UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

LAYANNE RAQUEL LOBATO CAMARGO

DECAIMENTO UNIFORME PARA UM SISTEMA DE KLEIN-GORDON-SCHRÖDINGER COM MEMÓRIA LINEAR

Maringá-PR

2023

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DECAIMENTO UNIFORME PARA UM SISTEMA DE KLEIN-GORDON-SCHRÖDINGER COM MEMÓRIA LINEAR

LAYANNE RAQUEL LOBATO CAMARGO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins.

Maringá-PR
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Camargo, Layanne Raquel Lobato
C172d Decaimento uniforme para um sistema de Klein-Gordon-Schrödinger com memória linear / Layanne Raquel Lobato Camargo. -- Maringá, 2023.
119 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Claudete Matilde Webler Martins.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2023.

1. Klein-Gordon-Schrödinger. 2. Aproximação Faedo-Galerkin. 3. Métodos de energia. 4. Faedo-Galerkin approximation. 5. Energy methods. I. Martins, Claudete Matilde Webler, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.35

Edilson Damasio CRB9-1.123

LAYANNE RAQUEL LOBATO CAMARGO

DECAIMENTO UNIFORME PARA UM SISTEMA DE KLEIN-GORDOR-SCHRÖDINGER COM MEMORIA LINEAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Wellington José Corrêa - UTFPR/Campo Mourão
Profa. Dra. Janaina Pedroso Zanchetta - UEM

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2023.
Local de defesa: Bloco F67 – Auditório do Departamento de Matemática.

A Deus, o dono de toda a ciência.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar sabedoria, entendimento e amparo para realização deste trabalho.

Agradeço ao meu esposo, Matheus Peixoto Camargo, pela paciência e compreensão, sempre me apoiando e me incentivando a todo tempo.

Agradeço aos meus pais, Diógenes Carrara Lobato e Lilian Maria Pereira Lobato, e ao meu irmão, Arthur Henrique Pereira Lobato, por toda compreensão e investimento desde o incio em prol da minha educação e agradeço aos meus demais familiares que sempre me encorajaram a dar o melhor de mim.

Agradeço aos meus amigos que me acompanharam e estiveram comigo, me auxiliando e torcendo por mim.

Agradeço ao excelente corpo docente desta universidade, em especial à minha orientadora, Profa. Dra. Claudete M. W. Martins, pela paciência, compreensão e amizade. Por todos os ensinamentos que contribuíram para o meu crescimento acadêmico, desde minha graduação. Obrigada por todos os esforços realizados para a conclusão deste trabalho, este que permite que eu finalize uma grande etapa em minha vida.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que se predispuseram a ajudar, de forma direta ou indireta para a conclusão desta dissertação.

Layanne Raquel Lobato Camargo

"Ao Deus único e sábio seja dada glória, por meio de Jesus Cristo, pelos séculos dos séculos. Amém"

Romanos 16: 27.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência global, unicidade e decaimento uniforme de soluções do sistema de Klein-Gordon-Schrodinger

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i|\psi|^2\psi + i\gamma\psi = -\phi\psi \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + \int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau + \mu^2\phi + F(\phi,\phi_t) = \beta|\psi|^{2\theta} \\ \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \quad \text{em } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi^1(x) \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{0.0-1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n, n \leq 3$, sendo Γ com fronteira $\mathbb{C}^2$ e Q o cilindro infinito $\Omega \times (0,\infty)$ com lateral limitada $\Sigma = \Gamma \times (0,\infty)$. γ, β, θ são constantes tais que $\gamma \geq \beta > 0$, $1 \leq 2\theta < 2$ e g representa o núcleo do termo de memória que será assumido com decaimento exponencial.

Palavras-Chave: Equação de Klein-Gordon-Schrödinger, Aproximação de Faedo-Galerkin, métodos de Energia.

Abstract

In this work we study the global existence, uniqueness and uniform decay for the solutions of the Klein-Gordon-Schrodinger system

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i|\psi|^2\psi + i\gamma\psi = -\phi\psi \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + \int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau + \mu^2\phi + F(\phi,\phi_t) = \beta|\psi|^{2\theta} \\ \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \quad \text{em } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi^1(x) \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{0.0-2}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n, n \leq 3$, with $\mathbb{C}^2$ boundary Γ and let Q be the infinite cylinder $\Omega \times (0,\infty)$ whose lateral boundary is $\Sigma = \Gamma \times (0,\infty)$. γ, β, θ are constants such that $\gamma \geq \beta > 0$, $1 \leq 2\theta < 2$ and g represents the kernel of the memory term which will be assumed to decay exponentially.

Keywords: Klein-Gordon-Schrödinger equation, Faedo-Galerkin approximation, Energy methods.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi baseado no artigo [16], no qual os autores provam a existência global e decaimento uniforme de soluções para o seguinte problema:

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i|\psi|^2\psi + i\gamma\psi = -\phi\psi \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + \int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau + \mu^2\phi + F(\phi,\phi_t) = \beta|\psi|^{2\theta} \\ \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \quad \text{em } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(x,0) = \psi^0(x), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi^1(x) \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{0.0-3}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n, n \leq 3$, sendo Γ com fronteira $\mathbb{C}^2$ e Q o cilindro infinito $\Omega \times (0,\infty)$ com lateral limitada $\Sigma = \Gamma \times (0,\infty)$. γ, β, θ são constantes tais que $\gamma \geq \beta > 0$, $1 \leq 2\theta < 2$ e g representa o núcleo do termo de memória que será assumido com decaimento exponencial.

Sistemas do tipo Klein-Gordon-Schrödinger vêm sendo estudados há muitos anos. Para nosso conhecimento, parece que o primeiro problema desse tipo é o Sistema Yukawa, que remonta a 1935. As equações acima descrevem uma generalização do clássico modelo de interação de Yukawa de campos de núcleos complexos conservativos com campos de mesons reais neutros. A função ψ representa o campo complexo, enquanto a função ϕ representa o campo real. A constante μ representa a massa de um meson. Para maiores detalhes físicos ver H. Yukawa [14]. Outro trabalho pioneiro é o artigo de [11], onde os autores estudam a existência, unicidade e regularidade de soluções globais do sistema

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi = g\phi\psi & \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi + \mu^2\phi - g|\psi|^2 = 0 & \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^3$, ψ é complexa e ϕ é real, μ representa a massa de um meson e g é uma constante.

Os sistemas de Klein-Gordon-Schrödinger tem sido estudados por muitos autores em artigos recentes, entre os quais citamos [20], [21], [3], [5] e [6].

M. M. Cavalcanti e V. N. Domingos Cavalcanti, em [6] investigaram a existência global, unicidade e decaimento uniforme das soluções de um sistema de Klein-Gordon-Schrödinger não linear quando a dimensão do espaço é menor ou igual a 3. No entanto, a presença das não linearidades em ambas as equações de $(0.0-3)$ traz dificuldades técnicas a serem superadas com o uso de novas estimativas. Motivados por [6], o objetivo deste trabalho é estudar na estabilização para uma equação de Klein-Gordon-Schrödinger mais geral com memória.

Com relação à estabilidade assintótica da energia, são consideradas estimativas integrais da energia juntamente com a técnica do multiplicador devido a V. Komornik [12]. No entanto, o método do multiplicador, a princípio, não é adequado ao lidar com o termo de memória $\int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau$, o que leva ao uso do truque dado pelo resolvente de Volterra kernel para obter o termo $\int_0^t g(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$. Mas o termo não linear traz outros problemas, o que força a tratar a equação em sua forma original. Então, assumindo que F e g satisfazem algumas propriedades gerais, obtem-se as taxas de decaimento.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 1, introduzimos as notações e apresentamos alguns resultados auxiliares que são necessários para o bom entendimento do texto.

No Capítulo 2, provamos a existência de solução forte para o problema $(0.0-3)$ por meio do Método de Faedo-Galerkin e provamos a unicidade para o caso em que $\theta = 1$. A motivação para definição de solução, que não estava claramente apresentada em [16], encontramos no artigo de Fukuda e Tsutsumi [11].

Finalmente, no Capítulo 3, estabeleceremos o decaimento exponencial uniforme das soluções do problema $(0.0-3)$, fazendo uso do método da perturbação da energia.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo serão fixadas as notações e enunciadas as definições e resultados básicos fundamentais ao desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.1.1. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções reais $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre Ω, onde sua norma é dada por*

$$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Particularmente, o espaço $L^2(\Omega)$ é também um espaço de Hilbert, onde o produto interno e norma neste espaço são definidos, respectivamente, por

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \text{ e } \|u\|_2 = \left[\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Para $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço de Banach das (classes de) funções reais $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ q.s. em Ω. A norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)| = \inf\Big\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\Big\}.$$

Temos que $L^p(\Omega)$ é reflexivo sempre que $1 < p < \infty$ e é separável sempre que $1 \leq p < \infty$. Além disso, o resultado a seguir nos permite identificar o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.1.2. *(Teorema de Representação de Riesz): Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_q = \|\phi\|.$$

Se $p = 1$ e $\phi \in (L^1(\Omega))'$, então existe uma única função $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle \phi, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_\infty = \|\phi\|.$$

Demonstração. Ver Teorema 4.11 em [4]. □

Outro resultado a respeito dos espaços $L^p(\Omega)$ que faz-se necessário é

Teorema 1.1.3. *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p$ tais que*
(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.s. em Ω;
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$, q.s. em Ω.

Demonstração. Ver Teorema 4.9 em [4]. □

Definição 1.1.4. *Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \Omega$, em símbolos,*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; (u\chi_K) \in L^p(\Omega), \text{ para todo compacto } K \subset \Omega\},$$

onde $\chi_K : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ denota a função característica do conjunto K.

Definição 1.1.5. *Dizemos que uma sequência $\{u_\nu\} \subset L^p_{loc}(\Omega)$ converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$,* *quando para qualquer compacto $K \subset \Omega$, tivermos*

$$p_K\left(u_\nu - u\right) = \left[\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Com esta noção de convergência, $L^p_{loc}(\Omega)$ se torna um espaço vetorial topológico. Além disso, as seguintes inclusões são válidas:

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall p \in [1, \infty).$$

1.2 Topologia Fraca e Topologia Fraca $*$

A partir de agora, E denota um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e E'' seu bidual, ou seja, o dual de E'.

Definição 1.2.1. *A topologia fraca sobre E, denotada por $\sigma\left(E, E'\right)$, é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$. Quando uma sequência $\{x_k\}$ em E converge para $x \in E$ na topologia fraca escrevemos $x_k \rightharpoonup x \,\text{em}\, E$.*

Teorema 1.2.2. *Seja $\{x_k\}$ uma sequência em E, então*

(i) $x_k \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in E'$;

(ii) Se $x_k \to x$ em E, então $x_k \rightharpoonup x$ em E;

(iii) Se $x_k \rightharpoonup x$ em E, então $\{\|x_k\|\}$ é limitada e $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_k\|_E$;

(iv) Se $x_k \rightharpoonup x$ em E e $f_k \to f$ em E', então $\langle f_k, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Ver Proposição 3.5 em [4]. □

Definição 1.2.3. *A topologia fraca $*$ sobre E', denotada por $\sigma\left(E', E\right)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x. Quando uma sequência $\{f_k\}$ em E' converge para $f \in E'$ na topologia fraca $*$ escrevemos $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.*

Teorema 1.2.4. *Seja $\{f_k\}$ uma sequência em E', então*

(i) $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_k, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in E$;

(ii) Se $f_k \rightharpoonup f$ em E', então $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E';

(iii) Se $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', então $\{\|f_k\|_{E'}\}$ é limitada e $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_k\|_{E'}$;

(iv) Se $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' e $x_k \to x$ em E, então $\langle f_k, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Ver Proposição 3.13 em [4]. □

Teorema 1.2.5. *Seja E um espaço de Banach e separável e consideremos $\{f_k\}$ uma sequência limitada em E'. Então, existe uma subsequência $\{f_{k_j}\}$ de $\{f_k\}$ e $f \in E'$ tais que*

$$f_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração. Ver Teorema 21 em [22] □

1.3 Espaço das Distribuições

Vamos começar nosso estudo fixando algumas notações básicas.

Entendemos por multi-índice qualquer n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e definimos sua norma por $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Considerando $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, o operador derivação de ordem $|\alpha|$ é representado por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

No caso em que $\alpha = (0, \ldots, 0)$, definimos D^α como o operador identidade.

Definição 1.3.1. *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O suporte de f, o qual denotamos por $\operatorname{supp}(f)$, é definido como sendo o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ em Ω. Em particular, se $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ for compacto em $\mathbb{R}^n$, dizemos que f possui suporte compacto.*

Uma consequência dessa definição é o fato que $\operatorname{supp}(f)$ é o menor fechado em Ω fora do qual f se anula.

Definição 1.3.2. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.*

Definição 1.3.3. *Considere o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a seguinte noção de convergência:*

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, quando existir um subconjunto compacto K de Ω tal que

(i) $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K, \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha \varphi$ *uniformemente sobre* $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Então $C_0^\infty(\Omega)$ munido com esta noção de convergência é chamado de espaço das funções testes , denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3.4. *Uma distribuição sobre Ω é uma aplicação $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear e contínua no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$. O valor de T em $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ é representado por $\langle T, \varphi\rangle$.*

Definição 1.3.5. *Definimos o espaço das distribuições sobre Ω e o representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial que coleciona todas as distribuições sobre Ω, com as operações usuais, munido com a seguinte noção de convergência: Dizemos que uma sequência $\{T_\nu\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando*

$$\langle T_\nu, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

As funções do espaço $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ geram distribuições sobre Ω, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 1.3.6. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. A aplicação*

$$T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi \longmapsto \langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição sobre Ω.

Teorema 1.3.7. *(Lema de Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.s. em Ω.*

Demonstração. Ver Proposição 4, página 20, em [7]. □

Segue do exemplo acima que a aplicação

$$T : L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$
$$u \longmapsto T_u$$

está bem definida. Mais ainda, T é linear e contínua no sentido da convergência em $L^1_{loc}(\Omega)$ e, pelo Lema de Du Bois Raymond, é também injetora. Por essa razão, identificamos uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ com a distribuição T_u por ela unicamente definida e podemos concluir que o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ se identifica com uma parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em símbolos,

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{T_u; u \in L^1_{loc}(\Omega)\right\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

e, pela continuidade de T, resulta que $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. De forma mais geral, para $1 \leq p < \infty$ temos a seguinte cadeia de imersões:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Todavia, existem distribuições não definidas por funções pertencentes ao espaço $L^1_{loc}(\Omega)$, ver [17]. Assim vemos que o conceito de distribuição generaliza o de função localmente integrável.

Agora, definimos a derivada fraca dada por Sobolev, e a derivada no sentido das distribuições.

Definição 1.3.8. *Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada fraca em Ω, se existir $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nesta situação, v é chamada derivada fraca de u em relação a x_j e é representada por $\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Embora a introdução da derivada fraca tenha sido um marco na evolução das Equações Diferenciais Parciais, ainda apresentava um problema: nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ admitia derivada neste sentido. Com o intuito de resolver o problema, foi introduzido a seguinte noção de derivada no sentido das distribuições sobre o aberto Ω :

Definição 1.3.9. *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Definimos a derivada distribucional de ordem α de T por*

$$\begin{aligned} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi &\longmapsto \langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle . \end{aligned}$$

Com isso, conseguimos definir os Espaços de Sobolev.

1.4 Espaços de Sobolev

Definição 1.4.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq m$, temos $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições sobre Ω. Ou ainda,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \operatorname{com} |\alpha| \leq m \right\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u por

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}})$ é um espaço de Banach, denominado espaço de Sobolev.

Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H^m(\Omega)$ que munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx$$

e da norma induzida

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Definamos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Em particular, denotamos o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ por $H_0^m(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = H_0^m(\Omega).$$

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Quando $m = 1$, temos o espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v),$$

e da norma induzida

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left[|u|^2 + |\nabla u|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega).$$

Consideramos o operador Laplaciano negativo $-\Delta$ com condições de fronteira de Dirichlet. Neste caso, é conhecido que $-\Delta$ é um operador auto-adjunto, positivo, com domínio $X^1 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $-(-\Delta)$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $X = L^2(\Omega)$.

Para cada $\alpha > 0$, seja $X^\alpha = D((-\Delta)^\alpha)$ o espaço de potência fracionária associado ao operador $-\Delta$, com norma $\|u\|_{X^\alpha} = \|(-\Delta)^\alpha u\|_X$. Consequentemente, como apresentado em [2], temos $X^{-\alpha} = (X^\alpha)'$ para todo $\alpha > 0$. Além disso, temos

$$X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega) \quad \text{and} \quad X^\alpha \hookrightarrow H^{2\alpha}(\Omega),$$

onde $H^s(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev fracionário e $H^{-s}(\Omega)$ o seu dual. Com isso, as normas consideradas em $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$ e em $X^1 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ são dadas, respectivamente, por

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{and} \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Vejamos agora alguns resultados sobre esses espaços

Teorema 1.4.2. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se $u = 0$ em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Ver Teorema 8.11 em [4]. □

Definição 1.4.3. *(Imersão contínua) Sejam X e Y espaços de Banach com $X \subset Y$ e consideremos o operador imersão $i : X \longrightarrow Y$ definido por $i(u) = u$ para todo $u \in X$. Então,*

(i) A imersão i é dita contínua e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, quando existir uma constante $C > 0$ tal que $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \forall u \in X$.

(ii) A imersão i é dita compacta e escrevemos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, quando toda sequência limitada em X admite uma subsequência convergente em Y.

Teorema 1.4.4. *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, com fronteira limitada. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então, temos as seguintes imersões contínuas:*

Se $1 \leq p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$, para todo $q \in [p, +\infty[$;

Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [17]. □

Teorema 1.4.5. *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, com fronteira limitada. Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões contínuas:*

Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$, para todo $q \in [p, +\infty[$;

Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.5 em [17]. □

Observação 1.4.6. *Dos resultados acima podemos concluir as seguintes imersões:*

Para $n < 3$, temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q \in [1, 6]$;

Para $n = 1$, temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$;

$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$;

Segue também de [2] que, para $\alpha = 1$, $X^1 \hookrightarrow H^2(\Omega)$, ou seja, $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$.

1.5 Espaços $L^p(a,b,X)$

O estudo dos espaços $L^p(a,b,X)$ com $-\infty \leq a, b \leq \infty$ pode ser encontrado em [1], capítulo 7. Aqui, nos limitaremos a estudar os espaços $L^p(0,T;X), 1 \leq p < \infty$.

Definição 1.5.1. *Denotamos por $L^p(0,T;X), 1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ mensuráveis, tais que a aplicação $t \longmapsto \|u(t)\|_X$ pertence a $L^p(0,T)$, onde sua norma é dada por*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Particularmente, se H é um espaço de Hilbert então o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de Hilbert, onde o produto interno e norma neste espaço são definidos, respectivamente, por

$$(u, v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t)v(t))_H dt \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(0,T;H)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 1.5.2. *O espaço de Banach $L^\infty(0, T; X)$ consiste das (classes de) funções mensuráveis tais que a função $t \longmapsto \|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0, T)$, onde sua norma é definida por*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess}\, \|u(t)\|_X.$$

A proposição seguinte relaciona a convergência fraca $*$ com a convergência fraca nestes espaços.

Definição 1.5.3. *O espaço de Banach $C^m([0, T]; X), m = 0, 1, \ldots$, coleciona todas as funções contínuas $u : [0, T] \longrightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0, T]$, onde sua norma é dada por*

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \sum_{i=0}^m \max_{t \in [0,T]} \left\|u^{(i)}(t)\right\|_X.$$

A respeito desses espaços temos os seguintes resultados

Teorema 1.5.4. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então,*

(i) O espaço $C^0([0, T]; X)$ é denso em $L^p(0, T; X)$ e $C^0([0, T]; X) \hookrightarrow L^p(0, T; X)$;

(ii) Se X é separável e $1 \leq p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é separável;

(iii) Se X é reflexivo e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é reflexivo;

(iv) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; Y), 1 \leq q \leq r \leq \infty$;

(v) Se X é reflexivo e separável então $[L^p(0, T; X)]' \equiv L^q(0, T; X')$, onde $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Ver Proposições 23.2-23.7 e o Problema 23.12d em [22]. □

Para o caso em que $p = 1$, identifica-se $[L^p(0, T; X)]' \equiv L^\infty(0, T; X')$.

Teorema 1.5.5. *(Teorema de Rellich Kondrachov) Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n, \Omega$ de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$;

se $p > n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.4 em [17]. $\square$

Observação 1.5.6. *Aplicando os resultados acima é possível afirmarmos que:*

- $L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$,
- $L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H_2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$;
- $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(Q)$;
- $C_0^\infty \subset L^2(Q)$;
- $L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.

Ainda dos teoremas acima, podemos afirmar que

- $L^\infty\,(0, T; H_0^1(\Omega)) \approx (L^1(0; T; H^{-1}(\Omega)))'$;
- $L^\infty\,(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \approx (L^1(0; T; (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))')'$;
- $L^\infty\,(0, T; L^2(\Omega)) \approx (L^1(0; T; L^2(\Omega)))'$,

onde $L^1(0; T; H^{-1}(\Omega)), L^1(0; T; (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))'$ e $L^1(0; T; L^2(\Omega))$ são espaços de Banach separáveis.

Observação 1.5.7. *Sejam X um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n, T > 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então,*

$$L^p(0, T; X) \equiv L^p(Q) \text{ onde } Q = X \times (0, T).$$

Agora, estudamos o conceito de derivada generalizada sobre estes espaços.

Definição 1.5.8. *Seja $u \in L^1(0, T; Y)$ e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $w \in L^1(0, T; Z)$ é a n-ésima derivada generalizada de u em $(0, T)$, e escrevemos $w = u^{(n)}$, quando*

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T)$$

Definição 1.5.9. *Denotamos por $\mathcal{D}'(0, T; X)$ o espaço das aplicações $T : \mathcal{D}(0, T) \longrightarrow X$ que são lineares e contínuas, ou seja, $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, se $T : \mathcal{D}(0, T) \longrightarrow X$ é linear e se $\langle T, \theta_n \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X sempre que $\theta_k \to \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$. Dizemos que $\{T_k\} \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $\langle T_k, \theta \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X, para todo $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0, T; X)$ munido da convergência acima é chamado espaço das distribuições vetoriais de $(0, T)$ com valores em X.*

Observação 1.5.10. *Um conjunto A é dito total em X se o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de A são densas em X. Mostra-se que o conjunto $\{w\theta; w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)\}$ é total em $\mathcal{D}(Q)$, onde $Q = \Omega \times (0, T)$ e Ω é aberto em $\mathbb{R}^n$.*

A respeito da convergência fraca nesses espaços temos o seguinte resultado

Teorema 1.5.11. *Sejam X, Y espaços de Hilbert tais que $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^p(0, T; X)$ e $u' \in L^p(0, T; Y)$ com $p \in [1, \infty]$, então $u \in C^0([0, T]; Y)$.*

Demonstração. Ver [18]. □

Definição 1.5.12. *Representamos por $H_0^1(0, T; X)$ o espaço de Hilbert*

$$H_0^1(0, T; X) = \left\{u \in L^2(0, T; X); u' \in L^2(0, T; X) \text{ e } u(0) = u(T) = 0\right\}$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H_0^1(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_X \, dt,$$

onde X é um espaço de Hilbert.

Então é válida a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:

$$D(0, T; X) \hookrightarrow H_0^1(0, T; X) \hookrightarrow L^2(0, T; X) \equiv \left(L^2(0, T; X)\right)'$$

e

$$\left(L^2(0, T; X)\right)' \hookrightarrow H^{-1}(0, T; X) \hookrightarrow D'(0, T; X).$$

1.6 Resultados Auxiliares

Nesta seção, veremos alguns resultados e desigualdades que nos auxiliarão como ferramentas para nosso objetivo.

