq \|u\|_{H^s}^2 \leq 4E(u) + \tilde{C}_\tau, \quad (4.34)$$

para certa $\tilde{C}_\tau > 0$. Logo,

$$E(u) \geq -\frac{1}{4} \tilde{C}_\tau, \quad \forall u \in X_\tau,$$

ou seja, $E|_{X_\tau}$ é limitado por baixo. Adicionalmente, uma vez que E é um funcional suave em H_{per}^s , podemos considerar uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X_\tau$ constituída de minimizadores satisfazendo

$$E(v_n) \longrightarrow \inf_{u \in X_\tau} E(u) = \Lambda, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Donde, $(E(v_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência limitada⁴. Disso e por (4.34) obtemos que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em H_{per}^s . Usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 4.3, obtemos a existência de uma função complexa $\Psi \in X_\tau \subset H_{\text{per}}^s$ tal que Ψ é um minimizador do problema (4.31). Notemos que sendo $\tau > 0$, então $\Psi \neq 0$.

Na sequência, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe uma constante $c_3 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$(-\Delta)^s \Psi - |\Psi|^2 \Psi = c_3 \Psi. \quad (4.35)$$

Definindo $\omega := -c_3 \in \mathbb{R}$, concluímos que Ψ satisfaz

$$(-\Delta)^s \Psi + \omega \Psi - |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (4.36)$$

■

Observação 4.9. Similarmente a Observação 4.4 e Proposição 4.7, podemos considerar uma solução, para a equação (4.36), de valores reais $\psi \in H_{\text{per,e}}^s$ satisfazendo

$$(-\Delta)^s \psi + \omega \psi - \psi^3 = 0. \quad (4.37)$$

Além do mais, usando argumentos análogos da Proposição 4.7 podemos estabelecer que a função ψ é uma solução suave, periódica e par de (4.37) e tem um perfil *single-lobe* no sentido da Definição 4.2. \square

⁴Veja [73, Lema 1.4-2]

Observação 4.10. É importante salientarmos as principais diferenças entre o Problema Variacional I e o Problema Variacional II. A primeira é que no I concluímos que: dado $\omega > 0$ obtemos uma solução $\varphi \in H_{\text{per}}^s$ que solucionam (4.23), para $s \in (\frac{1}{4}, 1]$. Por sua vez no II estabelecemos que: existem $\omega \in \mathbb{R}$ e $\psi \in H_{\text{per}}^s$ que solucionam (4.37), para $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ de modo que não conseguimos determinar o sinal da constante $\omega \in \mathbb{R}$. A segunda, diz respeito ao fato de que no I determinamos uma solução para valores de $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, enquanto no II apenas para valores $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Dessa forma, como nosso intuito mais adiante é estipularmos a existência de uma curva de soluções de (4.23), para $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, em termos da velocidade da onda $\omega > \frac{1}{2}$ vamos trabalhar apenas com as soluções dadas pelo Problema Variacional I determinadas em Proposição 4.7. \square

4.1.2 Existência de Ondas de Pequena Amplitude

A existência e fórmulas convenientes para as ondas periódicas de pequena amplitude associadas à equação (4.8) serão mostradas nesta subseção. Mostramos que a teoria da bifurcação local usada para determinar a existência de ondas de pequena amplitude pode ser estendida e as soluções locais podem ser consideradas globais para um $\omega > \frac{1}{2}$ fixo. Este fato é uma característica muito importante em nosso contexto, uma vez que pode ser usado como uma forma alternativa para provar a existência de soluções pares periódicas (não necessariamente tendo um perfil *single-lobe*) para a equação (4.8) quando $s \in (0, 1)$. Para isso, usamos a teoria contida em [30, Capítulos 8 e 9].

Em primeiro lugar, vamos provar a existência de ondas periódicas de pequena amplitude. Para, $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ definamos a aplicação⁵ $F : H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow L_{\text{per},e}^2$ por

$$F(g, \omega) = (-\Delta)^s g + \omega g - g^3. \quad (4.38)$$

Temos que F é suave em ambas as variáveis. Além disso, $F(g, \omega) = 0$ se, e somente se, $g \in H_{\text{per},e}^{2s}$ soluciona

$$(-\Delta)^s g + \omega g - g^3 = 0, \quad (4.39)$$

com frequência da onda correspondente $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

Dado um par $(g, \omega) \in D(F)$, a derivada de Fréchet $D_g F(g, \omega) : H_{\text{per},e}^{2s} \subset L_{\text{per},e}^2 \rightarrow L_{\text{per},e}^2$ associada a F com respeito à primeira variável é então dada por

$$D_g F(g, \omega)(f) = ((-\Delta)^s + \omega - 3g^2)f. \quad (4.40)$$

Consideremos $\omega_0 > 0$ fixado. No ponto $(\sqrt{\omega_0}, \omega_0) \in D(F)$, obtemos que

$$D_g F(\sqrt{\omega_0}, \omega_0) = (-\Delta)^s + \omega_0 - 3(\sqrt{\omega_0})^2 = (-\Delta)^s - 2\omega_0.$$

Desse modo, o núcleo não trivial de $D_g F(\sqrt{\omega_0}, \omega_0)$ é determinado pelas funções $h \in H_{\text{per},e}^{2s}$ que satisfazem $(-\Delta)^s h - 2\omega_0 h = 0$, ou seja,

$$\widehat{(-\Delta)^s h}(k) - 2\omega_0 \widehat{h}(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

⁵Observemos que F fica bem definida pois, para $s' = \frac{1}{6}$, vemos que $s' < \frac{1}{2}$ e se $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, então $2s > s'$. E por consequência de [13, Teorema 4.2], (1.2) e (1.4), obtemos as imersões $H_{\text{per}}^{2s} \hookrightarrow H_{\text{per}}^{s'} \hookrightarrow L_{\text{per}}^6 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$.

ou equivalentemente, por (1.8),

$$\widehat{h}(k)(-2\omega_0 + |k|^{2s}) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Assim, $D_g F(\sqrt{\omega_0}, \omega_0)$ possui núcleo unidimensional se, e somente se, $\omega_0 = \frac{|k|^{2s}}{2}$, para algum $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, e nesse caso $D_g F(\sqrt{\omega_0}, \omega_0) = [\tilde{\varphi}_k]$, em que $\tilde{\varphi}_k(x) := \cos(kx)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como em [28, Teorema 5.1], podemos aplicar o Teorema de Crandall-Rabinowitz ([28, Teorema 8.3.1] ou [74, Teorema 5.1]) a fim de garantir a existência de um intervalo $I \subset (0, \infty)$, de modo que $\omega_0 \in I$, uma bola $B(0, r) \subset H_{\text{per},e}^{2s}$, para algum $r > 0$, e uma única aplicação suave

$$\omega \in I \mapsto \varphi := \varphi_\omega \in B(0, r) \subset H_{\text{per},e}^{2s}$$

tal que $F(\varphi_\omega, \omega) = 0$, para todo $\omega \in I$, e também $\varphi \in B(0, r)$. Em outras palavras, toda solução $(g, \omega) \in D(F)$ de $F(g, \omega) = 0$ tem a forma (φ_ω, ω) , $\omega \in I$.

Agora, para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ o ponto $(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k) \in H_{\text{per},e}^{2s} \times (0, \infty)$, em que $\tilde{\omega}_k := \frac{|k|^{2s}}{2}$, é um ponto de bifurcação. Além disso, existe $a_0 > 0$ e uma *curva local de bifurcação* da forma

$$a \in (0, a_0) \mapsto (\varphi_{k,a}, \omega_{k,a}) \in H_{\text{per},e}^{2s} \times (0, \infty) \quad (4.41)$$

passando por $(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k)$ constituída por soluções $\frac{2\pi}{k}$ -periódicas pares da equação (4.39). Em particular, $\omega_{k,0} = \tilde{\omega}_k$, $D_a \varphi_{k,0} = \tilde{\varphi}_k$, com $\tilde{\varphi}_k(x) = \cos(kx)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. E todas as soluções $(g, \omega) \in D(F)$ de $F(g, \omega) = 0$ em uma vizinhança do ponto de bifurcação $(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k)$ pertencem a curva dada em (4.41).

Na sequência, nosso objetivo é mostrar que a curva local de bifurcação em (4.41) se estende a uma curva global suave. Para tanto, inicialmente, definamos o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(\phi, \omega) \in U ; F(\phi, \omega) = 0\}, \quad (4.42)$$

em que $U := D(F)$. E também, $\mathcal{X} = H_{\text{per},e}^{2s}$ e $\mathcal{Y} = L_{\text{per},e}^2$.

Seja $(\chi, \omega) \in \mathcal{X} \times (\frac{1}{2}, \infty)$ uma solução de $F(\chi, \omega) = 0$. Assim, a equação

$$\mathcal{L}_{1|\mathcal{X}}(\psi) \equiv DF_\chi(\chi, \omega)(\psi) = ((-\Delta)^s - 3\chi^2)\psi + \omega\psi = 0, \quad \psi \in \mathcal{X}$$

tem duas soluções linearmente independentes de modo que no máximo uma delas pertence à \mathcal{X} (veja [34, Teorema 3.12]). Se não há soluções em $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, então quer dizer que o operador $\mathcal{L}_{1|\mathcal{X}} : \mathcal{X} \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ tem núcleo trivial, ou seja, $\text{Ker}(\mathcal{L}_{1|\mathcal{X}}) = \{0\}$. Dessa forma, sendo $\mathcal{L}_{1|\mathcal{X}}$ fechado e possuindo imagem fechada⁶, concluímos de [22, Teorema 2.20] que $\text{R}(\mathcal{L}_{1|\mathcal{X}}) = \text{Ker}(\mathcal{L}_{1|\mathcal{X}})^\perp = \mathcal{Y}$. Nesse caso, o problema

$$((-\Delta)^s + \omega - 3\chi^2)\psi = f \quad (4.43)$$

tem uma solução $\psi \in \mathcal{X}$, para todo $f \in \mathcal{Y}$.

⁶Veja justificativas desses fatos na Seção 4.2.

Se, por outro lado, tem uma solução $\Theta \in \mathcal{X}$, então pela Alternativa de Fredholm Generalizada ([133, Apêndice, Teorema 39a) e 39b)]) a equação (4.43) tem uma solução se, e somente se

$$(\Theta, f)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \Theta(x)f(x) dx = 0, \quad \forall f \in \mathcal{Y}.$$

Portanto, para $(g, \omega) \in D(F)$, a derivada $DF_g(g, \omega)$ em (4.40) é um operador de Fredholm de índice zero (para detalhes e propriedades desse tipo de operador veja [46, Capítulo I, Definição 3.1 e Teorema 3.1]).

Em seguida, vamos provar que todo limitado e fechado de \mathcal{S} , definido em (4.42), é compacto em $H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, +\infty)$. Para tanto, definamos $\tilde{F} : H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow L_{\text{per},e}^2$ por

$$\tilde{F}(g, \omega) = ((-\Delta)^s + \omega)^{-1}g^3.$$

Como $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, vemos que \tilde{F} está bem definida uma vez que $H_{\text{per},e}^{2s}$ é uma Álgebra de Banach (veja [106, Teorema 3.200]), também $(g, \omega) \in \mathcal{S}$ se, e somente se, $\tilde{F}(g, \omega) = g$ e mais precisamente \tilde{F} leva $H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, +\infty)$ em $H_{\text{per},e}^{4s}$.⁷ A imersão compacta $H_{\text{per},e}^{4s} \hookrightarrow H_{\text{per},e}^{2s}$ (veja (1.2)) nos mostra ainda que \tilde{F} leva conjunto fechados e limitados de $H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, \infty)$ em $H_{\text{per},e}^{2s}$. Dessa forma, dado qualquer $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, \infty)$ fechado e limitado, da definição de operador compacto, obtemos⁸ que o conjunto imagem $\tilde{F}(\mathcal{R}) = \{g \in H_{\text{per},e}^{4s}; (g, \omega) \in \mathcal{R}\}$ é relativamente compacto em $H_{\text{per},e}^{2s}$, isto é, $\overline{\tilde{F}(\mathcal{R})} \subset H_{\text{per},e}^{2s}$ é compacto. Agora, como \mathcal{R} é fechado e \tilde{F} contínuo, então $\tilde{F}(\mathcal{R}) = \tilde{F}(\overline{\mathcal{R}}) \subset \overline{\tilde{F}(\mathcal{R})}$ (veja [93, Teorema 18.1]). Assim, dada uma sequência $(g_n, \omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ arbitrária, obtemos que $(\tilde{F}(g_n, \omega_n))_{n \in \mathbb{N}} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente. Por outro lado, $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também possui subsequência convergente, pois é uma sequência de números reais limitada. Logo, $(g_n, \omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ possui subsequência convergente e, desse modo, \mathcal{R} é compacto. Da arbitrariedade de $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ segue que todo limitado e fechado de \mathcal{S} é compacto, como requerido.

As informações acima e [30, Teorema 9.1.1], como em [28, Teorema 5.4], nos permitem *estender globalmente* a curva local de bifurcação em (4.41). Sendo mais preciso, existe uma aplicação contínua

$$\omega \in \left(-\frac{|k|^{2s}}{2}, \infty \right) \mapsto (\varphi_{k,\omega}, \omega_{k,\omega}) \in H_{\text{per},e}^{2s} \times (0, \infty), \quad (4.44)$$

para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de soluções de

$$F(g, \omega) = (-\Delta)^s g + \omega g - g^3 = 0, \quad (g, \omega) \in H_{\text{per},e}^{2s} \times (0, \infty).$$

A seguir, usaremos o Método de Redução de Lyapunov-Schmidt (veja, por exemplo [69, Teorema I.2.3]) com o objetivo de obtermos a expansão de Stokes explícita para $\omega > \frac{1}{2}$ suficientemente pequeno e o caso simples $k = 1$.

⁷Basta notarmos que $T := (-\Delta)^s + \omega : H_{\text{per},e}^{2s} \subset L_{\text{per},e}^2 \rightarrow L_{\text{per},e}^2$ é um operador invertível de modo que para $g \in D(T)$ satisfazer $T(g) \in H_{\text{per},e}^{2s}$ devemos tomar $g \in H_{\text{per},e}^{4s} \subset D(T)$.

⁸Visto que operador contínuo mapeia limitado em limitado (veja [88, Teorema 4.4])

Seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixado e consideremos a decomposição $H_{\text{per},e}^{2s} = K \oplus L$, em que

$$K := \text{Ker}(D_g F(\sqrt{\omega_0}, \omega)) = [\tilde{\varphi}_k] \quad \text{e} \quad L := [\tilde{\varphi}_l; l \in \mathbb{N}, l \neq k], \quad (4.45)$$

com $\tilde{\varphi}_l := \cos(lx)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{N}$. Tal decomposição ocorre pois, assumindo (sem perda de generalidade) que $\|\tilde{\varphi}_k\|_{L^2} = 1$, é possível mostrar que o operador $\Pi_K : H_{\text{per},e}^{2s} \rightarrow K$ dado por $\Pi_K(f) = \tilde{\varphi}_k(f, \tilde{\varphi}_k)_{L^2}$, é idempotente, isto é, $\Pi_K^2 = \Pi_K$ e, logo, Π_K é a projeção no espaço K de modo que $\text{R}(\Pi_K) = K$ e $\text{Ker}(\Pi_K) = L$ (mais detalhes veja [65, Capítulo I, Seção 3.4]).

O exposto nos permite estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 4.11 (Existência de Onda de Pequena Amplitude). Para todo $s \in (0, 1]$ existe $a_0 > 0$ tal que para todo $a \in (0, a_0)$ existe uma solução $\varphi \in H_{\text{per},e}^{2s}$ para a equação (4.8) dadas pelas seguintes expansões de Stokes:

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + a\varphi_1(x) + a^2\varphi_2(x) + \mathcal{O}(a^3), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.46)$$

em que

$$\varphi_1(x) = \cos(x), \quad \varphi_2(x) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2(2^{2s}-1)} \cos(2x)$$

e a frequência da onda é determinada por

$$\omega = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}a^2 \left(1 + \frac{1}{2(2^{2s}-1)}\right) + \mathcal{O}(a^4). \quad (4.47)$$

Além disso, o par $(\varphi, \omega) \in H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, \infty)$ é global em termos do parâmetro $\omega > \frac{1}{2}$ e solucionam a equação (4.8).

Demonstração. A primeira parte da proposição já foi determinada em (4.41) considerando $k = 1$. Para obter a expressão em (4.46) procederemos de forma similar a [28, Teorema 5.4]. Seja $k \in \mathbb{N}$ fixado e consideremos a decomposição dada (4.45). O Método de Redução de Lyapunov-Schmidt reduz o problema $F(g, \omega) = 0$ para $(g, \omega) \in U_1 \times V_1$ em um problema unidimensional equivalente dado por

$$\Upsilon(a\tilde{\varphi}_k, \omega) := \Pi_K F(\sqrt{\tilde{\omega}_k} + a\tilde{\varphi}_k + \phi(a\tilde{\varphi}_k, \omega), \omega) = 0, \quad (4.48)$$

em que $U_1 \times V_1 \subset H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, +\infty)$ é uma vizinhança do ponto de bifurcação $(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k)$ e $\phi : U_1 \times V_1 \subset K \times (0, +\infty) \rightarrow L$ é uma função suave, em que $K, L \subset H_{\text{per},e}^{2s}$ são definidos em (4.45). Além disso, a partir de [30, Teorema 8.2.1], temos que $\phi(0, \tilde{\omega}_k) = D_g \phi(0, \tilde{\omega}_k) = 0$. Assim, resolvendo o problema (4.48) obtemos uma solução $g = \sqrt{\tilde{\omega}_k} + a\tilde{\varphi}_k + \phi(a\tilde{\varphi}_k, \omega)$ para o problema $F(g, \omega) = 0$. Então, vemos que

$$\varphi_{k,a} := \sqrt{\tilde{\omega}_k} + a\tilde{\varphi}_k + \phi(a\tilde{\varphi}_k, \omega_{k,a}),$$

é tal que $\varphi_{k,0} = \sqrt{\tilde{\omega}_k}$ and $\dot{\varphi}_k(0) = \tilde{\varphi}_k$, em que $\dot{\cdot} := \frac{d}{da}$. Dessa forma,

$$\dot{\varphi}_{k,a} = \tilde{\varphi}_k + D_g \phi(a\tilde{\varphi}_k, \omega_{k,a})\tilde{\varphi}_k + D_\omega \phi(a\tilde{\varphi}_k, \omega_{k,a})\dot{\omega}_{k,a}. \quad (4.49)$$

Tomando a derivada em (4.49) no ponto $a = 0$, vemos que

$$\ddot{\varphi}_{k,0} = D_{gg}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] + 2D_{g\omega}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \dot{\omega}_{k,0}] + D_{\omega\omega}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\dot{\omega}_{k,0}, \dot{\omega}_{k,0}] + D_\omega \phi(0, \tilde{\omega}_k) \dot{\omega}_{k,0}.$$

Podemos obter $\dot{\omega}_{k,0}$ por meio das fórmulas de bifurcação contidas em [69, Seção I6], de modo que é possível explicitarmos $\dot{\omega}_{k,0}$ como

$$\dot{\omega}_{k,0} = -\frac{1}{2} \frac{(D_{gg}^2 \mathbf{F}(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k], \tilde{\varphi}_k)_{L^2}}{(D_{g\omega}^2 \mathbf{F}(0, \tilde{\omega}_k)\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k)_{L^2}}.$$

Porém, conseguimos obter que $D_{gg}^2 \mathbf{F}(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] = 0$ e $D_{g\omega}^2 \mathbf{F}(0, \tilde{\omega}_k)\tilde{\varphi}_k = 1$, o que implica em $\dot{\omega}_{k,0} = 0$. Logo,

$$\ddot{\varphi}_{k,0} = D_{gg}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k].$$

Derivando (com respeito a g) a igualdade $(1 - \Pi_K)\mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k} + g + \phi(g, \omega), \omega) = 0$ obtemos

$$(1 - \Pi_K)D_g \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k} + g + \phi(g, \omega), \omega)[\tilde{\varphi}_k + D_g \phi(g, \omega)\tilde{\varphi}_k] = 0.$$

Derivando a relação acima (novamente com respeito a g) e aplicando no ponto $(0, \tilde{\omega}_k)$, segue que

$$(1 - \Pi_K)D_{gg}^2 \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] + (1 - \Pi_K)D_g \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k)D_{gg}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] = 0.$$

Agora, levando em conta que $D_g \mathbf{F}(0, \sqrt{\tilde{\omega}_k}) : L \rightarrow \mathbb{R}(D_g \mathbf{F}(0, \sqrt{\tilde{\omega}_k}))$ define um isomorfismo em L (veja [69, Seção I6]) e como $(1 - \Pi_K) : L_{\text{per}}^2 \rightarrow K^\perp$ implica

$$(1 - \Pi_K)D_g \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k) = D_g \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k),$$

determinamos que

$$D_{gg}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] = - \left(D_g \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k) \right)^{-1} (1 - \Pi_K)D_{gg}^2 \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k].$$

Notemos que sendo $D_{gg}^2 \mathbf{F}(g, \omega) = -6g$, inferimos que $D_{gg}^2 \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] = -6\sqrt{\tilde{\omega}_k}(\tilde{\varphi}_k)^2$ e donde

$$D_{gg}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] = 6\sqrt{\tilde{\omega}_k} \left(D_g \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k) \right)^{-1} (1 - \Pi_K)(\tilde{\varphi}_k)^2.$$

Procedendo de modo análogo a [28, Equação (5.8)], estabelecemos que

$$D_{gg}^2 \phi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] = 3\sqrt{\tilde{\omega}_k} \left(D_g \mathbf{F}(\sqrt{\tilde{\omega}_k}, \tilde{\omega}_k) \right)^{-1} (1 + v_{2k}),$$

em que $v_{2k}(x) = \cos(2kx)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. E, conseqüentemente,

$$D_{gg}^2 \varphi(0, \tilde{\omega}_k)[\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_k] = 3\sqrt{\tilde{\omega}_k} \left(\frac{1}{-2\tilde{\omega}_k} + \frac{v_{2k}}{-2\tilde{\omega}_k + |2k|^{2s}} \right).$$

Uma vez que $\tilde{\omega}_k = \frac{|k|^{2s}}{2}$, deduzimos que

$$\ddot{\varphi}_{k,0}(x) = -\frac{3\sqrt{2}|k|^s}{2} \left(\frac{1}{|k|^{2s}} + \frac{v_{2k}}{|k|^{2s} - |2k|^{2s}} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, determinamos a seguinte expansão

$$\varphi_{k,a}(x) = \frac{\sqrt{2}|k|^s}{2} + a \cos(kx) + \frac{a^2}{2} \left(-\frac{3\sqrt{2}|k|^s}{2} \left(\frac{1}{|k|^{2s}} + \frac{\cos(2kx)}{|k|^{2s} - |2k|^{2s}} \right) \right) + \mathcal{O}(a^3), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.50)$$

Considerando, em particular, $k = 1$ em (4.50) e $\varphi := \varphi_{1,a}$, estabelecemos a expressão para $\varphi \in H_{\text{per},e}^{2s}$ como dada em (4.46). Adicionalmente, substituindo (4.46) em (4.8), obtemos a expressão para $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$ como em (4.47).