Teorema 1.6.1. *(Integração por Partes)*
Seja U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com ∂U de classe C^1 e sejam $u, v \in C^1(\bar{U})$. Então

$$\int_U u_{x_i} v dx = -\int_U u v_{x_i} dx + \int_{\partial U} u v \nu^i dS \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Em particular, pelo Teorema 1.4.2, se $u, v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\int_U u_{x_i} v dx = -\int_U u v_{x_i} dx$$

Demonstração. Ver [10] □

Teorema 1.6.2. *(Fórmula de Gauss) Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq i \leq n$ temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ e ν denota o vetor normal unitário exterior à Γ.

Demonstração. Ver [8]. □

Teorema 1.6.3. *(Formula de Green). Seja U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com ∂U de classe C^1 e sejam $u, v \in C^2(\bar{U})$. Então*

(i) $\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$

(ii) $\int_U Dv \cdot Du dx = -\int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$

(iii) $\int_U u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$

Demonstração. Ver [10] □

Teorema 1.6.4. *Sejam $a, b, p \geq 0$, então*

$$(a + b)^p \leq 2^p (a^p + b^p).$$

Demonstração. Se $a \leq b$ então $(a+b)^p \leq (2b)^p = 2^p b^p \leq 2^p(b^p + a^p)$.

Se $b \leq a$, então $(a+b)^p \leq (2a)^p = 2^p a^p \leq 2^p(a^p + b^p)$.

Portanto, para quaisquer $a, b, p \geq 0$, temos que $(a+b)^p = 2^p(a^p + b^p)$. $\square$

Teorema 1.6.5. *(Aubin-Lions) Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach, tais que B_0, B_1 são reflexivos e $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $T < \infty$. Munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

W é um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta. Em particular, toda sequência limitada em W admite subsequência que converge em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Demonstração. Ver Teorema 5.1 em [15]. $\square$

Teorema 1.6.6. *(Lema de Lions) Seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(Q)$, onde $1 < p < \infty$ e $Q = \Omega \times (0,T)$. Se*

(i) $u_k(x) \to u(x)$ q.s. em Q;

(ii) $\|u_k\|_{L^p(Q)} \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$,

então $u_k \to u$ em $L^p(Q)$.

Demonstração. Ver Lema 1.3 em [15]. $\square$

Teorema 1.6.7. *(Teorema de Lebesgue) Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para a função u. Se existir uma função u_0 tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \longrightarrow \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração. Ver [17]. $\square$

Teorema 1.6.8. *(Teorema de Leibniz para integração) Seja $f(x,t)$ uma função de x e t tal que $f(x,t)$ e sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em t e x em alguma região do plano (x,t), incluindo $a(x) \leqslant t \leqslant b(x)$, e $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$. Suponha também que as funções $a(x)$ e $b(x)$*

sejam ambas contínuas e ambas tenham derivadas contínuas para $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$*. Então, para* $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$*, temos*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + f(x,b(x))\frac{db}{dx} - f(x,a(x))\frac{da}{dx}$$

Em particular

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(x,t)dx = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx + f(t,t).$$

Demonstração. Ver exercício 5, capítulo 7 em [13]. □

Lema 1.6.9. *(Lema de Gronwall) Sejam* $f \in L^\infty(0,T)$ *e* $z \in L^1(0,T)$*, tais que* $z(t) > 0, f(t) \geq 0$ *e* $c \geq 0$ *uma constante. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

então temos

$$f(t) \leq c e^{\int_0^t z(s)ds}, \quad \forall t \in (0,T).$$

Demonstração. Ver [17]. □

As desigualdades seguintes e suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [10].

Teorema 1.6.10. *(Desigualdade Cauchy* com η*) Sejam* $a, b, \eta > 0$*, então*

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}.$$

Teorema 1.6.11. *(Desigualdade Cauchy-Schwarz) Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, então*

$$|x \cdot y| \leq |x||y|.$$

Teorema 1.6.12. *(Desigualdade de Holder) Assuma* $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então se* $u \in L^p(U), v \in L^q(U)$*, temos*

$$\int_U |uv|dx \leq \|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^q(U)}.$$

Teorema 1.6.13. *(Desigualdade genelarizada de Hölder) Seja p, q tais que $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$, com $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$, e assuma $u_k \in L^{p_k}(U)$ para $k = 1, \ldots, m$. Então*

$$\int_U |u_1 \cdots u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_i\|_{L^{p_k}(U)}\,.$$

Teorema 1.6.14. *(Desigualdade de Poincaré) Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, então para todo $1 \leq p < \infty$ existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p), tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 1.6.15. *(Desigualdade de Young) Sejam $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}(a, b > 0).$$

Teorema 1.6.16. *(Desigualdade de Young com ϵ) Sejam $a, b > 0$ e $\epsilon > 0$ então*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q,$$

onde $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.6.17. *(Regularidade para o problema elíptico) Seja Ω um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$. Em particular, se $m > n/2$ então $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração. ver Teorema 9.25 em [4] □

1.6.1 Teorema de Carathéodory

Nesta seção estudaremos o Teorema de Carathéodory, resultado este que será necessário para demonstração de existência de uma solução local para $(0.0-3)$. Os resultados a seguir podem ser encontrados no segundo capítulo de [9].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por $(t,x), t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6-1}$$

Dizemos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega, \exists$ uma função real $m_K(t)$ integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \quad \forall \quad (t,x) \in K.$$

Teorema 1.6.18. *(Teorema de Carathéodory) - Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x(t)$ de $(1.6-1)$ sobre algum intervalo $|t-t_0| \leq \beta, \beta > 0$.*

Corolario 1.6.19. *Sejam $\Omega = [0,T[\times B$ com $T > 0$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}, b > 0$. Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de $(1.6-1)$, tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M, \forall t \in I$; M independente de I e $M < b$. Então, $x(t)$ possui um prolongamento em $[0,T]$.*

Observação 1.6.20. *O Teorema de Carathéodory pode ser facilmente estendido para o caso complexo, isto é, quando $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$.*

CAPÍTULO 2

EXISTÊNCIA

Neste capítulo enunciaremos e provaremos a existência e unicidade de solução para o sistema $(0.0-3)$.

2.1 Hipóteses

(H.1) Hipótese sobre o Kernel g.

Consideremos a função $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ de classe $\mathbb{C}^2$, limitada, isto é,

$$0\leq g(t)\leq g_1$$

tal que

$$l=1-\int_0^\infty g(r)dr>0$$

e para algum número positivo $m_i, i=0,1,2$

$$\begin{aligned}&-m_0g(t)\leq g'(t)\leq -m_1g(t),\quad \forall t\geq 0,\\ &0\leq g''(t)\leq m_2g(t),\quad \forall t\geq 0.\end{aligned}$$

Exemplo: Para funções da forma $g_c(t)=\frac{1}{(c+1)}e^{\frac{-t}{c}}$, com $c>0,$ temos que $\int_0^\infty g_c(t)dt=$

$\frac{c}{c+1} < 1$. Em particular para $g(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{-t}{2}}$, temos que $\int_0^\infty g(t)dt = \frac{2}{3} < 1$. Além disso,

$$g'(t) = -\frac{1}{6}e^{\frac{-t}{2}} \quad e \quad g''(t) = \frac{1}{12}e^{\frac{-t}{2}}.$$

Ainda, existem $m_0, m_1, m_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} & -m_0 g(t) \leq g'(t) \leq -m_1 g(t), \quad \forall t \geq 0, \\ & 0 \leq g''(t) \leq m_2 g(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Basta tomarmos $m_0 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}e^{\frac{-t}{2}} \leq -\frac{1}{6}e^{\frac{-t}{2}} \leq -\frac{1}{9}e^{\frac{-t}{2}}, \quad \forall t \geq 0, \\ & 0 \leq \frac{1}{12}e^{\frac{-t}{2}} \leq \frac{1}{3}e^{\frac{-t}{2}}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto g satisfaz $(H.1)$.

(H.2) Hipótese sobre F.

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $F(0,0) = 0$.

Assumimos que existam constantes $M_i, i = 1, 2, \ldots, 7$, tais que $M_1, M_4, M_5, M_6, M_7 > 0$, $M_2, M_3 \geq 0$ e $q, p \in [1, 3]$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & F(u,v)\zeta \geq M_1 v\zeta + M_2|v|^{q-1}v\zeta + M_3|u|^{p-1}u\zeta \quad \text{para todo } u, v, \zeta \in \mathbb{R} \\ & [F(u,v) - F(\hat{u},\hat{v})][\zeta - \hat{\zeta}] \\ & \geq -M_4|v-\hat{v}||\zeta-\hat{\zeta}| - M_5\left(|u|^{p-1} + |\hat{u}|^{p-1}\right)|u-\hat{u}||\zeta-\hat{\zeta}| \\ & + M_6\left(|v|^{q-1}v - |\hat{v}|^{q-1}\hat{v}\right)(\zeta-\hat{\zeta}) \quad \text{para todo } u, \hat{u}, v, \hat{v}, \zeta, \hat{\zeta} \in \mathbb{R}, \\ & |F(u_1,v_1) - F(u_2,v_2)| \\ & \leq M_7\left(1 + \|(u_1,v_1)\|^{p-1} + \|(u_2,v_2)\|^{p-1}\right)\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\| \\ & \text{para todo } (u_1,v_1), (u_2,v_2) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

e para algum $M_8 > 0$ e $p \in [1, 2]$, assumimos que

$$\begin{cases} F_v(u,v) \geq 0 \quad \text{para todo } (u,v) \in \mathbb{R}^2; \quad F_u(0,0) = 0, \\ |F_u(u_1,v_1) - F_u(u_2,v_2)| \leq M_8\left(1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}\right)|u_1 - u_2|, \\ \quad \text{para todo } (u_1,v_1), (u_2,v_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Nós definimos a energia do sistema $(0.0-3)$ por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\|\psi(t)\|_2^2 + \|\phi'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \mu^2\|\phi(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{p+1}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\right\}.$$

2.2 Existência de Solução Local

Definição 2.2.1. *Um par* $[\psi,\phi]$ *é chamado de solução no sentido forte de* $(0.0-3)$ *em* $[0,\infty)\times\Omega$ *se as seguintes condições são satisfeitas para todo* $T>0$ *:*

(s1)

$$\psi \in L^\infty\left(0,T : H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \quad \psi_t \in L^\infty\left(0,T : H_0^1(\Omega)\right),$$

$$\phi \in L^\infty\left(0,T : {H_0}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \quad \phi_t \in L^\infty\left(0,T : {H_0}^1(\Omega)\right)$$

e

$$\phi_{tt} \in L^\infty\left(0,T : L^2(\Omega)\right).$$

(s2)

$$\int_0^T \left(i\psi_t + \Delta\psi + i|\psi|^2\psi + i\gamma\psi - \phi\psi, u\right)dt = 0$$

para alguma função complexa $u \in C^0\left(0,T : L^2(\Omega)\right)$.

(s3)

$$\int_0^T \left(\phi_{tt} - \Delta\phi + \int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau + \mu^2\phi + F\left(\phi,\phi_t\right) - \beta|\psi|^{2\theta}, v\right)dt = 0$$

para alguma função real $v \in C^0\left(0,T : L^2(\Omega)\right)$.

Teorema 2.2.2. *Dados* $\psi^0,\phi^0,\phi^1 \in \left\{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right\}^2 \times \left\{H_0^1(\Omega)\right\}$ *e assumindo as hipóteses (H.1)-(H.2), afirmamos que o problema* $(0.0-3)$ *possui pelo menos uma solução no sentido forte verificando*

$$\begin{aligned}
&\psi \in L^\infty\left(0,\infty; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \quad \psi' \in L^\infty\left(0,\infty; L^2(\Omega)\right),\\
&\phi \in L^\infty\left(0,\infty; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \quad \phi' \in L^\infty\left(0,\infty; H_0^1(\Omega)\right),\\
&\phi'' \in L^\infty\left(0,\infty; L^2(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

Para demonstrarmos o Teorema 2.2.2, utilizaremos o método de Galerkin, que desenvolve uma formulação variacional do problema $(0.0-3)$ em um espaço de dimensão finita $m,$ o qual, pelo teorema de Carathéodory, possui solução local em $[0, t_m)$. A extensão da solução para o intervalo $[0, T]$, para todo $T > 0,$ é consequência da primeira estimativa, a qual veremos mais adiante.

Motivação para solução

Veja que podemos reescrever as equações de $(0.0 - 3)$ de modo a encontrar um sistema equivalente. Para tal, considere $v, w \in \Omega.$ Multiplicando a primeira equação por $\overline{v}$ e a segunda por $\overline{w}$ e integrando em Ω com relação a x temos

$$\begin{cases} \left(i\psi_t + \Delta\psi + i|\psi|^2\psi + i\gamma\psi, v\right) = (-\phi\psi, v) \\ \left(\phi_{tt} - \Delta\phi + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau + \mu^2\phi + F\left(\phi, \phi_t\right), w\right) = \left(\beta|\psi|^{2\theta}, w\right). \end{cases}$$

Pelas propriedades do poduto interno

$$\begin{cases} i\left(\psi', v\right) + \left(\Delta\psi, v\right) + i\left(|\psi|^2\psi, v\right) + i\gamma\left(\psi, v\right) = \left(-\phi\psi, v\right), \\ \left(\phi'', w\right) - \left(\Delta\phi, w\right) - \left(\displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau, w\right) + \mu^2\left(\phi, w\right) + \left(F\left(\phi, \phi'\right), w\right) = \beta\left(|\psi|^{2\theta}, w\right). \end{cases} \tag{2.2-1}$$

Pelo Teorema 1.6.3-(ii) temos

$$\int \nabla\psi(t)\overline{\nabla v(t)}dt = -\int \overline{v(t)}\Delta\psi(t)dt + \int_\Gamma \frac{\partial\psi(t)}{\partial\nu}\overline{v(t)}dt.$$

Por hipótese $\psi \in H_0^1(\Omega)$, logo pelo Teorema $1.4.2$, temos que a última integral é equivalentemente nula, portanto

$$\left(\Delta\psi, v\right) = \int \Delta\psi(t)\overline{v(t)}dt = -\int \nabla\psi\overline{\nabla v(t)}dt = -\left(\nabla\psi, \nabla v\right)$$

Pela mesma justificativa, temos que $\left(\Delta\phi, v\right) = -\left(\nabla\phi, \nabla v\right).$

Multiplicando a primeira equação de $(2.2 - 1)$ por $-i$ obtemos

$$\begin{cases} \left(\psi'(t), v\right) + i\left(\nabla\psi(t), \nabla v\right) + \left(|\psi(t)|^2\psi(t), v\right) + \gamma\left(\psi(t), v\right) \\ = i\left(\phi(t)\psi(t), v\right), \\ \left(\phi''(t), w\right) + \left(\nabla\phi(t), \nabla w\right) - \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(\tau), \nabla w\right)d\tau \\ \quad + \mu^2\left(\phi(t), w\right) + \left(F\left(\phi(t), \phi'(t)\right), w\right) = \beta\left(|\psi(t)|^{2\theta}, w\right). \end{cases}$$

Aplicando o Método de Galerkin

Representamos por $\{w_v\}$ uma base ortonormal em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ formada pelas autofunções de $-\Delta$ e chamemos V_m o subespaço de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ gerado pelos primeiros m vetores, $w_1,\ldots,w_m$. Definimos

$$\psi_m(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i \quad \text{e} \quad \phi_m(t)=\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i,$$

onde $\{\psi_m(t),\phi_m(t)\}$ é a solução para o problema na forma variacional:

$$\begin{cases} (\psi_m'(t),v)+i\left(\nabla\psi_m(t),\nabla v\right)+\left(|\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t),v\right)+\gamma\left(\psi_m(t),v\right) \\ =i\left(\phi_m(t)\psi_m(t),v\right), \quad \forall v\in V_m \\ (\phi_m''(t),w)+\left(\nabla\phi_m(t),\nabla w\right)-\displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau),\nabla w\right)d\tau \\ \quad +\mu^2\left(\phi_m(t),w\right)+\left(F\left(\phi_m(t),\phi_m'(t)\right),w\right)=\beta\left(|\psi_m(t)|^{2\theta},w\right), \quad \forall w\in V_m \\ \psi_m(0)=\psi_{0m}\to\psi^0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \phi_m(0)=\phi_{0m}\to\phi^0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \quad \phi_m'(0)=\phi_{1m}\to\phi^1 \quad \text{em } H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.2-2}$$

Com efeito, tomemos em $(2.2-2)$, $v=w=w_j$, então

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}'(t)w_i,w_j\right)+i\left(\nabla\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i,\nabla w_j\right)+\left(\left|\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i\right|^2\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i,w_j\right) \\ +\gamma\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i,w_j\right)=i\left(\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i),w_j\right), \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}''(t)w_i,w_j\right)+\left(\nabla\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i,\nabla w_j\right) \\ -\displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(\tau)w_i,\nabla w_j\right)d\tau+\mu^2\left(\sum_{i=1}^{m} h_{im}(t)w_i,w_j\right) \\ +\left(F\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i,\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}'(t)w_i\right),w_j\right)=\beta\left(\left|\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i\right|^{2\theta},w_j\right), \\ \psi_m(0)=\psi_{0m}\to\psi^0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \quad \phi_m(0)=\phi_{0m}\to\phi^0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \quad \phi_m'(0)=\phi_{1m}\to\phi^1 \quad \text{em } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Considerando λ_i o autovalor associado a w_i, para $i = 1, \cdots, m$, pela ortonormalidade de $\{w_i\}$ e pelas propriedades do produto interno, analisando cada termo da expressão acima, temos:

- $(\psi_m'(t), w_j) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}'(t) w_i, w_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}'(t)\,(w_i, w_j) = g_{j_m}'(t);$

- $$\begin{aligned}(\nabla\psi_m(t), \nabla w_j) &= (-\Delta\psi_m(t), w_j)\\ &= \left(-\Delta\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t) w_i, w_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)\,(-\Delta w_i, w_j)\\ &= \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)\,(\lambda_i w_i, w_j)\\ &= \lambda_j g_{j_m}(t);\end{aligned}$$

- $\left(|\psi_m(t)|^2 \psi_m(t), w_j\right) = \left(\left|\sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}(t) w_i\right|^2 \sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}(t) w_i, w_j\right);$

- $(\psi_m(t), w_j) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}(t) w_i, w_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)\,(w_i, w_j) = g_{j_m}(t);$

- $(\phi_m(t)\psi_m(t), w_j) = \left(\left[\sum\limits_{i=1}^{m} h_{i_m}(t) w_i\right]\left[\sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}(t) w_i\right], w_j\right);$

- $(\phi_m''(t), w_j) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} h_{i_m}''(t) w_i, w_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} h_{i_m}''(t)\,(w_i, w_j) = h_{j_m}''(t);$

- $$\begin{aligned}(\nabla\phi_m(t), \nabla w_j) &= (-\Delta\phi_m(t), w_j)\\ &= \left(-\Delta\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t) w_i, w_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)\,(-\Delta w_i, w_j)\\ &= \sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)\,(\lambda_i w_i, w_j)\\ &= \lambda_j h_{j_m}(t);\end{aligned}$$

- $\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\sum_{i=1}^{m} h_{im}(\tau) w_i, \nabla w_j\right) d\tau = \int_0^t g(t-\tau)\lambda_j h_{j_m}(\tau) d\tau$

- $(\phi_m(t), w_j) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} h_{i_m}(t) w_i, w_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)\,(w_i, w_j) = h_{j_m}(t);$

- $\left(F\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right), w_j\right) = \left(F\left(\sum\limits_{i=1}^{m} h_{i_m}(t) w_i, \sum\limits_{i=1}^{m} h_{i_m}'(t) w_i\right), w_j\right);$

- $\left(|\psi_m(t)|^{2\theta}, w_j\right) = \left(\left|\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i\right|^{2\theta}, w_j\right).$

Isolando o primeiro termo de cada equação , para $j = 1, \cdots, m$, nosso problema aproximado pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{cases} g'_{j_m}(t) = -i\lambda_j g_{j_m}(t) - \left(\left|\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i\right|^2 \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i, w_j\right) - \gamma g_{j_m}(t) \\ +i\left(\left[\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i\right]\left[\sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)w_i\right], w_j\right), \\ h''_{j_m}(t) = -\lambda_j h_{j_m}(t) - \lambda_j \int_0^t g(t-\tau)h_{j_m}(\tau)d\tau - \mu^2 h_{j_m}(t) \\ -\left(F\left(\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i, \sum_{i=1}^{m} h'_{i_m}(t)w_i\right), w_j\right) + \beta\left(\left|\sum_{i=1}^{m} h_{i_m}(t)w_i\right|^{2\theta}, w_j\right) \\ g_{j_m}(0) = (\psi^0, w_j) \\ h_{j_m}(0) = (\phi^0, w_j), \quad h'_{j_m}(0) = (\phi^1, w_j). \end{cases}$$

Escrevendo o sistema em sua forma matricial, temos

$$\begin{cases} Y'(t) = -iA \cdot Y(t) - B_1(Y(t)) - \gamma Y(t) + iB_2(Y(t), Z(t)), \\ Z''(t) = -A \cdot Z(t) - AB_3(Z(t)) - \mu^2 Z(t) - B_4(Z(t), Z'(t)) + \beta B_5(Y(t)), \\ Y(0) = Y^0, \quad Z(0) = Z^0, \quad Z'(0) = Z^1, \end{cases}$$

onde

$$Y(t) := \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix}; \quad Z(t) := \begin{bmatrix} h_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m_m}(t) \end{bmatrix}; \quad A := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix};$$

$$B_1(Y(t)) := \begin{bmatrix} \left(\left| [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right|^2 [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix}, w_1 \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\left| [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right|^2 [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix}, w_m \right) \end{bmatrix};$$

$$B_2(Y(t), Z(t)) := \begin{bmatrix} \left(\left\{ [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} h_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right\} \left\{ [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right\}, w_1 \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\left\{ [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} h_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right\} \left\{ [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right\}, w_m \right) \end{bmatrix};$$

$$B_3(Z(t)) := \begin{bmatrix} \int_0^t g(t-\tau)h_{1_m}(\tau)d\tau \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_0^t g(t-\tau)h_{m_m}(\tau)d\tau \end{bmatrix};$$

$$B_4(Z(t),Z'(t)) = \begin{bmatrix} \left(F\left([w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} h_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m_m}(t) \end{bmatrix}, [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} h'_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h'_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right), w_1 \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(F\left([w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} h_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m_m}(t) \end{bmatrix}, [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} h'_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h'_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right), w_m \right) \end{bmatrix};$$

$$B_5(Y(t)) := \beta \begin{bmatrix} \left(\left| [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right|^{2\theta}, w_1 \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\left| [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \right|^{2\theta}, w_m \right) \end{bmatrix};$$

$$Y^0 = \begin{bmatrix} (\psi_m^0, w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\psi_m^0, w_m) \end{bmatrix}, \quad Z^0 = \begin{bmatrix} (\phi_m^0, w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\phi_m^0, w_m) \end{bmatrix}, \quad Z^1 = \begin{bmatrix} (\phi_m^1, w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\phi_m^1, w_m) \end{bmatrix}.$$

Definamos

$$L(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \\ Z'(t) \end{bmatrix}.$$

Então

$$L' = \begin{bmatrix} Y'(t) \\ Z'(t) \\ Z''(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -iAI - \gamma I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & (-A-\mu^2)I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \\ Z'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_1 \\ 0 \\ \beta B_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} iB_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -AB_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_4 \end{bmatrix}.$$

Definamos $f : [0,t] \times \mathbb{R}^{6m} \longrightarrow \mathbb{R}^{6m}$ por $f(t, L(t)) = ML(t) + N(L(t))$ onde

$$M = \begin{bmatrix} -iAI - \gamma I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & (-A-\mu^2)I & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$N(L(t)) = \begin{bmatrix} -B_1 \\ 0 \\ \beta B_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} iB_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ AB_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_4 \end{bmatrix}.$$

Assim, nosso porblema de valor inicial equivale a

$$\begin{cases} L'(t) = f(t, L(t)), \\ L(0) = \begin{bmatrix} Y^0 \\ Z^0 \\ Z^1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2.2-3}$$

Logo, esse sistema possui solução em $[0, t_m)$ pois $f(t, L(t))$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Caratheodory. Com efeito,

i) Para L fixado, mostremos que $f(t, L)$ é mensurável em t. Temos que as funções $B_1(Y), B_2(Y,Z), B_4(Z,Z')$ e $B_5(Y)$ são constantes em relação a t, logo são contínuas e portanto mensuráveis em relação a t. Além disto, temos que A é sempre constante, logo pela mesma justificativa também é mensuravel em relação a t. Assim, resta-nos mostrar que $B_3(Z)$ é mensurável, para tal, mostremos que $B_3(Z)$ é contínua em relação a t.