Finalmente, a frequência da onda dada em (4.47) é não constante, então usando a estensão global de curvas de bifurcação dada em (4.44) podemos estabelecer a existência de uma aplicação contínua

$$\omega \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \longmapsto \varphi_\omega \in H_{\text{per},e}^{2s} \quad (4.51)$$

em que $\varphi_\omega \in H_{\text{per},e}^{2s}$ resolve a equação (4.8), para cada $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$. ■

Na sequência, nosso objetivo é mostrar que a onda de Stokes dada em (4.46) minimiza (4.12), para $\omega > \frac{1}{2}$ suficientemente pequeno. Para tanto, primeiro precisamos do seguinte lema.

Lema 4.12. Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, $\omega > 0$ e $\tau > 0$ fixados. Se $\varphi \in Y_\tau$ é um minimizador de (4.12) dado no Teorema 4.3 e Observação 4.4, ou seja, $\Gamma(\omega) \equiv \Gamma_\omega = \mathcal{B}_\omega(\varphi)$, então Γ_ω é contínua em $\omega > 0$ e $\Gamma_\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$, quando $\omega \rightarrow \frac{1}{2}$.

Demonstração. Seja $u \in Y_\tau$ fixado. Para todo $\tilde{\omega} > \omega > 0$, vemos que

$$\mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(u) - \mathcal{B}_\omega(u) = (\tilde{\omega} - \omega) \|u\|_{L^2}^2 \geq 0$$

e, assim,

$$0 \leq \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(u) - \mathcal{B}_\omega(u) = (\tilde{\omega} - \omega) \|u\|_{L^2}^2 \leq (\tilde{\omega} - \omega) \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^2 + (\tilde{\omega} - \omega) \|u\|_{L^2}^2 = (\tilde{\omega} - \omega) \|u\|_{H^s}^2.$$

Seja $\tilde{\varphi} \in Y_\tau$ que cumpre $\mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) = \Gamma_{\tilde{\omega}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{\omega}} - \Gamma_\omega = \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) - \mathcal{B}_\omega(\varphi) &= \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) - \mathcal{B}_\omega(\tilde{\varphi}) + \overbrace{\mathcal{B}_\omega(\tilde{\varphi}) - \mathcal{B}_\omega(\varphi)}^{\geq 0} \\ &\geq \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) - \mathcal{B}_\omega(\tilde{\varphi}) \\ &= (\tilde{\omega} - \omega) \cdot \|\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{\omega}} - \Gamma_\omega = \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) - \mathcal{B}_\omega(\varphi) &= \overbrace{\mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) - \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\varphi)}^{\leq 0} + \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\varphi) - \mathcal{B}_\omega(\varphi) \\ &\leq \mathcal{B}_{\tilde{\omega}}(\varphi) - \mathcal{B}_\omega(\varphi) \\ &\leq (\tilde{\omega} - \omega) \cdot \|\varphi\|_{H^s}^2, \end{aligned}$$

ou seja, $0 \leq \Gamma_{\tilde{\omega}} - \Gamma_{\omega} \leq (\tilde{\omega} - \omega) \|\varphi\|_{H^s}^2$. Donde, pelo Teorema do Sanduíche⁹, $\Gamma_{\tilde{\omega}} \rightarrow \Gamma_{\omega}$ quando $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$. Em outras palavras, Γ_{ω} é contínua para $\omega > 0$.

Para a segunda parte da demonstração, primeiro notemos que em virtude de que para $\omega \in (0, \frac{1}{2}]$ a solução φ é constante, com $\varphi \equiv \sqrt{\omega}$, temos que

$$\Gamma(\omega) = \mathcal{B}_{\omega}(\varphi) = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi\|_{L^2}^2 + \omega\|\varphi\|_{L^2}^2 \rightarrow 0,$$

quando $\omega \rightarrow 0$. Desse fato e como

$$\varphi \rightarrow \sqrt{\omega}, \quad \text{quando } \omega \rightarrow \frac{1}{2} \quad (4.52)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \frac{1}{2}} \Gamma(\omega) &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varrho\right) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \mathcal{B}_{(\varrho + \frac{1}{2})}(\varphi) \\ &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[\Gamma(\varrho) + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2 \right] \\ &= 0 + \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|_{L^2}^2 = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\Gamma_{\omega} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, quando $\omega \rightarrow \frac{1}{2}$. ■

Observação 4.13. Sendo $\varphi \in H_{\text{per},e}^{\infty}$ o minimizador de (4.12) dado no Teorema 4.3 e Observação 4.4, ou seja, $\Gamma_{\omega} = \mathcal{B}_{\omega}(\varphi)$, então sabemos pelo Lema 4.12 que Γ_{ω} é contínua em $\omega > 0$ e $\Gamma_{\omega} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, quando $\omega \rightarrow \frac{1}{2}$. Também, empregado os mesmo argumentos de [97, Proposição 2.6], para qualquer $a \in (0, a_0)$ a expansão de Stokes dada em (4.46) é localmente única, par e é uma solução *single-lobe* de (4.8). □

Esses fatos nos colocam em posição de concluir o seguinte resultado.

Corolário 4.14. Se $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, então existe $\omega_0 > \frac{1}{2}$ tal que a solução de (4.8) para todo $\omega \in (\frac{1}{2}, \omega_0)$ com perfil *single-lobe* $\varphi \in H_{\text{per}}^{\infty}$ dada na Proposição 4.7 é dada pela expansão de Stokes em (4.46).

Demonstração. Inicialmente, notemos que por (4.47), temos $a \rightarrow 0$ quando $\omega \rightarrow \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, por (4.46) obtemos $\|\varphi\|_{L^2}^2 \rightarrow \pi$, quando $\omega \rightarrow \frac{1}{2}$.

Por outro lado, se $\varphi \in H_{\text{per},e}^{\infty}$ é o minimizador descrito no Lema 4.12 (e usando a mesma notação da expansão de Stokes de (4.46)), então

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \rightarrow \pi, \quad \text{quando } \omega \rightarrow \frac{1}{2}.$$

De fato, pelo Lema 4.12,

$$\mathcal{B}_{\omega}(\varphi) = \int_0^{2\pi} \left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi \right)^2 dx + \omega \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx \rightarrow \pi \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{quando } \omega \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (4.53)$$

⁹[85, Teorema 4, Capítulo V]

Contudo, em razão de (4.52) é fácil ver

$$\int_0^{2\pi} \left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi \right)^2 dx \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \omega \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Esse fato juntamente com (4.53), forçosamente implicam

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx \longrightarrow \pi, \quad \text{quando } \omega \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ainda, como a expansão de Stokes em (4.46) é par, tem perfil *single-lobe* e é localmente única (veja Observação 4.13), tendo em vista (4.47) e que $a \in (0, a_0)$, concluímos que a família de minimizadores $\{\varphi = \varphi_\omega \in H_{\text{per}}^\infty; \omega > \frac{1}{2}\}$, dadas no Teorema 4.3 e Observação 4.4, e a expansão de ondas de pequena amplitude coincidem, quando $\omega \in (\frac{1}{2}, \omega_0)$ para algum $\omega_0 > \frac{1}{2}$ suficientemente pequeno. ■

Do Corolário 4.14 segue que a onda de pequena amplitude dada pela expansão de Stokes em (4.46) além de ser solução de (4.8) também minimiza (4.12), para todo $\omega \in (0, \omega_0)$. Em outras palavras:

Corolário 4.15. Seja $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ fixado. A onda de Stokes $\varphi \in H_{\text{per},e}^{2s}$ dada em (4.46) é uma solução do problema de minimização (4.12), quando $\omega \in (\frac{1}{2}, \omega_0)$, para algum $\omega_0 > \frac{1}{2}$ suficientemente pequeno.

Observação 4.16. Há um outro modo de estabelecer um perfil explícito para ondas de pequena amplitude. Na verdade, usando a mesma argumentação teórica usada para estabelecer a existência local de soluções dada na Proposição 4.11, que podem ser estendidas globalmente, e também usando argumentos similares aos contidos em [96, Seção 5] podemos enunciar a seguinte proposição. □

Proposição 4.17. Seja $s \in (0, 1]$ fixado. Existe $a_0 > 0$ tal que para todo $a \in (0, a_0)$ existe uma única solução local periódica e par $\varphi \in H_{\text{per}}^{2s}$ para o problema (4.8). As ondas periódicas de pequena amplitude são dadas pelas seguinte expansão:

$$\varphi(x) = \sqrt{\omega} + \sqrt{2}\phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.54)$$

em que $\omega > \frac{1}{2}$ e

$$\phi(x) = a\phi_1(x) + a^2\phi_2(x) + a^3\phi_3(x) + \mathcal{O}(a^4), \quad (4.55)$$

com

$$\phi_1(x) = \cos(x), \quad \phi_2(x) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2(2^{2s}-1)} \cos(2x)$$

$$\text{e } \phi_3(x) = \frac{1}{2(3^{2s}-1)} \left[1 + \frac{9}{2^{2s}-1} \right] \cos(3x).$$

A frequência $\omega > \frac{1}{2}$ é nesse caso dada explicitamente por

$$\omega = \frac{1}{2} + a^2\gamma + \mathcal{O}(a^4), \quad (4.56)$$

sendo

$$\gamma = \frac{15}{2} - \frac{9}{2(2^{2s} - 1)}.$$

Para $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, o par $(\varphi, \omega) \in H_{\text{per},e}^{2s} \times (\frac{1}{2}, +\infty)$ é global em termos do parâmetro $\omega > \frac{1}{2}$ e satisfaz a equação (4.8).

4.2 Análise Espectral

Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ e $\omega > 0$ fixados. Consideremos $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ o minimizador periódico par da Proposição 4.7. Nessa subseção vamos estudar propriedades espectrais do operador matricial $\mathcal{L} : H_{\text{per}}^{2s} \times H_{\text{per}}^{2s} \subset L_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2 \times L_{\text{per}}^2$ definido como

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

em que $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 : H_{\text{per}}^{2s} \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2$ são dados por

$$\mathcal{L}_1 = (-\Delta)^s + \omega - 3\varphi^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 = (-\Delta)^s + \omega - \varphi^2. \quad (4.58)$$

O operador \mathcal{L} é chamado de operador linearizado em torno do par $(\varphi, 0)$ e os operadores \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são a parte real e a parte imaginária do operador \mathcal{L} , de modo que em virtude do formato diagonal de \mathcal{L} temos¹⁰

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{L}_1) \cup \sigma(\mathcal{L}_2). \quad (4.59)$$

Sendo mais preciso, o operador \mathcal{L} em (4.57) é obtido considerando as quantidades conservadas E e F definidas em (4.4) e (4.5), respectivamente. De fato, para $\omega > 0$ definindo o funcional de Lyapunov padrão $G = E + \omega F$, temos $G' = E' + \omega F'$ e por consequência de (4.6), (4.7) e (4.8), obtemos

$$G'(\varphi, 0) = \begin{pmatrix} (-\Delta)^s \varphi - \varphi^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^s \varphi - \varphi^3 + \omega \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(\varphi, 0)$ é um ponto crítico do funcional G . Ademais, $\mathcal{L} \simeq G''(\varphi, 0)$, em que \simeq significa que estamos identificando o operador \mathcal{L} com $G''(\varphi, 0)$ por meio de um isomorfismo de Riesz conveniente (detalhes em [124, Lema 3.3]). Vemos também que os operadores \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são operadores auto-adjuntos (veja [15, Teorema 11.21]). Logo, o operador \mathcal{L} é auto-adjunto. Como consequência, os espectros de $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ e \mathcal{L} estão contidos na reta¹¹.

De acordo com o Teorema da Oscilação para Operadores Fracionários ([62, Teorema 4.3]), para $i \in \{1, 2\}$ o espectro de \mathcal{L}_i é constituído por uma sequência de autovalores discretos $(\lambda_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_1^{(i)} < \lambda_2^{(i)} \leq \lambda_3^{(i)} \leq \lambda_4^{(i)} \leq \dots \quad (4.60)$$

¹⁰Veja [91, Página 110] ou [111, Página 666]

¹¹Ver [73, Teorema 10.4-2]

se acumulando apenas no infinito e com multiplicidade finita. Adicionalmente, por (4.23), é fácil ver que

$$\mathcal{L}_1 \varphi' = (-\Delta)^s \varphi' + \omega \varphi' - 3\varphi^2 \varphi' = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 \varphi = (-\Delta)^s \varphi + \omega \varphi - \varphi^3 = 0,$$

ou seja,

$$\varphi' \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1) \quad \text{e} \quad \varphi \in \text{Ker}(\mathcal{L}_2) \quad (4.61)$$

e assim $\lambda = 0$ é um autovalor de \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 com autofunções associadas φ' e φ , respectivamente. Disso, de (4.60) formar um conjunto discreto e como decorrência de [75, Teorema 4.4], temos que $\text{R}(\mathcal{L}_i) \subset L_{\text{per}}^2$ é um conjunto fechado, para $i \in \{1, 2\}$. Donde, em razão de [15, Observação B.29] são válidas as relações

$$\text{Ker}(\mathcal{L}_i) = \text{R}(\mathcal{L}_i)^\perp \quad \text{e} \quad \text{Ker}(\mathcal{L}_i)^\perp = \text{R}(\mathcal{L}_i), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Antes de apresentar a teoria espectral no que concerne o operador dado em (4.57) vamos apresentar fatos importantes que são encontrados em [1, Seção 2], [9] e [94, Capítulo 3].

4.2.1 Fatos Básicos sobre Operadores Positivos

Seja $\omega > 0$ fixado representando a frequência de uma onda periódica $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ que resolve a equação (4.8). Para $\theta \geq 0$, definamos o operador $S_\theta : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ por

$$S_\theta \alpha = \frac{1}{w_\theta(n)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}(n-j) \alpha_j = \frac{1}{w_\theta(n)} (\mathcal{K} * \alpha)_n,$$

para todo $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, em que $w_\theta(n) = \beta(n) + \theta + \omega$, $\mathcal{K}(n) = \widehat{3\varphi}(n)$, e $\beta \equiv \beta(n), n \in \mathbb{N}$, representa o símbolo do laplaciano fracionário dado em (4.2). Já que $w_\theta > 0$, temos que

$$X \equiv X_\theta = \left\{ \alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}); \|\alpha\|_{X_\theta} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 w_\theta(n) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

é um espaço de Hilbert dotado com a norma $\|\cdot\|_{X_\theta} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e com o produto interno $(\cdot, \cdot)_{X_\theta} : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$(\alpha_1, \alpha_2)_{X_\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{1,n} \overline{\alpha_{2,n}} w_\theta(n),$$

para todo $\alpha_1 = (\alpha_{1,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\alpha_2 = (\alpha_{2,n})_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Por [9, Proposição 3.2], vemos que $S_\theta : X \longrightarrow X$ está bem definido e define um operador compacto e auto-adjunto em X . A partir do Teorema de Hilbert-Schmidt ([116, Teorema VI.16]) existe uma base ortonormal completa $(\psi_{i,\theta})_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ formada por autofunções do operador $S_\theta|_X$ e com autovalores correspondentes $(\lambda_i(\theta))_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ cujo único ponto de acumulação é o ponto zero. Além disso, os autovalores podem ser enumerados na forma

$$|\lambda_0(\theta)| \geq |\lambda_1(\theta)| \geq |\lambda_2(\theta)| \geq \dots \quad (4.62)$$

Temos o seguinte resultado importante.

Proposição 4.18. Se $\theta \geq 0$, então 1 é um autovalor de S_θ se, e somente se, $-\theta \leq 0$ é um autovalor do operador $\mathcal{L}_1 : H_{\text{per}}^{2s} \subset L_{\text{per}}^2 \rightarrow L_{\text{per}}^2$ definido por $\mathcal{L}_1 = (-\Delta)^s + \omega - 3\varphi^2$. Ademais, ambos os autovalores tem a mesma multiplicidade.

Demonstração. Consulte [9, Corolário 3.1]. ■

Na sequência, consideremos para $\theta \geq 0$ o operador $T_\theta : Y \rightarrow Y$ dado por

$$T_\theta(g) := ((-\Delta)^s + \theta + \omega)^{-1} (3\varphi^2 g), \quad (4.63)$$

em que

$$Y := \left\{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; g \text{ é } 2\pi\text{-periódica e } \|g\|_Y := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 \varphi^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \quad (4.64)$$

é um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ e munido do produto interno $(\cdot, \cdot)_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$(g, h)_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \overline{h(x)} \varphi^2(x) dx.$$

Lema 4.19. Seja $\theta \geq 0$. No que diz respeito o operador $T_\theta : Y \rightarrow Y$ dado em (4.63), temos:

- (i) se $g \in Y$ é uma autofunção de T_θ para algum autovalor não-nulo, então $g \in L_{\text{per}}^2$;
- (ii) T_θ é um operador compacto e auto-adjunto.

Demonstração. (i) Consideremos $\lambda \neq 0$ satisfazendo $T_\theta g = \lambda g$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, vemos que

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{\lambda} \widehat{T_\theta g}(n) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{w_\theta(n)} \widehat{(3\varphi^2 g)}(n). \quad (4.65)$$

O fato $g \in Y$ implica que $\varphi^2 g \in L_{\text{per}}^2$. Da definição de w_θ , obtemos por (4.65) e pela Identidade de Parseval ([106, Corolário 2.54]) que $g \in L_{\text{per}}^2$, como desejado.

(ii) A ação de T_θ sobre o espaço Y é dado por

$$T_\theta g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_\theta(x-y) g(y) d\nu(y),$$

em que $d\nu(y) = \varphi^2(y) dy$ determina uma medida positiva sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$ e G_θ é definido como

$$\widehat{G}_\theta(n) = \frac{1}{w_\theta(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Usando a Identidade de Parseval temos $G_\theta \in L_{\text{per}}^2([-\pi, \pi])$, de modo que $\tilde{G}_\theta \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ em que $\tilde{G}_\theta(x, y) = G_\theta(x-y)$, para todo $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$, e, assim, T_θ é um operador de Hilbert-Schmidt. Logo, por [116, Teorema VI.22]¹², inferimos que T_θ é um operador compacto.

¹²Ou ver também [65, página 264]

Por outro lado, sendo w_θ uma função par, temos que G_θ é par e, como consequência, T_θ é um operador limitado e auto-adjunto, pois

$$\begin{aligned} (h, T_\theta g)_Y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \overline{T_\theta g(x)} \varphi^2(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_\theta(x-y) \overline{g(y)} \varphi^2 dy \right] \varphi^2(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_\theta(y-x) h(x) \varphi^2(x) dx \right] \overline{g(y)} \varphi^2(y) dy \\ &= (T_\theta h, g)_Y, \end{aligned} \quad (4.66)$$

para todo $g, h \in Y$. ■

Usando o Lema 4.19 e novamente o Teorema de Hilbert-Schmidt, garantimos a existência de um conjunto ortonormal completo $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ formado por autofunções de T_θ e satisfazendo

$$T_\theta(\xi_i) = \lambda_i(\theta)\xi_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.67)$$

O próximo resultado nos dá uma relação entre os autovalores de T_θ e S_θ .

Lema 4.20. Sejam $\theta \geq 0$ e $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal completo de autofunções de T_θ em Y tal que $T_\theta(\xi_i) = \lambda_i \xi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se $\text{Ker}(T_\theta) = \{0\}$, então $(\sqrt{|\lambda_i(\theta)|} \widehat{\xi}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forma um conjunto ortonormal completo em X constituída por autofunções de S_θ de modo que

$$S_\theta \widehat{\xi}_i = \lambda_i(\theta) \widehat{\xi}_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.68)$$

Demonstração. A condição $\text{Ker}(T_\theta) = \{0\}$ implica que os autovalores de T_θ são não-nulos. Adicionalmente, pelo Lema 4.19 temos que $\xi_i \in L^2_{\text{per}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela Identidade de Parseval obtemos $\widehat{\xi}_i \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e, assim,

$$S_\theta \widehat{\xi}_i(n) = \frac{1}{w_\theta(n)} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{K}(n-j) \widehat{\xi}_i(j) = \widehat{T_\theta \xi_i}(n) = \lambda_i \widehat{\xi}_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Então, por [9, Proposição 3.2] concluímos que $\widehat{\xi}_i \in X$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Provemos agora que $(\sqrt{|\lambda_i(\theta)|} \widehat{\xi}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo. Com efeito, consideremos $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$. Usando a Identidade de Parseval, determinamos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\check{\alpha}(x)|^2 \varphi^2(x) dx \leq \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\check{\alpha}(x)|^2 dx = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < +\infty,$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, $\alpha \in X$ implica que $\check{\alpha} \in Y$. Usando argumentos similares, é possível mostrar que $g \in Y$ implica $\widehat{g} \in X$.

Agora, seja $\alpha \in X$ fixado. Pela Identidade de Parseval e pelos argumentos explanados acima, podemos concluir que $(\alpha, \widehat{\xi}_i)_{X_\theta} = \lambda_i^{-1} (\check{\alpha}, \xi_i)_Y$, para $i \in \mathbb{N}$. Considerando $\alpha = (\lambda_j \widehat{\xi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, estabelecemos a básica e útil igualdade dada por

$$(\lambda_j \widehat{\xi}_j, \widehat{\xi}_i)_{X_\theta} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} (\xi_j, \xi_i)_Y, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos que $\alpha \in X$ satisfaz $(\alpha, \widehat{\xi}_i)_{X_\theta} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $(\check{\alpha}, \xi_i)_Y = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Desde que $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo em Y , deduzimos que $\check{\alpha} = 0$ em Y . Em contrapartida, uma vez que $\alpha \in X$ e $Y \hookrightarrow L^2_{\text{per}}$, temos que $\check{\alpha} = 0$ em L^2_{per} , ou seja, $\alpha = 0$ em $\ell^2(\mathbb{Z})$ e, portanto, $\alpha = 0$ em X . ■

Observação 4.21. Convém notarmos que se $\theta = 0$ então $T_\theta = T_0$ é injetora. Com efeito, dado $g \in Y$ tal que $T_0(g) = 0$, então $((-\Delta)^s + \omega)^{-1} (3\varphi^2 g) = 0$ o que implica $g \equiv 0$. Essa informação é muito útil já que temos que $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ é um conjunto ortonormal completo em Y . □

Observação 4.22. Os espaços X e Y são isomorfos por meio da aplicação $\mathcal{F} : Y \rightarrow X$, em que $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, para qualquer $f \in Y$, é a transformada de Fourier agindo em L^2_{per} . Mais detalhes acerca da transformada de Fourier no contexto periódico pode ser encontrado em [106, Seções 2.2 e 2.3]. □

4.2.2 Propriedades Espectrais

Vamos usar a caracterização variacional determinada na Seção 4.1.1 assim como a teoria apresentada na Seção 4.2.1 para obter propriedades espectrais úteis do operador linearizado \mathcal{L} , dado e (4.57), em torno da onda periódica $\varphi \in H^\infty_{\text{per}}$ obtida na Proposição 4.7.

Começemos notando que um fato importante é que devido a

$$G(u) = \mathcal{B}_\omega(u) - \frac{\tau}{4}, \quad \forall u \in Y_\tau$$

e de φ ser um minimizador do funcional \mathcal{B}_ω em (4.10), obtemos que φ também é um minimizador do funcional de Lyapunov $G : H^s_{\text{per},e} \rightarrow \mathbb{R}$ sujeito as restrições dadas em (4.9). Conseqüentemente, pelo Teste da Segunda Derivada para Extremos Restritos ([26, Teorema 11.2]) inferimos que

$$\mathcal{L}_{e|_{\{(\varphi^3, 0)\}^\perp}} = G''(\varphi)_{e|_{\{(\varphi^3, 0)\}^\perp}} \geq 0$$

e pelo Princípio Min-Max ([115, Teorema XIII.2]), vem que $n(\mathcal{L}_e) \leq 1$. Por outro lado, em consequência de (4.61) temos $\mathcal{L}_1\varphi = -2\varphi^3$ e, assim,

$$(\mathcal{L}_1\varphi, \varphi)_{L^2} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^4 dx < 0$$

o que, novamente, pelo Princípio Min-Max implica $n(\mathcal{L}_{1,e}) \geq 1$. Devido ao fato do operador \mathcal{L} em (2.25) ser diagonal, de modo que pela Lei da Inércia de Sylvester ([112, Teorema 4.3]) temos $n(\mathcal{L}_e) = n(\mathcal{L}_{1,e}) + n(\mathcal{L}_{2,e})$, também obtemos que

$$1 \leq n(\mathcal{L}_{1,e}) \leq n(\mathcal{L}_{1,e}) + n(\mathcal{L}_{2,e}) = n(\mathcal{L}_e) \leq 1$$

implicando que $n(\mathcal{L}_{1,e}) = n(\mathcal{L}_e) = 1$ e $n(\mathcal{L}_{2,e}) = 0$. Na sequência, por (4.61) vemos ainda que $\mathcal{L}_2(\varphi) = 0$, com $n(\mathcal{L}_{2,e}) = 0$. Segue do Teorema da Oscilação para Operadores Fracionários ([62, Teorema 4.3]) que $\varphi > 0$ e que o autovalor $\lambda = 0$ para o operador $\mathcal{L}_{2,e}$ é simples. Em

contrapartida, por [61, Lemma 3.3], obtemos que $\lambda = 0$ é o primeiro autovalor do operador \mathcal{L}_{1o} com autofunção φ' , donde $n(\mathcal{L}_{1o}) = 0$. Nesses termos, vemos que

$$\begin{aligned} n(\mathcal{L}) &= n(\mathcal{L}_1) + n(\mathcal{L}_2) \\ &= n(\mathcal{L}_{1e}) + n(\mathcal{L}_{1o}) + n(\mathcal{L}_{2e}) + n(\mathcal{L}_{2o}) \\ &= 1 + 0 + 0 + n(\mathcal{L}_{2o}) \\ &= n(\mathcal{L}_{2o}) + 1. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Suponhamos, por um momento, que $n(\mathcal{L}_{2o}) \geq 1$. Assim, $n(\mathcal{L}_2) = n(\mathcal{L}_{2e}) + n(\mathcal{L}_{2o}) \geq 1$, implicando que o autovalor $\lambda = 0$ de \mathcal{L}_2 , com autofunção φ , é tal que $\lambda_j^{(2)} \leq \lambda = 0$, para algum $j \geq 2$. Disso e do Teorema da Oscilação para Operadores Fracionários segue que a função φ muda de sinal em $[-\pi, \pi]$ o que é contradição com o fato $\varphi > 0$. Logo, $n(\mathcal{L}_2) = n(\mathcal{L}_{2o}) = 0$ de modo que $z(\mathcal{L}_2) = 1$ e de (4.69) concluímos que

$$n(\mathcal{L}) = n(\mathcal{L}_{2o}) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Na verdade, acabamos de provar o seguinte resultado.

Lema 4.23. Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ e $\omega > \frac{1}{2}$ fixados. Se $\varphi \in H_{\text{per},e}^\infty$ é o minimizador periódico dado na Proposição 4.7, então $\varphi > 0$, $n(\mathcal{L}_2) = 0$ e $z(\mathcal{L}_2) = 1$, com $\text{Ker}(\mathcal{L}_2) = [\varphi]$.

No que diz respeito ao operador \mathcal{L}_1 em (4.58), temos o seguinte lema.

Lema 4.24. Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ e $\omega > \frac{1}{2}$ fixados. Se $\varphi \in H_{\text{per},e}^\infty$ é o minimizador periódico dado na Proposição 4.7, então $n(\mathcal{L}_1) = 1$ e $z(\mathcal{L}_1) = 1$, com $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$.

Demonstração. Primeiro, observemos que $\varphi' \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1) = \text{R}(\mathcal{L}_1)^\perp$. Além disso, uma vez que $\mathcal{L}_1 \varphi = -2\varphi^3$, obtemos

$$\varphi^3 \in \text{R}(\mathcal{L}_1). \tag{4.70}$$

Na sequência, afirmamos que $\varphi \in \text{R}(\mathcal{L}_1)$ e para provar tal fato, seguimos os argumentos contidos em [1, Teorema 4.10]. De fato, comecemos definindo

$$e_i := \sqrt{|\lambda_i(0)|} \hat{\xi}_i, \quad i \in \mathbb{N},$$

em que $(\lambda_i(0))_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é dada em (4.62), para $\theta = 0$, e $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$ é dada em (4.67). A partir do Lema 4.20 e da Observação 4.21, temos que $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X = X_0$ forma um sistema ortonormal completo em X , composto por autofunções de $S_0 : X \rightarrow X$. Também, definamos

$$\eta_1 := \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X e_i, \tag{4.71}$$

em que $J := \{i \in \mathbb{N} ; \lambda_i(0) = 1\}$. Pela Proposição 4.18 o conjunto $J \subset \mathbb{N}$ é finito, pois $z(\mathcal{L}_1) \in \{1, 2\}$. Logo, podemos escrever

$$\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right)^2 \left| \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \right|^2 \leq A \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left| \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \right|^2 \leq A \left\| \frac{\hat{\varphi}}{w_0} \right\|_X^2, \tag{4.72}$$

em que

$$A := \sup_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left| \frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Entretanto, pela Identidade de Parseval e como $\omega > \frac{1}{2}$ gera $w_0(n) = \beta(n) + \omega > \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\left\| \frac{\widehat{\varphi}}{w_0} \right\|_X^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\widehat{\varphi}(n)}{w_0(n)} \right|^2 w_0(n) \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{\varphi}(n)|^2 = 2 \|\varphi\|_{L^2}^2,$$

o que implica por (4.72)

$$\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right)^2 \left| \left(\frac{\widehat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \right|^2 \leq 2A \|\varphi\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Por conseguinte, a série para η_1 em (4.71) converge em X , ou seja, $\eta_1 \in X = X_0$. Disso e da Observação 4.22, para $\theta = 0$, podemos considerar $\psi_1 \in Y \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$ tal que $\widehat{\psi}_1 = \eta_1$. Notemos que em virtude de $\eta_1 \in X = X_0$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\eta_1(n)|^2 (\beta(n)^2 + 2\beta(n)\omega + \omega^2) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\eta_1(n)|^2 \cdot (\beta(n) + \omega)^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\eta_1(n)|^2 w_0(n)^2 = \|\eta_1\|_X^2 < \infty \end{aligned}$$

o que em particular implica

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}_1(n)|^2 \cdot |n|^{4s} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\eta_1(n)|^2 \cdot |n|^{4s} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\eta_1(n)|^2 \cdot \beta(n)^2 < \infty.$$

Consequentemente, conforme a estrutura do espaço H_{per}^{2s} definido em (1.1), concluímos que $\psi_1 \in H_{\text{per}}^{2s} = D(\mathcal{L}_1)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{(\mathcal{L}_1 \psi_1)} &= \widehat{((-\Delta)^s \psi_1 + \omega \psi_1 - 3\varphi^2 \psi_1)} \\ &= \widehat{(-\Delta)^s \psi_1 + \omega \widehat{\psi}_1 - \widehat{3\varphi^2 \psi_1}} \\ &= \beta \widehat{\psi}_1 + \omega \widehat{\psi}_1 - \widehat{(3\varphi^2 \psi_1)} = (\beta + \omega) \widehat{\psi}_1 - \widehat{(3\varphi^2 \psi_1)} \\ &= (\beta + \omega) \widehat{\psi}_1 - w_0 \widehat{((-\Delta)^s + \omega)^{-1} 3\varphi^2 \psi_1} \\ &= w_0 \widehat{\psi}_1 - w_0 \widehat{(T_0(\psi_1))} = w_0 \eta_1 - w_0 (T_0(\check{\eta}_1))^\wedge, \end{aligned} \tag{4.73}$$

em que T_0 é definido em (4.63).

Em contrapartida,

$$\begin{aligned} T_0(\check{\eta}_1) &= T_0 \left(\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus I} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\widehat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \check{e}_i \right) \\ &= T_0 \left(\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\widehat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \sqrt{|\lambda_i(0)|} \xi_i \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\widehat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \sqrt{|\lambda_i(0)|} T_0(\xi_i). \end{aligned} \tag{4.74}$$

E como consequência de (4.68),

$$\begin{aligned}
S_0(e_i) &= S_0(\sqrt{|\lambda_i(0)|}\xi_i) = \sqrt{|\lambda_i(0)|}S_0(\xi_i) \\
&= \sqrt{|\lambda_i(0)|}\lambda_i(0)\xi_i \\
&= \lambda_i(0)e_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

A partir (4.67), (4.74) e (4.75), inferimos que

$$\begin{aligned}
(T_0(\tilde{\eta}_1))^\wedge &= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \sqrt{|\lambda_i(0)|} (T_0(\xi_i))^\wedge \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \sqrt{|\lambda_i(0)|} (\lambda_i(0)\xi_i)^\wedge \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \sqrt{|\lambda_i(0)|} \lambda_i(0)\hat{\xi}_i \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \sqrt{|\lambda_i(0)|} S_0(\hat{\xi}_i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X S_0(\sqrt{|\lambda_i(0)|}\xi_i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X S_0(e_i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X \lambda_i(0) e_i
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Agora, como em [1, Teorema 4.10], precisamos adotar a convenção de notação¹³ $0 = \frac{0}{0}$ para obter por (4.71), (4.73), (4.76) e [16, Teorema 9.12] que

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mathcal{L}_1\psi_1}) &= w_0 \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{1}{1 - \lambda_i(0)} \right) \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X (1 - \lambda_i(0))e_i \\
&= w_0 \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{\hat{\varphi}}{w_0}, e_i \right)_X e_i = \frac{w_0}{w_0} \hat{\varphi} = \hat{\varphi}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa em (4.77), segue que $\mathcal{L}_1\psi_1 = \varphi$. Em outras palavras,

$$\varphi \in \mathbf{R}(\mathcal{L}_1), \tag{4.78}$$

como afirmado.

Dessa forma, de (4.70) e (4.78), obtemos que $\varphi, \varphi^3 \in \mathbf{R}(\mathcal{L}_1) = \text{Ker}(\mathcal{L}_1)^\perp$ com φ sendo uma solução par, suave, positiva e *single-lobe* de (4.23). Suponhamos, por um momento, que $z(\mathcal{L}_1) = 2$. Uma vez que $\varphi' \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1)$, com φ é ímpar, temos como consequência de [61, Lema 3.3, (L1)] que φ' corresponde ao menor autovalor de \mathcal{L}_1 quando restrito ao subespaço $H_{\text{per},0}^{2s}$, de modo que $\text{Ker}(\mathcal{L}_{1,o}) = [\varphi']$. Além disso, é sabido que vale a seguinte

¹³Essa convenção notacional pode ser encontrada também, por exemplo, [50]. E é discutida e dado um sentido mais formal em [126, Página 167]. De modo mais geral, veja a discussão sobre o *Inverso Generalizado de Moore-Penrose* em [119, Seção 8.3.1]

decomposição $L_{\text{per}}^2 = L_{\text{per},e}^2 \oplus L_{\text{per},o}^2$. E por [65, Teorema 6.17, Capítulo III], vemos também que $\sigma(\mathcal{L}_1) = \sigma(\mathcal{L}_{1e}) \cup \sigma(\mathcal{L}_{1o})$. Nesses termos e como $z(\mathcal{L}_1) = 2$, garantimos, em particular, a existência de uma função periódica par $h \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1)$ tal que h tem exatamente dois zeros simétricos no intervalo $[-\pi, \pi)$ (tal fato é consequência de $n(\mathcal{L}_1) = 1$ e do Teorema da Oscilação ([62, Teorema 4.3])). Por conseguinte, existe $x_0 \in [-\pi, \pi)$ de modo que $h(\pm x_0) = 0$. Sem perda de generalidade, podemos ainda supor que

$$h(x) > 0, x \in (-x_0, x_0) \quad \text{e} \quad h(x) < 0, x \in [-\pi, x_0) \cup (x_0, \pi). \quad (4.79)$$

Adicionalmente, uma vez que $h \in \text{Ker}(\mathcal{L}_1)$ e $\varphi, \varphi^3 \in \text{R}(\mathcal{L}_1) = \text{Ker}(\mathcal{L}_1)^\perp$ temos

$$(h, \varphi^3)_{L^2} = 0 \quad \text{e} \quad (h, \varphi)_{L^2} = 0. \quad (4.80)$$

Sendo $\varphi > 0$, obtemos, pelo fato que φ tem perfil *single-lobe*, que a função

$$\varphi(x)(\varphi(x)^2 - \varphi^2(x_0)), \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

é positiva sobre $(-x_0, x_0)$ e negativa sobre $[-\pi, x_0) \cup (x_0, \pi)$, de modo que tem o mesmo comportamento que h em (4.79). Assim, $(\varphi(\varphi^2 - \varphi^2(x_0)), h)_{L^2} \neq 0$ que gera uma contradição com (4.80). Portanto, $z(\mathcal{L}_1) = 1$, com $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$. \blacksquare

Observação 4.25. Os argumentos estabelecidos no final da demonstração do Lema 4.23 são válidos apenas se $\varphi > 0$. Se φ muda seu sinal sobre $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, uma forma alternativa de provar que $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$ pode ser determinado provando que $1 \in \text{R}(\mathcal{L}_1)$. No caso afirmativo e como $\mathcal{L}_1 1 = \omega - 3\varphi^2$, obtemos que a seguinte propriedade $\{1, \varphi, \varphi^2\} \subset \text{R}(\mathcal{L}_1)$ ocorre. Empregando os argumentos de [96, Proposição 2.5], obtemos que $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$ como requerido. \square

Observação 4.26. Outro modo de se obter a simplicidade do núcleo do operador \mathcal{L}_1 , estabelecida no Lema 4.24, e sem fazer uso da Teoria de Operadores Positivos (da Seção 4.2.1), é por meio da suposição padrão (veja, por exemplo, [34] e [97]) de que o minimizador periódico $\varphi \in H_{\text{per},e}^\infty$, obtido da Proposição 4.7, depende suavemente da frequência da onda $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$, isto é, a curva de soluções $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty) \mapsto \varphi$ é suave, pois nesse caso podemos diferenciar a equação (4.8) com respeito ao parâmetro $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$ a fim de obtermos que $\mathcal{L}_1(-\frac{d}{d\omega}\varphi) = \varphi$, ou seja, $\varphi \in \text{R}(\mathcal{L}_1)$, como obtido em (4.78), nos permitindo daí fazermos a mesma argumentação do final do Lema 4.24 para concluirmos que $z(\mathcal{L}_1) = 1$. \square

Como uma consequência do Lema 4.24, obtemos a existência de uma curva suave de soluções periódica positivas φ_ω dependendo da frequência da onda $\omega > \frac{1}{2}$ todas com mesmo período 2π .

Proposição 4.27. Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ e $\omega_0 > \frac{1}{2}$ fixos. Se $\varphi_0 \in H_{\text{per},e}^\infty$ é a solução obtida na Proposição 4.7 associada com o valor $\omega_0 > \frac{1}{2}$, então existe uma aplicação C^1 da forma

$$\omega \in I_{\omega_0} \subset \mathbb{R} \mapsto \varphi_\omega \in H_{\text{per},e}^{2s}$$

de soluções (4.23) definida em uma vizinhança $I_{\omega_0} \subset \mathbb{R}$ de $\omega_0 > 0$ tal que $\varphi_{\omega_0} = \varphi_0$. Adicionalmente, o intervalo $I_{\omega_0} \subset \mathbb{R}$ pode ser escolhido como $I_{\omega_0} = (\frac{1}{2}, \infty)$.

Demonstração. Começemos definindo

$$\mathcal{P}(\omega, f) = (-\Delta)^s f + \omega f - f^3, \quad \forall (\omega, f) \in \mathbb{R}_+ \times H_{\text{per},e}^{2s}.$$

É claro que $\mathcal{P}(\omega_0, \varphi_0) = 0$. Além disso, \mathcal{P} é suave e sua derivada de Fréchet com respeito a $f \in H_{\text{per}}^{2s}$ calculada em (ω_0, φ_0) é dada por

$$\mathcal{G} := \mathcal{P}_f(\omega_0, \varphi_0) = (-\Delta)^s + \omega_0 - 3\varphi_0^2 = \mathcal{L}_1$$

Considerando $\mathcal{G} : H_{\text{per},e}^{2s} \subset L_{\text{per},e}^2 \rightarrow L_{\text{per},e}^2$, tendo em vista o Teorema 4.24 e o fato que φ_0' é ímpar, temos que $\text{Ker}(\mathcal{G}) = \{0\}$, isto é, \mathcal{G} é injetor. Provemos agora que \mathcal{G} é sobrejetor. Para tanto, primeiro observemos que \mathcal{G} é auto-adjunto (pois \mathcal{L}_1 o é) e por [15, Observação B.45] temos $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{G}) \cup \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{G})$. Afirmamos que \mathcal{G} tem resolvente compacto. De fato, seja $\mu \in \rho(\mathcal{G})$, por definição do conjunto resolvente o operador $(\mathcal{G} - \mu I_d)^{-1} : L_{\text{per},e}^2 \rightarrow H_{\text{per},e}^{2s} \subset L_{\text{per},e}^2$ existe e é limitado. Uma vez que $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, a imersão $H_{\text{per},e}^{2s} \hookrightarrow L_{\text{per},e}^2$ é compacta (veja [13, Página 11]) e, dessa forma, dada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D((\mathcal{G} - \mu I_d)^{-1})$ limitada podemos extrair uma subsequência convergente de $((\mathcal{G} - \mu I_d)^{-1}(f_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset L_{\text{per},e}^2$, ou seja, $(\mathcal{G} - \mu I_d)^{-1}$ é compacto. Equivalentemente, \mathcal{G} tem resolvente compacto (veja [65, Capítulo 3, Seção 6.8]). Em razão de [65, Teorema 6.29, Capítulo 3], o espectro $\sigma(\mathcal{G})$ consiste inteiramente de autovalores isolados com multiplicidade finita. Logo, $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{G}) = \emptyset$ e $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{G})$.