   Considere a função $\xi_i : [0,T] \longrightarrow \mathbb{C}$, com $i = 1, \cdots, m$ e $t < T$ dada por

$$\xi_i(t) = \int_0^t g(t-\tau) h_{i_m}(\tau) d\tau.$$

Pela positividade de g temos

$$
\begin{aligned}
&|\xi_i(t+k) - \xi_i(t)| \\
&= \left| \int_0^{t+k} g(t+k-\tau)h_{i_m}(\tau)d\tau - \int_0^t g(t-\tau)h_{i_m}(\tau)d\tau \right| \\
&= \left| \int_{-k}^{t} g(t-\tau)h_{i_m}(\tau+k)d\tau - \int_0^t g(t-\tau)h_{i_m}(\tau)d\tau \right| \\
&= \left| \int_{-k}^{0} g(t-\tau)h_{i_m}(\tau+k)d\tau + \int_0^t g(t-\tau)h_{i_m}(\tau+k)d\tau - \int_0^t g(t-\tau)h_{i_m}(\tau)d\tau \right| \\
&= \left| \int_0^t g(t-\tau)[h_{i_m}(\tau+k) - h_{i_m}(\tau)]d\tau + \int_{-k}^{0} g(t-\tau)h_{i_m}(\tau+k)d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t g(t-\tau)|h_{i_m}(\tau+k) - h_{i_m}(\tau)|d\tau + \int_{-k}^{0} g(t-\tau)|h_{i_m}(\tau+k)|d\tau.
\end{aligned}
$$

Fazendo $k \longrightarrow 0$, pela continuidade de h_{i_m} temos que $|\xi_i(t+k)-\xi_i(t)| \longrightarrow 0$, logo ξ_i é contínua, portanto mensurável. Assim B_3 também é mensurável, pois cada coordenada sua é. Portanto, como a soma de funções mensurávies é mensurável, temos que $f(t, L)$ é mensurável.

ii) Consideremos $t \in [0, t]$ fixado e mostremos que $f(t, L)$ é contínua em L. Considere o operador $M_k(L) = M \cdot L$, temos que M_k é um operador linear em $\mathbb{R}^{6m}$, portanto é contínuo e $N(L)$ também é contínuo pois suas coordenadas são. Com efeito, pela continuidade do produto interno e da norma, temos que $B_1(Y), B_2(Y, Z)$ e $B_5(Y)$ são contínuas. Além disso, por hipótese $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1, logo $B_4(Z, Z')$ também é contínuo. Portanto resta-nos mostrar que $B_3(Z)$ é contínuo. Para tal, mostremos que cada coordenada sua é contínua.

Seja $\xi_i(Z) = \int_0^t g(t-\tau)h_{i_m}(\tau)d\tau$ a i-ésima coordenada de $B_3(Z)$ com $i = 1, \cdots m$. Para i fixado, suponhamos que $h_{i_j} \longrightarrow h_i$ em $L^\infty(0, \infty)$ quando $j \longrightarrow \infty$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\| h_{i_j} - h_i \|_{L^\infty(0,\infty)} < \dfrac{\epsilon}{k}$, onde $k = \int_0^t g(t-\tau)d\tau$.

Então $\xi(h_{i_j}) \longrightarrow \xi(h_i)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\| \xi(h_{i_j}) - \xi(h_i) \| &= \left\| \int_0^t g(t-\tau)h_{i_j}(\tau)d\tau - \int_0^t g(t-\tau)h_i(\tau)d\tau \right\| \\
&= \left\| \int_0^t g(t-\tau)[h_{i_j} - h_i](\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \left\| \int_0^t g(t-\tau) \sup_\tau [h_{i_j}(\tau) - h_i(\tau)]d\tau \right\| \\
&= \left\| \sup_\tau [h_{i_j}(\tau) - h_i(\tau)] \int_0^t g(t-\tau)d\tau \right\| \\
&= \|h_{i_j} - h_i \|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t g(t-\tau)d\tau \\
&\leq \frac{\epsilon}{k} \cdot k = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $\xi_i(Z)$ é contínua para $i = 1, \cdots m$. Logo, $B_3(Z)$ é contínua e isso implica que $f(t, L)$ é contínua em L, como queríamos.

iii) Seja $K \subset (0, t) \times \mathbb{R}^{6m}$ compacto, provemos que existe uma função real m_k integrável tal que

$$\|f(t, L)\| \leq m_k(t), \quad \forall (t, L) \in K.$$

Como em $\mathbb{R}^{6m}$ as normas são equivalentes, pela norma da soma temos

$$\begin{aligned}
\| f(t, L(t)) \|_{\mathbb{R}^{6m}} =& \| M_k(L(t) + N(L(t)) \|_{\mathbb{R}^{6m}} \\
&\leq \| ML(t) \|_{\mathbb{R}^{6m}} + \| N(L(t)) \|_{\mathbb{R}^{6m}} \\
&\leq \| ML(t) \|_{\mathbb{R}^{6m}} + \| B_1(Y) \|_{\mathbb{R}^m} + \beta \| B_5(Y) \|_{\mathbb{R}^m} \\
&+ \| iB_2(Y, Z) \|_{\mathbb{R}^m} + \| AB_3(Z) \|_{\mathbb{R}^m} + \| B_4(Z, Z') \|_{\mathbb{R}^m} .
\end{aligned}$$

Sabendo que funções contínuas em um conjunto compacto são limitadas, pelo item ii), temos que existem constantes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ tais que

$$\| ML \|_{\mathbb{R}^{6m}} \leq c_1, \| B_1(Y) \|_{\mathbb{R}^m} \leq c_2, \beta \| B_5(Y) \|_{\mathbb{R}^m} \leq \beta c_3,$$

$$\| iB_2(Y, Z) \|_{\mathbb{R}^m} \leq c_4, \| AB_3(Z) \|_{\mathbb{R}^m} \leq c_5, \| B_4(Z, Z') \|_{\mathbb{R}^m} \leq c_6.$$

Seja $m_k : [0, t[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função constante $m_k(s) = \max\{c_1, c_2, \beta c_3, c_4, c_5, c_6\}$, então m_k é integrável e satisfaz o desejado.

Portanto $f(t, L)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Caratheodory, como queríamos provar.

2.3 Estimativa a Priori I

O objetivo desta seção é garantir que as soluções locais podem ser estendidas ao intervalo $[0, T]$, $T > 0$, obtendo-se um par de sequências de funções $\{\phi_m(t); \psi_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}}$ que convergem para a solução do sistema $(0.0-3)$.

Substituindo $v = \psi_m(t)$ e $w = \phi_m(t)$ em $(2.2-2)$, temos

$$\begin{aligned}(\psi_m'(t), \psi_m(t)) + i\left(\nabla\psi_m(t), \nabla\psi_m(t)\right) + \left(\left|\psi_m(t)\right|^2 \psi_m(t), \psi_m(t)\right)\\ + \gamma\left(\psi_m(t), \psi_m(t)\right) = i\left(\phi_m(t)\psi_m(t), \psi_m(t)\right);\end{aligned} \tag{2.3-4}$$

$$\begin{aligned}(\phi_m''(t), \phi_m'(t)) + (\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m'(t)) - \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right) d\tau\\ + \mu^2\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right) + \left(F\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right), \phi_m'(t)\right) = \beta\left(\left|\psi_m(t)\right|^{2\theta}, \phi_m'(t)\right).\end{aligned} \tag{2.3-5}$$

Calculemos a parte real da primeira equação. Analisando termo a termo

- $$\begin{aligned} Re\left(\psi_m'(t), \psi_m(t)\right) &= \frac{1}{2}\left[\overline{(\psi_m'(t), \psi_m(t))} + (\psi_m'(t), \psi_m(t))\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(\psi_m'(t), \psi_m(t)) + (\psi_m(t), \psi_m'(t))\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\psi_m(t), \psi_m(t)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

- Sabendo que $(\nabla\psi_m(t), \nabla\psi_m(t)) = \|\nabla\psi_m(t)\|_2^2$ é um número real, então $i\left(\nabla\psi_m(t), \nabla\psi_m(t)\right)$ é um imaginário puro, logo $Re\left[i\left(\nabla\psi_m(t), \nabla\psi_m(t)\right)\right] = 0$,

- $$\begin{aligned} Re\left(\left|\psi_m(t)\right|^2 \psi_m(t), \psi_m(t)\right) &= \int_\Omega \left|\psi_m(t)\right|^2 \psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}dx\\ &= \int_\Omega \left|\psi_m(t)\right|^2 \left|\psi_m(t)\right|^2 dx\\ &= \int_\Omega \left|\psi_m(t)\right|^4 dx = \| \psi_m(t) \|_4^4 .\end{aligned}$$

- Re $\gamma\left(\psi_m(t), \psi_m(t)\right) = \gamma \| \psi_m(t) \|_2^2$.

- $$\begin{aligned}(\phi_m(t)\psi_m(t), \psi_m(t)) &= \int_\Omega \phi_m(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}dx\\ &= \int_\Omega \phi_m(t)|\psi_m(t)|^2 dx,\end{aligned}$$

como ϕ é real e a função módulo também é real, temos que $(\phi_m(t)\psi_m(t), \psi_m(t))$ é real, logo $i\,(\phi_m(t)\psi_m(t), \psi_m(t))$ é um imaginário puro, daí Re $i\,(\phi_m(t)\psi_m(t), \psi_m(t)) = 0$.

Assim tomando a parte real de $(2.3-4)$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \psi_m(t) \parallel_2^2 + \parallel \psi_m(t) \parallel_4^4 + \gamma \parallel \psi_m(t) \parallel_2^2 = 0. \tag{2.3-6}$$

Ainda, podemos reescrever os termos de $(2.3-5)$ por

- $$\begin{aligned}(\phi''_m(t), \phi'_m(t)) &= \frac{1}{2}\left[(\phi''_m(t), \phi'_m(t)) + (\phi'_m(t), \phi''_m(t)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\phi'_m(t), \phi'_m(t)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi'_m(t) \parallel_2^2 .\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi'_m(t)) &= \frac{1}{2}\left[(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi'_m(t)) + (\nabla\phi'_m(t), \nabla\phi_m(t)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m(t)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2^2 .\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\mu^2\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) &= \mu^2\frac{1}{2}\left[(\phi_m(t), \phi'_m(t)) + (\phi'_m(t), \phi_m(t))\right]\\ &= \mu^2\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\phi_m(t), \phi_m(t)\right)\right]\\ &= \mu^2\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi_m(t) \parallel_2^2 .\end{aligned}$$
- $$\left(F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right), \phi'_m(t)\right) = \int_\Omega F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right)\phi'_m(t)dx.$$
- $$\beta\left(|\psi_m(t)|^{2\theta}, \phi'_m(t)\right) = \beta\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\,\phi'_m(t)dx.$$

Assim, reescrevemos $(2.3-5)$ como

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi'_m(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2^2 - \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi'_m(t)\right)d\tau + \mu^2\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi_m(t) \parallel_2^2\\ &+ \int_\Omega F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right)\phi'_m(t)dx = \beta\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\,\phi'_m(t)dx,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi_m'(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2^2 + \mu^2 \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi_m(t) \parallel_2^2 + \int_\Omega F\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m'(t)dx$$
$$= \beta \int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\, \phi_m'(t)dx + \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right)d\tau. \tag{2.3-7}$$

Somando as equações $(2.3-6)$ e $(2.3-7)$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \psi_m(t) \parallel_2^2 + \parallel \psi_m(t) \parallel_4^4 + \gamma \parallel \psi_m(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi_m'(t) \parallel_2^2 +$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2^2 + \mu^2 \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \phi_m(t) \parallel_2^2 + \int_\Omega F\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m'(t)dx =$$
$$\beta \int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta} \cdot \phi_m'(t)dx + \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right)d\tau.$$

Agrupando, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(t)\|_2^2\right] \\ &+ \|\psi_m(t)\|_4^4 + \gamma\|\psi_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega F\left(\phi_{m(t)}, \phi_m'(t)\right)\phi_m'(t)dx \\ &= \beta\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\,\phi_m'(t)dx + \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right)d\tau.\end{aligned} \tag{2.3-8}$$

O Teorema $1.6.8$ implica que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left[g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)\right]d\tau + g(t-t)\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m(t)\right) \\ &= \int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau + \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right)d\tau \\ &+ g(0) \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2^2 .\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau \\ &- \int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau - g(0) \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2^2 .\end{aligned} \tag{2.3-9}$$

Ainda, como $\phi'_m(t) \leq |\phi'_m(t)|$, por propriedades de integral e do módulo de um número real, temos

$$\begin{aligned}\beta\left(|\psi_m(t)|^{2\theta}, \phi'_m(t)\right) &= \beta \int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\, \phi'_m(t)dx\\ &\leq \beta \int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\, |\phi'_m(t)|\, dx.\end{aligned}$$

Portanto, substituindo em $(2.3-8)$ temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\,\|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2\, \|\phi_m(t)\|_2^2\Big]\\ &+ \|\psi_m(t)\|_4^4 + \gamma\, \|\psi_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right)\phi'_m(t)dx\\ &\leq \beta \int_\Omega |\psi_m|^{2\theta}\, |\phi'_m|\, dx + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau\right)\\ &- \int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau - g(0)\, \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2\,.\end{aligned} \tag{2.3-10}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$|\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)| \leq \|\, \nabla\phi_m(\tau)\, \|_2 \|\, \nabla\phi_m(t)\, \|_2\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}-\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau &\leq \left|\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)d\tau\right|\\ &\leq \int_0^t |g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)|d\tau\\ &= \int_0^t |g'(t-\tau)||\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)|d\tau\\ &\leq \int_0^t g'(t-\tau)\, \|\, \nabla\phi_m(\tau)\, \|_2 \|\, \nabla\phi_m(t)\, \|_2\, d\tau\\ &=\|\, \nabla\phi_m(t)\, \|_2 \int_0^t g'(t-\tau)\, \|\, \nabla\phi_m(\tau)\, \|_2\, d\tau.\end{aligned}$$

Por (H.1) temos que , $-m_0 g(t) \leq g'(t) \leq -m_1 g(t)$, para todo $t \geq 0$. Logo,

$$-m_0 g(t-\tau) \leq g'(t-\tau) \leq -m_1 g(t-\tau) \leq m_0 g(t-\tau).$$

Portanto, $|g'(t-\tau)| \leq m_0 g(t-\tau)$ para todo $t \geq \tau$. Daí,

$$\int_0^t |g'(t-\tau)| \left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right) d\tau \leq m_0 \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2 \int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau.$$

Pela Desigualdade de Young para $p = q = 2$, temos

$$\begin{aligned} & m_0 \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2 \int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} m_0^2 \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau \right)^2, \end{aligned}$$

daí, pela Desigualdade de Holder, (Teorema $1.6.12$), com $p = q = 2$, decorre que

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau \\ & = \int_0^t g(t-\tau)^{\frac{1}{2}} g(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau \\ & \leq \left(\int_0^t g(t-\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Sabendo que $\parallel g \parallel_{L_1(0,\infty)} = \int_0^\infty g(t)dt$ e $\int_0^t g(t)dt \leq \int_0^\infty g(t)dt$ pois g é positiva, ocorre que

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t g(t-\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \parallel g \parallel_{L_1(0,\infty)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \|\nabla\phi_m(t)\|_2 \int_0^t |g'(t-\tau)| \, \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2 \, d\tau \\ & \leq \frac{m_0^2}{2} \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t g(t-\tau) \, \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2 \, d\tau. \end{aligned} \tag{2.3-11}$$

Por outro lado, aplicando a Desigualdade de Young, (Teorema $1.6.15$), para $p = q = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\beta \int_{\Omega} |\psi_m(t)|^{2\theta} |\phi'_m(t)| \, dx &= \int_{\Omega} \left(|\psi_m(t)|^{2\theta}\right) (\beta |\phi'_m(t)|) \, dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\psi_m(t)|^{4\theta} + \frac{\beta^2}{2} |\phi'_m(t)|^2\right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\psi_m(t)|^{4\theta} \, dx + \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega} |\phi'_m(t)|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\{x\in\Omega; |\psi_m(x,t)|\leq 1\}} |\psi_m(t)|^{4\theta} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\{x\in\Omega; |\psi_m(x,t)|>1\}} |\psi_m(t)|^{4\theta} \, dx \\
&+ \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega} |\phi'_m(t)|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Levando em conta que $1 \leq 2\theta \leq 2$, ou seja, $2 \leq 4\theta \leq 4$, temos que se $|\psi_m(x,t)| \leq 1$, então $|\psi_m(t)|^{4\theta} \leq 1$. Do mesmo modo, $|\psi_m(x,t)| > 1$ implica que $|\psi_m(t)|^4 \geq |\psi_m(t)|^{4\theta}$, daí por propriedades de Integral, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\{x\in\Omega; |\psi_m(x,t)|\leq 1\}} |\psi_m(t)|^{4\theta} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\{x\in\Omega; |\psi_m(x,t)|>1\}} |\psi_m(t)|^{4\theta} \, dx \\
&+ \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega} |\phi'_m(t)|^2 \, dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx + \frac{1}{2} \int_{\{x\in\Omega; |\psi_m(x,t)|\geq 1\}} |\psi_m(t)|^4 dx + \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega} |\phi'_m(t)|^2 \, dx \\
&= \frac{med(\Omega)}{2} + \frac{1}{2} \parallel \psi_m(t) \parallel_4^4 + \frac{\beta^2}{2} \parallel \phi'_m(t) \parallel_2 .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\beta \int_{\Omega} |\psi_m(t)|^{2\theta} |\phi'_m(t)| \, dx \leq \frac{med(\Omega)}{2} + \frac{1}{2} \|\psi_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 + \frac{\beta^2}{2} \|\phi'_m(t)\|^2 . \tag{2.3-12}$$

Além disso, por (H.2), existem $M_1, M_2 > 0$ e $M_3 \geq 0$ e $q, p \in [1,3]$ tais que

$$\begin{aligned}
&F(\phi_m(t), \phi'_m(t))\, \phi'_m(t) \\
&\geq M_1 \phi'_m(t) \phi'_m(t) + M_2 |\phi'_m(t)|^{q-1} \phi'_m(t) \phi'_m(t) + M_3 |\phi_m(t)|^{p-1} \phi_m(t) \phi'_m(t).
\end{aligned}$$

Integrando a expressão acima em Ω

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega F\left(\phi_m(t),\phi_m'(t)\right)\phi_m'(t)dx\\
&\geq \int_\Omega \left[M_1\phi_m'(t)\phi_m'(t)+M_2|\phi_m'(t)|^{q-1}\phi_m'(t)\phi_m'(t)+M_3|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)\phi_m'(t)\right]dx\\
&= M_1\parallel \phi_m'(t)\parallel_2^2+M_2\int_\Omega|\phi_m'(t)|^{q-1}|\phi_m'(t)|^2dx+M_3\int_\Omega|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)\phi_m'(t)dx.
\end{aligned}
$$

Sabendo que

$$
\frac{d}{dt}|\phi_m(t)|^{p+1}=(p+1)|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)\phi_m'(t),
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\phi_m(t)\right\|_{p+1}^{p+1} &= \frac{d}{dt}\int_\Omega|\phi_m(t)|^{p+1}dx\\
&=\int_\Omega \frac{d}{dt}|\phi_m(t)|^{p+1}dx\\
&=(p+1)\int_\Omega|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)\phi_m'(t)dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&M_1\int_\Omega\phi_m'(t)\phi_m'(t)dx+M_2\int_\Omega|\phi_m'(t)|^{q-1}|\phi_m'(t)|^2dx+M_3\int_\Omega|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)\phi_m'(t)dx\\
&=M_1\parallel\phi_m'(t)\parallel_2^2+M_2\int_\Omega|\phi_m'(t)|^{q+1}dx+M_3\int_\Omega|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)\phi_m'(t)dx\\
&=M_1\parallel\phi_m'(t)\parallel_2^2+M_2\parallel\phi_m'(t)\parallel_{q+1}^{q+1}+\frac{M_3}{(p+1)}\frac{d}{dt}\left\|\phi_m(t)\right\|_{p+1}^{p+1}\\
&\leq\int_\Omega F\left(\phi_m(t),\phi_m'(t)\right)\phi_m'(t)dx.
\end{aligned}
\tag{2.3-13}
$$

Portanto, das equações $(2.3-10), (2.3-11), (2.3-12)$ e $(2.3-13)$, Temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\psi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\phi_m'(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\phi_m(t)\right\|_2^2+\frac{2M_3}{(p+1)}\left\|\phi_m(t)\right\|_{p+1}^{p+1}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left\|\psi_m(t)\right\|_4^4+\gamma\left\|\psi_m(t)\right\|_2^2+M_2\left\|\phi_m'(t)\right\|_{q+1}^{q+1}\\
&\leq\frac{\text{med }(\Omega)}{2}+\frac{(\beta^2-2M_1)}{2}\left\|\phi_m'(t)\right\|_2^2+\left(\frac{m_0^2}{2}-g(0)\right)\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2\\
&+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla\phi_m(\tau)\right\|_2^2d\tau+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau),\nabla\phi_m(t)\right)d\tau\right).
\end{aligned}
$$

Integrando a expressão sobre o intervalo $(0, t)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\left[\|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(s)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(s)\|_{p+1}^{p+1}\right] ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \|\psi_m(s)\|_4^4\, ds + \gamma\int_0^t \|\psi_m(s)\|_2^2\, ds + M_2\int_0^t \|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\, ds \\
&\leq \int_0^t \frac{\text{med }(\Omega)}{2} + \frac{(\beta^2 - 2M_1)}{2}\int_0^t \|\phi_m'(s)\|_2^2\, ds + \left(\frac{m_0^2}{2} - g(0)\right)\int_0^t \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2\, ds \\
&+ \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\, d\tau ds \\
&+ \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\int_0^s g(s-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(s)\right) d\tau\right) ds.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{d}{ds}\left[\|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(s)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(s)\|_{p+1}^{p+1}\right] \\
&= \left[\|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1}\right] \\
&- \left[\|\psi_m(0)\|_2^2 + \|\phi_m'(0)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(0)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(0)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(0)\|_{p+1}^{p+1}\right].
\end{aligned}$$

Por $(2.2-2)$, temos que $\psi_m(0) = \psi_{0m} \to \psi^0$ em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $\phi_m(0) = \phi_{0m} \to \phi^0$ em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, e $\phi_m'(0) = \phi_{1m} \to \phi^1$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo pelo Teorema $1.2.2$, $\{\psi_{0m}\}$, $\{\phi_{0m}\}$ e $\{\phi_{1m}\}$ são limitadas, daí

$$\left[\|\psi_m(0)\|_2^2 + \|\phi_m'(0)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(0)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(0)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(0)\|_{p+1}^{p+1}\right] \leq D_0,$$

onde D_0 é uma constante positiva que independe de $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\psi_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\phi_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\mu^2\|\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{M_3}{(p+1)}\|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\frac{1}{2}\|\psi_m(s)\|_4^4 + \gamma\|\psi_m(s)\|_2^2 + M_2\|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds \\
&\leq D_0 + \frac{k_0}{2}t + \frac{(\beta^2 - 2M_1)}{2}\int_0^t \|\phi_m'(s)\|_2^2\, ds + \left(\frac{m_0^2}{2} - g(0)\right)\int_0^t \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2\, ds \\
&+ \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\, d\tau ds \\
&+ \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right) d\tau,
\end{aligned}$$

onde $k_0 = med(\Omega)$. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$|\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)| \leq \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2\|\nabla\phi_m(t)\|_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right) d\tau &\leq \int_0^t |g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)| d\tau \\
&= \int_0^t |g(t-\tau)|\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right)| d\tau \\
&\leq \int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2 d\tau \\
&= \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2 \int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau \\
&= \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2 \int_0^t g(t-\tau)^{\frac{1}{2}} g(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Holder, para $p = q = 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right) d\tau \\
&\leq \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2 \left(\int_0^t g(t-\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $\parallel g \parallel_{L_1(0,\infty)} = \int_0^\infty g(\tau) d\tau$ e $\int_0^t g(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty g(\tau) d\tau$ pois g é positiva, então