Agora, em virtude de \mathcal{G} ser injetor, temos que o único elemento $g \in D(\mathcal{G})$ que satisfaz $\mathcal{G}(g) = 0$ é $g \equiv 0$. Assim, $\lambda = 0$ não é um autovalor de \mathcal{G} e por consequência $0 \notin \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$. Nesses termos, $\lambda = 0 \in \rho(\mathcal{G})$ e \mathcal{G} é sobrejetor, como afirmado.

Do exposto, \mathcal{G}^{-1} existe e é um operador linear limitado. Assim, em razão do Teorema da Inversa Limitada ([88, Teorema 4.8]), temos que $\mathcal{G} = \mathcal{P}_f$ é um operador linear limitado e, logo, contínuo. Nesses termos, \mathcal{P} e \mathcal{P}_f são contínuos. Dessa forma, pelo Teorema da Função Implícita ([133, Teorema 4.B]) existem $r > 0$ e $r_0 > 0$ e uma única correspondência

$$\omega \in I_{\omega_0} := (\omega_0 - r_0, \omega_0 + r_0) \subset \mathbb{R} \mapsto \varphi_\omega \in H_{\text{per},e}^{2s} \quad (4.81)$$

a qual, para todo $\omega \in I_{\omega_0}$, satisfaz $\|\varphi_\omega - \varphi_0\|_{H^{2s}} \leq r$ e $\mathcal{P}(\omega, \varphi_\omega) = 0$, isto é,

$$(-\Delta)^s \varphi_\omega + \omega \varphi_\omega - \varphi_\omega^3 = 0.$$

De modo que, devido a suavidade de \mathcal{P} , a correspondência em (4.81) é de classe C^1 . Além do mais, da unicidade da correspondência em (4.81) e como $\omega_0 \in (\frac{1}{2}, \infty)$ foi escolhido arbitrariamente, segue que podemos considerar $I_{\omega_0} = (\frac{1}{2}, \infty)$. Portanto, o resultado segue. \blacksquare

Observação 4.28. Não podemos garantir que para cada $\omega \in I_{\omega_0}$ dada na Proposição 4.27 que φ_ω resolve o problema de minimização (4.12) exceto quando $\omega = \omega_0$. \square

Os resultados determinados nessa subseção, a saber Lemas 4.23 e 4.24, juntamente com (4.59) podem ser resumidos da seguinte proposição.

Proposição 4.29. Sejam $s \in (\frac{1}{4}, 1]$ e $\omega > \frac{1}{2}$ fixados. Se $\varphi \in H_{\text{per},e}^\infty$ é o minimizador periódico dado na Proposição 4.7, então $\varphi > 0$, $n(\mathcal{L}) = 1$ e $z(\mathcal{L}) = 2$, de modo que $\text{Ker}(\mathcal{L}) = [(\varphi', 0), (0, \varphi)]$.

4.3 Unicidade do Minimizador Real

O objetivo central dessa subseção é mostrar um resultado de unicidade dos minimizadores periódicas $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ obtidos no Teorema 4.3 e Observação 4.4. Para tanto, procederemos como em [12, Seção 3.2]. A principal diferença em nossa abordagem é que não precisamos assumir que o núcleo do operador linearizado restrito ao espaço das funções de média zero é simples. Primeiro, o espaço das funções de média zero não é adequado para nossos propósitos, uma vez que estamos lidando com ondas periódicas positivas, a saber φ . Uma condição equivalente em nosso caso seria assumir que $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$ para qualquer $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$ e $s \in (\frac{1}{4}, 1)$. Entretanto, já determinamos essa propriedade no Lema 4.24 e, desse modo, estamos em conformidade com os argumentos provados em [49, Seção 5], em que os autores estabeleceram a unicidade de ondas solitárias provenientes de um problema similar a (4.12). O caso $s = 1$ não é relevante em nossa análise, e por isso não será abordado, uma vez que ondas periódicas dnoidais (veja Lema 4.32) são únicas para um $\omega \in (\frac{1}{2}, \infty)$ fixado.

Nosso primeiro objetivo é construir um ramo local de soluções de (4.8). Inicialmente, definamos o espaço complexo

$$\mathbb{V} := \{f = f_1 + if_2 \equiv (f_1, f_2) \in L_{\text{per}}^4 \times L_{\text{per}}^4 ; f_1, f_2 \in L_{\text{per},e}^4\},$$

equipado com a norma do espaço (complexo) L_{per}^4 .

Proposição 4.30. Seja $s_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$ fixado. Se $(\varphi_0 + i0, \omega_0) \in \mathbb{V} \times (0, \infty)$, em que $\varphi_0 \in L_{\text{per},e}^4$ é uma solução de (4.23), para $s = s_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\omega = \omega_0 > \frac{1}{2}$, então existe uma aplicação de classe C^1

$$s \in I_\delta \subset (0, \infty) \longmapsto (\varphi_s, \omega_s) \in \mathbb{V} \times (0, \infty),$$

definida sobre $I_\delta := [s_0, s_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$ pequeno o suficiente, tal que

- (i) o par $(\varphi_s, \omega_s) \in \mathbb{V} \times (0, \infty)$ resolve (4.23) com $\varphi = \varphi_s$ e $\omega = \omega_s$ para todo $s \in I_\delta$;
- (ii) Existe $\varepsilon > 0$ de modo que $(\varphi_s, \omega_s) \in \mathbb{V} \times (0, \infty)$ é a única solução de (4.23), para $s \in I_\delta$, em uma vizinhança

$$\{(\varphi, \omega) \in \mathbb{V} \times (0, \infty) ; \|\varphi - \varphi_0\|_{\mathbb{V}} + |\omega - \omega_0| < \varepsilon\};$$

- (iii) Para todo $s \in I_\delta$,

$$\|\varphi_s\|_{L^4}^4 = \|\varphi_0\|_{L^4}^4.$$

Demonstração. A prova é similar a [12, Proposição 3.2] e por isso daremos apenas as etapas principais. Seja $s_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$ fixado e consideremos $(\Phi_0, \omega_0) = (\varphi_0 + i \cdot 0, \omega_0) \in \mathbb{V} \times (\frac{1}{2}, \infty)$, em que $\varphi_0 \in L^4_{\text{per},e}$ satisfaz (4.23). É fácil ver que

$$(-\Delta)^{s_0} \Phi_0 + \omega_0 \Phi_0 + |\Phi_0|^2 \Phi_0 = 0. \quad (4.82)$$

Também, definamos $\mathbf{F} : \mathbb{V} \times (\frac{1}{2}, \infty) \times I_\delta \longrightarrow \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{F}(\Phi, \omega, s) = \begin{bmatrix} \Phi - ((-\Delta)^s + \omega)^{-1} |\Phi|^2 \Phi \\ \|\Phi\|_{L^4}^4 - \|\Phi_0\|_{L^4}^4 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

em que $I_\delta := [s_0, s_0 + \delta)$ e $\delta > 0$ a ser escolhido. Notemos que \mathbf{F} é uma aplicação de classe C^1 bem definida (veja [49, Lema E.1]) e, por (4.82), $\mathbf{F}(\Phi_0, \omega_0, s_0) = (0, 0)$.

Em particular, vemos que a derivada de Fréchet de \mathbf{F} com respeito a (Φ, ω) em (Φ_0, ω_0, s_0) é dada por

$$D_{\Phi, \omega} \mathbf{F}(\Phi_0, \omega_0, s_0) = \begin{bmatrix} 1 - ((-\Delta)^{s_0} + \omega_0)^{-1} 3\Phi_0^2 & ((-\Delta)^{s_0} + \omega_0)^{-2} \Phi_0^2 \\ 4(\Phi_0^3, \cdot)_{L^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que φ'_0 é ímpar e, por Lema 4.24, $\text{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi'_0]$ podemos mostrar que a aplicação $D_{\Phi, \omega} \mathbf{F}(\Phi_0, \omega_0, s_0)$ é invertível. Pelo Teorema de Função Implícita ([133, Teorema 4.B]), garantimos a existência de uma aplicação de classe C^1 da forma

$$s \in I_\delta \longmapsto (\Phi_s, \omega_s) \in \mathbb{V} \times (\frac{1}{2}, \infty),$$

em que $\delta > 0$ é pequeno o suficiente. Aqui, o fato de que a família $\{\Phi_s \in \mathbb{V} ; s \in I_\delta\}$ está definida em uma vizinhança de $\Phi_0 = \varphi_0 + 0i \in \mathbb{V}$ nos permite definir, sem perda de generalidade, $\Phi_s := \varphi_s + 0i \in \mathbb{V}$, com $s \in I_\delta$. Assim, podemos considerar um ramo local de soluções de (4.23) parametrizada por $s \in I_\delta$ da forma $(\varphi_s + 0i, \omega_s) \in \mathbb{V} \times (\frac{1}{2}, 1)$. ■

No que segue, para $s_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$ fixado, denotemos por

$$\begin{aligned} F_\delta : I_\delta &\longrightarrow \mathbb{V} \times (\frac{1}{2}, \infty) \\ s &\longmapsto (\Phi_s, \omega_s) \end{aligned}$$

o C^1 -ramo de soluções de (4.23) dado na Proposição 4.30, em que $\delta > 0$ é pequeno o suficiente.

Em seguida, consideremos a extensão maximal do ramo F_δ , isto é,

$$F_*(s) := F_\delta(s), \quad s \in [s_0, s^*), \quad (4.84)$$

em que

$s_* := \sup \{s_0 < q < 1 ; F_\delta \in C^1([s_0, q]; \mathbb{V} \times (0, \infty)) \text{ e } F_\delta(s) \text{ satisfaz (4.23) para todo } s \in [s_0, q)\}$.

Agora, vamos provar que na verdade $s_* = 1$.

Proposição 4.31. Seja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I_\delta \subset (\frac{1}{4}, s_*)$ uma sequência tal que $s_n \rightarrow s_*$. Se $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ são as correspondentes soluções dadas na Proposição 4.30, com frequência de onda $\omega_{s_n} > \frac{1}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então a menos de subsequência

$$\varphi_{s_n} \rightarrow \varphi_* \quad \text{em } L^p_{\text{per}}(\mathbb{T}) \quad \text{e} \quad \omega_{s_n} \rightarrow \omega_*,$$

para todo $p \geq 1$, em que $\varphi_* \in L^p_{\text{per}}(\mathbb{T})$ satisfaz $(-\Delta)^{s_*} \varphi_* + \omega_* \varphi_* - \varphi_*^3 = 0$, com $\omega_* > \frac{1}{2}$ sendo a frequência da onda correspondente. Adicionalmente, o ramo maximal correspondente $F_* \in C^1([s_0, s_*]; \mathbb{V} \times (0, \infty))$ dado em (4.84) se estende até $s_* = 1$.

Demonstração. Afirmamos que a sequência $(\omega_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Com efeito, suponhamos, por um momento, que $(\omega_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada, em outras palavras, dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\omega_{s_n} > M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Lembremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(-\Delta)^{s_n} \varphi_{s_n} + \omega_{s_n} \varphi_{s_n} - \varphi_{s_n}^3 = 0. \quad (4.85)$$

Multiplicando a identidade acima por φ_{s_n} , com $n \in \mathbb{N}$, e integrando sobre $[0, 2\pi]$ obtemos

$$\int_0^{2\pi} \left((-\Delta)^{\frac{s_n}{2}} \varphi_{s_n} \right)^2 + \omega_{s_n} \varphi_{s_n}^2 - \varphi_{s_n}^4 \, dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.86)$$

Por (4.86) e pelo item iii) da Proposição 4.30, existe $\varphi_0 \in L^4_{\text{per},e}$ satisfazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left((-\Delta)^{\frac{s_n}{2}} \varphi_{s_n} \right)^2 \, dx &\leq \int_0^{2\pi} \left((-\Delta)^{\frac{s_n}{2}} \varphi_{s_n} \right)^2 + \omega_{s_n} \varphi_{s_n}^2 \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^4 \, dx = \int_0^{2\pi} \varphi_0^4 \, dx. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Como, $s_* \in (s_0, 1]$ e $s_n < s_*$, para $n \in \mathbb{N}$, podemos garantir que escolhendo $M > 0$ grande o suficiente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s_m > s_0$ e, conseqüentemente, temos que a imersão

$$H^{s_m}_{\text{per},e} \hookrightarrow H^{s_0}_{\text{per},e} \quad (4.88)$$

é válida. Por outro lado, em virtude de

$$\int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^4 \, dx = \int_0^{2\pi} \varphi_0^4 \, dx \quad \Leftrightarrow \quad \|\varphi_{s_n}\|_{L^4}^4 = \|\varphi_0\|_{L^4}^4, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.89)$$

e da imersão $L^4_{\text{per}} \hookrightarrow L^2_{\text{per}}$, existe $c_4 > 0$ de modo que

$$\|\varphi_{s_n}\|_{L^2} \leq c_4, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Disso e de (4.87) vemos que, para algum $c_5 > 0$

$$\|\varphi_{s_n}\|_{H^{s_n}}^2 = \|\varphi_{s_n}\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\frac{s_n}{2}} \varphi_{s_n}\|_{L^2}^2 \leq c_5, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_{\text{per},e}^{s_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Contudo, por (4.88), podemos concluir que $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada em $H_{\text{per},e}^{s_0}$. Em seguida, uma vez que a imersão $H_{\text{per},e}^{s_0} \hookrightarrow L_{\text{per},e}^4$ é compacta e a norma é contínua, asseguramos a existência de um $\varphi_1 \in V$ tal que a menos de subsequência

$$\|\varphi_{s_n}\|_{L^4} \rightarrow \|\varphi_1\|_{L^4} \quad (4.90)$$

e, como consequência da imersão $L_{\text{per}}^4 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$,

$$\|\varphi_{s_n}\|_{L^2} \rightarrow \|\varphi_1\|_{L^2} \quad (4.91)$$

Agora, observemos que (4.86) e a imersão $L_{\text{per}}^4 \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$ implicam que

$$\begin{aligned} (\omega_{s_n} + 1) \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^2 dx &= \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^2 + \omega_{s_n} \varphi_{s_n}^2 dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left((-\Delta)^{\frac{s_n}{2}} \varphi_{s_n} \right)^2 \varphi_{s_n}^2 + \omega_{s_n} \varphi_{s_n}^2 + \varphi_{s_n}^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^4 dx + \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^2 dx \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^4 dx = 2 \int_0^{2\pi} \varphi_1^4 dx. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Então, devido a $\omega_{s_n} > M$ para qualquer $n \geq n_0$ e (4.89), inferimos que

$$0 \leq (M + 1) \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^2 dx \leq (\omega_{s_n} + 1) \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} \varphi_0^4 dx. \quad (4.93)$$

Tomando $n \rightarrow \infty$ em (4.93) obtemos uma contradição. Assim, $(\omega_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset (\frac{1}{2}, 1)$ é limitada, como afirmado. Por conseguinte, existe $\omega_* \geq \frac{1}{2}$ de modo que a menos de subsequência

$$\omega_{s_n} \rightarrow \omega_*. \quad (4.94)$$

Por outro lado, como em (4.92), asseguramos que

$$\mathcal{B}_{\omega_{s_n}}(\varphi_{s_n}) = \int_0^{2\pi} \left((-\Delta)^{\frac{s_n}{2}} \varphi_{s_n} \right)^2 + \omega_{s_n} \varphi_{s_n}^2 dx \geq \omega_{s_n} \int_0^{2\pi} \varphi_{s_n}^2 dx = \omega_{s_n} \|\varphi_{s_n}\|_{L^2}^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

o que implica, em razão de (4.86),

$$0 \leq \omega_{s_n} \|\varphi_{s_n}\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{B}_{\omega_{s_n}}(\varphi_{s_n}) = \|\varphi_{s_n}\|_{L^4}^4 = \|\varphi_0\|_{L^4}^4, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.95)$$

A convergência em (4.94) nos permite concluir que $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_{\text{per},e}^{s_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De modo similar ao determinado acima, garantimos a existência de um $\varphi_* \in L_{\text{per},e}^4$ tal que

$$\|\varphi_{s_n}\|_{L^4} \rightarrow \|\varphi_*\|_{L^4} \quad \text{e} \quad \|\varphi_{s_n}\|_{L^2} \rightarrow \|\varphi_*\|_{L^2}. \quad (4.96)$$

No entanto, por (4.86) obtemos que

$$\|(-\Delta)^{\frac{s_n}{2}} \varphi_{s_n}\|_{L^2}^2 \leq \|\varphi_{s_n}\|_{L^4}^4, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando essa última desigualdade juntamente com as limitações decorrentes de (4.96), vem que $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_{\text{per}}^{s_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $s_n \in (\frac{1}{2}, 1]$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue de [106, Teorema 3.200] que $H_{\text{per}}^{s_n}$ é uma Álgebra de Banach e, logo, $(\varphi_{s_n}^3)_{n \in \mathbb{N}}$ é também limitada em $H_{\text{per}}^{s_n}$. E mais ainda, da imersão $H_{\text{per}}^{s_n} \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$, vemos que tanto $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ quanto $(\varphi_{s_n}^3)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas em L_{per}^2 . Nesses termos, (4.85) e (4.94) implicam

$$\|(-\Delta)^{s_n} \varphi_{s_n}\|_{L^2} \leq \|\varphi_{s_n}^3\|_{L^2} + \omega_{s_n} \|\varphi_{s_n}\|_{L^2} \leq c_6, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para algum $c_6 > 0$. Esse fato e a limitação de $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ em L_{per}^2 nos permitem determinar que $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_{\text{per}}^{2s_n} \hookrightarrow L_{\text{per}}^2$, para $n \in \mathbb{N}$.

Novamente por (4.85), temos

$$(-\Delta)^{2s_n} \varphi_{s_n} = (-\Delta)^{s_n} \varphi_{s_n}^3 - \omega_{s_n} (-\Delta)^{s_n} \varphi_{s_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dessa igualdade e empregando argumento análogo ao apresentado acima, podemos inferir que $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_{\text{per}}^{4s_n}$, para $n \in \mathbb{N}$. Seguindo indutivamente, existe $r \in \mathbb{N}$ grande o suficiente tal que $rs_n > 1$, $rs_n > s_*$ e $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_{\text{per}}^{rs_n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Além disso, a imersão $H_{\text{per}}^{rs_n} \hookrightarrow H_{\text{per}}^{s_*}$ é compacta (veja (1.2)). Então, pela unicidade do limite e a menos de subsequência

$$\varphi_{s_n} \longrightarrow \varphi_* \text{ em } H_{\text{per}}^{s_*}. \quad (4.97)$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(-\Delta)^{s_n} \varphi_{s_n} - (-\Delta)^{s_*} \varphi_*\|_{L^2} \leq \|(-\Delta)^{s_*} (\varphi_{s_n} - \varphi_*)\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{s_n} \varphi_{s_n} - (-\Delta)^{s_*} \varphi_*\|_{L^2}. \quad (4.98)$$

Então, agora em virtude de (4.97), (4.98) e da convergência $s_n \longrightarrow s_*$, obtemos

$$(-\Delta)^{s_n} \varphi_{s_n} \longrightarrow (-\Delta)^{s_*} \varphi_* \text{ em } L_{\text{per}}^2. \quad (4.99)$$

Ainda, como $(\varphi_{s_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset H_{\text{per}}^{rs_n}$, para $n \in \mathbb{N}$, é limitada, então a menos de subsequência

$$\varphi_{s_n} \longrightarrow \varphi_* \text{ em } H_{\text{per}}^{rs_n}. \quad (4.100)$$

Por outro lado, a imersão $H_{\text{per}}^{rs_n} \hookrightarrow H_{\text{per}}^1$ é compacta, com $n \in \mathbb{N}$, e a imersão $H_{\text{per}}^1 \hookrightarrow L_{\text{per}}^p$ é contínua¹⁴, para qualquer $p \geq 1$. Logo, por [88, Teorema 5.18], a imersão $H_{\text{per}}^{rs_n} \hookrightarrow L_{\text{per}}^p$ é compacta. Disso e de (4.100) obtemos, a menos de subsequência, para todo $p \geq 1$, que

$$\|\varphi_{s_n}\|_{L^p} \rightarrow \|\varphi_*\|_{L^p}, \quad (4.101)$$

isto é,

$$\varphi_{s_n} \longrightarrow \varphi_* \text{ em } L_{\text{per}}^p.$$

Por (4.94), da segunda convergência em (4.96), (4.99), (4.101) e de $s_n \longrightarrow s_*$ segue que

$$(-\Delta)^{s_*} \varphi_* + \omega_* \varphi_* - \varphi_*^3 = 0. \quad (4.102)$$

¹⁴Veja (1.2) e (1.4).

Uma vez que φ_* satisfaz (4.102), pela Proposição 4.30, podemos estender o ramo F_* além de $s_* > 0$, o que não pode acontecer, em razão da maximalidade de s_* . Portanto, $s_* = 1$. ■

Antes de estabelecermos no nosso resultado de unicidade do minimizador, precisamos do seguinte lema, que nos dá a solução explícita de (4.23) para o caso local $s = 1$.

Lema 4.32 (Solução do Caso Local). Uma solução explícita e par para a equação (4.23) para quando $s_* = 1$ é dada, para cada $k \in (0, 1)$, por

$$\varphi_k(x) = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{L} \operatorname{dn}\left(\frac{2K(k)x}{L}; k\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.103)$$

e com frequência da onda correspondente $\omega_* > 0$ que pode ser expressa como

$$\omega_* = -\frac{4K(k)^2(k^2 - 2)}{L^2}, \quad k \in (0, 1), \quad (4.104)$$

com $L = 2\pi$.

Demonstração. Veja [5, Teorema 2.1]. ■

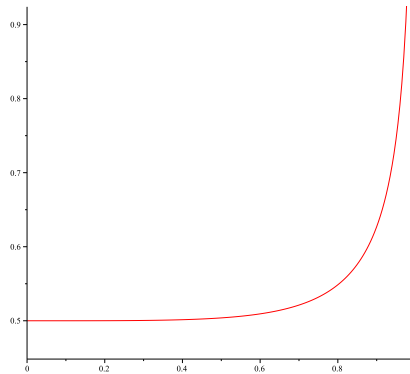


Figura 4.1: Comportamento de $\omega_* > 0$, com $k \in (0, 1)$.

Posteriormente, tendo em mente os resultados já estabelecidos, provamos o seguinte resultado.

Teorema 4.33 (Unicidade do Minimizador Real). Se $s \in (\frac{1}{4}, 1)$ e $\omega > \frac{1}{2}$ são fixados, então o minimizador obtido na Proposição 4.7 e Observação 4.4 é único.

Demonstração. Segue de maneira análoga à [12, Proposição 7], mas incluímos aqui os detalhes. Suponhamos que a Proposição 4.7 nos forneça duas soluções diferentes $\varphi_0, \tilde{\varphi}_0 \in H_{\text{per},e}^\infty$, ambas com a mesma frequência de onda $\omega_0 > 0$. Já que o problema de minimização (4.12) é no espaço Y_τ , em que $\tau > 0$, temos

$$\|\varphi_0\|_{L^4}^4 = \|\tilde{\varphi}_0\|_{L^4}^4 \quad (4.105)$$

Ademais, $(\varphi + 0i, \omega_0), (\tilde{\varphi}_0 + 0i, \tilde{\omega}_0) \in \mathbb{V} \times (0, \infty)$ satisfaz (4.23), para algum $s_0 \in (\frac{1}{4}, 1]$. Dessa forma, pela Proposição 4.31, existem dois ramos suaves de soluções

$$F_\delta : I_\delta \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{V} \times (0, \infty) \quad \text{e} \quad F_{\tilde{\delta}} : I_{\tilde{\delta}} \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{V} \times (0, \infty)$$

para certos $\delta, \tilde{\delta} > 0$, em que

$$F_\delta(s) = (\varphi_s, \omega_s) \quad \text{e} \quad F_{\tilde{\delta}}(s) = (\tilde{\varphi}_s, \tilde{\omega}_s)$$

satisfaz (4.23), para $\omega_s, \tilde{\omega}_s > 0$ e, em particular, $F_\delta(s_0) = (\varphi_0, \omega_0)$ e $F_{\tilde{\delta}}(s_0) = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\omega}_0)$. Além disso, pela unicidade local dada na Proposição 4.31, os ramos suaves F_δ e $F_{\tilde{\delta}}$ não tem ponto em comum. A partir da Proposição 4.30, temos que

$$\varphi_s \rightarrow \varphi_* \text{ em } \mathbb{V} \quad \text{e} \quad \omega_s \rightarrow \omega_* \tag{4.106}$$

e

$$\tilde{\varphi}_s \rightarrow \tilde{\varphi}_* \text{ em } \mathbb{V} \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}_s \rightarrow \tilde{\omega}_*, \tag{4.107}$$

quando $s \rightarrow s_* = 1$, para algum $\omega_*, \tilde{\omega}_* > 0$ e $\varphi_*, \tilde{\varphi}_* \in \mathbb{V}$. Como mencionado em (4.102) e do caso local (veja Lema 4.32), as funções φ_* e $\tilde{\varphi}_*$ são as únicas soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

$$-\varphi_*'' + \omega_*\varphi_* - \varphi_*^3 = 0 \tag{4.108}$$

e

$$-\tilde{\varphi}_*'' + \tilde{\omega}_*\tilde{\varphi}_* - \tilde{\varphi}_*^3 = 0, \tag{4.109}$$

respectivamente. Ainda, pelo item iii) da Proposição 4.31 e por (4.105), obtemos

$$\int_0^{2\pi} \varphi_s^4 dx = \int_0^{2\pi} \varphi_0^4 dx = \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_0^4 dx = \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_s^4 dx. \tag{4.110}$$

Por outro lado, por (4.106), (4.107) e pela continuidade da norma, inferimos

$$\int_0^{2\pi} \varphi_s^4 dx \rightarrow \int_0^{2\pi} \varphi_*^4 dx \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_s^4 dx \rightarrow \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_*^4 dx.$$

Consequentemente, por (4.110),

$$\int_0^{2\pi} \varphi_*^4 dx = \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_*^4 dx. \tag{4.111}$$

Afirmamos que $\omega_* = \tilde{\omega}_*$. Com efeito, para $s_* = 1$ (caso local) e $k \in (0, 1)$ fixado, consideremos a solução $\varphi = \varphi_k$ de

$$-\varphi'' + \omega\varphi - \varphi^3 = 0 \tag{4.112}$$

como em (4.103), em que $\omega := \omega_* > 0$ é dado em (4.104). Derivando a equação (4.112) com respeito a $\omega > 0$, geramos

$$-\frac{d}{d\omega}\varphi'' + \omega\frac{d\varphi}{d\omega} + \varphi - 3\varphi^2\frac{d\varphi}{d\omega} = 0. \tag{4.113}$$

Multiplicando (4.113) por φ , integrando sobre $[0, L]$ e fazendo uma integração por partes, podemos escrever

$$-\int_0^{2\pi} \varphi'' \frac{d\varphi}{d\omega} dx + \omega \int_0^{2\pi} \varphi \frac{d\varphi}{d\omega} dx + \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx - \frac{1}{4} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx = 0. \quad (4.114)$$

Por outro lado, multiplicando (4.112) por φ e integrando sobre $[0, 2\pi]$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^{2\pi} \varphi'' \varphi dx + \omega \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx - \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\varphi')^2 dx + \omega \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx - \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx \end{aligned}$$

e derivando em relação à $\omega > 0$ (pela Regra de Leibniz e da Cadeia) resulta que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} (\varphi')^2 dx + \omega \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx + \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx - \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx = 0 \\ \Rightarrow &\frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} (\varphi')^2 dx + \frac{\omega}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx = 0 \\ \Rightarrow &-\int_0^{2\pi} \varphi'' \frac{d\varphi}{d\omega} dx + \omega \int_0^{2\pi} \varphi \frac{d\varphi}{d\omega} dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx = 0. \quad (4.115) \end{aligned}$$

A partir de (4.114) e (4.115) estabelecemos que

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 dx + \frac{1}{4} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx = 0$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx = -\int_0^{2\pi} \varphi^2 dx < 0. \quad (4.116)$$

Da forma explícita de $\omega > 0$ dado em (4.104) é fácil ver que $\omega > 0$ como uma função de $k \in (0, 1)$ é estritamente crescente (veja Figura 4.1) em $(0, 1)$. Assim,

$$\frac{d\omega}{dk} > 0, \quad \forall k \in (0, 1).$$

Por conseguinte, em virtude de (4.116) e pela Regra da Cadeia, deduzimos que

$$\frac{d}{dk} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx = \frac{d\omega}{dk} \frac{d}{d\omega} \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx < 0, \quad \forall k \in (0, 1).$$

Como $\varphi = \varphi_k$, $k \in (0, 1)$, vemos que a função $P : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$P(k) := \int_0^{2\pi} \varphi^4 dx$$

é injetora. Na sequência, se $k_*, \tilde{k}_* \in (0, 1)$ são os módulos (unicamente determinado) associados com as frequências $\omega_*, \tilde{\omega}_* > 0$, respectivamente, então em razão de (4.111), $P(k_*) = P(\tilde{k}_*)$. Assim, concluímos que $k_* = \tilde{k}_*$. Consequentemente, $\omega_* = \tilde{\omega}_*$ como afirmado. Também, por (4.108) e (4.109), temos que $\varphi_* = \tilde{\varphi}_*$.

A partir da Proposição 4.31, existe um ramo local $F_{\delta_*} : I_{\delta_*} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $I_{\delta_*} = (1 - \delta_*, 1]$, para algum $\delta_* > 0$, tal que para todo $s \in I_{\delta_*}$ o par $F_{\delta_*}(s) = (\varphi_s, \omega_s)$ é única solução de

$$-\varphi_s'' + \omega_s \varphi_s - \varphi_s^3 = 0$$

em uma vizinhança $\{(\varphi, \omega) \in \mathbb{V} \times (0, \infty) ; \|\varphi - \varphi_*\|_V + |\omega - \omega_*| < \varepsilon\}$, para certo $\varepsilon > 0$. Agora, as convergências em (4.106) e (4.107) nos permitem concluir que $F_\delta(s_1) = F_{\bar{\delta}}(s_1)$, para algum $s_1 \in [s_0, 1)$. Entretanto, isso é uma contradição com a unicidade local dos ramos estabelecida no item ii) da Proposição 4.30. Portanto, a unicidade do minimizador está provada. ■

4.4 Estabilidade/Instabilidade Orbital

Um resultado de estabilidade orbital será mostrado nessa seção. É bem sabido que (4.1) tem duas simetrias básicas, a saber, a translação e a rotação. Sendo mais preciso, se $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, com $s \in (\frac{1}{4}, 1]$, é solução de (4.1) então também o são

$$e^{-i\zeta}u(x, t) \quad \text{e} \quad u(x - r, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

para quaisquer que sejam $\zeta, r \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, considerando $u = p + iq$, com $p = \text{Re}(u)$ e $q = \text{Im}(u)$ e escrevendo $\mathbf{u} = (p, q)$ obtemos que (4.1) é invariante sob as transformações

$$\mathbf{R}(\zeta)\mathbf{u}(x, t) := \begin{pmatrix} \cos \zeta & \text{sen } \zeta \\ -\text{sen } \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \mathbf{u}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (4.117)$$

e

$$\mathbf{T}(r)\mathbf{u}(x, t) := \mathbf{u}(x + r, t) = \begin{pmatrix} p(x - r, t) \\ q(x - r, t) \end{pmatrix}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (4.118)$$

para todos $\zeta, r \in \mathbb{R}$.

As ações \mathbf{R} e \mathbf{T} definem grupos unitários em H_{per}^s com gerador infinitesimal dados por

$$\mathbf{R}'(0)\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{T}'(0)\mathbf{u} := \partial_x \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Como já mencionado, a equação (4.1) é invariante sob as ações \mathbf{R} e \mathbf{T} . Dessa forma, definamos a órbita gerada por

$$\Phi = (\varphi, 0)$$

como

$$\Omega_\Phi = \{\mathbf{R}(\zeta)\mathbf{T}(r)\Phi ; \zeta, r \in \mathbb{R}\} \quad (4.119)$$

em que, explicitamente,

$$\mathbf{R}(\zeta)\mathbf{T}(r)\Phi(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \text{sen } \zeta \\ -\text{sen } \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\xi - r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

para $\zeta, r \in \mathbb{R}$.

Uma onda estacionária $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ de (4.1) é dada por

$$u(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \cos(\omega t) \\ \varphi(x) \text{sen}(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (4.120)$$

A pseudométrica¹⁵ $d : H_{\text{per}}^s \times H_{\text{per}}^s \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é definida por

$$d(f, g) = \inf\{\|f - \mathbf{R}(\zeta)\mathbf{T}(r)g\|_{H^s} ; r, \zeta \in \mathbb{R}\}, \quad f, g \in H_{\text{per}}^s.$$

Assim, vemos que dados $f, g \in H_{\text{per}}^s$, a distância dada por d entre f e g é a distância entre f e $\Omega_g = \{\mathbf{R}(\zeta)\mathbf{T}(r)g ; \zeta, r \in \mathbb{R}\}$ que é a órbita gerada por g sob a ação da rotação e da translação, nos permitindo escrever $d(f, g) = d(f, \Omega_g)$. Em particular, $d(f, \Phi) = d(f, \Omega_\Phi)$.

Apresentamos então nossa definição de estabilidade orbital, no contexto da equação cúbica de Schrödinger fracionária.

Definição 4.34 (Estabilidade Orbital). Dizemos que a onda estacionária (4.120) de (4.1) é orbitalmente estável em H_{per}^s se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: se $u_0 \in H_{\text{per}}^s$ satisfaz $\|u_0 - \Phi\|_{H^s} < \delta$, então a solução local $u(t)$ definida no semi-intervalo $[0, +\infty)$ satisfaz $d(u(t), \Omega_\Phi) < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Caso contrário, dizemos que (4.120) é orbitalmente instável em H_{per}^s .

Antes de continuarmos nosso estudo da estabilidade orbital, precisamos voltar a atenção para a boa colocação da equação (4.1).

4.4.1 Boa colocação

Uma vez que a Definição 4.34 requer um resultado de boa colocação, nossa intenção é dar resultados precisos de boa colocação global/local associado a equação de Schrödinger fracionária dada em (4.1), ou seja, resultados de boa colocação para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t - (-\Delta)^s u + |u|^2 u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad s \in (0, 1]. \end{cases} \quad (4.121)$$

com $u_0 \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$. E para tanto, na próxima seção vamos mostrar alguns resultados e desigualdades auxiliares.

Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Fracionária no Contexto Periódico

A fim de mostrar nossos resultados de boa colocação inicialmente vamos mostrar a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para operadores fracionários no caso periódico.

Antes disso, precisamos do próximo lema e começamos em um contexto geral, isto é, inicialmente consideramos uma Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, do tipo cone (para mais detalhes desse tipo de domínio, veja [107, Seção 4.2.3, Equação 7]). No restante dessa seção e para cada $r \in [0, 1)$ e $q \geq 1$ dados, consideremos o espaço de Sobolev fracionário $H_q^r(\Omega) = W^{r,q}(\Omega)$, também conhecido como *Espaço de Slobodeckij* (para detalhes, veja [20, Seção 1.2], [107, Seção 2.3.3, Equação 1] e [107, Seção 4.2.1, Definição 1]). No que segue, vamos lidar com funções de valores reais. Para funções com valores complexos, os argumentos são semelhantes.

¹⁵Para mais detalhes desse conceito consulte [84, Capítulo 1, Seção 6]

Lema 4.35 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para Domínios do Tipo Cone). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado do tipo cone. Se $p_0 > 1$, $\theta \in (0, 1)$, $s \in (0, 1)$, e $p > 1$ e $r > 0$ são tais que

$$r = \theta s \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{2},$$

então existe $C_1 > 0$ de modo que,

$$\|f\|_{H_p^r(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{H^s(\Omega)}^\theta, \quad (4.122)$$

para todo $f \in L^{p_0}(\Omega) \cap H^s(\Omega)$.

Demonstração. Inicialmente notemos que de acordo com [107, Seção 4.3.1, Teorema 2] a relação de interpolação

$$(H_{p_0}^{s_0}(\Omega), H_{p_1}^s(\Omega))_\theta = H_p^r(\Omega),$$

é válida, em que $p_1, p_0 > 1$, $\theta \in (0, 1)$, $s_0, s \geq 0$, e $p > 1$ e $r > 0$ são tais que

$$r = s_0(1 - \theta) + \theta s \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Dessa forma, como consequência de [107, Seção 1.3.3, Equação 5], temos a seguinte *desigualdade multiplicativa*:

$$\|f\|_{H_p^r(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{H_{p_0}^{s_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{H_{p_1}^s(\Omega)}^\theta, \quad \forall f \in H_{p_0}^{s_0}(\Omega) \cap H_{p_1}^s(\Omega), \quad (4.123)$$

para alguma constante $C_0 > 0$.

Tomando em particular, $p_1 = 2$, $s_0 = 0$ e $s \in (0, 1)$, vemos que

$$r = \theta s \in (0, 1) \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{2}.$$

Logo, por (4.123), obtemos que

$$\|f\|_{H_p^r(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{H^s(\Omega)}^\theta, \quad \forall f \in L^{p_0}(\Omega) \cap H^s(\Omega),$$

para algum $C_1 > 0$. ■

Corolário 4.36. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado do tipo cone. Se $p_0 > 1$, $\theta \in (0, 1)$, $s \in (0, 1)$ e $p > 1$ são tais que

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{2},$$

então existe $C_2 > 0$ de modo que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^{p_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{H^s(\Omega)}^\theta,$$

para todo $f \in L^{p_0}(\Omega) \cap H^s(\Omega)$.

Demonstração. É claro que $r = \theta s \in (0, 1)$. Assim, a imersão¹⁶ $H_p^r(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e o Lema 4.35 implicam que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^{p_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{H^s(\Omega)}^\theta, \quad \forall f \in L^{p_0}(\Omega) \cap H^s(\Omega),$$

para algum $C_2 > 0$, desde que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{2}.$$

■

Como um caso particular do Lema 4.35 no contexto periódico, estabelecemos o seguinte teorema.

Teorema 4.37 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Periódica). Seja $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{R}^n$ o toro n -dimensional. Se $\theta \in (0, 1)$, $s \in (0, 1)$ e $r > 0$ são tais que $r = \theta s$, então existe $C_3 > 0$ de modo que

$$\|f\|_{H_{\text{per}}^r(\mathbb{T}^n)} \leq C_3 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T}^n)}^{1-\theta} \|f\|_{H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}^n)}^\theta, \quad (4.124)$$

para todo $f \in L_{\text{per}}^2(\mathbb{T}^n) \cap H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. Uma vez que o toro n -dimensional $\mathbb{T}^n \equiv [-\pi, \pi]^n \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado do tipo cone (veja [107, Seção 4.2.3, Observação 5]), obtemos que o Lema 4.35 é válido para $\Omega = \mathbb{T}^n$, $p_0 = 2$ e $r = \theta s \in (0, 1)$. Além do mais, por [107, Seção 4.6.1, Equação 2] e [108, Seção 9.1.3, Observação 1] as normas em $H_{\text{per}}^s(\Omega)$ e $H^s(\Omega)$ são equivalentes e uma vez que $L^m(\mathbb{T}^n) \equiv L_{\text{per}}^m(\mathbb{T}^n)$, para todo $m \geq 1$, segue por (4.122) a seguinte desigualdade

$$\|f\|_{H_{\text{per}}^r(\mathbb{T}^n)} \leq C_3 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T}^n)}^{1-\theta} \|f\|_{H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}^n)}^\theta, \quad \forall f \in L_{\text{per}}^2(\mathbb{T}^n) \cap H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}^n),$$

em que $C_3 > 0$ é uma constante. ■

Corolário 4.38 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Periódica 1-dimensional). Se $s \in (\frac{1}{4}, 1)$, então existe uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\|f\|_{L_{\text{per}}^4(\mathbb{T})}^4 \leq C_4 \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4-\frac{1}{s}} + C_4 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^4, \quad (4.125)$$

para todo $f \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$.

Demonstração. Primeiramente, tomando, em particular, $n = 1$ no Teorema 4.37, temos que

$$\|f\|_{H_{\text{per}}^r(\mathbb{T})} \leq C_5 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{1-\theta} \|f\|_{H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})}^\theta, \quad \forall f \in L_{\text{per}}^2(\mathbb{T}) \cap H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}), \quad (4.126)$$

em que $C_5 > 0$ é uma constante. Aqui, estamos considerando $r = \theta s \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$ e $s \in (0, 1)$. Devemos notar que, por (1.2), a imersão $H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})$ ocorre, implicando a igualdade $L_{\text{per}}^2(\mathbb{T}) \cap H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}) = H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$.