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m(t)\right) d\tau \\
&\leq \parallel \nabla\phi_m(t) \parallel_2 \parallel g \parallel_{L_1(0,\infty)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau) \parallel \nabla\phi_m(\tau) \parallel_2^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Assim, pela Desigualdade de Young com ϵ (Teorema 1.6.16), para $p = q = 2$ e $\epsilon = \frac{1}{8}$ temos

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\phi_m(t)\|_2 \, \|g\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau) \, \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{8} \, \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + 2\|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t g(t-\tau) \, \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2 \, d\tau.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que $g(t-\tau) \leq \sup\limits_{s\in[0,\infty)} g(s) = \|g\|_{L^\infty[0,\infty)}$, logo

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-\tau)\,\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau &\leq \int_0^t \|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\,\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau\\ &= \|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-\tau)\,(\nabla\phi_m(\tau),\nabla\phi_m(t))\,d\tau\\ &\leq \frac{1}{8}\,\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + 2\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau.\end{aligned} \tag{2.3-14}$$

Considere agora a seguinte mudança de variável, $r = s-\tau$. Então,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\,\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau ds\\ &= \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_\tau^t g(s-\tau)\,\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,ds d\tau\\ &= \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^{t-\tau} g(r)\,\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,dr d\tau\\ &= \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\int_0^{t-\tau} g(r) dr d\tau\\ &\leq \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,\|g\|_{L^1(0,\infty)} d\tau\\ &\leq \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}^2\int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau.\end{aligned}$$

Combinando as desigualdades acima e multiplicando por 2,

$$\begin{aligned}&\|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2\,\|\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\,\|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1}\\ &+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + 2\gamma\,\|\psi_m(s)\|_2^2 + 2M_2\,\|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds\\ &\leq 2D_0 + k_0 t + \left(\beta^2 - M_1\right)\int_0^t \|\phi_m'(s)\|_2^2\,ds + \left(m_0^2 - 2g(0)\right)\int_0^t \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2\,ds\\ &+ \|g\|_{L^1(0,\infty)}^2\int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau\\ &+ \frac{1}{4}\,\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + 4\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau.\end{aligned}$$

Somando $1 - \frac{1}{4}\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2$ em ambos os lados da equação, temos

$$
\begin{aligned}
&1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \frac{3}{4}\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + 2\gamma\|\psi_m(s)\|_2^2 + 2M_2\|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds \\
&\leq 2D_0 + 1 + k_0 t + \left(\beta^2 - M_1\right)\int_0^t \|\phi_m'(s)\|_2^2\, ds + \left(m_0^2 - 2g(0)\right)\int_0^t \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2\, ds \\
&+ \|g\|_{L^1(0,\infty)}^2 \int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\, d\tau \\
&+ 4\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Considere

$$
\eta_1 = \max\{k_0, \left(\beta^2 - M_1\right), \left(m_0^2 - 2g(0)\right), \|g\|_{L^1(0,\infty)}^2, 4\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\},
$$

então

$$
\begin{aligned}
&1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \frac{3}{4}\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + 2\gamma\|\psi_m(s)\|_2^2 + 2M_2\|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds \\
&\leq (2D_0 + 1) + \eta_1 \int_0^t 1 + \|\phi_m'(s)\|_2^2 + 3\|\nabla\phi_m(s)\|_2^2\, ds.
\end{aligned}
$$

Novamente tomando $\eta_2 = \max\{\eta_1, 3\}$ temos

$$
\begin{aligned}
&1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \frac{3}{4}\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2\|\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + 2\gamma\|\psi_m(s)\|_2^2 + 2M_2\|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds \\
&\leq (2D_0 + 1) + \eta_2 \int_0^t 1 + \|\phi_m'(s)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2\, ds.
\end{aligned}
$$

Considere $\rho = \min\{1, \frac{3}{4}, \mu^2, \frac{2M_3}{(p+1)}, 2\gamma, 2M_2\}$. Então

$$\begin{aligned}
&\rho\left[1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1}\right] \\
&+ \rho\left[\int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + \|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds\right] \\
&\leq 1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \mu^2 \|\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)} \|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + 2\gamma \|\psi_m(s)\|_2^2 + 2M_2 \|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + \|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds \\
&\leq \frac{1}{\rho}(2D_0 + 1) + \frac{1}{\rho}\eta_2 \int_0^t 1 + \|\phi_m'(s)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2 \, ds.
\end{aligned}$$

Como $\|\psi_m(t)\|_2^2, \|\phi_m(t)\|_2^2, \|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1}$ e $\int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + \|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds$ são não negativos, então

$$\begin{aligned}
&1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + \|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds \\
&\leq \frac{1}{\rho}(2D_0 + 1) + \frac{1}{\rho}\eta_2 \int_0^t 1 + \|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m(s)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(r)\|_4^4 + \|\psi_m(r)\|_2^2 + \|\phi_m'(r)\|_{q+1}^{q+1}\right\} dr ds.
\end{aligned} \tag{2.3-15}$$

Definamos

$$\begin{aligned}
&f(t) = 1 + \|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + \|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi_m'(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds,
\end{aligned}$$

$$z(t) = \frac{1}{\rho}\eta_2$$

e

$$C_0 = \frac{1}{\rho}(2D_0 + 1),$$

com $f \in L^\infty(0,t), z \in L^1(0,t)$, então de $(2.3-15)$ temos que $f(t) \leq C_0 + \int_0^t f(t)z(t)dt$ e como $z(t) > 0$, $f(t) \geq 0$ e $C_0 \geq 0$, pelo Lema de Gronwall, $f(t) \leq C_0 \exp^{\int_0^t z(s)ds}$, isto é, existe uma constante positiva $L_1 = C_0 e^{\int_0^t z(s)ds} - 1$ que independe de $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}&\|\psi_m(t)\|_2^2 + \|\phi'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_2^2 + \|\phi_m(t)\|_{p+1}^{p+1}\\&+ \int_0^t \left\{\|\psi_m(s)\|_4^4 + \|\psi_m(s)\|_2^2 + \|\phi'_m(s)\|_{q+1}^{q+1}\right\} ds \leq L_1.\end{aligned} \tag{2.3-16}$$

Note que

$$\|L(t)\|_{\mathbb{R}^{6m}}^2 = \left\| \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \\ Z'(t) \end{bmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^{6m}}^2 = \sum_{i=1}^m (g_{i_m}(t))^2 + \sum_{i=1}^m (h_{i_m}(t))^2 + \sum_{i=1}^m (h'_{i_m}(t))^2$$

e $\|\psi_m(t)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (g_{i_m}(t))^2$, $\|\phi_m(t)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (h_{i_m}(t))^2$ e $\|\phi'_m(t)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (h'_{i_m}(t))^2$.

Logo, pela primeira estimativa $\|L(t)\|_{\mathbb{R}^{6m}}^2 \leq 3L_1$. Portanto, pelo Corolário do Teorema de Carathéodory, podemos estender as soluções ϕ_m e ψ_m a todo intervalo $[0,T], \forall T > 0$, com ϕ_m e ψ_m absolutamente contínuas em $[0,T]$.

2.4 Estimativa A Priori II

Substituindo $v = -\Delta\psi_m(t)$ e $w = -\Delta\phi'_m(t)$ na primeira e segunda equação, respectivamente, do sistema $(2.2-2)$, temos

$$\begin{aligned}&(\psi'_m(t), -\Delta\psi_m(t)) + i(\Delta\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)) + \left(|\psi_m(t)|^2 \psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)\right)\\&+ \gamma\left(\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)\right) = i\left(\phi_m(t)\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)\right)\end{aligned} \tag{2.4-17}$$

e

$$\begin{aligned}&(\phi''_m(t), -\Delta\phi'_m(t)) + (-\Delta\phi_m(t), -\Delta\phi'_m(t)) - \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau), -\Delta\phi'_m(t)\right) d\tau\\&+ \mu^2\left(\phi_m(t), -\Delta\phi'_m(r)\right) + \left(F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right), -\Delta\phi'_m(t)\right) = \beta\left(|\psi_m(t)|^{2\theta}, -\Delta\phi'_m(t)\right).\end{aligned} \tag{2.4-18}$$

Calculemos a parte real da primeira equação. Analisando termo a termo

• $Re\,(\psi_m'(t), -\Delta\psi_m(t)) = Re\,(\nabla\psi_m'(t), \nabla\psi_m(t))$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\psi_m(t)\|\,;$$

• $Re\,[i\,(\Delta\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t))] = 0$, pois $(\Delta\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)) = -\|\Delta\psi_m(t)\|_2^2$, daí $i\,(\Delta\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t))$ é um imaginário puro;

• $Re \quad \gamma\,(\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)) = Re\gamma\,(\nabla\psi_m(t), \nabla\psi_m(t))$
$$= \gamma\,\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2\,;$$

• Vamos estimar $I_1 = \left(|\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)\right)$,

$$\begin{aligned}\left(|\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t)\right) &= -\int_\Omega |\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t)\overline{\Delta\psi_m(t)}dx\\ &= -\int_\Omega |\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2\overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i^2}dx\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i}\right)dx.\end{aligned}$$

Aplicando a Fórmula de Integração por partes, (Teorema 1.6.1), temos

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t)\right)\overline{\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}}dx,$$

pois, $\psi_m(t) \in H_0^1(\Omega)$. Ainda

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\psi_m(t)|^2\,\psi_m(t)\right)\overline{\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}}\\ &= \left(\frac{\partial\,|\psi_m(t)|^2}{\partial x_i}\psi_m(t) + |\psi_m(t)|^2\,\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\overline{\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}}\\ &= \left(\frac{\partial(\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)})}{\partial x_i}\psi_m(t) + |\psi_m(t)|^2\,\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\overline{\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}}\\ &= \left(\left(\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\frac{\partial\overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i}\right)\psi_m(t) + |\psi_m(t)|^2\,\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\overline{\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}}\\ &= |\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 + \left(\psi_m(t)\frac{\partial\overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i}\right)^2 + |\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[2\int_\Omega |\psi_m(t)|^2 \left| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_\Omega \left(\psi_m(t) \frac{\partial \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i} \right)^2 dx \right].$$

Considerando que

$$2\left[\mathrm{Re}\left(z_1 \overline{z_2}\right)\right]^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 + \mathrm{Re}\left[(z_1 z_2)^2\right],$$

para $z_1 = \psi_m(t)$ e $z_2 = \frac{\partial \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i}$ temos

$$\mathrm{Re}\left(\psi_m(t) \frac{\partial \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i} \right)^2 = 2\left[\mathrm{Re}\left(\psi_m(t) \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right) \right]^2 - |\psi_m(t)|^2 \left| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right|^2.$$

Assim, uma vez que a função módulo é uma função real, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(I_1) = {} & 2\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\psi_m(t)|^2 \left| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right|^2 dx + 2\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[\mathrm{Re}\left(\psi_m(t) \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right) \right]^2 dx \\ & - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\psi_m(t)|^2 \left| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{Re}\,(I_1) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\psi_m(t)|^2 \left| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right|^2 dx + 2\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[\mathrm{Re}\left(\psi_m(t) \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right) \right]^2 dx. \qquad (2.4\text{-}19)$$

• Ainda, estimemos $I_2 = (\phi_m(t)\psi_m(t), -\Delta\psi_m(t))$. Pela fórmula de integração por partes, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_\Omega \phi_m(t)\psi_m(t)\overline{\Delta\psi_m(t)}dx \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \phi_m(t)\psi_m(t) \frac{\partial^2 \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i^2} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi_m(t)\psi_m(t)) \frac{\partial \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i}\psi_m(t) + \phi_m(t)\frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_\Omega \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \left(\psi_m(t) \frac{\partial \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i} \right) dx + \int_\Omega \phi_m(t) \left| \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i} \right|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\mathrm{Re}\left(\int_\Omega \phi_m(t)\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right) = \int_\Omega \phi_m(t)\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx$ e $Re(z) \leqslant |z|$, então

$$\mathrm{Re}\,(iI_2) \leq \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\psi_m(t)\frac{\partial\overline{\psi_m(t)}}{\partial xi}\right| dx.$$

Pela Desigualdade de Young, para $p = q = 2$, temos

$$\mathrm{Re}\,(iI_2) \leq \frac{1}{2}\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\psi_m(t)\frac{\partial\overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i}\right|^2 dx. \tag{2.4-20}$$

Assim, a respeito da parte real de $(2.4-17)$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\psi_m(t)\right\| + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx + 2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\mathrm{Re}\left(\psi_m(t)\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\right]^2 dx$$
$$+\gamma\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\left|\nabla\phi_m(t)\right|_2^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\psi_m(t)\frac{\partial\overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i}\right|^2 dx. \tag{2.4-21}$$

Ainda, podemos reescrever os temos de $(2.4-18)$ da seguinte forma:

- $$\begin{aligned} Re\left(\phi_m''(t), -\Delta\phi_m'(t)\right) &= \left(-\Delta\phi_m'(t), \phi_m''(t)\right) \\ &= \left(\nabla\phi_m'(t), \nabla\phi_m''(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2; \end{aligned}$$

- $Re\left(-\Delta\phi_m(t), -\Delta\phi_m'(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2;$

- $$\begin{aligned} Re\mu^2\left(\phi_m(t), -\Delta\phi_m'(t)\right) &= \mu^2\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m'(t)\right) \\ &= \frac{\mu^2}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2. \end{aligned}$$

- Vamos estimar $I_3 = \left(|\psi_m(t)|^{2\theta}, -\Delta\phi_m'(t)\right)$. Pela Fórmula de Gauss

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\,\overline{\Delta\phi_m'(t)}dx \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta}\frac{\partial^2\overline{\phi_m'(t)}}{\partial x_i^2}dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(|\psi_m(t)|^{2\theta})\frac{\partial\overline{\phi_m'(t)}}{\partial x_i}dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}\right)^\theta \frac{\partial \overline{\phi'_m(t)}}{\partial x_i} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \theta \left(\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}\right)^{\theta-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}\right) \frac{\partial \overline{\phi'_m(t)}}{\partial x_i} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \theta \left(\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}\right)^{\theta-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\psi_m(t)}\right) \frac{\partial \overline{\phi'_m(t)}}{\partial x_i} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \theta \left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\psi_m(t)}\right) \frac{\partial \overline{\phi'_m(t)}}{\partial x_i} dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \theta \left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-2} \left(\left|\frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i}\right| \left|\overline{\psi_m(t)}\right| + \left|\psi_m(t)\right| \left|\frac{\partial \overline{\psi_m(t)}}{\partial x_i}\right|\right) \left|\frac{\partial \overline{\phi'_m(t)}}{\partial x_i}\right| dx \\
&= 2\theta \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-1} \left|\frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial \overline{\phi'_m(t)}}{\partial x_i}\right| dx.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
I_3 \leq 2\theta \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-1} \left|\frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial \overline{\phi'_m(t)}}{\partial x_i}\right| dx. \tag{2.4-22}
$$

• Agora vamos estimar $I_4 = \left(F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right), -\Delta\phi'_m(t)\right)$. Pela fórmula de Integração por partes temos

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -\int_\Omega F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \Delta\phi'_m(t) dx \\
&= -\int_\Omega F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi'_m(t)}{\partial x_i^2} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} F\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[F_u\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} + F_v\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i}\right] \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega F_u\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega F_v\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \left|\frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Por (H.2) temos que $F_v(u, v) \geq 0$, para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Logo

$$
I_4 \geq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega F_u\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} dx. \tag{2.4-23}
$$

• Ainda, o Teorema 1.6.8 implica que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau \\
&= \int_0^t \frac{d}{dt} g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau + g(t-t)\left(\Delta\phi_m(t),\Delta\phi_m(t)\right) \\
&= \int_0^t g'(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau + \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi'_m(t)\right)d\tau \\
&+ g(0)\parallel \Delta\phi_m(t)\parallel_2^2 .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi'_m(t)\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau \\
&- \int_0^t g'(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau - g(0)\parallel \Delta\phi_m(t)\parallel_2^2 .
\end{aligned}
$$

Assim, a equação $(2.4-18)$ pode ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla\phi'_m(t)\|_2^2 + \|\Delta\phi'_m(t)\|_2^2 + \mu^2\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2\right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_\Omega F_u\left(\phi_m(t),\phi'_m(t)\right)\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi'_m(t)}{\partial x_i}dx \\
&\leq 2\theta\beta\sum_{i=1}^n\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta-1}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\phi'_m(t)}{\partial x_i}\right|dx \\
&+ \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\right) - g(0)\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2 \\
&- \int_0^t g'(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.4-24}
$$

Somando $(2.4-21)$ e $(2.4-24)$ temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\left\|\Delta\phi_m'(t)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2\right]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx+2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\operatorname{Re}\left(\psi_m(t)\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\right]^2dx\\
&+\gamma\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega F_u\left(\phi_m(t),\phi_m'(t)\right)\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_m'(t)}{\partial x_i}dx\\
&\leq\frac{1}{2}\parallel\nabla\phi_m(t)\parallel_2^2+2\theta\beta\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^{2\theta-1}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\phi_m'(t)}{\partial x_i}\right|dx\\
&+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\right)-g(0)\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2\\
&-\int_0^t g'(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.4-25}
$$

Considerando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e levando em conta a hipótese (H.1), pela mesma justificativa de $(2.3-11)$ deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t g'(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\\
&\leq\parallel\Delta\phi_m(t)\parallel_2\int_0^t|g'(t-\tau)|\parallel\Delta\phi_m(\tau)\parallel_2 d\tau\\
&\leq\frac{m_0^2}{2}\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|g\right\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\parallel\Delta\phi_m(\tau)\parallel_2^2 d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.4-26}
$$

Considerando a hipótese (H.2) feita sobre a função F

$$
\left|F_u\left(\phi_m(t),\phi_m(t)\right)-F_u\left(0,0\right)\right|\leqslant M_8\left(1+|\phi_m(t)|^{p-1}+|0|^{p-1}\right)|\phi_m(t)-0|.
$$

Disto, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega F_u\left(\phi_m(t),\phi_m(t)\right)\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_m'(t)}{\partial x_i}dx\\
&\leq M_8\int_\Omega\left(1+|\phi_m(t)|^{p-1}\right)|\phi_m(t)|\left|\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\phi_m'(t)}{\partial x_i}\right|dx\\
&=M_8\left[\int_\Omega|\phi_m(t)|\left|\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\phi_m'(t)}{\partial x_i}\right|dx+\int_\Omega|\phi_m(t)|^p\left|\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\phi_m(t)'}{\partial x_i}\right|dx\right].
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Holder generalizada para $p_1=4,p_2=4,p_3=2$ na primeira parcela e na segunda parcela $p_1 = 3, p_2 = 6, p_3 = 2$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_\Omega F_u\left(\phi_m(t), \phi'_m(t)\right) \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} dx \right|$$
$$\leq M_8 \sum_{i=1}^{n} \left[\|\phi_m(t)\|_4 \left\| \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \right\|_4 \left\| \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} \right\|_2 + \|\phi_m(t)\|_{3p}^{p} \left\| \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \right\|_6 \left\| \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} \right\|_2 \right]$$

e levando em consideração a Observação $1.4.6$, que afirma que para $n \leq 3$ temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), q \in [1,6]$, então existem constantes c_q tais que

$$\|\phi_m(t)\|_4 \leq c_4 \|\phi_m(t)\|_{H_0^1} = c_4 \|\nabla \phi_m(t)\|_2$$

e

$$\left\| \frac{\partial \phi'_m(t)}{\partial x_i} \right\|_2 \leq \|\nabla \phi'_m(t)\|_2 .$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \right\|_4 &\leq c_4 \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \right\|_{H_0^1} \\ &= c_4 \sum_{i=1}^{n} \left\| \nabla \left(\frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \right) \right\|_2 \\ &= c_4 \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(\frac{\partial^2 \phi_m(t)}{\partial x_1 x_i}, \frac{\partial^2 \phi_m(t)}{\partial x_2 x_i}, \dots, \frac{\partial^2 \phi_m(t)}{\partial x_n x_i} \right) \right\|_2 \\ &= c_4 \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 \phi_m(t)}{\partial x_j x_i} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq n c_4 \|\phi_m(t)\|_{H^2} \\ &= n c_4 \left\{ \|\phi_m(t)\|_2^2 + \|\nabla \phi_m(t)\|_2^2 + \left\| D^2 \phi_m(t) \right\|_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Sabendo que $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$, isto é, existe uma constante c_7 tal que

$$n c_4 \|\phi_m(t)\|_{H^2} \leq n c_7 c_4 \|\Delta \phi_m(t)\|_2 .$$

Analogamente, podemos concluir que

$$\left\| \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_i} \right\|_6 \leq n c_8 c_4 \|\Delta \phi_m(t)\|_2 .$$

Ainda, como $p \in [1,2]$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), q \in [1,6]$, então

$$\|\phi_m(t)\|_{3p}^p \leq \|\nabla\phi_m(t)\|_2^p .$$

Das desigualdades acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left|\int_\Omega F_u\left(\phi_m(t),\phi_m'(t)\right)\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_m'(t)}{\partial x_i}dx\right| \\
&\leq C_3\left[\|\nabla\phi_m(t)\|_2\|\Delta\phi_m(t)\|_2\|\nabla\phi_m'(t)\|_2+\|\nabla\phi_m(t)\|_2^p\|\Delta\phi_m(t)\|_2\|\nabla\phi_m'(t)\|_2\right],
\end{aligned}$$

com $C_3=\max\limits_{q\in[0,8]}\{c_q,nc_qc_4,c_{2p}c_0\}$.

Da primeira estimativa temos que $\|\nabla\phi_m(t)\|_2\leq L_1$, logo

$$C_3L_1\left[\|\Delta\phi_m(t)\|_2\|\nabla\phi_m'(t)\|_2+L_1^{p-1}\|\Delta\phi_m(t)\|_2\|\nabla\phi_m'(t)\|_2\right].$$

Aplicando a Desigualdade de Young na desigualdade acima, com $p=q=2$, temos

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_\Omega F_u\left(\phi_m(t),\phi_m'(t)\right)\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_m'(t)}{\partial x_i}dx\right|\leq C_4\left[\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\right], \quad (2.4\text{-}27)$$

com $C_4=\max\{\frac{C_3L_1}{2},\frac{C_3L_1^p}{2}\}$.

Além disso, pela Desigualdade de Young com ϵ (Teorema $1.6.16$), com $p=q=2$ e $\epsilon=\frac{1}{4}$, nós temos

$$\begin{aligned}
&2\theta\beta\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^{2\theta-1}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\right|dx \\
&\leq\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\int_\Omega|\psi_m(t)|^{4\theta-2}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx+4\theta^2\beta^2\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx\right] \\
&=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{|\psi_m(t)|\leq1}|\psi_m(t)|^{4\theta-2}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx+\frac{1}{4}\int_{|\psi_m(t)|>1}|\psi_m(t)|^{4\theta-2}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx\right] \\
&+4\theta^2\beta^2\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Como $4\theta-2\leq2$ então $|\psi_m(t)|^{4\theta-2}\leq1$ quando $|\psi_m(t)|<1$ e $|\psi_m(t)|^{4\theta-2}\leq|\psi_m(t)|^2$

quando $|\psi_m(t)| > 1$, assim

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{|\psi_m(t)|\leq 1}|\psi_m(t)|^{4\theta-2}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx+\frac{1}{4}\int_{|\psi_m(t)|>1}|\psi_m(t)|^{4\theta-2}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right]$$
$$+4\theta^2\beta^2\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{|\psi_m(t)|\leq 1}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx+\frac{1}{4}\int_{|\psi_m(t)|>1}|\psi_m(t)|^{2}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right]+4\theta^2\beta^2\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}&2\theta\beta\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^{2\theta-1}\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_i}\right|dx\\&\leq C_5\left[\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2\right]+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2 dx,\end{aligned}\tag{2.4-28}$$

onde $C_5 = max\{1, 4\theta^2\beta^2\}$.