¹⁶Veja [107, Seção 4.6.1, Equação (4)]

Usando a definição da norma de $H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$, dada em (1.6), obtemos a existência de uma certa constante $C_6 > 0$ que satisfaz

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_{\text{per}}^r(\mathbb{T})}^4 &\leq C_6 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4(1-\theta)} \|f\|_{H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})}^{4\theta} \\ &= C_6 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4(1-\theta)} \left(\|f\|_{H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})}^2 \right)^{2\theta} \\ &= C_6 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4(1-\theta)} \left(\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^2 + \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^2 \right)^{2\theta}, \quad \forall f \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Na sequência, graças a [106, Lemma 3.197], existe $C_7 > 0$ tal que

$$\left(\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^2 + \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^2 \right)^{2\theta} \leq C_7 \left(\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4\theta} + \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4\theta} \right), \quad \forall f \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}).$$

Assim, existe $C_8 > 0$ de modo que

$$\|f\|_{H_{\text{per}}^r(\mathbb{T})}^4 \leq C_8 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4(1-\theta)} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4\theta} + C_8 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^4, \quad \forall f \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}). \quad (4.127)$$

Tomando $r = \frac{1}{4}$, temos a imersão $H_{\text{per}}^r(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_{\text{per}}^4(\mathbb{T})$ (veja [13, Teorema 4.2]). Portanto, (4.127) implica, para $s \in (\frac{1}{4}, 1)$ e algum $C_4 > 0$, que

$$\|f\|_{L_{\text{per}}^4(\mathbb{T})}^4 \leq C_4 \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{4-\frac{1}{s}} + C_4 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^4, \quad \forall f \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}). \quad (4.128)$$

■

Observação 4.39. Convém observarmos que (4.128) vale, pois

$$r = \theta s \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 4\theta = \frac{1}{s} \quad \text{e} \quad 4(1-\theta) = 4 - \frac{1}{s}.$$

Ademais, vemos ainda que nesse caso, devemos considerar $\theta \in (\frac{1}{4}, 1)$, pois assim, $s = \frac{1}{4\theta} \in (\frac{1}{4}, 1)$. □

Observação 4.40. O resultado obtido no Corolário 4.38 é na verdade um pouco mais geral. Com efeito, em um primeiro momento seja $p > 1$ e $r = \theta s$, com $\theta, s \in (0, 1)$. Usando (4.126) e repetindo alguns argumentos usados no Corolário 4.38, vemos que existem constantes $c_0, c_1 > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} \|f\|_{H_{\text{per}}^r(\mathbb{T})}^p &\leq c_0 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p(1-\theta)} \|f\|_{H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})}^{p\theta} \\ &= c_0 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p(1-\theta)} \left(\|f\|_{H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})}^2 \right)^{\frac{p\theta}{2}} \\ &\leq c_1 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p(1-\theta)} \left(\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p\theta} + \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p\theta} \right) \\ &= c_1 \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p\theta} \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p(1-\theta)} + c_1 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^p, \quad \forall f \in H_{\text{per}}^s(\mathbb{T}). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Consideremos $p > 2$ e $r = \frac{1}{p} \in (0, \frac{1}{2})$. Desse modo, como consequência de [13, Teorema 4.2] a imersão $H_{\text{per}}^r(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_{\text{per}}^p(\mathbb{T})$ ocorre, para todo $p \in (2, 4]$. Disso e de (4.129), garantimos a existência de um $c_2 > 0$ que cumpre

$$\|f\|_{L_{\text{per}}^p(\mathbb{T})}^p \leq c_2 \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{s}} \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^{p-\frac{1}{s}} + c_2 \|f\|_{L_{\text{per}}^2(\mathbb{T})}^p$$

para todo $p \in (2, 4]$ e $s = \frac{1}{p\theta} \in (\frac{1}{p}, 1)$. □

Resultados de Boa Colocação

Vemos que Cho, Hwang, Kwon e Lee em [33] e, também, Demirbas, Erdoğan e Tzirakis em [41] estudaram a existência e unicidade para o problema de Cauchy (4.121) para o caso $s = \frac{\alpha}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$ e soluções locais foram determinadas em $H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$ para $s > \frac{2-\alpha}{4}$. Para $s > \frac{5\alpha+1}{12}$, os autores determinaram soluções globais. Em particular, vemos que o problema de Cauchy é localmente bem colocado em $H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$, para $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Além disso, Thirouin em [127] estudou o problema de Cauchy (4.121) para $s = \frac{\alpha}{2} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. O autor provou que (4.121) é localmente bem colocado em $H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$ quando $s > \gamma$, em que $\gamma > 0$ é tal que $\gamma > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}$. Como consequência, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.41 (Boa Colocação Local). Seja $s \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. O problema de Cauchy associado à equação (4.1) é localmente bem colocado em H_{per}^s . Mais precisamente, para qualquer $u_0 \in H_{\text{per}}^s$ existe $T > 0$ e uma única solução $u \in C([0, T], H_{\text{per}}^s)$ tal que $u(0) = u_0$ e satisfaz (4.1). Além disso, para cada $T_0 \in (0, T)$ a aplicação dado-solução

$$u_0 \in H_{\text{per}}^s \longmapsto u \in C([0, T_0], H_{\text{per}}^s)$$

é contínua.

Agora, vamos usar as quantidades conservadas E e F dadas, respectivamente por (4.4) e (4.5) combinadas com afirmação contida no Corolário 4.38 para obter a boa colocação global (no tempo) para o Problema de Cauchy (4.121). De fato, do exposto acima, em particular para $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ existe uma solução local $u \in C([0, T], H_{\text{per}}^s)$ de (4.121), para algum $T > 0$ e com dado inicial $u_0 \in H_{\text{per}}^s$. Da quantidade conservada E dada em (4.4) é fácil ver que

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^2 = 2E(u_0) + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4, \quad t \in [0, T].$$

Pelo Corolário 4.38 obtemos a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^2 &\leq 2E(u_0) + C\|u(t)\|_{L^2}^{4-\frac{1}{s}}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{s}} + C\|u(t)\|_{L^2}^4 \\ &= 2E(u_0) + C\|u_0\|_{L^2}^{4-\frac{1}{s}}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{s}} + C\|u_0\|_{L^2}^4, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

em que estamos usando o fato que a norma de L_{per}^2 é uma quantidade conservada (veja a quantidade conservada F em (4.5)).

Definamos

$$f(t) := \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^2, \quad \forall t \in [0, T],$$

o que implica

$$f(t) \leq 2E(u_0) + C\|u_0\|_{L^2}^{4-\frac{1}{s}}f(t)^{\frac{1}{2s}} + C\|u_0\|_{L^2}^4.$$

Mas, por outro lado, como $s > \frac{1}{2}$, isto é, $\frac{1}{2s} < 1$, então existe $M_0 > 0$ tal que

$$f(t)^{\frac{1}{2s}} < M_0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Logo,

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^2 = f(t) \leq 2E(u_0) + c_0\|u_0\|_{L^2}^{4-\frac{1}{s}}M_0 + c_1\|u_0\|_{L^2}^4, \quad \forall t \in [0, T].$$

Nesses termos,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^2 < \infty$$

e, conseqüentemente,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^s}^2 = \sup_{t \in [0, T]} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(t)\|_{L^2}^2 + \|u(t)\|_{L^2}^2 < \infty. \quad (4.130)$$

Portanto, por consequência de (4.130), obtemos o seguinte cenário para soluções globais em $H_{\text{per}}^s(\mathbb{T})$:

- Quando $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, dada a existência de soluções locais (Proposição 4.41), podemos concluir a existência de soluções globais no tempo.
- Quando $s = \frac{1}{2}$, usamos os resultados contidos em [24] para concluir a existência de soluções globais no tempo para $\|u_0\|_{L^2}$ pequeno o suficiente. É esperado *blow-up* em tempo finito para $\|u_0\|_{L^2}$ grande o suficiente.
- Quando $s = 1$ temos o caso local e o resultado de boa colocação global é bem conhecido e pode ser encontrado em [25, Teorema 2.2, Capítulo V].

Resumindo nossa análise realizada acima, estabelecemos o seguinte resultado de boa colocação global para o problema de Cauchy (4.121) associado à equação não-linear de Schrödinger Fracionária dada em (4.1).

Teorema 4.42 (Boa Colocação Global). Seja $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. O problema de Cauchy associado à equação (4.1) é globalmente bem colocado em H_{per}^s . Mais precisamente, para qualquer $u_0 \in H_{\text{per}}^s$ existe uma única solução global $u \in C(\mathbb{R}_+, H_{\text{per}}^s)$ tal que $u(0) = u_0$ e satisfaz (4.1). Além disso, para cada $T > 0$ a aplicação dado-solução

$$u_0 \in H_{\text{per}}^s \longmapsto u \in C([0, T], H_{\text{per}}^s)$$

é contínua.

Observação 4.43. Em [24] os autores aplicam o método de Galerkin a fim de obter um resultado de boa colocação do problema (4.121). Eles conseguem obter uma estimativa *a priori* fazendo uso de uma Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, porém sem referenciar ou provar tal desigualdade. Contudo, fazendo uso da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg provada na Proposição 4.38, os resultados por eles obtidos não se alteram e se mostram continuar válidos. Também, de acordo com o nosso melhor conhecimento, outro modo de ver que a problema de Cauchy admite apenas boa-colocação global quando $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ é observarmos que seguindo o método de Galerkin, como feito em [24], devemos nos restringir

a $\theta \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, ou seja, $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Pois, em certo momento devemos aplicar a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ ([47, Apêndice B.2]) para $p = \frac{1}{2\theta} \in (1, 2)$ e com $q > 1$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, isto é, $q = \frac{1}{1-2\theta} \geq 2$, $\theta \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. \square

Agora, dado $u_0 \in H_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}$, vamos tentar dar uma resposta mais precisa a seguinte afirmação:

Quando $s = \frac{1}{2}$, usamos os resultados contidos em [24] para concluir a existência de soluções globais no tempo para $\|u_0\|_{L^2}$ pequeno o suficiente. (4.131)

Em outras palavras, nosso objetivo é precisar o “quão pequeno” deve ser $\|u_0\|_{L^2} \in \mathbb{R}_+$ para que a asserção em (4.131) seja verdadeira. Vale destacar que o caso $s = \frac{1}{2}$ da equação de Schrödinger fracionária (4.1) é conhecido como o *caso crítico*.

Vejamos, da quantidade conservada E , em (4.4), não é difícil verificar que se $u \in C([0, T], H_{\text{per}}^{\frac{1}{2}})$ é uma solução local com dado inicial $u_0 \in H_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}$ e algum $T > 0$, então pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg dada no Corolário 4.38, vemos que

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}u(t)\|_{L^2}^2 &= 2E(u_0) + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4 \\ &\leq 2E(u_0) + \frac{C_4}{2}\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}u(t)\|_{L^2}^2\|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{C_4}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 \\ &= 2E(u_0) + \frac{C_4}{2}\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}u(t)\|_{L^2}^2\|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{C_4}{2}\|u_0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(1 - \frac{C_4}{2}\|u_0\|_{L^2}^2\right)\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}u(t)\|_{L^2}^2 \leq 2E(u_0) + \frac{C_4}{2}\|u_0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Dessa forma, teremos uma “boa” estimativa se, e somente se, $(1 - \frac{C_4}{2}\|u_0\|_{L^2}^2) > 0$ ou em outras palavras $\|u_0\|_{L^2} < \sqrt{\frac{2}{C_4}}$, pois nesse caso

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}u(t)\|_{L^2}^2 < \left(2E(u_0) + \frac{C_4}{2}\|u_0\|_{L^2}^2\right) \cdot \left(1 - \frac{C_4}{2}\|u_0\|_{L^2}^2\right)^{-1} < \infty, \quad \forall t \in [0, T].$$

E, por conseguinte,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}} < \infty, \quad \forall T > 0,$$

desde que o dado inicial $u_0 \in H_{\text{per}}^s$ satisfaça $\|u_0\|_{L^2} < \sqrt{\frac{2}{C_4}}$.

Na verdade, com o explanado acima, provamos o seguinte resultado.

Proposição 4.44 (Boa Colocação Global do Caso Crítico). Se $u \in C([0, T], H_{\text{per}}^{\frac{1}{2}})$ é uma solução local do problema de Cauchy (4.121) com dado inicial $u_0 \in H_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}$ e algum $T > 0$, de modo que

$$\|u_0\|_{L^2} < \sqrt{\frac{2}{C_4}} \quad (4.132)$$

então a solução u pode ser estendida globalmente. Equivalentemente, o problema de Cauchy (4.121) é globalmente bem colocado na bola $B(0, \sqrt{2}C_4^{-\frac{1}{2}}) \subset H_{\text{per}}^{\frac{1}{2}}$.

Observação 4.45. Claro que a condição dada em (4.132) para o dado inicial da solução não é a melhor possível, ou seja, a estimativa que fizemos é “grossa”, uma vez que não conseguimos garantir que a constante $C_4 > 0$ que aparece na Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg dada no Corolário 4.38 é a constante ótima. Uma maneira de se obter uma estimativa melhor para a norma L^2_{per} do dado inicial é considerar, para $s \in (0, 1)$, o problema de minimização

$$\inf_{v \in H^s_{\text{per}} \setminus \{0\}} \mathcal{W}(v) = \Sigma \quad (4.133)$$

em que o funcional $\mathcal{W} : H^s_{\text{per}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{W}(u) = \frac{\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L^2}^{\frac{1}{s}} \|u\|_{L^2}^{4-\frac{1}{s}} + \|u\|_{L^2}^4}{\|u\|_{L^4}^4}, \quad \forall u \in H^s_{\text{per}} \setminus \{0\}.$$

é o bem conhecido *funcional de Weinstein*¹⁷, de modo que, nesse caso, a constante ótima da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg é $C_4 = \Sigma^{-1}$. Entretanto, diferente de quando a equação (4.1) está colocando em \mathbb{R} (veja [7] e [130]), não conseguimos garantir existência de minimizador para o problema (4.133), no contexto periódico. \square

4.4.2 Convexidade da Função d

A Proposição 4.27 nos permite considerar uma curva de classe C^1

$$\omega \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \mapsto \varphi = \varphi_\omega \in H^{2s}_{\text{per}}$$

de soluções de (4.23). Esse fato nos possibilita definir a função $d : (\frac{1}{2}, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(\omega) = E(\varphi, 0) + \omega F(\varphi, 0).$$

Lembrando que $E'(\varphi, 0) + \omega F'(\varphi, 0) = G'(\varphi, 0) = 0$, para cada $\omega > \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} d'(\omega) &= E'(\varphi, 0) \frac{d}{d\omega}(\varphi, 0) + \omega F'(\varphi, 0) \frac{d}{d\omega}(\varphi, 0) + F(\varphi, 0) \\ &= F(\varphi, 0) = \frac{1}{2} \int_0^L \varphi^2(x) dx \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$d''(\omega) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^L \varphi^2 dx, \quad \omega \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right). \quad (4.134)$$

O estudo de estabilidade/instabilidade, de modo geral, requer assegurar o sinal da quantidade $d''(\omega) \in \mathbb{R}$, para valores $\omega > \frac{1}{2}$, ou seja, determinar a convexidade da função d . Esse é o objetivo dessa seção, estabelecer (pelo menos numericamente) para quais valores de $s \in (\frac{1}{4}, 1)$ tem-se $d''(\omega) > 0$ ou $d''(\omega) < 0$. De modo que, sob condições adequadas de boa colocação, se $d''(\omega) > 0$, então a onda periódica Φ é orbitalmente estável, em H^s_{per} . E se $d''(\omega) < 0$, então a onda periódica Φ é orbitalmente instável, em H^s_{per} .

¹⁷Veja por exemplo [92] e [130]

Experimentos Numéricos - Trabalho Realizado em Parceria

Objetivando um melhor entendimento da convexidade da função d , acima mencionada, nessa seção apresentamos experimentos numéricos que foram realizados em parceria com H. Borluk, G.M. Muslu (veja [12] e [21] para detalhes). Em verdade, nessa seção geramos soluções de ondas periódicas estacionárias da equação (4.23) usando o Método de Iteração de Petviashvili. O método é amplamente usado para gerar soluções de ondas viajantes ([44, 45, 80, 104, 114]) e, especificamente no caso da Schrödinger fracionária, alguns estudos numéricos também foram determinados em [71]. Além de fornecer um método numérico para apresentar o perfil *single-lobe* periódico da solução $\varphi \in H_{\text{per}}^\infty$ dada na Proposição 4.7, nossa intenção é determinar o sinal da quantidade

$$q_\omega := \frac{d}{d\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 dx = \frac{d}{d\omega} \|\varphi\|_{L^2}^2, \quad \omega > \frac{1}{2}. \quad (4.135)$$

que é útil a fim de determinar a convexidade da função d , devido a (4.134).

Seja $s \in (0, 1)$ e $\omega > \frac{1}{2}$. Aplicando a transformada de Fourier na equação (4.23) obtemos

$$(|\xi|^{2s} + \omega) \widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\varphi^3}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{Z}. \quad (4.136)$$

Um algoritmo iterativo para um cálculo numérico de $\widehat{\varphi}$ para a equação (4.136) pode ser proposta na forma

$$\widehat{\varphi}_{n+1}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi_n^3}(\xi)}{|\xi|^{2s} + \omega}, \quad \xi \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

em que $\widehat{\varphi}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, é a transformada de Fourier de φ_n que é a n -ésima iteração da solução numérica. Nesse contexto, as soluções são construídas sobre a condição

$$|\xi|^{2s} + \omega \neq 0.$$

Uma vez que o algoritmo acima é usualmente divergente, apresentamos finalmente o Método de Petviashvili como

$$\widehat{\varphi}_{n+1}(\xi) = \frac{(M_n)^\nu}{|\xi|^{2s} + \omega} \widehat{\varphi_n^3}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{R}$$

introduzindo o fator estabilizador

$$M_n = \frac{((-\Delta)^s + \omega)\varphi_n, \varphi_n)_{L^2}}{(\varphi_n^3, \varphi_n)_{L^2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n \in H_{\text{per}}^{2s}(\mathbb{T})$$

chamado de quociente de Petviashvili. Aqui, o parâmetro livre $\nu \in \mathbb{R}$ é escolhido como $\nu = 1.5$ para uma convergência mais rápida. O processo iterativo é controlado pelo erro entre duas iterações consecutivas dada por

$$\text{Error}(n) = \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_{L_{\text{per}}^\infty}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e o erro do fator de estabilização dado por $|1 - M_n|$, para cada $n \in \mathbb{N}$. O resíduo do processo de interação é determinado por $\text{RES}(n) = \|\mathcal{T}\varphi_n\|_{L_{\text{per}}^\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, com $\mathcal{T}\varphi = (-\Delta)^s \varphi + \omega\varphi - \varphi^3$.

A solução onda estacionária periódica da equação de Schrödinger fracionária $s = 1$ é dada no Lema 4.32.

Para testar a precisão do nosso esquema, comparamos a solução exata (4.103) com a solução numérica obtida usando (4.54) como estimativa inicial. O intervalo do espaço é $[-\pi, \pi]$ e o número de pontos de grade é escolhido como $N = 2^{10}$. No primeiro painel da Figura 4.2, apresentamos as soluções exatas e numéricas para a frequência $\omega = 1$. Como vemos na figura, as soluções exata e numérica coincidem. Nos demais painéis da Figura 4.2, são apresentadas as variações de três erros diferentes com o número de iteração. Esses resultados mostram que nosso esquema numérico captura a solução notavelmente bem.

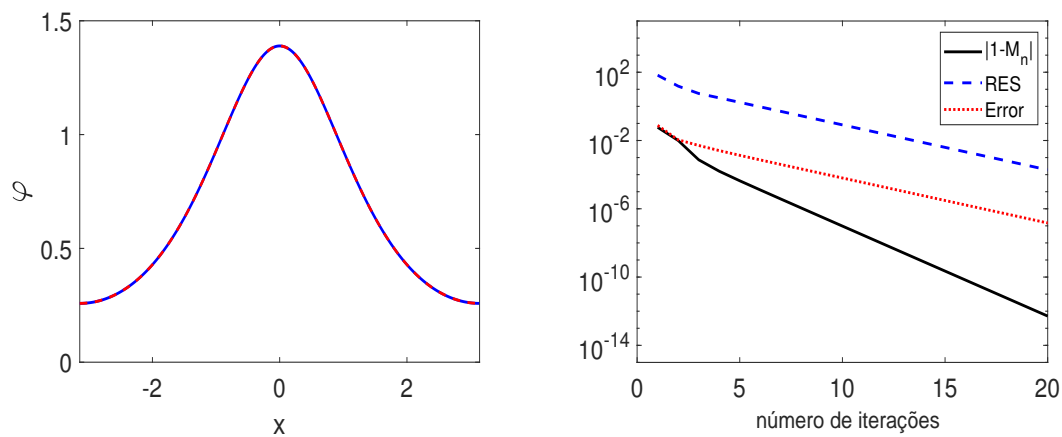


Figura 4.2: A solução exata e a solução numérica para a equação de Schrödinger Fracionária com frequência da onda $\omega = 1$ e a variação de $\text{Error}(n)$, $|1 - M_n|$ e RES com o número de iterações em escala *semi-log*.

As soluções exatas da equação Schrödinger fracionária não são conhecidas para $s \in (0, 1)$. Na Figura 4.3 ilustramos os perfis de ondas periódicas para vários valores de $s \in (0, 1)$, com $\omega = 1$. O termo não linear torna-se dominante com valores decrescentes de $s \in (0, 1)$. Portanto, a onda se inclina como esperado.

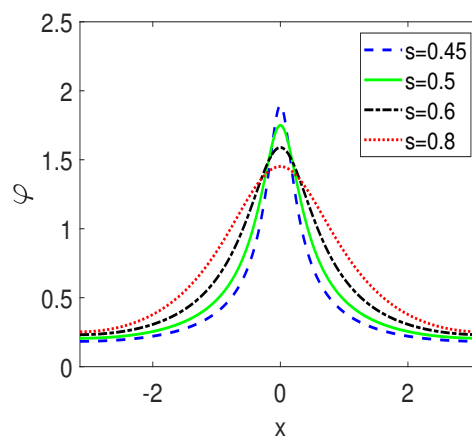


Figura 4.3: Perfis numéricos das ondas para vários valores de $s \in (0, 1)$, com $\omega = 1$.

No restante dos experimentos numéricos, o sinal de \mathbf{q}_ω em (4.135), para diferentes valores de $s \in (0, 1)$, é determinado investigando quando o valor de $\|\varphi\|_{L^2}^2$ é crescente ou decrescente com respeito a $\omega > \frac{1}{2}$. O intervalo $\omega \in (\frac{1}{2}, 50]$ é discretizado em subintervalos 1000. Para cada valor de $\omega \in (\frac{1}{2}, 50]$, geramos o perfil de onda periódica usando o método de iteração de Petviashvili no intervalo $[-\pi, \pi]$ escolhendo $N = 2^{14}$. Então, avaliamos o valor de $\|\varphi\|_{L^2}^2$.