De $(2.4-25)$ $(2.4-26)$, $(2.4-27)$ e $(2.4-28)$ obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\left\|\Delta\phi_m'(t)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2\right]\\&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx+2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\operatorname{Re}\left(\psi_m(t)\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\right]^2dx+\gamma\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2\\&\leq C_4\left[\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2\right]+\frac{1}{2}\parallel\nabla\phi_m(t)\parallel_2^2\\&+C_5\left[\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2\right]+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx\\&+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\right)-g(0)\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2\\&+\frac{m_0^2}{2}\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|g\right\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\parallel\Delta\phi_m(\tau)\parallel_2^2d\tau.\end{aligned}\tag{2.4-29}$$

Somando as parcelas iguais

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2+\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2+\mu^2\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2\right]\\
&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx+2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\mathrm{Re}\left(\psi_m(t)\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\right]^2dx+\gamma\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2\\
&\leq C_4\left[\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\right]+\frac{1}{2}\parallel\nabla\phi_m(t)\parallel_2^2+\left(\frac{m_0^2}{2}-g(0)\right)\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2\\
&+C_5\left[\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\right]+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\right)\\
&+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\parallel\Delta\phi_m(\tau)\parallel_2^2d\tau,
\end{aligned}\tag{2.4-30}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2+\|\Delta\phi_m(f)\|_2^2+\mu^2\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2\right]\\
&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2\left|\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right|^2dx+2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\mathrm{Re}\left(\psi_m(t)\frac{\partial\psi_m(t)}{\partial x_i}\right)\right]^2dx+\gamma\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2\\
&\leq C_6\left[\parallel\nabla\phi_m(t)\parallel_2^2+\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\right]\\
&+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\right)\\
&+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\parallel\Delta\phi_m(\tau)\parallel_2^2d\tau,
\end{aligned}\tag{2.4-31}$$

onde $C_6=\max\{\frac{1}{2},\frac{m_0^2}{2}-g(0)+C_4,C_4+C_5,C_5\}$.

Integrando a expressão acima sobre o intervalo $(0,t)$ e considerando as convergências em $(2.2-2)$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2+\mu^2\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2\right]+\gamma\int_0^t\|\nabla\psi_m(s)\|_2^2ds\\
&\leq D_2+C_6\int_0^t\left[\|\nabla\psi_m(s)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2+\|\Delta\phi_m(s)\|_2^2+\|\nabla\phi_m(s)\|_2^2\right]ds\\
&+\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\|\Delta\phi_m(\tau)\|_2^2d\tau ds,
\end{aligned}\tag{2.4-32}$$

onde D_2 é uma constante que independe de m.

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)|\leq\|\Delta\phi_m(\tau)\|_2\|\Delta\phi_m(t)\|_2.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau &\leq \int_0^t \left|g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)\right|d\tau\\
&= \int_0^t |g(t-\tau)|\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)|d\tau\\
&\leq \int_0^t g(t-\tau) \parallel \Delta\phi_m(\tau) \parallel_2 \parallel \Delta\phi_m(t) \parallel_2 d\tau\\
&=\parallel \Delta\phi_m(t) \parallel_2 \int_0^t g(t-\tau) \parallel \Delta\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau\\
&=\parallel \Delta\phi_m(t) \parallel_2 \int_0^t g(t-\tau)^{\frac{1}{2}} g(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \parallel \Delta\phi_m(\tau) \parallel_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Holder (Teorema $1.6.12$),

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\\
&\leq \parallel \Delta\phi_m(t) \parallel_2 \left(\int_0^t g(t-\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau) \parallel \Delta\phi_m(\tau) \parallel_2^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

e como $\parallel g \parallel_{L_1(0,\infty)} = \int_0^\infty g(t)dt$ e $\int_0^t g(t)dt \leq \int_0^\infty g(t)dt$ pois g é positiva , então

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\\
&\leq \parallel \Delta\phi_m(t) \parallel_2 \parallel g \parallel_{L_1(0,\infty)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau) \parallel \Delta\phi_m(\tau) \parallel_2^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Assim, pela Desigualdade de Young com ϵ, com $p=q=2$ e $\epsilon=\frac{1}{8}$ temos

$$\begin{aligned}
&\|\Delta\phi_m(t)\|_2 \|g\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-\tau)\|\Delta\phi_m(\tau)\|_2^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{1}{8}\|\Delta\phi_m(t)\|_2^2 + 2\|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta\phi_m(\tau)\|_2^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que $g(t-\tau) \leq \|g\|_{L^\infty(0,\infty)}$, logo

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-\tau)\|\Delta\phi_m(\tau)\|_2^2 d\tau &\leq \int_0^t \|g\|_{L^\infty(0,\infty)} \|\Delta\phi_m(\tau)\|_2^2 d\tau\\
&= \|g\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\Delta\phi_m(\tau)\|_2^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{2.4-33}$$

Daí

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi_m(\tau),\Delta\phi_m(t)\right)d\tau\\&\leq \frac{1}{8}\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2+2\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau.\end{aligned} \tag{2.4-34}$$

Considere agora a seguinte mudança de variável $r=s-\tau$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau ds\\&=\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_\tau^t g(s-\tau)\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2 ds d\tau\\&=\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^{t-\tau} g(r)\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2 dr d\tau\\&=\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2\int_0^{t-\tau} g(r)dr d\tau\\&\leq\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2\|g\|_{L^1(0,\infty)}d\tau\\&=\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}^2\int_0^t\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau.\end{aligned} \tag{2.4-35}$$

Combinando a desigualdade acima com $(2.4-32)$ e $(2.4-34)$, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2\right]+\gamma\int_0^t\left\|\nabla\psi_m(s)\right\|_2^2 ds\\&\leq D_2+C_6\int_0^t\left[\left\|\nabla\psi_m(s)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(s)\right\|_2^2+\left\|\Delta\phi_m(s)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m(s)\right\|_2^2\right]ds\\&+\frac{1}{8}\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2+2\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau\\&+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}^2\int_0^t\left\|\Delta\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left\|\nabla\psi_m(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\frac{7}{8}\left\|\Delta\phi_m(t)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\nabla\phi_m(t)\right\|_2^2\right]+\gamma\int_0^t\left\|\nabla\psi_m(s)\right\|_2^2 ds\\&\leq D_2+C_7\int_0^t\left[\left\|\nabla\psi_m(s)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(s)\right\|_2^2+\left\|\Delta\phi_m(s)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\nabla\phi_m(s)\right\|_2^2\right]ds.\end{aligned}$$

com $C_7=\max\{C_6, C_6+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}^2+2\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\}$.

Tomando $\rho = \min\{\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \mu^2, \gamma\}$ e por $\int_0^t \|\nabla\psi_m(s)\|_2^2\, ds \geq 0$ temos

$$\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\Delta\phi_m(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla\psi_m(s)\|_2^2\, ds \leq \frac{1}{\rho}D_2$$
$$+ \frac{1}{\rho}C_7 \int_0^t \left[\|\nabla\psi_m(s)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2 + \|\Delta\phi_m(s)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_2^2 + \int_0^s \|\nabla\psi_m(r)\|_2^2\, dr\right] ds.$$

Assim, aplicando o Lema de Gronwall obtemos a segunda estimativa:

$$\|\nabla\psi_m(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\Delta\phi_m(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla\psi_m(s)\|_2^2\, ds \leq L_2, \tag{2.4-36}$$

onde L_2 é uma constante positiva que independe de $m \in \mathbb{N}$.

2.5 Estimativa a Priori III

Primeiramente vamos buscar uma estimativa para $\psi_m'(0)$ e $\phi_m'(0)$.

Substituindo $v = v_j$ e $w = w_j$, elementos básicos de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, na primeira e segunda equação, respectivamente, do sistema $(2.2-2)$ e multiplicando a primeira equação do sistema por $\sum\limits_{i=1}^{m} g_{i_m}'(0)$ e considerando $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}&(\psi_m'(0), \psi_m'(0)) + i\,(\nabla\psi_m(0), \nabla\psi_m'(0)) + \left(|\psi_m(0)|^2\,\psi_m(0), \psi_m'(0)\right) + \gamma\,(\psi_m(0), \psi_m'(0)) \\ &= i\,(\phi_m(t)\psi_m(0), \psi_m'(0))\,.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}&\|\psi_m'(0)\|_2^2 \leq \|\nabla\psi_m(0)\|\,\|\nabla\psi_m'(0)\| + \left\||\psi_m(0)|^2\,\psi_m(0)\right\|\,\|\psi_m'(0)\| \\ &+ \gamma\,\|\psi_m(0)\|\,\|\psi_m'(0)\| + \|\phi_m(t)\psi_m(0)\|\,\|\psi_m'(0)\|\,,\end{aligned}$$

daí, pela Desigualdade de Holder

$$\|\psi_m'(0)\|_2 \leq \|\nabla\psi_m(0)\| + \|\psi_m(0)\|_6^3 + \gamma\,\|\psi_m(0)\| + \|\phi_m(t)\|_4\,\|\psi_m(0)\|_4\,.$$

Pelos dados iniciais do problema aproximado, segue que

$$\|\psi_m'(0)\|_2 \leq C_7. \tag{2.5-37}$$

Agora, Multiplicando a segunda equação do sistema $(2.2-2)$ por $\sum_{i=1}^{m} h'_{i_m}(0)$ e considerando $t=0$, temos

$$\begin{aligned}
&(\phi''_m(0),\phi''_m(0))+(-\Delta\phi_m(0),\phi''_m(0))+\mu^2\left(\phi_m(0),\phi''_m(0)\right)+\left(F\left(\phi_m(0),\phi'_m(0)\right),\phi''_m(0)\right)\\
&=\beta\left(|\psi_m(0)|^{2\theta},\phi''_m(0)\right).
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy Schwarz

$$\|\phi''_m(0)\|\leq\|\Delta\phi_m(0)\|+\mu^2\|\phi_m(0)\|+\|F\left(\phi_m(0),\phi'_m(0)\right)\|+\beta\left\||\psi_m(0)|^{2\theta}\right\|.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\beta\left\||\psi_m(0)|^{2\theta}\right\| &= \left(\int_\Omega\left[|\psi_m(0)|^{2\theta}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_\Omega|\psi_m(0)|^{4\theta}\right)^{\frac{2\theta}{4\theta}}\\
&= \beta\,\||\psi_m(0)|\|_{4\theta}^{2\theta}.
\end{aligned}$$

Além disso por (H.2), temos que

$$F(u,v)\xi\geq M_1v\xi+M_2|v|^{q-1}v\xi+M_3|u|^{p-1}u\xi,\forall u,v,\xi\in\mathbb{R}.$$

Daí, considerando $u=\phi_m(t),v=\phi'_m(t),\xi=1$, temos

$$F(\phi_m(t),\phi'_m(t))\geq M_1\phi'_m(t)+M_2|\phi'_m(t)|^{q-1}\phi'_m(t)+M_3|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)$$

e para $u=\phi_m(t),v=\phi'_m(t),\xi=-1$,

$$F(\phi_m(t),\phi'_m(t))\leq M_1\phi'_m(t)+M_2|\phi'_m(t)|^{q-1}\phi'_m(t)+M_3|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t).$$

Disto,

$$F(\phi_m(t),\phi'_m(t))=M_1\phi'_m(t)+M_2|\phi'_m(t)|^{q-1}\phi'_m(t)+M_3|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t).$$

Logo,

$$\|F(\phi_m(t),\phi'_m(t))\|=\left\|M_1\phi'_m(t)+M_2|\phi'_m(t)|^{q-1}\phi'_m(t)+M_3|\phi_m(t)|^{p-1}\phi_m(t)\right\|,$$

isto é,

$$\|F(\phi_m(t),\phi_m'(t))\| \leq M_1 \|\phi_m'(t)\|_2 + M_2 \|\phi_m'(t)\|_{2q}^q + M_3 \|\phi_m(t)\|_{2p}^p .$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|\phi_m''(0)\|_2 &\leq \|\Delta\phi_m(0)\|_2 + \mu^2 \|\phi_m(0)\|_2 + M_1 \|\phi'(t)\|_2 + M_2 \|\phi'(t)\|_{2q}^q \\ &\quad + M_3 \|\phi(t)\|_{2p}^p + \beta \||\psi_m(0)|\|_{4\theta}^{2\theta} .\end{aligned}$$

Daí, pelos dados iniciais do problema aproximado concluímos que

$$\|\phi_m''(0)\| \leq C_8. \tag{2.5-38}$$

Agora, derivando $(2.2-2)$ em relação a t,

$$\begin{aligned}&(\psi_m''(t),w_j) - i(\Delta\psi_m'(t),w_j) + \left(2|\psi_m(t)|\,\psi_m'(t) + \psi_m^2(t)\overline{\psi_m'(t)},w_j\right) + \gamma(\psi_m'(t),w_j) \\ &= i(\phi_m'(t)\psi_m(t) + \phi_m(t)\psi_m'(t),w_j),\end{aligned} \tag{2.5-39}$$

derivando e aplicando o Teorema $1.6.8$, na segunda equação, temos

$$\begin{aligned}&(\phi_m'''(t),w_j) - (\Delta\phi_m'(t),w_j) - \int_0^t g'(t-\tau)(\nabla\phi_m(\tau),w_j)\,d\tau + g(0)(\nabla\phi_m(t),w_j) \\ &+ \mu^2(\phi_m'(t),w_j) + (F_u(\phi_m(t),\phi_m'(t))\,\phi_m',w_j) + (F_v(\phi_m(t),\phi_m'(t))\,\phi_m'',w_j) \\ &= \beta\left(\theta|\psi_m(t)|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right],w_j\right).\end{aligned} \tag{2.5-40}$$

Multiplicando $(2.5-39)$ por $\sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}'(t)$ e $(2.5-40)$ por $\sum\limits_{i=1}^{m} h_{im}''(t)$ obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}&(\psi_m''(t),\psi_m'(t)) + i(\nabla\psi_m'(t),\nabla\psi_m'(t)) + \left(2|\psi_m(t)|\,\psi_m'(t) + \psi_m^2(t)\overline{\psi_m'(t)},\psi_m'(t)\right) \\ &+ \gamma(\psi_m'(t),\psi_m'(t)) = i(\phi_m'(t)\psi_m(t) + \phi_m(t)\psi_m'(t),\psi_m'(t)),\end{aligned} \tag{2.5-41}$$

e

$$\begin{aligned}&(\phi_m'''(t),\phi_m''(t)) + (\nabla\phi_m'(t),\nabla\phi_m''(t)) - \int_0^t g'(t-\tau)(\nabla\phi_m(\tau),\phi_m''(t))\,d\tau \\ &+ g(0)(\nabla\phi_m(t),\phi_m''(t)) + \mu^2(\phi_m'(t),\phi_m''(t)) + (F_u(\phi_m(t),\phi_m'(t))\,\phi_m',\phi_m''(t)) \\ &+ (F_v(\phi_m(t),\phi_m'(t))\,\phi_m'',\phi_m''(t)) = \beta\left(\theta|\psi_m(t)|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right],\phi_m''(t)\right).\end{aligned} \tag{2.5-42}$$

Calculemos a parte real termo a termo de $(2.5-41)$:

- Re $(\psi_m''(t), \psi_m'(t)) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\psi_m'(t)\|_2^2$;
- Re $i\left(\nabla\psi_m'(t), \nabla\psi_m'(t)\right) = 0$, pois $i\left(\nabla\psi_m'(t), \nabla\psi_m'(t)\right)$, é um imaginario puro;
- Re $\left(2\left|\psi_m(t)\right|\psi_m'(t) + \psi_m^2(t)\overline{\psi_m'(t)}, \psi_m'(t)\right)$
  $= 2\int_\Omega |\psi_m(t)|^2 |\psi_m'(t)|^2 dx + \mathrm{Re}\int_\Omega \left[\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right]^2 dx$;
- Re $\gamma\left(\psi_m'(t), \psi_m'(t)\right) = \gamma\|\psi_m'(t)\|_2^2$;
- Re $i\left(\phi_m'(t)\psi_m(t) + \phi_m(t)\psi_m'(t), \psi_m'(t)\right) = \mathrm{Re}\left[i\int_\Omega \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}dx\right]$,

  pois $i\left(\phi_m(t)\psi_m'(t), \psi_m'\right)$ é um imaginário puro.

Assim, a parte real de $(2.5-41)$ é

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m'(t)\|_2^2 + 2\int_\Omega |\psi_m(t)|^2 |\psi_m'(t)|^2 dx + \mathrm{Re}\int_\Omega \left[\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right]^2 dx + \mathrm{Re}\left[i\int_\Omega \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}dx\right] + \gamma \| \tag{2.5-43}$$

Notemos que os termos de $(2.5-42)$ podem ser reescritos da seguinte forma:

- $\left(\phi_m'''(t), \phi_m''(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi_m''(t)\|_2^2$;
- $\left(\nabla\phi_m'(t), \nabla\phi_m''(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2$;
- Pelo Teorema $1.6.8$ temos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right)d\tau = \int_0^t g''(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right)d\tau$$
$$+\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m''(t)\right)d\tau + g''(0)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right).$$

Logo,

$$\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m''(t)\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right)d\tau$$
$$-\int_0^t g''(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right)d\tau - g''(0)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right);$$

- $\mu^2\left(\phi_m'(t), \phi_m''(t)\right) = \frac{\mu^2}{2}\frac{d}{dt}\|\phi_m'(t)\|_2^2$;
- $\left(F_u\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m', \phi_m''(t)\right) = \left(F_u\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m', \phi_m''(t)\right)$;

- $\left(F_v\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m'', \phi_m''(t)\right) = \left(F_v\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m'', \phi_m''(t)\right);$
- $\beta\left(\theta\left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right], \phi_m''(t)\right)$
$= \beta\left(\theta\left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right], \phi_m''(t)\right).$

Assim, podemos reescrever $(2.5-42)$ por

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\phi_m''(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2 + \frac{d}{dt}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right)d\tau \\
&- \int_0^t g''(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right)d\tau - g''(0)\left(\nabla\phi_m(\tau), \phi_m'(t)\right) + \frac{\mu^2}{2}\frac{d}{dt}\left\|\phi_m'(t)\right\|_2^2 \\
&+ \left(F_u\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m', \phi_m''(t)\right) + \left(F_v\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m'', \phi_m''(t)\right) \\
&= \beta\left(\theta\left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right], \phi_m''(t)\right).
\end{aligned} \tag{2.5-44}$$

Somando $(2.5-43)$ e $(2.5-44)$ temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\psi_m'(t)\right\|_2^2 + \left\|\phi_m''(t)\right\|_2^2 + \left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2 + \mu^2\left\|\phi_m'(t)\right\|_2^2\right] \\
&+ 2\int_\Omega \left|\psi_m(t)\right|^2\left|\psi_m'(t)\right|^2 dx + \operatorname{Re}\int_\Omega \left[\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right]^2 dx + \gamma\left\|\psi_m'(t)\right\|_2^2 + g(0)\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2 \\
&+ \left(F_u\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m'(t) + F_v\left(\phi_m(t), \phi_m'(t)\right)\phi_m''(t), \phi_m''(t)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left[i\int_\Omega \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}dx\right] + \theta\beta\left(\left|\psi_m(t)\right|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right], \phi_m''(t)\right) \\
&+ g(0)\frac{d}{dt}\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m'(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right)d\tau\right) \\
&- g'(0)\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m'(t)\right) - \int_0^t g''(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5-45}$$

Considerando que

$$2\left[\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)\right]^2 = \left|z_1\right|^2\left|z_2\right|^2 + \operatorname{Re}\left[\left(z_1 z_2\right)^2\right],$$

para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, em particular, para $z_1 = \psi_m(t), z_2 = \overline{\psi_m'(t)}$ temos

$$\operatorname{Re}\left[\left(\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right)^2\right] = 2\left[\operatorname{Re}\left(\psi_m(t)\psi_m'(t)\right)\right]^2 - \left|\psi_m(t)\right|^2\left|\psi_m'(t)\right|^2,$$

daí,

$$\operatorname{Re}\left[i\int_a \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}dx\right] \leq \int_\Omega \left|\phi_m'(t)\right|\left|\psi_m(t)\right|\left|\psi_m'(t)\right|dx.$$

Pela Desigualdade de Holder e pela Desigualdade de Young, com $p = q = 2$, temos

$$\mathrm{Re}\left[i\int_a \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}dx\right] \leq \frac{1}{2}\|\phi_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi_m(t)|^2 |\psi_m'(t)|^2 dx.$$

Por outro lado, por (H.2), $|F_u(\phi_m(t), \phi_m'(t))| \leq M_8(1 + |\phi_m(t)|^{p-1})|\phi_m(t)|$. Daí,

$$\left|\int_\Omega F_u(\phi_m(t), \phi_m'(t))\,\phi_m'(t)\phi_m''(t)dx\right| \leq M_8\int_\Omega (|\phi_m(t)| + |\phi_m(t)|^p)\,|\phi_m'(t)|\,|\phi_m''(t)|\,dx.$$

Pela Desigualdade de Holder generalizada, para $p_1 = 4, p_2 = 4, p_3 = 2$ e $p_1 = 3, p_2 = 6, p_3 = 2$ temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega F_u(\phi_m(t), \phi_m'(t))\,\phi_m'(t)\phi_m''(t)dx\right| \\
&\leq M_8\left[\|\phi_m(t)\|_4\,\|\phi_m'(t)\|_4\,\|\phi_m''(t)\|_2 + \|\phi_m(t)\|_{3p}^p\,\|\phi_m'(t)\|_6\,\|\phi_m''(t)\|_2\right].
\end{aligned}$$

Considerando a Observação 1.4.6, temos $\|\phi_m'(t)\|_4 \leq c\,\|\nabla\phi_m'(t)\|_2$ e pela primeira estimativa $\|\phi_m(t)\|_2 \leq L_1^2$. Daí, pela Desigualdade de Young para $p = q = 2$ temos

$$\left|\int_\Omega F_u(\phi_m(t), \phi_m'(t))\,\phi_m'(t)\phi_m''(t)dx\right| \leq C_9\left[\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2 + \|\phi_m''(t)\|_2^2\right],$$

onde $C_9 = \frac{M_8 c}{2}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\psi_m(t)|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right] &= |\psi_m(t)|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \overline{\overline{\psi_{m(t)}}\psi_m'(t)}\right] \\
&= 2\,|\psi_m(t)|^{2\theta-2}\,\mathrm{Re}\left(\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\theta\beta\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta-2}\left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right]\phi_m''(t)dx \\
&\leq 2\theta\beta\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta-2}\left|\mathrm{Re}\left(\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right)\right|\,|\phi_m''(t)|\,dx \\
&\leq 2\theta\beta\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta-2}\,|\psi_m(t)|\,|\psi_m'(t)|\,|\phi_m''(t)|\,dx \\
&\leq 2\theta\beta\int_\Omega |\psi_m(t)|^{2\theta-1}\,|\psi_m'(t)|\,|\phi_m''(t)|\,dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young com peso para $\epsilon = \frac{1}{4}, p = 2, q = 2$ temos

$$\begin{aligned}
&\theta\beta \int_{\Omega} |\psi_m(t)|^{2\theta-2} \left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right] \phi_m''(t)dx \\
&\leq \frac{1}{4}\int_{\Omega} |\psi_m(t)|^{4\theta-2} |\psi_m'(t)|^2 \, dx + 4\theta^2\beta^2 \|\phi_m''(t)\|_2^2 \\
&= \frac{1}{4}\int_{|\psi_m(t)|\leq 1} |\psi_m(t)|^{4\theta-2} |\psi_m'(t)|^2 \, dx + \frac{1}{4}\int_{|\psi_m(t)|>1} |\psi_m(t)|^{4\theta-2} |\psi_m'(t)|^2 \, dx + 4\theta^2\beta^2 \|\phi_m''(t)\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Como $1 \leq 2\theta \leq 2$ então $|\psi_m(t)|^{4\theta-2} \leq 1$ quando $|\psi_m(t)| \leq 1$ e $|\psi_m(t)|^{4\theta-2} \leq |\psi_m(t)|^2$ quando $|\psi_m(t)| > 1$. Daí

$$\begin{aligned}
&\theta\beta \int_{\Omega} |\psi_m(t)|^{2\theta-2} \left[\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\right] \phi_m''(t)dx \\
&\leq \frac{1}{4}\int_{\Omega} |\psi_m'(t)|^2 \, dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega} |\psi_m(t)|^2 |\psi_m'(t)|^2 \, dx + 4\theta^2\beta^2 \|\phi_m''(t)\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Além disto, por Cauchy Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
g'(0)\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m'(t)\right) &\leq |g'(0)\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m'(t)\right)| \\
&\leq |g'(0)| \, \|\nabla\phi_m(t)\| \, \|\nabla\phi_m'(t)\| .
\end{aligned}$$

Logo, pela Desigualdade de Young com $\epsilon = \frac{1}{4\eta}, p = 2$ e $q = 2$,

$$|g'(0)\left(\nabla\phi_m(t), \nabla\phi_m'(t)\right)| \leq (g'(0))^2 \eta \|\nabla\phi_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2 .$$

Além disso, por (H.1) temos que $0 \leq g''(t) \leq m_2 g(t)$, logo $|g''(t-\tau)| \leq m_2 g(t-\tau)$, com $t > \tau$. Daí pela Desigualdade de Cauchy Schwarz e pela Desigualdade de Young com ϵ

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t g''(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right) d\tau\right| \\
&\leq m_2 \int_0^t g(t-\tau) \|\phi_m(\tau)\| \, \|\nabla\phi_m'(t)\| \, d\tau \\
&\leq \frac{m_2^2}{4\eta}\int_0^t g(t-\tau)^2 \|\phi_m(\tau)\|_2^2 + \eta \|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2 \, d\tau.
\end{aligned}$$

Sabendo que $g(t-\tau) \leq \|g\|_{L^\infty(0,\infty)}$, então

$$\left|\int_0^t g''(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau), \nabla\phi_m'(t)\right) d\tau\right| \leq \frac{m_2^2}{4\eta}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2 \, d\tau + \eta\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2 .$$

Substituindo as desigualdades acima em $(2.5-45)$ temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi_m'(t)\|_2^2\right]+2\int_\Omega|\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx\\
&+2\int_\Omega[\mathrm{Re}\,(\psi_m(t)\psi_m'(t))]^2-\int_\Omega|\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2+\gamma\|\psi_m'(t)\|_2^2+g(0)\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\\
&\le C_9\left[\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2\right]\\
&+\frac{1}{2}\|\phi_m'(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\left|\psi_{m(t)}\right|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx+\frac{1}{4}\int_\Omega|\psi_m'(t)|^2\,dx+\frac{1}{4}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx\\
&+C(\theta,\beta)\|\phi_m''(t)\|_2^2-\left(F_v\left(\phi_m(t),\phi_m'(t)\right)\phi_m''(t),\phi_m''(t)\right)+\eta\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\\
&+g(0)\frac{d}{dt}\left(\nabla\phi_m(t),\nabla\phi_m'(t)\right)+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau),\nabla\phi_m'(t)\right)d\tau\right)\\
&+\left(g'(0)\right)^2\eta\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2+\frac{1}{4\eta}\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\frac{m_2^2}{4\eta}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau.
\end{aligned}\tag{2.5-46}$$

Uma vez que $-F_v(u,v)\leqslant 0$, para todo $u,v\in\mathbb{R}$, e que $-\frac{1}{4}\int_\Omega|\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx\le 0$ e $-2\int_\Omega[\mathrm{Re}\,(\psi_m(t)\psi_m'(t))]^2\le 0$, então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi_m'(t)\|_2^2\right]\\
&+\gamma\|\psi_m'(t)\|_2^2+(g(0)-\eta)\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\\
&\le C_{10}\left[\|\nabla\phi_m(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m'(t)\|_2^2+\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2\right]\\
&+g(0)\frac{d}{dt}\left(\nabla\phi_m(t),\nabla\phi_m'(t)\right)+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau),\nabla\phi_m'(t)\right)d\tau\right)\\
&+\frac{m_2^2}{4\eta}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau,
\end{aligned}\tag{2.5-47}$$

onde $C_{10}=\max\{\left(g'(0)\right)^2\eta,\frac{1}{4\eta}-C_9,\frac{1}{2},\frac{1}{4},C(\theta,\beta)-C_9,-C_9,1\}$. Integrando a expressão acima

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left\|\psi_m'(t)\right\|_2^2+\left\|\phi_m''(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\phi_m'(t)\right\|_2^2\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[\left\|\psi_m'(0)\right\|_2^2+\left\|\phi_m''(0)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(0)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\phi_m'(0)\right\|_2^2\right] \\
&+\gamma\int_0^t\left\|\psi_m'(s)\right\|_2^2 ds+g(0)\int_0^t\left\|\nabla\phi_m'(s)\right\|_2^2 ds \\
&\leq C_{10}\int_0^t\left[\left\|\nabla\phi_m(s)\right\|_2^2+\eta\left\|\nabla\phi_m'(s)\right\|_2^2+\left\|\phi_m'(s)\right\|_2^2+\left\|\psi_m'(s)\right\|_2^2+\left\|\phi_m''(s)\right\|_2^2\right] ds \\
&+g(0)\left(\nabla\phi_m(t),\nabla\phi_m'(t)\right)-g(0)\left(\nabla\phi_m(0),\nabla\phi_m'(0)\right)+\left(\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau),\nabla\phi_m'(t)\right)d\tau\right) \\
&+\frac{m_2^2}{4\eta}\left\|g\right\|_{L^1(0,\infty)}^2\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\left\|\nabla\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau ds.
\end{aligned}
$$

Daí por $(2.5-37)$ e $(2.5-38)$, existe uma constante D_4, tal que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left\|\psi_m'(t)\right\|_2^2+\left\|\phi_m''(t)\right\|_2^2+\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\mu^2\left\|\phi_m'(t)\right\|_2^2\right] \\
&+\gamma\int_0^t\left\|\psi_m'(s)\right\|_2^2 ds+g(0)\int_0^t\left\|\nabla\phi_m'(s)\right\|_2^2 ds \\
&\leq D_4+C_{10}\int_0^t\left[\left\|\nabla\phi_m(s)\right\|_2^2+\eta\left\|\nabla\phi_m'(s)\right\|_2^2+\left\|\phi_m'(s)\right\|_2^2+\left\|\psi_m'(s)\right\|_2^2 dx+\left\|\phi_m''(s)\right\|_2^2\right] ds \\
&+g(0)\left(\nabla\phi_m(t),\nabla\phi_m'(t)\right)+\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau),\nabla\phi_m'(t)\right)d\tau \\
&+\frac{m_2^2}{4\eta}\left\|g\right\|_{L^1(0,\infty)}^2\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\left\|\nabla\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau ds.
\end{aligned}
$$

De maneira semelhante a $(2.4-26)$ e $(2.4-33)$ e pela segunda estimativa, podemos afirmar que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla\phi_m(\tau),\nabla\phi_m'(t)\right)d\tau \\
&\leq\frac{m_0^2}{2}\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|g\right\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau \\
&\leq\frac{m_0^2}{2}\left\|\nabla\phi_m'(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|g\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|g\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left\|\nabla\phi_m(\tau)\right\|_2^2 d\tau \\
&\leq\frac{m_0^2}{2}L_2+\frac{1}{2}\left\|g\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|g\right\|_{L^\infty(0,\infty)}L_2\int_0^t 1d\tau.
\end{aligned}
$$

Também, semelhante as contas feitas para obter $(2.4-35)$ e pela segunda estimativa, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\frac{m_2^2}{4\eta}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g(s-\tau)\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau ds\\
&\le \frac{m_2^2}{4\eta}\|g\|^3_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau ds\\
&\le \frac{m_2^2}{4\eta}\|g\|^3_{L^1(0,\infty)}L_2\int_0^t 1d\tau.
\end{aligned}$$

Ainda, pela Desigualdade de Cauchy Schwarz e pela Desigualdade de Young e pela segunda estimativa, temos

$$\begin{aligned}
g(0)\left(\nabla\phi_m(t),\nabla\phi_m'(t)\right) &\le \frac{(g(0))^2}{2}\|\nabla\phi_m(\tau)\|_2^2\,d\tau+\frac{1}{2}\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2\\
&\le \frac{(g(0))^2}{2}L_2+\frac{L_2}{2}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi_m'(t)\|_2^2\right]\\
&+\gamma\int_0^t\|\psi_m'(s)\|_2^2\,ds+g(0)\int_0^t\|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2\,ds\\
&\le D_4+C_{10}\int_0^t\left[\|\nabla\phi_m(s)\|_2^2+\eta\|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2+\|\phi_m'(s)\|_2^2+\|\psi_m'(s)\|_2^2\,dx+\|\phi_m''(s)\|_2^2\right]ds\\
&+\frac{(g(0))^2}{2}L_2+\frac{L_2}{2}+\frac{m_0^2}{2}L_2+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}L_2\int_0^t 1d\tau\\
&\frac{m_2^2}{4\eta}\|g\|^3_{L^1(0,\infty)}L_2\int_0^t 1d\tau,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi_m'(t)\|_2^2\right]\\
&+\gamma\int_0^t\|\psi_m'(s)\|_2^2\,ds+g(0)\int_0^t\|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2\,ds\\
&\le D_5+C_{11}\int_0^t\left[1+\|\nabla\phi_m(s)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2+\|\phi_m'(s)\|_2^2+\|\psi_m'(s)\|_2^2\,dx+\|\phi_m''(s)\|_2^2\right]ds
\end{aligned}$$

onde, $D_5=D_4+\frac{(g(0))^2}{2}L_2+\frac{L_2}{2}+\frac{m_0^2}{2}L_2$ e

$C_{11}=\max\{C_{10},\frac{2m_3^2}{4\eta}\|g\|^3_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}L_2,+\frac{m_0^2}{4\eta}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}L_2,\eta\}$.

Tomando $\rho=min\{\frac{1}{2},\gamma,g(0),\frac{\mu^2}{2}\}$ e somando 1 em ambos os lados da equação obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left[1+\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m'(t)\|_2^2\right]\\
&+\int_0^t \|\psi_m'(s)\|_2^2\,ds+\int_0^t \|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2\,ds\\
&\le\left(\frac{D_5}{\rho}+1\right)\\
&+\frac{C_{11}}{\rho}\int_0^t\left[1+\|\nabla\phi_m(s)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2+\|\phi_m'(s)\|_2^2+\|\psi_m'(s)\|_2^2\,dx+\|\phi_m''(s)\|_2^2\right]ds.
\end{aligned}
$$

Pela positividade dos termos $\int_0^t \|\psi_m'(s)\|_2^2\,ds$ e $\int_0^t \|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2\,ds$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\left[1+\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m'(t)\|_2^2\right]+\int_0^t \|\psi_m'(s)\|_2^2\,ds+\int_0^t \|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2\,ds\\
&\le\left(\frac{D_5}{\rho}+1\right)+\frac{C_{11}}{\rho}\int_0^t 1+\|\nabla\phi_m(s)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2+\|\phi_m'(s)\|_2^2+\|\psi_m'(s)\|_2^2\,dx+\|\phi_m''(s)\|_2^2\\
&+\left[\int_0^t \|\psi_m'(r)\|_2^2\,dr+\int_0^t \|\nabla\phi_m'(r)\|_2^2\,dr\right]ds.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Lema de Gronwall, obtemos a terceira estimativa:

$$
\begin{aligned}
&\|\psi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m''(t)\|_2^2+\|\nabla\phi_m'(t)\|_2^2+\|\phi_m'(t)\|_2^2\\
&+\int_0^t \|\psi_m'(s)\|_2^2\,ds+\int_0^t \|\nabla\phi_m'(s)\|_2^2\,ds\le L_3,
\end{aligned}
\tag{2.5-48}
$$

onde L_3 é uma constante que independe de m.

2.6 Processo Limite

Das estimativas $(2.3-16), (2.4-36), (2.5-48)$, temos

$$
\begin{cases}
\{\psi_m\} \text{ é limitada em } & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\\
\{\phi_m\} \text{ é limitada em } & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right),\\
\{\phi_m'\} \text{ é limitada em } & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\\
\{\psi_m'\} \text{ é limitada em } & L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\\
\{\phi_m''\} \text{ é limitada em } & L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right).
\end{cases}
$$

Note que T é fixo, porém arbitrário, o que nos permite pelo Teorema 1.2.5 extrair subsequências $\{\psi_\nu\}, \{\phi_\nu\}$, $\{\psi'_\nu\}$, $\{\phi'_\nu\}$, $\{\phi''_\nu\}$ de $\{\psi_m\}, \{\phi_m\}$, $\{\psi'_m\}$, $\{\phi'_m\}$, $\{\phi''_m\}$ respectivamente, tais que

$$\begin{cases} \psi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi & \text{em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ \phi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \phi & \text{em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \\ \phi'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ \psi'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ \phi''_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w & \text{em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{cases}$$

Queremos mostrar que $u = \phi', v = \psi', w = \phi''$.

Uma vez que $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, então $\phi'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, daí pela Observação 1.5.6, temos que

$$\begin{cases} \phi'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ \psi'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ \phi''_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w & \text{em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \end{cases}$$

isto é,

$$\int_\Omega \phi'_\nu \eta dx \longrightarrow \int_\Omega u\eta dx, \forall \eta \in L^2(Q).$$

Sabemos que

$$\int_\Omega \phi_\nu \eta dx \longrightarrow \int_\Omega \phi\eta dx, \forall \eta \in L^2(Q).$$

Como $C_0^\infty(Q) \subset L^2(Q)$, então

$$\int_\Omega \phi'_\nu \eta dx \longrightarrow \int_\Omega u\eta dx, \forall \eta \in C_0^\infty(Q) \tag{2.6-49}$$

e

$$\int_\Omega \phi_\nu \eta dx \longrightarrow \int_\Omega \phi\eta dx, \forall \eta \in C_0^\infty(Q). \tag{2.6-50}$$

Pela fórmula de integração por partes, para $\theta \in C_0^\infty(Q)$ temos

$$\int_\Omega \phi'_\nu \theta dx = -\int_\Omega \phi_\nu \theta' dx.$$

Uma vez que $\theta' \in C_0^\infty(Q)$, temos por $(2.6-50)$ e por integração por partes que

$$\int_\Omega \phi'_\nu \theta dx = -\int_\Omega \phi_\nu \theta' dx \to -\int_\Omega \phi \theta' dx = \int_\Omega \phi' \theta dx, \quad \forall \theta \in C_0^\infty(Q). \tag{2.6-51}$$

Daí, de $(2.6-49)$ e $(2.6-51)$, pela unicidade do limite, temos que $u = \phi'$. Analogamente provamos que $v = \psi'$ e $w = \phi''$. Portanto podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&u = \phi' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\\
&v = \psi' \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\\
&w = \phi'' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\psi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\\
&\psi'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\\
&\phi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)\\
&\phi'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\\
&\phi''_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \phi'' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right).
\end{aligned} \tag{2.6-52}$$

Mas, como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, pelo Teorema da compacidade de Aubin-Lions, para $B_0 = H_0^1(\Omega), B_1 = B = L_2(\Omega)$, $p_0 = p_1 = 2$, existem subsequências, que ainda denotaremos por $\{\psi_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{N}\}}$ e $\{\phi_\nu\}_{\{\nu\in\mathbb{N}\}}$, satisfazendo

$$\psi_\nu \longrightarrow \psi \quad , \quad \phi_\nu \longrightarrow \phi \text{ e } \phi'_\nu \longrightarrow \phi' \text{ em } L^2(Q). \tag{2.6-53}$$

Daí, pelo Teorema $1.1.3$, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\psi_\nu \longrightarrow \psi \quad , \quad \phi_\nu \longrightarrow \phi \text{ e } \phi'_\nu \longrightarrow \phi' \text{ q.s. em } Q. \tag{2.6-54}$$

Agora, consideremos $j \in \mathbb{N}$ fixo e $\nu \geq j$. Multiplicando as equações do problema aproximado $(2.2-2)$ por $\zeta \in D(0,T)$ e integrando de 0 a T, encontramos

$$\int_0^T (\psi_\nu'(t), v_j)\, \zeta(t)dt + i\int_0^T (\nabla\psi_\nu(t), \nabla v_j)\, \zeta(t)dt + \int_0^T \left(|\psi_\nu(t)|^2\, \psi_\nu(t), v_j\right) \zeta(t)dt$$
$$+\gamma\int_0^T (\psi_\nu(t), v_j)\, \zeta(t)dt = i\int_0^T (\phi_\nu(t)\psi_\nu(t), v_j)\, \zeta(t)dt \tag{2.6-55}$$

e

$$\int_0^T (\phi_\nu''(t), w_j)\, \zeta(t)dt + \int_0^T (\nabla\phi_\nu(t), \nabla w_j)\, \zeta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-\tau)\, (\nabla\phi_\nu(t), \nabla w_j)\, \zeta(t)d\tau dt$$
$$+\mu^2\int_0^T (\phi_\nu(t), w_j)\, \zeta(t)dt + \int_0^T (F(\phi_n u(t), \phi_n u'(t)), w_j)\, \zeta(t)dt = \beta\int_0^T \left(|\psi_\nu(t)|^{2\theta}, w_j\right) \zeta(t)dt. \tag{2.6-56}$$

Analisemos a convergência termo a termo:

i) Como $(L^1(0,T;H))' \approx L^\infty(0,T;H')$, os elementos de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ podem ser vistos como elementos do dual de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Então, quando

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right),$$

temos que

$$\langle u_m, \xi\rangle \to \langle u, \xi\rangle_{(L^1(0,T;L^2(\Omega)))'\times L^1(0,T;L^2(\Omega))}, \forall\xi\in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

significando que

$$\int_0^T (\xi(t), u_m(t))\, dt \to \int_0^T (\xi(t), u(t))dt, \quad \forall\xi\in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Sabemos que $\psi_\nu' \overset{*}{\rightharpoonup} \psi'$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, disto temos

$$\int_0^T (\psi_\nu'(t), \xi(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (\psi'(t), \xi(t))\, dt, \forall\xi\in L^1\left(0,T,L^2(\Omega)\right). \tag{2.6-57}$$

Temos que $v_j\zeta \in L^1\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$, com efeito

$$\begin{aligned}\int_0^T \|v_j\zeta(t)\|_2\,dt &= \int_0^T \left\{\int_\Omega |v_j|^2|\zeta(t)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} dt\\ &= \int_0^T |\zeta(t)| \left\{\int_\Omega |v_j|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} dt\\ &= \|v_j\|_2 \int_0^T |\zeta(t)|dt < \infty.\end{aligned}$$

Logo, em particular $\xi = v_j\zeta, \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$. Substituindo ξ em $(2.6-57)$, resulta que

$$\int_0^T \left(\psi_\nu'(t), v_j\right)\zeta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \left(\psi'(t), v_j\right)\zeta(t)dt$$

$\forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

ii) Sabemos que $\phi_\nu'' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi''$ em $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, analogamente ao item anterior, podemos concluir que

$$\int_0^T \left(\phi_\nu''(t), w_j\right)\zeta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \left(\phi''(t), w_j\right)\zeta(t)dt$$

$\forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

iii) De $(2.6-52)$ sabemos que $\psi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi$ em $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

Como $\left(L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))\right)' \approx L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, os elementos de $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ podem ser vistos como elementos do dual de $L^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Então, quando

$$\psi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right),$$

temos que

$$\langle F,\psi_\nu\rangle \to \langle F,\psi\rangle_{\left(L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\right)'\times L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}, \forall F \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

isto é,

$$\int_0^T \langle F,\psi_\nu\rangle\,dt \to \int_0^T \langle F,\psi\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}dt, \forall F \in H^{-1}(\Omega),$$

quando $\nu \to \infty$.

Logo, em particular $F = v_j\zeta, \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$,

$$\int_0^T (\psi_\nu(t), v_j)\, \zeta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\psi(t), v_j)\, \zeta(t)dt$$

$\forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Assim, multiplicando por γ,

$$\gamma \int_0^T (\psi_\nu(t), v_j)\, \zeta(t)dt \longrightarrow \gamma \int_0^T (\psi(t), v_j)\, \zeta(t)dt.$$

iv) Por $(2.6-52)$, $\phi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$ em $L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$, logo converge em $L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$, analogamente ao item anterior $\mu^2 \int_0^T (\phi_\nu(t), w_j)\, \zeta(t)dt \longrightarrow \mu^2 \int_0^T (\phi(t), w_j)\, \zeta(t)dt$.

v) De $(2.6-52)$ sabemos que $\psi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi$ em $L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$.

Como $(L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))' \approx L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$, os elementos de $L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$ podem ser vistos como elementos do dual de $L^1\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right)$. Então, quando

$$\psi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right),$$

temos que

$$\langle F, \psi_\nu \rangle \to \langle F, \psi \rangle_{\left(L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\right)' \times L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}, \forall F \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

isto é,

$$\int_0^T \langle F, \psi_\nu \rangle\, dt \to \int_0^T \langle F, \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt, \forall F \in H^{-1}(\Omega),$$

quando $\nu \to \infty$.