Na Figura 4.4 ilustramos a variação de $\|\varphi\|_{L^2}^2$ com $\omega > \frac{1}{2}$ para $s = 0.35$, $s = 0.45$ e $s = 0.5$. Como podemos ver na figura $\|\varphi\|_{L^2}^2$ é decrescente de modo que \mathbf{q}_ω é negativo. Resultados numéricos indicam que a onda periódica é orbitalmente instável para $s \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

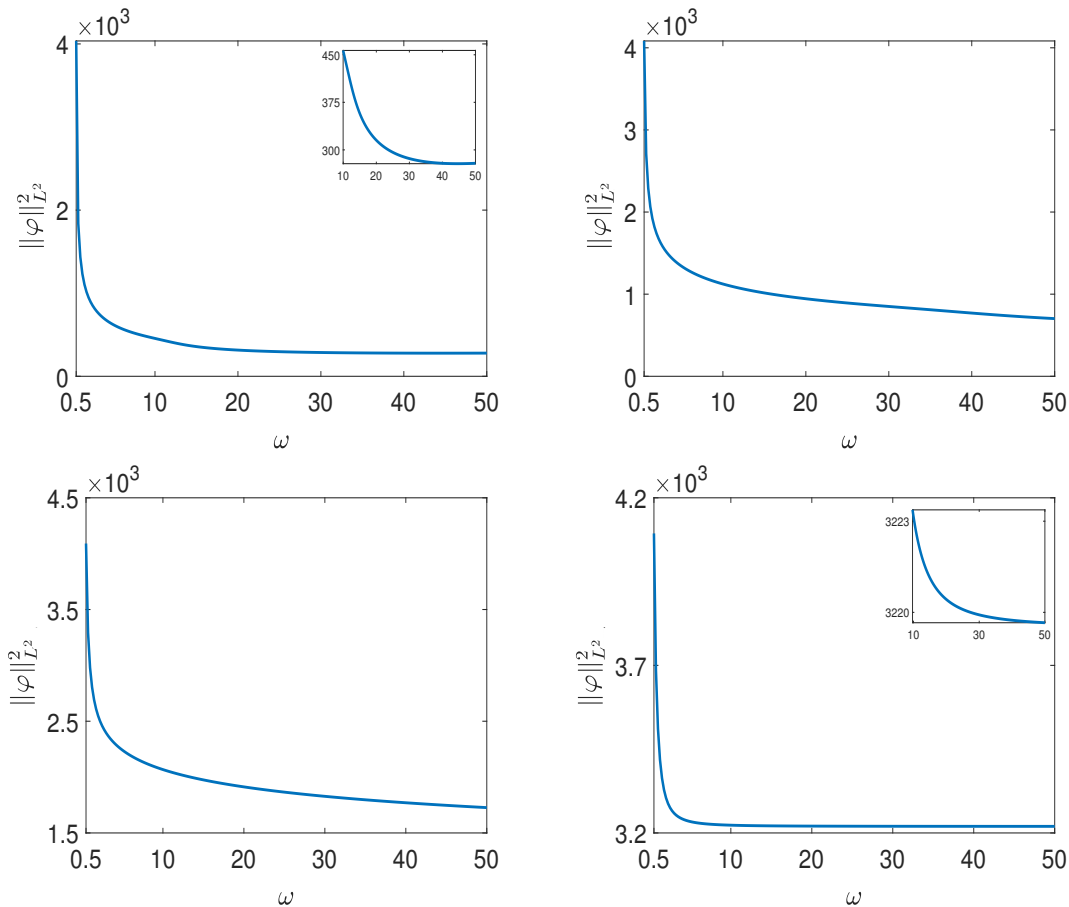


Figura 4.4: A variação de $\|\varphi\|_{L^2}^2$ com ω para $s = 0,35$ (canto superior esquerdo), $s = 0,4$ (canto superior direito), $s = 0,45$ (canto inferior esquerdo), $s = 0,5$ (canto inferior direito).

A variação de $\|\varphi\|_{L^2}^2$ com $\omega > \frac{1}{2}$ para $s = 0.6$ e $s = 0.8$ é retratado na Figura 4.5 (página 124). Uma vez que $\|\varphi\|_{L^2}^2$ é crescente, \mathbf{q}_ω é positivo. Logo, os resultados numéricos mostram estabilidade orbital da onda periódica para $s \in (0.6, 1)$.

Realizamos experimentos numéricos para vários valores de $s \in (0.5, 0.6)$. Os resultados numéricos indicam que existe uma frequência de onda crítica $\omega_c > \frac{1}{2}$ tal que \mathbf{q}_ω é negativo para $\omega < \omega_c$ e positivo para $\omega > \omega_c$ para valores $s \in (0.5, 0.6)$. Na Figura 4.6 (página 124), a variação de $\|\varphi\|_{L^2}^2$ com $\omega > \frac{1}{2}$ é apresentada para $s = 0.52, 0.55, 0.57$ e $s = 0.59$. Como podemos ver na Figura 4.6, $\|\varphi\|_{L^2}^2$ é crescente até a frequência de onda crítica $\omega_c > \frac{1}{2}$, e posteriormente é decrescente.

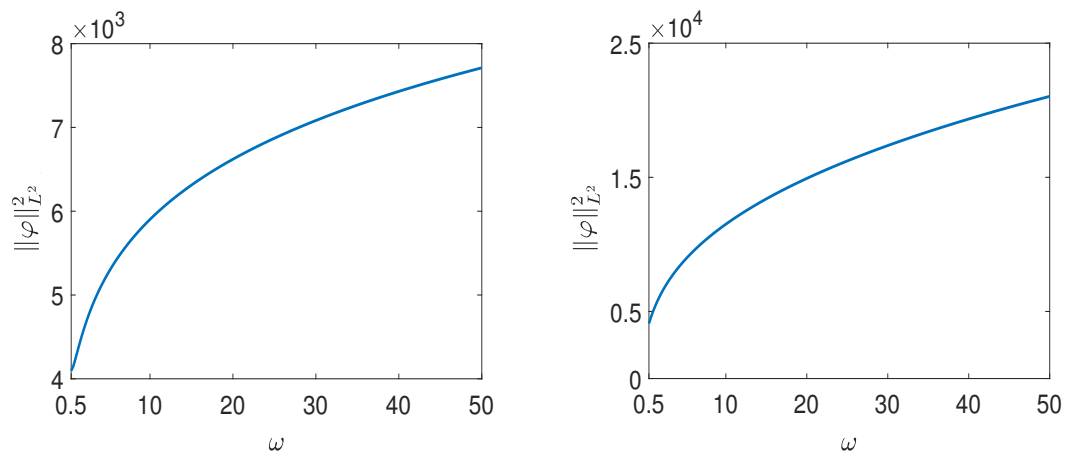


Figura 4.5: A variação de $\|\varphi\|_{L^2}^2$ com $\omega > \frac{1}{2}$ para $s = 0.6$ (painel esquerdo) e $s = 0.8$ (painel direito).

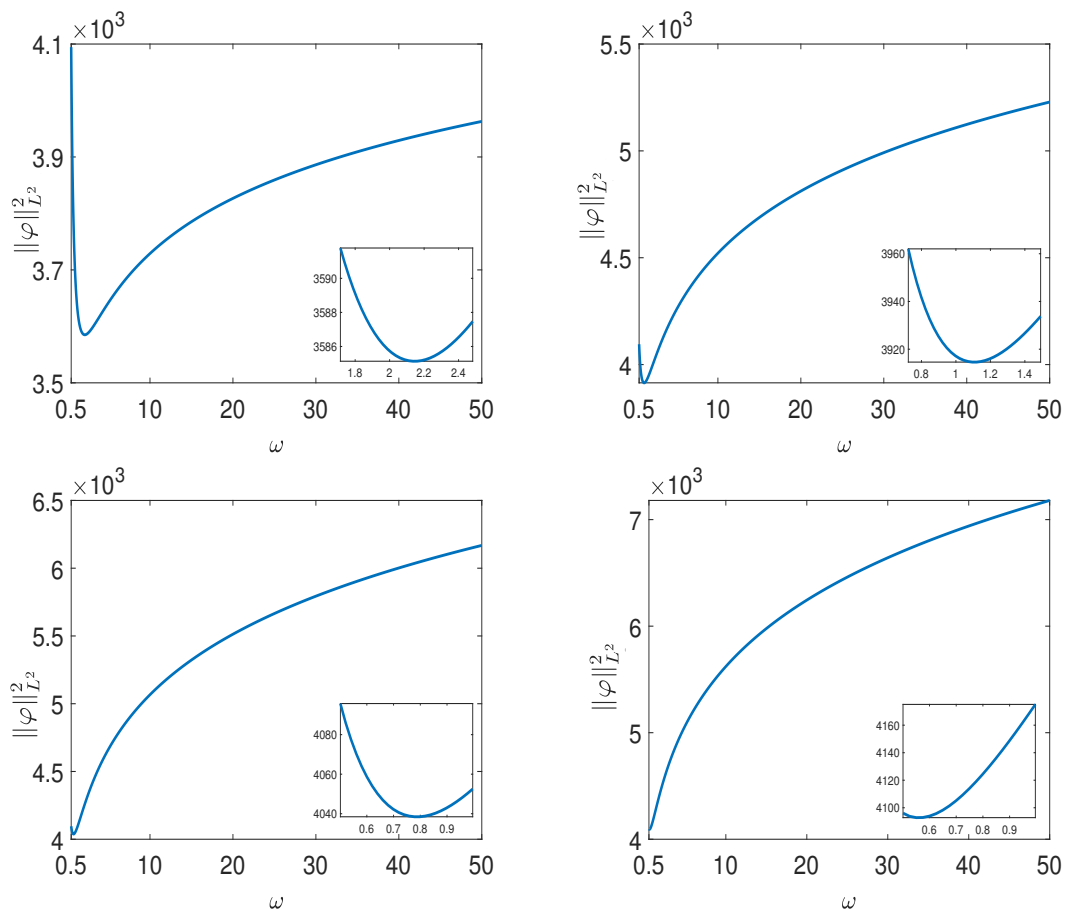


Figura 4.6: A variação de $\|\varphi\|_{L^2}^2$ com $\omega > \frac{1}{2}$ para $s = 0.52$ (canto superior esquerdo), $s = 0.55$ (canto superior direito), $s = 0.57$ (canto inferior esquerdo), $s = 0.59$ (canto inferior direito).

4.4.3 O Resultado de Estabilidade/Instabilidade

A partir de nossos experimentos numéricos feitos na Seção 4.4.2 estamos em condição de estabelecer o seguinte resultado de estabilidade/instabilidade orbital no que concerne a equação fracionária de Schrödinger em (4.1).

Teorema 4.46. Sejam $\varphi = \varphi_\omega \in H_{\text{per}}^\infty$ a solução positiva, periódica e com perfil *single-lobe* obtida no Proposição 4.7, para todo $\omega > \frac{1}{2}$, e $s^* \simeq 0.6$.

- i) Se $s \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, então a onda Φ é orbitalmente instável em H_{per}^s , para todo $\omega > \frac{1}{2}$;
- ii) se $s \in [s^*, 1) \subset (\frac{1}{2}, 1)$, então a onda Φ é orbitalmente estável em H_{per}^s , para todo $\omega > \frac{1}{2}$;
- iii) se $s \in (\frac{1}{2}, s^*) \subset (\frac{1}{2}, 1)$, então existe $\omega_c > \frac{1}{2}$ tal que

$$\omega < \omega_c \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_\omega < 0$$

e

$$\omega > \omega_c \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_\omega > 0,$$

ou seja, se $\omega < \omega_c$ então a onda Φ é orbitalmente instável em H_{per}^s e se $\omega > \omega_c$, então a onda é orbitalmente estável em H_{per}^s .

Demonstração. Pela Proposição 4.29, vemos que $n(\mathcal{L}) = 1$ e $\text{Ker}(\mathcal{L}) = [(\varphi', 0), (0, \varphi)]$ e esses dois fatos básicos são cruciais para determinar resultados de estabilidade/instabilidade orbital para ondas periódicas. Uma vez que as propriedades espectrais são válidas, a prova de estabilidade orbital segue similarmente como em [101, Teorema 4.17] (veja também [98, Teorema 6.11]), mas, uma vez que, tal procedimento é baseado na construção de uma função de Lyapunov adequada, precisamos levar em consideração um resultado de boa colocação global, como o do Teorema 4.42, para provar estabilidade em termos de duas simetrias definidas para a órbita Ω_Φ , dada em (4.119).

Para estabilidade orbital, precisamos considerar a condição de Vakhitov-Kolokolov $\mathbf{q}_\omega > 0$, com $\omega > \frac{1}{2}$, que é equivalente a considerar $(\mathcal{L}_1 \Psi, \Psi)_{L^2} < 0$, em que

$$\Psi = -\frac{d}{d\omega}\varphi, \quad \mathcal{L}_1 \Psi = \varphi \quad \text{e} \quad (\mathcal{L}_1 \Psi, \varphi')_{L^2} = 0.$$

Nesse caso, pela abordagem numérica apresentada acima e pelo resultado de boa colocação global dado no Teorema 4.42 para $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, podemos concluir estabilidade orbital em H_{per}^s quando $s \in [s^*, 1)$ e $\omega > \frac{1}{2}$ e também quando $s \in (\frac{1}{2}, s^*)$ e $\omega > \omega_c$. Estabelecendo assim, totalmente o item ii) e parcialmente o item iii).

Para instabilidade orbital em $H_{\text{per},e}^s$, primeiro usamos a abordagem em [56] devido a Grillakis, Shatah e Strauss. Nesse contexto, um resultado de boa colocação também é necessário, contudo já foi estabelecido na Proposição 4.41 e Teorema 4.42 que temos boa colocação local para $s \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ e boa colocação global/local para $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Esses fatos,

juntamente com os fatos obtidos na abordagem numérica nos permitem concluir a instabilidade orbital em $H_{\text{per},e}^s$ para $s \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, com $\omega > \frac{1}{2}$, e para $s \in (\frac{1}{2}, s^*)$, com $\omega < \omega_c$, considerando a órbita Ω_Φ tendo apenas uma simetria básica (a saber a órbita gerada apenas pela simetria de rotação). E isso ocorre pois, como é sabido, a teoria em [56] apenas requer que o núcleo do operador linearizado seja simples e que tal operador tenha apenas um autovalor negativo quando visto sob o espaço das funções pares, de modo que devemos remover uma das simetrias na Definição 4.34. Mais precisamente, o espaço $H_{\text{per},e}^s$ não é invariante sob translações e φ' é ímpar, e dessa forma o par $(\varphi', 0)$ não pode ser considerado como um elemento do subespaço $\text{Ker}(\mathcal{L})$ e assim, sob essa restrição temos em virtude da Proposição 4.29 que $\text{Ker}(\mathcal{L}_e) = [(0, \varphi)]$ e $n(\mathcal{L}_e) = 1$, como requerido. Esses fatos, o determinado na experimentação numérica, a saber, $\mathbf{q}_\omega < 0$, com $\omega > \frac{1}{2}$ e $s \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ e com $\omega < \omega_c$ e $s \in (\frac{1}{2}, s^*)$ e o resultado de instabilidade em [56] nos permitem estabelecer o item i) e o restante do item iii). É claro que se a onda estacionária é orbitalmente instável no subespaço $H_{\text{per},e}^s$ de H_{per}^s , então a mesma também é instável em todo o espaço H_{per}^s . E o teorema está provado. ■

Estudos futuros

As abordagens realizadas ao longo dos Capítulos 2 a 4 no estudo de estabilidade orbital de cada uma das equações, a saber, a Equação cúbica de Klein-Gordon, a Equação Quintica de Klein-Gordon e a Equação Fracionária de Schrödinger, podem abrir caminhos e estratégias para resolvermos problemas similares, porém ainda em aberto. Listamos abaixo alguns problemas em aberto que pretendemos e esperamos futuramente sermos capazes de resolver fazendo uso de uma adaptação das teorias e técnicas aplicadas ao longo dessa tese.

Instabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária para a Equação Cúbica de Klein-Gordon Fracionária

No que diz respeito a equação equação cúbica de Klein-Gordon fracionária

$$u_{tt} + (-\Delta)^s u + u - |u|^2 u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

em que $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é 2π -periódica, pretendemos fazer um estudo acerca de estabilidade orbital de ondas estacionárias para tal equação. Acreditamos que até podemos fazer uma abordagem similar a feita para a Schrödinger Fracionária na Seção 4.1.1 para determinar a existência de soluções do tipo ondas estacionária. No entanto, algumas dificuldades que podem surgir é no sentido que não conseguirmos determinar se tais soluções — estabelecidas via as quantidades conservadas da equação fracionária de Schrödinger — determinam todas as soluções positivas associadas à equação cúbica de Klein-Gordon fracionária, uma vez que ainda não somos capazes de obter soluções por meio de um funcional definido usando apenas as quantidades conservadas da equação, a saber $E, F : H_{\text{per}}^s \times L_{\text{per}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas como

$$E(u, v) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 + |u|^2 + |v|^2 - \frac{1}{2} |u|^4 dx \quad \text{e} \quad F(u, v) = \text{Im} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}v dx.$$

Sanada essa questão da determinação das soluções de ondas estacionárias com perfil positivo associadas à (4.4.3), julgamos que poderíamos proceder como nas Seções 4.2.2 e 4.4.2 com o intuito de estabelecermos um resultado de instabilidade orbital (já que nesse caso é esperado que a onda seja orbitalmente instável) no sentido mais amplo possível, ou seja, abrangendo todas as soluções com perfil positivo. Objetivamos também fazer um estudo análogo com a equação cúbica de Klein-Gordon fracionária no contexto real, isto é, quando $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e com soluções do tipo ondas viajante.

Estabilidade Orbital para uma Classe de Sistemas Acoplados de Equações de Klein-Gordon

Primeiro, seguindo preceitos contidos em [87] e o estudo feito nos Capítulos 2 e 3 pretendemos estudar a existência e estabilidade orbital de soluções periódicas do sistema acoplado não-linear de Klein-Gordon-Schrödinger dado como

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u - |v|^2 = 0 \\ iv_t + v_{xx} + uv = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Nesse caso, procuramos soluções da forma $(u(x, t), v(x, t)) = (\varphi(x - ct), \phi(x)e^{ict})$, em que $c \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são esperadas terem os perfis

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1 \operatorname{dn}^2(\xi; k) \quad \text{e} \quad \phi(\xi) = b_0 + b_1 \operatorname{dn}^2(\xi; k)$$

para certos $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{0, 1\}$ a serem determinados adequadamente.

Segundo, com ideias análogas as descritas acima esperamos também conseguirmos fazer um estudo acerca de existência de soluções e de estabilidade orbital para o sistema acoplado não-linear de Klein-Gordon dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 - uv^2 = 0 \\ v_{tt} - v_{xx} + v - v^3 - u^2v = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

com soluções da forma $u(x, t) = (\varphi(x - ct), \phi(x - ct))$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, em que nesse caso as funções $\varphi, \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ são esperadas terem os perfis

$$\varphi(\xi) = a_2 + a_3 \operatorname{sn}(\xi; k) \quad \text{e} \quad \phi(\xi) = b_2 + b_3 \operatorname{sn}(\xi; k)$$

para certos $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{2, 3\}$ a serem obtidos.

Melhoramentos Referentes a Abordagem Feita na Equação Cúbica de Schrödinger Fracionária

Nesse sentido, pretendemos melhorar o seguinte: primeiro é a obtenção de soluções de valores reais positivas sem a necessidade de fazer uma hipótese como a feita na Observação 4.4. Para tanto, temos por objetivo obter propriedades análogas as descritas na Observação 4.5 no contexto fracionário. Segundo é determinarmos o nosso resultado de estabilidade/instabilidade orbital sem precisarmos recorrer a métodos numéricos.

Considerações finais

No que se refere a equação cúbica de Klein-Gordon, podemos dizer que conseguimos um resultado bastante satisfatório e relevante, a saber o resultado de instabilidade orbital dado no Teorema 2.25. A estabilidade orbital de soluções com perfil cnoidal se tratava de uma questão há um bom tempo estava em aberto, como inicialmente relatado no trabalho de Angulo em [5] submetido em 2003. Entretanto, aqui tivemos a felicidade de contornarmos os problemas descritos em [5], por meio de uma abordagem sob o espaço de média zero, o que nos permitiu ainda assim usar a clássica teoria de Grillakis, Shatah e Strauss em [56]. Acreditamos que não há grandes melhoramentos que possam ser feitos no nosso resultado de instabilidade, talvez apenas encontrar um intervalo de instabilidade para a velocidade $c \in [0, 1)$ maior do que $[0, c^\dagger) \subset [0, 1)$ e para todo período $L > 0$ ao invés de apenas $L > L_0$. De todo modo, esses melhoramentos são apenas tecnicidades que não tiram a importância de nosso resultado. Outro ponto alto dessa parte do trabalho foi o nosso resultado de boa colocação que obtivemos no Teorema 2.21, usando a Teoria do Poço de Potencial, o qual se mostrou bastante interessante para a obtenção de resultados de boa colocação de problemas de valor inicial também colocados no contexto periódico e que podem talvez futuramente ser aplicado a outros problemas.

Em contrapartida, referente à equação quártica de Klein-Gordon também foi obtido um resultado bastante satisfatório de instabilidade orbital, como dado no Teorema 3.20, uma vez que esse tipo de estudo nunca havia sido feito com soluções que mudam de sinal, a saber as soluções com perfil cnoidal. Um ponto chave da nossa abordagem foi a análise espectral, pois como obtivemos que o operador linearizado possui 3 autovalores negativos e o núcleo duplo, em um primeiro momento pareceu que não podíamos aplicar uma adaptação dos resultados da teoria de Grillakis, Shatah e Straus em [56], entretanto fomos capazes de mostrar que todas as autofunções associadas a esses autovalores são funções pares (algo não muito esperado) e de modo que o núcleo do operador restrito ao espaço das funções pares é simples nesse caso (Teorema 3.16), o que nos permitiu fazer nossa análise inteiramente sob os espaço das funções pares e obter o nosso resultado de instabilidade usando o resultado de instabilidade linear devido a Shatah e Strauss em [122]. O único melhoramento que acreditamos que seja possível fazermos em nosso resultado de instabilidade, e que até o momento não conseguimos fazer, é o de obtermos um intervalo de instabilidade para a velocidade $c \in [0, 1)$ maior do que $[0, c^*) \subset [0, 1)$ no caso que o período $L > 0$ é qualquer e

para todo período $L > 0$ (invés de $L > L_0$) no caso que conseguimos considerar $c \in (-1, 1)$, isto é, em todo intervalo possível.