Considerando em particular $F = \Delta v_j \zeta, \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ e sabendo que $\langle \Delta v_j, u \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = (\nabla v_j, u), \forall v_j, u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_0^T (\nabla \psi_\nu(t), \nabla v_j)\, \zeta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla \psi(t), \nabla v_j)\, \zeta(t)dt$$

$\forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$, quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Analogamente podemos concluir que

$$\int_0^T (\nabla \phi_\nu(t), \nabla w_j)\, \zeta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla \phi(t), \nabla w_j)\, \zeta(t)dt.$$

vi) Pelo Teorema $1.6.7$ e pelo item anterior, temos que

$$\int_0^T \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi_\nu(t), \nabla w_j\right)\zeta(t)d\tau dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(t), \nabla w_j\right)\zeta(t)d\tau dt.$$

vii) Observe que

$$\begin{aligned}
\left\||\psi_\nu(t)|^2\,\psi_\nu(t)\right\|_{L^{\frac{4}{3}}(Q)} &= \left(\int_0^T \left\||\psi_\nu(t)|^2\,\psi_\nu(t)\right\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{1}{4/3}} \\
&= \left(\int_0^T \left(\int_\Omega \left||\psi_\nu(t)|^2\psi_\nu(t)\right|^{\frac{4}{3}} dx\right) dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&= \left(\int_0^T \|\psi_\nu(t)\|_4^4\, dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq c_{19}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Então, $\left\{|\psi_\nu(t)|^2\,\psi_\nu(t)\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\frac{4}{3}}(Q)$, daí, pelo Lema de Lions, $|\psi_\nu(t)|^2\,\psi_\nu(t) \rightharpoonup |\psi(t)|^2\,\psi(t)$ em $L^{\frac{4}{3}}(Q)$, isto é

$$\int_0^T |\psi_\nu(t)|^2\,\psi_\nu(t)\theta(t)dx \longrightarrow \int_0^T |\psi(t)|^2\,\psi(t)\theta(t)dx, \forall\theta \in L^4(Q).$$

Seja $\zeta \in D(0,T)$, então

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(|\psi_\nu(t)|^2\,\psi_\nu(t), v_j\right)\zeta(t)dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega |\psi_\nu(t)|^2\,\psi_\nu(t)v_j\zeta(t)dxdt \longrightarrow \int_0^T \left(|\psi(t)|^2\,\psi(t), v_j\right)\zeta(t)dt,
\end{aligned}$$

pois, $v_j\zeta(t) \in L^4(Q)$. De fato, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(Q)$, então

$$\begin{aligned}
\int_Q |v_j\zeta(t)|^4 dxdt &= \int_0^T |\zeta(t)|^4 \int_\Omega |v_j|^4 dxdt \\
&\leqslant c\int_0^T |\zeta(t)|^4 dt\, \|v_j\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty,
\end{aligned}$$

pois, como $\zeta \in D(0,T)$, então $c\int_0^T |\zeta(t)|^4 < \infty$, e $\|v_j\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$.

viii) Sendo $2\theta \leq 2$, segue do Teorema $1.6.4$ que

$$\begin{aligned}
\left\| |\psi_\nu(t)|^{2\theta} \right\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^T \int_\Omega |\psi_\nu(t)|^{4\theta} dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega |\psi_\nu(t)|^4 dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega (1 + |\psi_\nu(t)|)^4 \, dxdt \\
&\leq 2^4 \int_0^T \int_\Omega \left(1 + \|\psi_\nu(t)\|_2^4\right) dxdt \\
&\leq 2^4 med(\Omega) T + 2^4 \int_0^T \|\psi_\nu(t)\|_4^4 \, dt,
\end{aligned}$$

ainda, pela Observação $1.4.6$ e pela segunda estimativa temos

$$\int_0^T \|\psi_\nu(t)\|_4^4 \, dt \leq \int_0^T \|\nabla \psi_\nu(t)\|_2^4 \, dt \leq T L_2$$

Portanto, $\left\{ |\psi_\nu|^{2\theta} \right\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(Q)$. Mas de $(2.6 - 54)$, temos que $\psi_\nu \longrightarrow \psi$ q.s. em Q e, portanto, $|\psi_\nu|^{2\theta} \longrightarrow |\psi|^{2\theta}$ q.s. em Q. Do Lema de Lions, obtemos

$$|\psi_\nu|^{2\theta} \rightharpoonup |\psi|^{2\theta} \text{ em } L^2(Q),$$

isto é ,

$$\int_0^T |\psi_\nu|^{2\theta} \, \theta(t) dx \longrightarrow \int_0^T |\psi|^{2\theta} \theta(t) dx, \forall \theta \in L^2(Q).$$

Seja $\zeta \in D(0, T)$, então

$$\int_0^T \left(|\psi_\nu|^{2\theta}, v_j \right) \zeta(t) dt = \int_0^T \int_\Omega |\psi_\nu|^{2\theta} \, v_j \zeta(t) dxdt \longrightarrow \int_0^T \left(|\psi|^{2\theta}, v_j \right) \zeta(t) dt$$

pois, $v_j \zeta(t) \in L^2(Q)$. De fato, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(Q)$, então

$$\begin{aligned}
\int_Q |v_j \zeta(t)|^2 dxdt &= \int_0^T |\zeta(t)|^2 \int_\Omega |v_j|^2 dxdt \\
&\leq c \int_0^T |\zeta(t)|^2 dt \, \|v_j\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty
\end{aligned}$$

pois, como $\zeta \in D(0, T)$, então $c \int_0^T |\zeta(t)|^2 < \infty$ e $\|v_j\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$.

ix) Observemos que

$$|\psi_\nu\phi_\nu - \psi\phi| \leq |\psi_\nu|\,|\phi_\nu - \phi| + |\phi|\,|\psi_\nu - \psi|$$

e

$$\left|\psi_\nu\overline{\psi_\nu} - \psi\bar{\psi}\right| \leq |\psi_\nu|\left|\overline{\psi_\nu} - \bar{\psi}\right| + |\bar{\psi}|\,|\psi_\nu - \psi|$$

e tomando as normas em $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, segue que $\psi_\nu\phi_\nu \to \psi\phi$ e $|\psi_\nu|^2 \to |\psi|^2$ em $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. Logo, pelo item i) temos que

$$i\int_0^T \left(\phi_\nu(t)\psi_\nu(t), v_j\right)\zeta(t)dt \to i\int_0^T \left(\phi(t)\psi(t), v_j\right)\zeta(t)dt.$$

x) Note que

$$\|F\left(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t)\right)\|_2^2 = \int_\Omega \left|F\left(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t)\right)\right|^2 dx,$$

porém, considerando em (H.2) $(u_1,v_1) = (\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))$ e $(u_2,v_2) = (0,0)$, temos que existem $M_7 > 0$ e $p \in [1,3]$, tais que

$$\left|F\left(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t)\right)\right| \leq M_7\left(1 + \|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\|^{p-1}\right)\|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|F\left(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t)\right)\right|^2 dx &\leq (M_7)^2\int_\Omega \left[\left(1 + \|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\|^{p-1}\right)\|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\|\right]^2 dx \\
&= (M_7)^2\int_\Omega \left[\|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\| + \|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\|^p\right]^2 dx \\
&\leq 2\,(M_7)^2\int_\Omega \left[\|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\|^2 + \|(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t))\|^{2p}\right] dx \\
&\leq 2\,(M_7)^2\int_\Omega \left[|\phi_\nu(t)|^2 + |\phi_\nu'(t)|^2 + \left(|\phi_\nu(t)|^2 + |\phi_\nu'(t)|^2\right)^p\right] dx \\
&\leq 2\,(M_7)^2\,C(p)\int_\Omega \left[|\phi_\nu(t)|^2 + |\phi_\nu'(t)|^2 + |\phi_\nu(t)|^{2p} + |\phi_\nu'(t)|^{2p}\right] dx \\
&\leq k_{14}\left[\|\phi_\nu(t)\|_2^2 + \|\phi_\nu'(t)\|_2^2 + \|\phi_\nu(t)\|_{2p}^{2p} + \|\phi_\nu'(t)\|_{2p}^{2p}\right] \\
&\leq k_{15}\left[\|\nabla\phi_\nu(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_\nu'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi_\nu(t)\|_2^{2p} + \|\nabla\phi_\nu'(t)\|_2^{2p}\right].
\end{aligned}$$

Logo, das estimativas a priori obtemos

$$\sup_{t\in[0,T[} ess\left|F\left(\phi_\nu(t),\phi_\nu'(t)\right)\right|^2 \leq C_3.$$

Portanto, este fato implica que $\{F(\phi_\nu(t), \phi'_\nu(t))\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Além disso, notemos que de $(2.6-54)$, temos $\phi_\nu \longrightarrow \phi$ e $\phi'_\nu \longrightarrow \phi'$ q.s. em Q. Mas, como $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, chegamos a

$$F(\phi_\nu(t), \phi'_\nu(t)) \longrightarrow F(\phi(t), \phi'(t)) \text{ q.s. em Q, quando } \nu \longrightarrow \infty,$$

permitindo-nos concluir, pelo Lema de Lions, que

$$F(\phi_\nu(t), \phi'_\nu(t)) \rightarrow F(\phi(t), \phi'(t)), \quad \text{ em } L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \text{ quando } \nu \longrightarrow \infty.$$

Daí, temos

$$\int_0^T (F(\phi_\nu(t), \phi'_\nu(t)), w_j)\, \zeta(t)dt \rightarrow \int_0^T (F(\phi(t), \phi'(t)), w_j)\, \zeta(t)dt \text{ quando } \nu \longrightarrow \infty.$$

□

Portanto, pelos itens i)-x) temos:

$$\int_0^T (\psi'(t), v_j)\, \zeta(t)dt + i\int_0^T (\nabla\psi(t), \nabla v_j)\, \zeta(t)dt + \int_0^T \left(|\psi(t)|^2\psi(t), v_j\right) \zeta(t)dt$$
$$+\gamma\int_0^T (\psi(t), v_j)\, \zeta(t)dt = i\int_0^T (\phi(t)\psi(t), v_j)\, \zeta(t)dt$$

e

$$\int_0^T (\phi''(t), w_j)\, \zeta(t)dt + \int_0^T (\nabla\phi(t), \nabla w_j)\, \zeta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-\tau)\, (\nabla\phi(t), \nabla w_j)\, \zeta(t)d\tau dt$$
$$+\mu^2\int_0^T (\phi(t), w_j)\, \zeta(t)dt + \int_0^T (F(\phi(t), \phi'(t)), w_j)\, \zeta(t)dt = \beta\int_0^T \left(|\psi(t)|^{2\theta}, w_j\right) \zeta(t)dt.$$

Como $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ são sistemas completos em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, por densidade, temos que

$$\int_0^T (\psi'(t), v)\, \zeta(t)dt + i\int_0^T (\nabla\psi(t), \nabla v)\, \zeta(t)dt + \int_0^T \left(|\psi(t)|^2\psi(t), v\right) \zeta(t)dt$$
$$+\gamma\int_0^T (\psi(t), v)\, \zeta(t)dt = i\int_0^T (\phi(t)\psi(t), v)\, \zeta(t)dt, \qquad (2.6\text{-}58)$$
$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ e } \zeta \in D(0, T)$$

e

$$\int_0^T (\phi''(t), w)\, \zeta(t)dt + \int_0^T (\nabla \phi(t), \nabla w)\, \zeta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)\, (\nabla \phi(t), \nabla w)\, \zeta(t) d\tau dt$$
$$+\mu^2 \int_0^T (\phi(t), w)\, \zeta(t)dt + \int_0^T (F(\phi(t), \phi'(t)), w)\, \zeta(t)dt = \beta \int_0^T \left(|\psi(t)|^{2\theta}, w \right) \zeta(t)dt,$$
$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ e } \zeta \in D(0,T),$$

isto é,

$$\langle (\psi'(t), v)\, , \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} + i \langle (\nabla \psi(t), \nabla v), \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)}$$
$$+ \left\langle \left(|\psi(t)|^2 \psi(t), v \right), \zeta \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} + \gamma \langle (\psi(t), v), \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)}$$
$$= i \langle (\phi(t)\psi(t), v), \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)}$$

e

$$\langle (\phi''(t), w)\, , \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} + \langle (\nabla \phi(t), \nabla w), \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)}$$
$$+ \langle \int_0^t g(t-\tau)\, (\nabla \phi(t), \nabla w)\, d\tau, \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} + \mu^2 \langle (\phi(t), w), \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)}$$
$$+ \langle (F(\phi(t), \phi'(t)), w)\, , \zeta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} = \beta \left\langle \left(|\psi(t)|^{2\theta}, w \right), \zeta \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)}.$$

Daí, pelo Lema de Du Bois Raymond

$$(\psi'(t), v) + i(\nabla \psi(t), \nabla v) + \left(|\psi(t)|^2 \psi(t), v \right) + \gamma(\psi(t), v)$$
$$= i(\phi(t)\psi(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ em } \mathcal{D}'(0,T)$$

e

$$(\phi''(t), w) + (\nabla \phi(t), \nabla w) - \int_0^t g(t-\tau)\, (\nabla \phi(t), \nabla w)\, d\tau + \mu^2 (\phi(t), w)$$
$$+ (F(\phi(t), \phi'(t)), w) = \beta \left(|\psi(t)|^{2\theta}, w \right), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ em } \mathcal{D}'(0,T).$$

Portanto o par $\{\phi, \psi\}$ satisfaz $(s2)$ e $(s3)$ da Definição (2.2.1).

Mostremos que $\psi(t) \in H^2(\Omega)$, para tal, consideremos $v = \varphi \in D(\Omega)$, em $(2.6-58)$, daí

$$\int_0^T (\psi'(t), \varphi)\, \zeta(t)dt + i \int_0^T (\nabla \psi(t), \nabla \varphi)\, \zeta(t)dt + \int_0^T \left(|\psi(t)|^2 \psi(t), \varphi \right) \zeta(t)dt$$
$$+\gamma \int_0^T (\psi(t), \varphi)\, \zeta(t)dt = i \int_0^T (\phi(t)\psi(t), \varphi)\, \zeta(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega \psi'(t)\varphi\zeta(t)dxdt + i\int_0^T \int_\Omega \nabla\psi(t)\nabla\varphi\zeta(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega |\psi(t)|^2\psi(t)\varphi\zeta(t)dxdt$$
$$+\gamma\int_0^T \int_\Omega \psi(t)\varphi\zeta(t)dxdt = i\int_0^T \int_\Omega \phi(t)\psi(t)\varphi\zeta(t)dxdt$$

isto é,

$$\int_Q \psi'(t)\varphi\zeta(t)dxdt + i\int_Q \nabla\psi(t)\nabla\varphi\zeta(t)dxdt + \int_Q |\psi(t)|^2\psi(t)\varphi\zeta(t)dxdt$$
$$+\gamma\int_Q \psi(t)\varphi\zeta(t)dxdt = i\int_Q \phi(t)\psi(t)\varphi\zeta(t)dxdt, \quad \forall\xi \in D(0,T).$$

Podemos ainda escrever,

$$\langle\psi', \varphi\zeta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - i\langle\Delta\psi, \varphi\zeta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \left\langle|\psi|^2\psi, \varphi\zeta\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$$
$$+\gamma\langle\psi, \varphi\zeta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = i\langle\phi\psi, \varphi\zeta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}, \quad \forall\xi \in D(0,T).$$

Segue que

$$\left\langle\psi' - i\Delta\psi + |\psi|^2\psi + \gamma\psi, \varphi\zeta\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = i\langle\phi\psi, \varphi\zeta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}, \forall\zeta \in D(\Omega), \forall\xi \in D(0,T).$$

Da totalidade do conjunto $\{\varphi\zeta; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \zeta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ em $\mathcal{D}(Q)$ vem que

$$\psi' - i\Delta\psi + |\psi|^2\psi + \gamma\psi - i\phi\psi = 0, \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Desde que

$$-i\psi' - i|\psi|^2\psi - i\gamma\psi - \phi\psi \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right),$$

então,

$$\Delta\psi = -i\psi' - i|\psi|^2\psi - i\gamma\psi - \phi\psi \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right),$$

ou seja,

$$\Delta\psi(t) \in L^2(\Omega) \text{ p.q.t. } t \in]\,0,T[.$$

Somando ψ em ambos os lados da equação e multiplicando por $\eta \in H_0^1(\Omega)$ também em ambos os lados, temos

$$\Delta\psi\eta + \psi\eta = \left[-i\psi' - i|\psi|^2\psi - (i\gamma+1)\psi - \phi\psi\right]\eta.$$

Integrando em relação a Ω

$$\int_\Omega \Delta\psi\eta dx + \int_\Omega \psi\eta dx = \int_\Omega \left[-i\psi' - i|\psi|^2\psi - (i\gamma+1)\psi - \phi\psi\right]\eta dx.$$

Portanto, em razão da regularidade do problema elíptico, (Teorema $1.6.17$),

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in L^2(\Omega) \\ u_{|_\Gamma} = 0, & \end{cases}$$

obtemos que

$$\psi(t) \in H^2(\Omega) \quad \text{e } \|\psi(t)\|_{H^2(\Omega)} \le C|\Delta\psi(t)| \text{ p.q.t. } t \in \left]0, T\right[.$$

Assim, tomando o supremo essencial nesta desigualdade, resulta que

$$\psi \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right),$$

como queríamos.

Analogamente, podemos mostrar que $\phi \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$, e concluir que (ϕ, ψ) satisfaz $(s1)$ da Definição 2.2.1.

Agora, podemos concluir, da Definição $2.2.1$, que o par (ϕ, ψ) é uma solução no sentido forte do problema $(0.0-3)$.

2.6.1 Dados Iniciais

Nosso objetivo é mostrar que ψ satisfaz as condições iniciais do problema $(0.0-3)$, isto é, $\psi(0) = \psi^0$.

Observemos que em razão das convergências $(2.6-52)$ temos que

$$\psi \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \quad e \quad \psi' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

Então, pelo Teorema $1.5.11$ temos $\psi \in C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Assim, faz sentido falarmos em $\psi(0)$ e $\psi(T)$.

Seja $\zeta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, tal que $\zeta(0)=1$ e $\zeta(T)=0$. Sabendo que se $\nu > j$ (j arbitrariamente fixado), então,

$$\int_0^T \left(\psi_\nu'(t), v_j\right)\zeta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \left(\psi'(t), v_j\right)\zeta(t)dt, \text{ quando } \nu \longrightarrow \infty,$$

integrando-se por partes, temos

$$-\left(\psi_\nu(0), v_j\right) - \int_0^T \left(\psi_\nu(t), v_j\right)\zeta'(t)dt \longrightarrow -\left(\psi(0), v_j\right) - \int_0^T \left(\psi(t), v_j\right)\zeta'(t)dt.$$

Uma vez que

$$\int_0^T \left(\psi_\nu(t), v_j\right)\zeta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T \left(\psi(t), v_j\right)\zeta'(t)dt,$$

então, consequentemente

$$-\left(\psi_\nu(0), v_j\right) \longrightarrow -\left(\psi(0), v_j\right).$$

Decorre daí que $\psi_\nu(0) \to \psi(0)$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, temos

$$\psi_\nu(0) \to \psi^0 \text{ em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

o que nos leva, por conta da unicidade do limite, a concluir que $\psi(0)=\psi^0$. Analogamente mostra-se que $\phi(0)=\phi^0$ e $\phi'(0)=\phi^1$.

2.7 Unicidade

Para provar a unicidade de solução do problema $(0.0-3)$, consideremos $\theta = 1$ e suponhamos que $\{\psi_1,\phi_1\}$ e $\{\psi_2,\phi_2\}$ são soluções do referido problema. Então, $z=\psi_1-\psi_2$

e $w = \phi_1 - \phi_2$ satisfazem:

$$\begin{cases} iz' + \Delta z + i\gamma z + i\left(\left|\psi_1\right|^2 \psi_1 - \left|\psi_2\right|^2 \psi_2\right) & \\ = -\left(\phi_2\psi_2 - \phi_1\psi_1\right) & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ w'' - \Delta w + \int_0^t g(t-\tau)\Delta w d\tau + \mu^2 w + \left[F\left(\phi_1, \phi_1'\right) - F\left(\phi_2, \phi_2'\right)\right] & \\ = \beta\left(\left|\psi_1\right|^2 - \left|\psi_2\right|^2\right) & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ w = 0, z = 0 & \text{em } \Gamma \times (0,T) \\ w(0) = w'(0) = 0, \quad z(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação do sistema por $-iz$, tomamos sua parte real e multiplicamos a segunda equação por w', decorre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|z(t)\right\|_2^2 + \gamma\left\|z(t)\right\|_2^2 + \operatorname{Re}\left[\left(\left|\psi_1(t)\right|^2\psi_1(t) - \left|\psi_2(t)\right|^2\psi_2(t), z(t)\right)\right] \\ = \operatorname{Re}\left[-i\left(\phi_2(t)\psi_2(t) - \phi_1(t)\psi_1(t), z(t)\right)\right] \end{aligned} \tag{2.7-59}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|w'(t)\right\|_2^2 + \left\|\nabla w(t)\right\|_2^2 + \mu^2\left\|w(t)\right\|_2^2\right] + \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla w, \nabla w'\right)d\tau + \left(F\left(\phi_1(t), \phi_1'(t)\right)\right. \\ \left. -F\left(\phi_2(t), \phi_2'(t)\right), w'(t)\right) = \beta\left(\left|\psi_1(t)\right|^2 - \left|\psi_2(t)\right|^2, w'(t)\right). \end{aligned} \tag{2.7-60}$$

Observe que

$$\begin{aligned} &\left(\left|\psi_1(t)\right|^2\psi_1(t) - \left|\psi_2(t)\right|^2\psi_2(t), \psi_1(t) - \psi_2(t)\right) \\ &= \int_\Omega \left(\left|\psi_1(t)\right|^2\psi_1(t) - \left|\psi_2(t)\right|^2\psi_2(t)\right)\left(\overline{\psi_1(t)} - \overline{\psi_2(t)}\right)dx \\ &= \int_\Omega \left[\left|\psi_1(t)\right|^2\psi_1(t)\overline{\psi_1(t)} - \left|\psi_1(t)\right|^2\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)}\right. \\ &\left. - \left|\psi_2(t)\right|^2\psi_2(t)\overline{\psi_1(t)} + \left|\psi_2(t)\right|^2\psi_2(t)\overline{\psi_2(t)}\right]dx \\ &= \int_\Omega \left[\left|\psi_1(t)\right|^4 + \left|\psi_2(t)\right|^4 - \left|\psi_1(t)\right|^2\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} - \left|\psi_2(t)\right|^2\psi_2(t)\overline{\psi_1(t)}\right]dx. \end{aligned}$$

Então, usando o fato de que $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = \operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(|\psi_1(t)|^2\psi_1(t) - |\psi_2(t)|^2\psi_2(t), \psi_1(t) - \psi_2(t)\right)\\
&= \int_\Omega \left[|\psi_1(t)|^4 + |\psi_2(t)|^4 - \left(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2\right)\operatorname{Re}\left(\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)}\right)\right] dx\\
&\leq \int_\Omega \left[|\psi_1(t)|^4 + |\psi_2(t)|^4 - |\psi_1(t)\psi_2(t)|\left(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2\right)\right] dx\\
&= \int_\Omega \left[|\psi_1(t)|^4 + |\psi_2(t)|^4 - |\psi_1(t)|^3|\psi_2(t)| - |\psi_2(t)|^3|\psi_1(t)|\right] dx\\
&= \int_\Omega \left[|\psi_1(t)|^3(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|) - |\psi_2(t)|^3(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|)\right] dx\\
&= \int_\Omega \left(|\psi_1(t)|^3 - |\psi_2(t)|^3\right)(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|)\, dx,
\end{aligned}
$$

isto é ,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left[\left(|\psi_1(t)|^2\psi_1(t) - |\psi_2(t)|^2\psi_2(t), z(t)\right)\right]\\
&\leq \int_\Omega \left(|\psi_1(t)|^3 - |\psi_2(t)|^3\right)(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|)\, dx.
\end{aligned}
$$

Além disso, adicionando e subtraindo o termo $\psi_1\phi_2$ no lado direito da expressão $(2.7-59)$ deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&(\phi_2(t)\psi_2(t) - \phi_1(t)\psi_1(t), \psi_1(t) - \psi_2(t))\\
&= (\phi_2(t)[\psi_2(t) - \psi_1(t)] + \psi_1(t)[\phi_2(t) - \phi_1(t)], \psi_1(t) - \psi_2(t))\\
&= \int_\Omega [\phi_2(t)(\psi_2(t) - \psi_1(t)) + \psi_1(t)(\phi_2(t) - \phi_1(t))]\left[\overline{\psi_1(t)} - \overline{\psi_2(t)}\right] dx\\
&= -\int_\Omega [\phi_2(t)z(t) + \psi_1(t)w(t)]\,\overline{z(t)}dx\\
&= -\int_\Omega \left[\phi_2(t)|z(t)|^2 + \psi_1(t)w(t)\overline{z(t)}\right] dx.
\end{aligned}
$$

Logo, pelas Desigualdades de Hölder generealizada, Young e pelas estimativas, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left[-i\left(\phi_2(t)\psi_2(t) - \phi_1(t)\psi_1(t), z(t)\right)\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[i\int_\Omega \psi_1(t)w(t)\overline{z(t)}dx\right]\\
&\leq \|\psi_1(t)\|_4 \|w(t)\|_4 \|z(t)\|_2^2\\
&\leq c_1\|w(t)\|_4 \|z(t)\|_2^2\\
&\leq \frac{c_1}{2}\|w(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 + \frac{c_1}{2}\|z(t)\|_2^2\\
&\leq c_2\left[\|\nabla w(t)\|_2^2 + \|z(t)\|_2^2\right]
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\operatorname{Re}\left[-i\left(\phi_2(t)\psi_2(t)-\phi_1(t)\psi_1(t),z(t)\right)\right]\leq k_1\left[\|\nabla w(t)\|_2^2+\|z(t)\|_2^2\right].$$

Logo, a equação $(2.7-59)$, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|_2^2+\gamma\|z(t)\|_2^2+\int_\Omega\left(|\psi_1(t)|^3-|\psi_2(t)|^3\right)\left(|\psi_1(t)|-|\psi_2(t)|\right)dx\\ \leq k_1\left[\|\nabla w(t)\|_2^2+\|z(t)\|_2^2\right].\end{aligned} \tag{2.7-61}$$