Por fim, no que concerne a equação fracionária de Schrödinger, o resultado central dessa parte (o de estabilidade/instabilidade) se mostrou um tanto surpreendente pelo fato de que obtemos estabilidade ou instabilidade conforme o valor de $s \in (0, 1)$ varia no intervalo $(0, 1)$. Nesse sentido ainda, apesar de não ser um método inédito e já ter sido utilizado em outros trabalhos ([96, 97]) o Método de Iteração de Petviashvili se mostrou mais uma vez uma ferramenta poderosa a fim de estudarmos o comportamento da convexidade da função d no caso fracionário. Referente a construção de soluções, também conseguimos obter soluções de pequena amplitude usando a teoria da bifurcação, o que fomos capazes de fazer de modo bastante construtivo e satisfatório, e por esse motivo podemos dizer que é um ponto bastante relevante do trabalho. A análise espectral também se mostrou altamente satisfatória uma vez que fomos capazes de utilizar a Teoria de Operadores Positivos a fim de obter propriedades espectrais convenientes, algo que até então (no contexto periódico, pelo menos) não tínhamos visto ser empregada para esse fim. Não podemos deixar de mencionar também que provamos a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Fracionária no Contexto Periódico, desigualdade a qual muitos autores já usavam (de forma equivocada, inclusive), porém sem qualquer referência ou esboço de prova, nesse sentido conseguimos dar uma demonstração convincente e plenamente categórica para tal questão. Um melhoramento que ainda pode ser feito em nosso resultado de instabilidade/estabilidade é o de garantir a existência de soluções reais para a equação sem a necessidade de fazer uma hipótese acerca disso, como descrito na Observação 4.4. Contudo, com todas as dificuldades comentadas nas Observações 4.6 e 4.5, ainda não somos habilitados de contornar esse problema e de não fazer nenhuma hipótese referente a isso.

Em resumo, acreditamos que essa tese, como um todo, tem bastante relevância e trás consigo diversos resultados expressivos. Cada um dos objetos estudados trouxe suas dificuldades, as quais felizmente, na medida do possível, conseguimos contornar de modo a encontrar resultados interessantes e, por vezes, inesperados. Procuramos escrever esse trabalho de modo autocontido, explicativo e com bastante referências de resultados e abordagens, com o objetivo principalmente de se tornar um bom material de consulta para interessados nos tópicos tratados. E esperamos que tenhamos alcançado esses objetivos, assim como almejamos termos dado uma boa contribuição para o desenvolvimento da teoria de equações diferenciais, de estabilidade orbital e, mais amplamente, da ciência.

Referências

- [1] Albert, J., *Positivity properties and stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, Commun. PDE 17 (1992) 1-22.
- [2] Aliprantis, C. and Border, K. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. 3rd edition. Springer, Berlin, 2006.
- [3] Amann, H., *Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces*. Glas. Mat. Ser. III 35 (2000), 161-177.
- [4] Ames, W. and Pachpatte, B., *Inequalities for differential and integral equations*. Volume 197. Academic press, 1997.
- [5] Angulo, J., *Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries equations*, J. Diff. Equat. 235 (2007), 1-30.
- [6] Angulo J., Bona, J. and Scialom, M., *Stability of cnoidal waves*. Adv. Differential Equations 11 (2006), 1321-1374.
- [7] Angulo, J., Bona, J. L., Linares, F. and Scialom, M., *Scaling, stability and singularities for nonlinear, dispersive wave equations: the critical case*, Nonlinearity 15 (2002), 759-786.
- [8] Angulo, J., Cardoso, E. and Natali, F., *Stability properties of periodic traveling waves for the intermediate long wave equation*. Rev. Mat. Iber. 33 (2017), 417-448.
- [9] Angulo, J. and Natali, F., *Positivity properties of the Fourier transform and the stability of periodic travelling-wave solutions*. SIAM J. Math. Anal. 40 (2008) 1123-1151.
- [10] Angulo, J. and Natali, F., *Stability and Instability of Periodic Travelling Wave Solutions for the Critical Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations*. Physica D, 238 (2009), 603-621.
- [11] Angulo, J. and Natali, F., *(Non)linear instability of periodic traveling waves: Klein-Gordon and KdV type equations*. Adv. Nonlinear Anal. 3 (2014), 95-123.
- [12] Amaral, S., Borluk, H., Muslu, G., Natali, F. and Oruc, G., *On the existence, uniqueness and stability of periodic waves for the fractional Benjamin-Bona-Mahony equation*. Stud. Appl. Math. 148 (2022), 62-98.

- [13] Ambrosio, V., *On some convergence results for fractional periodic Sobolev spaces*. Opuscula Math. 40 (2020), 5-20.
- [14] An, L., Du, P., Duc, D. and Tuoc, P. *Lagrange Multipliers for Functions Derivable along Directions in a Linear Subspace*. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 595-604.
- [15] Angulo, J., *Nonlinear Dispersive Equations: Existence and Stability of Solitary and Periodic Travelling Wave Solutions*, Math. Surveys Monogr., vol. 156, AMS, 2009.
- [16] Bachman G. and Narici, L., *Functional Analysis*. New York: Academic Press, 2000.
- [17] Bellazzini, J. Ghimenti, M. and Le Coz, S., *Multi-solitary waves for the nonlinear Klein-Gordon Equation*, Comm. Partial Differ. Equ., 39 (2014), 1479-1522.
- [18] Bényi, A. and Oh, T., *The Sobolev inequality on the torus revisited*. Publ. Math. Debrecen 83 (2013), 359-374.
- [19] Berger, M. and Schechter, M., *Embedding theorems and quasi-linear elliptic boundary value problems for unbounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), 261-278.
- [20] Bisci, G., Radulescu, V. and Servadei, R., *Variational methods for nonlocal fractional problems*. Vol. 162. Cambridge University Press, 2016.
- [21] Bittencourt Moraes, G., Borluk, H., de Loreno, G., Muslu, G. and Natali, F., *Orbital stability of periodic standing waves for the cubic fractional nonlinear Schrödinger equation*. J. Differential Equations 341 (2022), 263-291.
- [22] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [23] Byrd, P. F. and Friedman, M. D., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [24] Boling, G., Yongqian H. and and Xin, J., *Existence of the global smooth solution to the period boundary value problem of fractional nonlinear Schrödinger equation*. Applied Mathematics and Computation 204.1 (2008): 468-477.
- [25] Bourgain, J., *Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 46, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [26] Botelho, F., *Functional analysis and applied optimization in Banach spaces- Applications to non-convex variational models*. Springer, Cham, 2014.
- [27] Brown, B., Eastham, B. and Schmidt, K., *Periodic Differential Operators*. Springer, Basel, 2012.

- [28] Bruell, G. and Dhara, R. N. *Waves of maximal height for a class of nonlocal equations with homogeneous symbol*, Indiana Univ. Math. Journal, 70 (2021), 711-742.
- [29] Bronski, J., Johnson, M. and Kapitula, T., *An instability index theory for quadratic pencils and applications*, Comm. Math. Phys., 327 (2014), 521-550.
- [30] Buffoni, B. and Toland, J. *Analytic theory of global bifurcation*. Princeton University Press, (2016).
- [31] Cardoso, E., *Estabilidade de ondas periódicas para modelos dispersivos não-lineares*. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática. UEM-Maringá, 2014.
- [32] Cavalcanti, M. e Domingos Cavalcanti, V., *Método do poço de potencial e a regularidade escondida de uma equação hiperbólica não-linear*. Unimar 15 (3), 249-277, 1993.
- [33] Cho, Y., Hwang, G., Kwon, S. and Lee, L., *Well-posedness and ill-posedness for the cubic fractional Schrödinger equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 35 (2015) 2863-2880.
- [34] Claassen, K. and Johnson, M., *Nondegeneracy and stability of antiperiodic bound states for fractional nonlinear Schrödinger equations*, J. Diff. Eqs. 266 (2019), 5664-5712.
- [35] Cristófani F., Natali F. and Pastor A., *Periodic traveling-wave solutions for regularized dispersive equations: sufficient conditions for orbital stability with applications*. Commun. Math. Sci. 18 (2020), 613-634.
- [36] Coddington, E., *An introduction to ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1961.
- [37] Coddington, E. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [38] Dashen, R. F., Hasslacher, B. and Neveu, A., *Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. II. Two-dimensional models and extended hadrons*, Phys. Rev. D 10 (1974), 4130-4138.
- [39] Deconinck, B. and Upsal, J., *The orbital stability of elliptic solutions of the focusing nonlinear Schrödinger equation*, SIAM J. Math. Anal., 52 (2020), 1-41.
- [40] Demirkaya, A., Hakkaev, S., Stanislavova, M. and Stefanov, A., *On the spectral stability of periodic waves of the Klein-Gordon equation*, Diff. Int. Equat. 28 (2015), 431-454
- [41] Demirbas, S., Erdoğan, M. and Tzirakis, N., *Existence and uniqueness theory for the fractional Schrödinger equation on the torus*. Adv. Lect. Math.(ALM) 34 (2016), 145-162.

-
- [42] Ding, Z. and Hajaiej, H., *On a fractional Schrödinger equation in the presence of harmonic potential*. Electron. Res. Arch. 29 (2021), 3449-3469.
- [43] Dobrushkin, V. *Applied Differential Equations-The Primary Course*. CRC Press, Boca Raton, 2015.
- [44] Duran, A., *An efficient method to compute solitary wave solutions of fractional Korteweg-de Vries equations*. Int. J. Comput. Math. 95 (2018), 1362-1374.
- [45] Duran, A. and Álvarez, J., *Numerical generation of periodic traveling wave solutions of some nonlinear dispersive wave systems*. J. Comput. Appl. Math., 316 (2017), 29-39.
- [46] Edmunds, D. and Evans, W., *Spectral Theory and Differential Operators*. Oxford Univ. Press, 1987.
- [47] Evans, L., *Partial Differential Equations*. 2nd Edition, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [48] Eastham, M., *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*. Texts in Mathematics, Scottish Academic Press, Edinburgh; Hafner Press, New York, 1973.
- [49] Frank, R. and Lenzmann E., *Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in \mathbb{R}^n* . Acta Math. 210 (2013), 261-318.
- [50] Freedden, W. and Nashed, M., *Ill-posed problems: operator methodologies of resolution and regularization*. Handbook of mathematical geodesy, Geosyst. Math., Birkhäuser/Springer (2018), 201-314.
- [51] Folland, G., *Real analysis-Modern techniques and their applications*. 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [52] Gallay, T. and Hărăguș, M., *Stability of small periodic waves for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Diff. Equat., 234 (2007), 544-581.
- [53] Gallay, T. and Hărăguș, M., *Orbital stability of periodic waves for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Dynam. Diff. Equat., 19 (2007), 825-865.
- [54] Gravel, P., Gauthier, C., *Classical applications of the Klein-Gordon equation*, Amer. J. Phys. 79 (2011), 447-453.
- [55] Grillakis, M., *Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. 61 (1988), 747-774.
- [56] Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Funct. Anal. 74 (1987), 160-197.

-
- [57] Grillakis, M. , Shatah, J. and Strauss, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*. J. Funct. Anal. 74 (1990) 308-348.
- [58] Gustafson S., Le Coz S. and Tsai T-P., *Stability of periodic waves of 1D cubic nonlinear Schrödinger equations*, Appl. Math. Res. Express., (2017), 431-487.
- [59] Hakkaev, S., *Linear stability analysis for periodic standing waves of the Klein-Gordon equation*, Diff. Equ. Dyn. Syst. 22 (2014), 209-219.
- [60] Hakkaev, S. and Stefanov, A., *Stability of periodic waves for the fractional KdV and NLS equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A., 151 (2021), 1171-1203.
- [61] Hur, V. and Johnson, M., *Stability of periodic traveling waves for nonlinear dispersive equations*. SIAM J. Math. Anal. 47 (2015), 3528-3554.
- [62] Hur, V., Johnson, M. and Martin, J., *Oscillation estimates of eigenfunctions via the combinatorics of non-crossing partitions*, Discrete Anal., 2017, Paper No. 13, 20 pp.
- [63] Ionescu, A. and Pusateri, F., *Nonlinear fractional Schrödinger equations in one dimension*, J. Funct. Anal., 266 (2014), 139-176.
- [64] Jeanjean, L. and Le Coz, S., *Instability for standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations via mountain-pass arguments*, Trans. Amer. Math. Soc., 361 (2009), 5401-5416.
- [65] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, reprint of the 1980 ed., Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [66] Kapitula, T. and Deconinck, B., *On the spectral and orbital stability of spatially periodic stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations*. Hamiltonian partial differential equations and applications, 285-322, Fields Inst. Commun. 75, 2015.
- [67] Kapitula T. and Promislow K., *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves*. Springer, New York, 2013.
- [68] Kirkpatrick, K., Lenzmann, E. and Staffilani, G. *On the continuum limit for discrete NLS with long-range lattice interactions*, Comm. Math. Phys., 317 (2013), 563-591.
- [69] Kielhöfer, H., *Bifurcation theory. An introduction with applications to partial differential equations*. 2nd edition. Springer, New York, 2012.
- [70] Kesavan, S., *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley, New York, 1989.
- [71] Klein, C., Sparber, C. and Markowich, P. *Numerical study of fractional nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Math. Phys. Eng., 470.2172 (2014): 20140364.

-
- [72] Kubrusly, C., *The elements of operator theory*. 2nd Edition, Birkhäuser-Springer, New York, 2011.
- [73] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley, 1978.
- [74] C. Kuehn., *PDE Dynamics: An Introduction*. SIAM, Philadelphia, 2019.
- [75] Kulkarni, S., Nair, M. and Ramesh, G., *Some properties of unbounded operators with closed range*. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 118 (2008), no. 4, 613-625.
- [76] Laskin, N., *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Phys. Lett. A, 268 (2000), 298-305.
- [77] Laskin, N., *Fractional Schrödinger equation*, Phys. Rev. E, 66 (2002), 056108.
- [78] Leisman, K., Bronski, J., Johnson, M. and Marangell, R., *Stability of traveling wave solutions of nonlinear dispersive equations of NLS type*, Arch. Ration. Mech. Anal., 240 (2021), 927-969.
- [79] Levine, H.A. *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$* , Trans. AMS. 192 (1974), 1-21.
- [80] Le, U. and Pelinovsky, D., *Convergence of Petviashvili's method near periodic waves in the fractional Korteweg-de Vries equation*, SIAM J. Math. Anal., 51 (2019), 2850-2883.
- [81] Le Coz, S., *Standing waves in nonlinear Schrödinger equations*. Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations, 151-192, Walter de Gruyter, Berlin, 2009.
- [82] Lieb E. and Loss, M., *Analysis*. 2nd Edition. American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [83] Lima, E. L., *Álgebra Linear*. 8^a edição. IMPA, Rio de Janeiro 2014.
- [84] Lima, E. L., *Espaços Métricos*. Impa-CNPq. Rio de Janeiro, 1977.
- [85] Lima, E. L., *Curso de Análise, Volume 1*. 12^a edição. Rio De Janeiro: IMPA, 2009.
- [86] Lions, J.L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [87] Liu, S., Fu, Z., Liu, S. and Wang, Z., *The periodic solutions for a class of coupled nonlinear Klein-Gordon equations*. Phys. Lett. A 323 (2004), 415-420
- [88] Markin, M., *Elementary Operator Theory*. De Gruyter Graduate, Walter de Gruyter GmbH, Berlin-Boston, 2020.

- [89] Martel, Y. and Merle, F., *Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, *Geom. Funct. Anal.*, 11 (2001), 74-123.
- [90] Magnus, W. and Winkler, S. *Hill's Equation*. Tracts in Pure and Applied Mathematics, Wiley, New York. 1966.
- [91] Mlak, W., *Hilbert Spaces and Operator Theory*. Dordrecht, Kluwer, 1991.
- [92] Mukherjee, M., *Extremal values of the (fractional) Weinstein functional on the hyperbolic space*. *Forum Math.* 29 (2017), 959-970.
- [93] Munkres, J., *Topology*. 2nd Edition . Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- [94] Natali, F., *Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas*. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática. UNICAMP-Campinas, 2007.
- [95] Natali, F. and Cardoso, E., *Stability properties of periodic waves for the Klein-Gordon equation with quintic nonlinearity*, *Appl. Math. Comput.* 224 (2013), 581-592.
- [96] Natali F. , Le U. and Pelinovsky D., *Periodic waves in the fractional modified Korteweg-de Vries equation*. *J. Dynam. Differential Equations* 34 (2022), 1601-1640.
- [97] Natali F., Le U. and Pelinovsky D., *New variational characterization of periodic waves in the fractional Korteweg-de Vries equation*. *Nonlinearity* 33 (2020), 1956-1986.
- [98] Natali, F., Moraes, G., de Loreno, G. and Pastor, A. *Cnoidal Waves for the Klein-Gordon and Nonlinear Schrödinger Equation*, Preprint, (2021).
- [99] Natali, F. and Neves, A., *Orbital stability of periodic waves*, *IMA J. Appl. Math.*, 79 (2013), 1161-1179.
- [100] Natali, F. and Pastor, A., *Orbital instability of standing waves for the quadratic-cubic Klein-Gordon-Schrödinger system*, *Z. Angew. Math. Phys.* 66 (2015), 1341-1354.
- [101] Natali, F. and Pastor, A., *The fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation: Orbital stability of a standing wave*. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 14 (2015), 1326–1346.
- [102] Natali, F. and Pastor, A., *Stability and instability of periodic standing wave solutions for some Klein-Gordon equations*, *J. Math. Anal. Appl.*, 347 (2008), 428-441.
- [103] Neves, A., *Floquet's Theorem and Stability of Periodic Solitary Waves*. *J. Dyn. Diff. Equat.*, 21 (2009), p. 555-565.
- [104] Oruc, G., Borluk H. and Muslu, G., *The generalized fractional Benjamin-Bona-Mahony equation: Analytical and numerical results*, *Phys. D*, 409 (2020), 132499.
- [105] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Basel, 1996.

-
- [106] Iorio Jr, R. and Iorio, V., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 70, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [107] Triebel, H., *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [108] Triebel, H., *Theory of Function Spaces*. Birkhäuser/Springer, Basel, (Reprint of 1983 edition) 2010.
- [109] Park, Y., *Fractional Polya-Szegö inequality*, Journal of the ChungCheong Mathematical Society 24 (2011), 267-271.
- [110] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1983.
- [111] Prosperetti, A., *Advanced Mathematics for Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [112] Pelinovsky, D., *Localization in periodic potentials: from Schrödinger operators to the Gross-Pitaevskii equation*, LMS Lecture Note Series, 390 Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [113] Rabinowitz, P., *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys., 43 (1992), 270-291.
- [114] Pelinovsky, D. and Stepanyants, Y., *Convergence of Petviashvili's iteration method for numerical approximation of stationary solution of nonlinear wave equations*, SIAM J. Numer. Anal., 42 (2004), 1110-1127.
- [115] Reed, S. and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics: Analysis of Operator*. Academic Press, Vol. IV, 1978.
- [116] Reed, S. and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis*. Academic Press, Vol. I, 1980.
- [117] Robinson, J., *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [118] Roncal, L. and Stinga, P., *Fractional Laplacian on the torus*. Communications in Contemporary Mathematics 18 (03) (2016) 1550033.
- [119] Saitoh, S. and Sawano, Y., *Theory of reproducing kernels and applications*. Springer, Singapore, 2016.

-
- [120] Schmudgen, K., *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [121] Shatah, J. *Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Math. Phys. 91 (1983), 313-327.
- [122] Shatah, J. and Strauss, W., *Instability of nonlinear bound states*, Commun. Math. Phys. 100 (1985)
- [123] Shatah, J. and Strauss, W., *Spectral condition for instability, Nonlinear PDE's, dynamics and continuum physics*. (South Hadley, MA, 1998), Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, 255 (2000), 189-198.
- [124] Stuart, C., *Lectures on the orbital stability of standing waves and applications to the nonlinear Schrödinger equation*. Milan J. Math., 76 (2008), 329-399.
- [125] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*. New York: Benjamin, 1965.
- [126] Suppes, P., *Introduction to logic*. D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1957.
- [127] Thirouin, J., *On the growth of Sobolev norms of solutions of the fractional defocusing NLS equation on the circle*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 34 (2017), 509-531.
- [128] Vitillaro, E., *Some new results on global nonexistence and blow-up for evolution problems with positive initial energy*, Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste, 31 (2000), 375-395.
- [129] Vrabie, I., *C_0 -semigroups and applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003.
- [130] Weinstein, M., *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*. Comm. Math. Phys. 87 (1982/83), no. 4, 567-576.
- [131] Weinstein, M., *Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), 472-491.
- [132] Wu, Y., *Instability of the standing waves for the nonlinear Klein-Gordon equations in one dimension*. Preprint, 2017.
- [133] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-point Theorems*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [134] Zeidler, E., *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A. Linear monotone operators*. Springer-Verlag, New York, 1990.