Também do lado direito da equação $(2.7-60)$ temos

$$\begin{aligned}&\beta\left(|\psi_1(t)|^2-|\psi_2(t)|^2,w'(t)\right)\\ &=\beta\int_\Omega\left[|\psi_1(t)|^2-|\psi_2(t)|^2\right]w'(t)dx\\ &=\beta\int_\Omega\left[\psi_1(t)\overline{\psi_1(t)}-\psi_2(t)\overline{\psi_2(t)}\right]w'(t)dx\\ &=\beta\int_\Omega\left[\psi_1(t)\overline{\psi_1(t)}-\psi_2(t)\overline{\psi_1(t)}+\psi_2(t)\overline{\psi_1(t)}-\psi_2(t)\overline{\psi_2(t)}\right]w'(t)dx\\ &=\beta\int_\Omega\left[\psi_1(t)-\psi_2(t)\right]\overline{\psi_1(t)}w'(t)dx+\beta\int_\Omega\left[\overline{\psi_1(t)}-\overline{\psi_2(t)}\right]\psi_2(t)w'(t)dx\\ &=\beta\int_\Omega z(t)\overline{\psi_1(t)}w'(t)dx+\beta\int_\Omega\overline{z(t)}\psi_2(t)w'(t)dx\\ &\leq\beta\int_\Omega|z(t)|\,|\psi_1(t)|\,|w'(t)|\,dx+\beta\int_\Omega|z(t)|\,|\psi_2(t)|\,|w'(t)|\,dx\\ &\leq\beta\int_\Omega\left(|\psi_1(t)|+|\psi_2(t)|\right)|z(t)|\,|w'(t)|\,dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\beta\left(|\psi_1(t)|^2-|\psi_2(t)|^2,w'(t)\right)\leq\beta\int_\Omega\left[|\psi_1(t)|+|\psi_2(t)|\right]|z(t)|\,|w'(t)|\,dx. \tag{2.7-62}$$

Também, na equação $(2.7-60)$, consideremos a hipótese $(H.1)$ da função F no termo $\left(F\left(\phi_1(t),\phi_1'(t)\right)-F\left(\phi_2(t),\phi_2'(t)\right),w'(t)\right)$, ou seja, para todo $t\in[0,T]$ existem $M_4,M_5,M_6>$

0 e $p, q \in [1,3]$, tais que

$$
\begin{aligned}
&\left(F\left(\phi_1(t), \phi_1'(t)\right) - F\left(\phi_2(t), \phi_2'(t)\right), w'(t)\right) \\
&= \int_\Omega \left[F\left(\phi_1(t), \phi_1'(t)\right) - F\left(\phi_2(t), \phi_2'(t)\right)\right]\left[\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right] dx \\
&\geq \int_\Omega \left\{-M_4 \left|\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right| \left|\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right|\right. \\
&- M_5 \left[|\phi_1(t)|^{p-1} + |\phi_2(t)|^{p-1}\right] |\phi_1(t) - \phi_2(t)| \left|\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right| \\
&\left.+ M_6 \left[|\phi_1'(t)|^{q-1} \phi_1'(t) - |\phi_2'(t)|^{q-1} \phi_2'(t)\right] \left(\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right)\right\} dx \\
&= -M_4 \int_\Omega \left|\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right|^2 dx \\
&- M_5 \int_\Omega \left[|\phi_1(t)|^{p-1} + |\phi_2(t)|^{p-1}\right] |\phi_1(t) - \phi_2(t)| \left|\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right| dx \\
&+ M_6 \int_\Omega \left[|\phi_1'(t)|^{q-1} \phi_1'(t) - |\phi_2'(t)|^{q-1} \phi_2'(t)\right] \left(\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right) dx.
\end{aligned}
$$

Mas, considerando a monotonia da função $G(\lambda) = |\lambda|^{q-1}\lambda$, $\lambda \geq 0$, segue que

$$
\int_\Omega \left[|\phi_1'(t)|^{q-1} \phi_1'(t) - |\phi_2'(t)|^{q-1} \phi_2'(t)\right] \left(\phi_1'(t) - \phi_2'(t)\right) dx \geq 0,
$$

donde,

$$
\begin{gathered}
\left(F\left(\phi_1(t), \phi_1'(t)\right) - F\left(\phi_2(t), \phi_2'(t)\right), w'(t)\right) \\
\geq -M_4 \left|w'(t)\right|^2 - M_5 \left[\int_\Omega |\phi_1(t)|^{p-1} |w(t)| \left|w'(t)\right| dx + \int_\Omega |\phi_2(t)|^{p-1} |w(t)| \left|w'(t)\right| dx\right].
\end{gathered}
$$

Por outro lado, das Desigualdades de Hölder generalizada, Poincaré e Young, decorre que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |\phi_1(t)|^{p-1} |w(t)| \left|w'(t)\right| dx \\
&\leq \int_\Omega (1 + |\phi_1(t)|)^{p-1} |w(t)| \left|w'(t)\right| dx \\
&\leq \int_\Omega (1 + |\phi_1(t)|)^{p} |w(t)| \left|w'(t)\right| dx \\
&\leq \left[\int_\Omega |w(t)| \left|w'(t)\right| dx + \int_\Omega |\phi_1(t)|^p |w(t)| \left|w'(t)\right| dx\right] \\
&\leq C^*(p) \left[\lambda_1 |\nabla w(t)| \left|w'(t)\right| + \left(\sup_{t\in[0,T]} \operatorname{ess} |\nabla \phi_1(t)|\right)^p \lambda_2 |\nabla w(t)| \left|w'(t)\right|\right] \\
&\leq C_1 \left[|\nabla w(t)| \left|w'(t)\right|\right] \leq \frac{C_1}{2} \left[|\nabla w(t)|^2 + \left|w'(t)\right|^2\right].
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtemos

$$\int_\Omega |\phi_2(t)|^{p-1} |w(t)| |w'(t)| \, dx \leq \frac{C_2}{2} \left[|\nabla w(t)|^2 + |w'(t)|^2 \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (F(\phi_1(t), \phi_1'(t)) - F(\phi_2(t), \phi_2'(t)), w'(t)) &\geq -M_4 |w'(t)|^2 \\ -M_5 \left[\frac{C_1}{2} \left(|\nabla w(t)|^2 + |w'(t)|^2 \right) + \frac{C_2}{2} \left(|\nabla w(t)|^2 + |w'(t)|^2 \right) \right] & \\ &\geq -k_2 |w'(t)|^2 - k_3 |\nabla w(t)|^2, \end{aligned}$$

assim,

$$-(F(\phi_1(t), \phi_1'(t)) - F(\phi_2(t), \phi_2'(t)), w'(t)) \leq k_2 |w'(t)|^2 + k_3 |\nabla w(t)|^2.$$

Ainda,

$$\int_0^t g(t-\tau) (\nabla w(\tau), \nabla w'(t)) \, d\tau \leq \int_0^t |g(t-\tau)| |(\nabla w(\tau), \nabla w'(t))| d\tau.$$

Mais, analogamente ao feito nas contas para obter as equações $(2.3-9)$ e $(2.3-11)$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} &\int_0^t g(t-\tau) (\nabla w(\tau), \nabla w'(t)) \, d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-\tau) (\nabla w(\tau), \nabla w(t)) \, d\tau - g(0) \|\nabla w(t)\|_2^2 - \int_0^t g(t-\tau)' (\nabla w(\tau), \nabla w(t)) \, d\tau \\ &\leq \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-\tau) (\nabla w(\tau), \nabla w(t)) \, d\tau + (-g(0) + \frac{m_0^2}{2}) \|\nabla w(t)\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t g'(t-\tau) \|\nabla w(\tau)\|_2 \, d\tau. \end{aligned}$$

Agora, substituindo em $(2.7-60)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + \mu^2 |w(t)|^2 \right] + \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-\tau) (\nabla w(\tau), \nabla w(t)) \, d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t g'(t-\tau) \|\nabla w(\tau)\|_2 \, d\tau \\ &\leq k_2 |w'(t)|^2 + k_3 |\nabla w(t)|^2 + \beta \int_\Omega [|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|] |z(t)| |w'(t)| \, dx. \end{aligned} \tag{2.7-63}$$

Somando as expressões $(2.7-61)$ e $(2.7-63)$, ainda, levando em conta que

$$\int_{\Omega} \left(|\psi_1(t)|^3 - |\psi_2(t)|^3\right)\left(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|\right) dx \geq 0,$$

resulta a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|z(t)|^2 + |w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + \mu^2|w(t)|^2\right\}\\
&\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla w(\tau), \nabla w(t)\right) d\tau + \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g'(t-\tau)\|\nabla w(\tau)\|_2\, d\tau\\
&\leq k_4\left[|z(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + |w'(t)|^2\right] + \beta\int_{\Omega}\left[|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|\right]|z(t)|\,|w'(t)|\, dx.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\{\psi_1, \psi_2\} \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, e considerando a primeira estimativa, deduzimos

$$\beta\int_{\Omega}\left[|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|\right]|z(t)|\,|w'(t)|\, d \leq k_5$$

e isso implica que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|z(t)|^2 + |w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + \mu^2|w(t)|^2\right]\\
&\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla w(\tau), \nabla w(t)\right) d\tau\\
&+\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g'(t-\tau)\|\nabla w(\tau)\|_2\, d\tau\\
&\leq k_6\left[|z(t)|^2 + |w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando esta expressão por 2, integrando de 0 a $t, t \in [0, T]$ e observando que $w(0) = w'(0) = 0$ e $z(0) = 0$ em Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
&|z(t)|^2 + |w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + \mu^2|w(t)|^2\\
&\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla w(\tau), \nabla w(t)\right) d\tau + \frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g'(s-\tau)\|\nabla w(\tau)\|_2\, d\tau ds\\
&\leq 0 + 2k_6\int_0^t\left[|z(s)|^2 + |w'(s)|^2 + |\nabla w(s)|^2 + \mu^2|w(s)|^2\right] ds.
\end{aligned}$$

Semelhante as contas feitas para obter $(2.4-34)$, concluímos que

$$\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla w(\tau), \nabla w(t)\right) d\tau \leq \frac{1}{8}\|\nabla w(t)\|_2^2 + 2\|g\|_{L^1(0,\infty)}\|g\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla w(\tau)\|_2^2\, d\tau$$

e

$$\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s g'(s-\tau)\,\|\nabla w(\tau)\|\,d\tau ds \leq \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla w(\tau)\|_2^2\,d\tau$$

Logo,

$$\begin{aligned} &|z(t)|^2 + |w'(t)|^2 + \frac{9}{8}|\nabla w(t)|^2 + \mu^2|w(t)|^2 \\ &\leq 0 + 2k_6\int_0^t \left[|z(s)|^2 + |w'(s)|^2 + |\nabla w(s)|^2 + \mu^2|w(s)|^2\right] ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall, concluímos que

$$|z(t)|^2 + |w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + \mu^2|w(t)|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0,T].$$

Daí, decorre que $z = 0$ e $w = 0$, portanto, $\psi_1 = \psi_2$ e $\phi_1 = \phi_2$. Encerrando, assim, a prova do teorema.

CAPÍTULO 3

DECAIMENTO UNIFORME

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.0.1. *Sob as hipóteses do Teorema* $2.2.2$*, e assumindo* β *suficientemente pequeno e* $p \geq q$*, a energia*

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\|\psi(t)\|_2^2 + \|\phi'(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi\|_2^2 + \mu^2\|\phi(t)\|_2^2 + \frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\right\}$$

associada a solução forte do sistema $(0.0-3)$*, decai exponencialmente, isto é,*

$$E(t) \leq 4l^{-1}E(0)\exp\left(\frac{-\epsilon}{2}Nt\right), \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e } \epsilon \in (0, \varepsilon_0]\,,$$

onde ε_0 *e* N *são constantes positivas.*

Multiplicando a primeira equação de $(0.0-3)$ por $\bar{\psi}$ e integrando em Ω, temos

$$\begin{aligned} i\int_\Omega \psi'(t)\overline{\psi(t)}dx + \int_\Omega \Delta\psi(t)\overline{\psi(t)}dx + i\int_\Omega |\psi(t)|^2\psi(t)\overline{\psi(t)}dx \\ +i\gamma\int_\Omega \psi(t)\overline{\psi(t)}dx = -\int_\Omega \phi(t)\psi(t)\overline{\psi(t)}dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (\psi'(t),\psi(t)) + i(\nabla\psi(t),\nabla\psi(t)) + \big(|\psi(t)|^2\psi(t),\psi(t)\big) \\ +\gamma(\psi(t),\psi(t)) = i\int_\Omega \phi(t)|\psi(t)|^2dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|_2^2+\|\psi(t)\|_4^4+\gamma\|\psi(t)\|_2^2=0. \tag{3.0-1}$$

Agora, multiplicando a segunda equação de $(0.0-3)$ por ϕ' e integrando em Ω, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi''(t)\phi'(t)dx-\int_\Omega \Delta\phi(t)\phi'(t)dx+\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \Delta\phi(\tau)\phi'(t)dxd\tau+\mu^2\int_\Omega \phi(t)\phi'(t)dx\\ +\int_\Omega F\left(\phi(t),\phi'(t)\right)\phi'(t)dx=\beta\int_\Omega |\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx.\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}(\phi''(t),\phi'(t))+(\nabla\phi(t),\nabla\phi'(t))+\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi(\tau),\phi'(t)\right)d\tau+\mu^2\left(\phi(t),\phi'(t)\right)\\ +\int_\Omega F\left(\phi(t),\phi'(t)\right)\phi'(t)dx=\beta\int_\Omega |\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx.\end{aligned} \tag{3.0-2}$$

Mas, por hipótese (H.2), para todo $t\in[0,T]$, existem $M_1>0$, $M_2,M_3\geq 0$ e $p,q\in[1,3]$, tais que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega F\left(\phi(t),\phi'(t)\right)\phi'(t)dx\\ &\geq \int_\Omega \Big[M_1\phi'(t)\phi'(t)+M_2\left|\phi'(t)\right|^{q-1}\phi'(t)\phi'(t)+M_3|\phi(t)|^{p-1}\phi(t)\phi'(t)\Big]dx\\ &=M_1\int_\Omega \left|\phi'(t)\right|^2dx+M_2\int_\Omega \left|\phi'(t)\right|^{q+1}dx+\frac{M_3}{(p+1)}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\phi(t)|^{p+1}dx\\ &=M_1\left\|\phi'(t)\right\|_2^2+M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1}+\frac{M_3}{(p+1)}\frac{d}{dt}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}.\end{aligned}$$

Assim, a equação $(3.0-2)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\phi'(t)\|_2^2+\|\nabla\phi(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi(t)\|_2^2+\frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\right]\\ &+\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi(\tau),\phi'(t)\right)d\tau+M_1\left\|\phi'(t)\right\|_2^2+M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1}\\ &\leq\beta\int_\Omega |\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx.\end{aligned} \tag{3.0-3}$$

Somando $(3.0-3)$ e $(3.0-1)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\phi'(t)\|_2^2+\|\psi(t)\|_2^2+\|\nabla\phi(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi(t)\|_2^2+\frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\right]$$
$$+\|\psi(t)\|_4^4+\gamma\|\psi(t)\|_2^2+M_1\|\phi'(t)\|_2^2+M_2\|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1}$$
$$+\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi(\tau),\phi'(t)\right)d\tau\leq\beta\int_\Omega|\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\phi'(t)\|_2^2+\|\nabla\phi(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi(t)\|_2^2+\frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\right]$$
$$\leq-\|\psi(t)\|_4^4-\gamma\|\psi(t)\|_2^2-M_1\|\phi'(t)\|_2^2-M_2\|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1}$$
$$+\beta\int_\Omega|\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx-\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi(\tau),\phi'(t)\right)d\tau,$$

isto é,

$$\begin{aligned}E'(t)\leq&-\|\psi(t)\|_4^4-\gamma\|\psi(t)\|_2^2-M_1\|\phi'(t)\|_2^2-M_2\|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1}\\&+\beta\int_\Omega|\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx-\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi(\tau),\phi'(t)\right)d\tau.\end{aligned}\tag{3.0-4}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Leibniz (Teorema 1.6.8), sabendo que $\frac{d}{dt}\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2=2(\nabla\phi'(t),\nabla\phi(t))-2(\nabla\phi'(t),\nabla\phi(\tau))$, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2d\tau\right)=\int_0^t g'(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2d\tau$$
$$-2\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(\tau),\nabla\phi'(t)\right)d\tau+2\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(t),\nabla\phi'(t)\right)d\tau.$$

Considerando a mundança de variável $s=t-\tau$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla\phi(t)\|_2^2\right\}=\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(t),\nabla\phi'(t)\right)d\tau+\frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2,$$

daí,

$$\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(\tau),\nabla\phi'(t)\right)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\|\phi(t)-\phi(\tau)\|_2^2d\tau\right)+\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla\phi(t)\|_2^2\right\}$$
$$-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2.$$

Definamos a energia modificada como

$$\begin{aligned} e(t) &= E(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\psi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\mu^2\|\phi(t)\|_2^2 \\ &+ \frac{M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Daí,

$$e'(t) = E'(t) + \left(\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2\right)'.$$

Por (H.1) temos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau\right)' - \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(t), \nabla\phi'(t)\right)d\tau - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau - \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(\tau), \nabla\phi'(t)\right)d\tau \\ &+ \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(t), \nabla\phi'(t)\right)d\tau - \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(t), \nabla\phi'(t)\right)d\tau - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{-m_1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau - \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(\tau), \nabla\phi'(t)\right)d\tau - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Logo, por $(3.0-4)$, temos que

$$\begin{aligned} e'(t) \leq &- \|\psi(t)\|_4^4 - \gamma\|\psi(t)\|_2^2 - M_1\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} + \beta\int_\Omega |\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx \\ &- \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta\phi(\tau), \phi'(t)\right)d\tau - \frac{m_1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau \\ &- \int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla\phi(\tau), \nabla\phi'(t)\right)d\tau - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 \\ &= -\|\psi(t)\|_4^4 - \gamma\|\psi(t)\|_2^2 - M_1\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1} \\ &+ \beta\int_\Omega |\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx - \frac{m_1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Também, pela desigualdade de Young, considerando $L > 0$ uma constante arbitrária,

obtemos
$$\begin{aligned}
\beta\int_\Omega |\psi(t)|^{2\theta}\phi'(t)dx &\leq \beta\int_\Omega |\psi(t)|^{2\theta}\left|\phi'(t)\right|dx\\
&= \int_\Omega \left(\sqrt{L}|\psi(t)|^{2\theta}\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{L}}\left|\phi'(t)\right|\right)dx\\
&\leq \frac{L}{2}\int_\Omega |\psi(t)|^{4\theta}dx + \frac{\beta^2}{2L}\int_\Omega \left|\phi'(t)\right|^2 dx\\
&= \frac{L}{2}\|\psi(t)\|_{4\theta}^{4\theta} + \frac{\beta^2}{2L}\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
e'(t) \leq &-\|\psi(t)\|_4^4 - \gamma\|\psi(t)\|_2^2 - M_1\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1} + \frac{L}{2}\|\psi(t)\|_{4\theta}^{4\theta}\\
&+ \frac{\beta^2}{2L}\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - \frac{m_1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

A partir de agora, denotaremos $(g\Box\nabla\phi)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(\tau)-\nabla\phi(t)\|_2^2 d\tau$.

Se $\gamma \geq \frac{1}{2}$, escolhemos $L = \gamma$. Daí

$$\begin{aligned}
e'(t) \leq &-\|\psi(t)\|_4^4 - \gamma\|\psi(t)\|_2^2 - M_1\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1}\\
&+ \frac{\gamma}{2}\left[\int_{\{x\in\Omega;|\psi|\leq 1\}}|\psi|^2dx + \int_{\{x\in\Omega;|\psi|>1\}}|\psi|^4dx\right]\\
&+ \frac{\beta^2}{2\gamma}\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - \frac{m_1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2\\
&= \left(-1+\frac{\gamma}{2}\right)\|\psi(t)\|_4^4 - \frac{\gamma}{2}\|\psi(t)\|_2^2 + \left(-M_1+\frac{\beta^2}{2\gamma}\right)\left\|\phi'(t)\right\|_2^2\\
&- M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1} - \frac{m_1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

uma vez que $2 \leq 4\theta < 4$.

Se $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, escolhemos $L = 1$. Daí

$$\begin{aligned}
e'(t) \leq &-\|\psi(t)\|_4^4 - \gamma\|\psi(t)\|_2^2 - M_1\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{2}\|\psi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\psi(t)\|_4^4\\
&+ \frac{\beta^2}{2}\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - \frac{m_1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2\\
&= -\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_4^4 + \left(-\gamma+\frac{1}{2}\right)\|\psi(t)\|_2^2 + \left(-M_1+\frac{\beta^2}{2}\right)\left\|\phi'(t)\right\|_2^2\\
&- M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1} - \frac{m_1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) - \frac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Seja $\delta_1 = \frac{\gamma}{2}$, se $\gamma \geq \frac{1}{2}$ e $\delta_1 = \gamma - \frac{1}{2}$, se $\gamma < \frac{1}{2}$, e em ambos os casos, consideremos β

suficientemente pequeno, de modo a obtermos $\delta_2 > 0$, tal que em ambos os casos

$$\begin{aligned} e'(t) \leq &-\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_4^4 - \delta_1\|\psi(t)\|_2^2 - \delta_2\,\|\phi'(t)\|_2^2 - M_2\,\|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} \\ &-\frac{m_1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.0-5}$$

Então $e'(t) \leq 0$, consequentemente $e(t)$ é uma função não crescente. Por outro lado, desde que $\frac{1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) \geq 0$, podemos observar que

$$\begin{aligned} e(t) =&\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\,\|\phi'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\mu^2\|\phi(t)\|_2^2 \\ &+ \frac{M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|\psi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\,\|\phi'(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\mu^2\|\phi(t)\|_2^2 + \frac{M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1} \\ &\geq lE(t), \end{aligned}$$

onde $l < 1$ é a constante definida em (H.1). Disto, podemos concluir que

$$E(t) \leq l^{-1}e(t). \tag{3.0-6}$$

Para $\epsilon > 0$ arbitrário, definamos a energia perturbada do sistema como:

$$e_\epsilon(t) = e(t) + \epsilon\rho(t),$$

onde

$$\rho(t) = (\psi(t), \psi(t)) + (\phi'(t), \phi(t))\,. \tag{3.0-7}$$

Para continuarmos a demonstração do Teorema 3.0.1 são necessários os seguintes resultados:

Teorema 3.0.2. *Existe $C_1 > 0$ tal que*

$$|e_\varepsilon(t) - e(t)| \leq \varepsilon C_1 e(t), \quad \forall\varepsilon > 0, \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Da definição de energia perturbada, temos $|e_\epsilon(t) - e(t)| = \epsilon|\rho(t)|$, daí, observando as desigualdades de Cauchy-Swartz, Young e Poincaré, decorre que

$$\begin{aligned}
|\rho(t)| &= |(\psi(t),\psi(t)) + (\phi'(t),\phi(t))| \\
&\leq \|\psi(t)\|_2^2 + \|\phi'(t)\|_2 \|\phi(t)\|_2 \\
&\leq \|\psi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\phi'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|_2^2 \\
&\leq \|\psi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\phi'(t)\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla\phi(t)\|_2^2 \\
&\leq 2e(t) + e(t) + \lambda^2 e(t) \\
&= \left(3+\lambda^2\right) e(t).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|e_\epsilon(t) - e(t)| \leq \epsilon\left(3+\lambda^2\right) e(t).$$

Tomando $C_1 = (3+\lambda^2)$, concluímos que

$$|e_\epsilon(t) - e(t)| \leq \epsilon C_1 e(t), \quad \forall \epsilon > 0 \text{ e } t \geq 0.$$

□

Teorema 3.0.3. *Se $q \leq p$, então existem $\varepsilon_1 > 0$ e $N > 0$ tais que*

$$e'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon N e(t), \quad \textit{para todo } t \geq 0 \textit{ e } \varepsilon \in (0,\varepsilon_1].$$

Demonstração. Derivando $(3.0-7)$, temos

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &= [(\psi(t),\psi(t)) + (\phi'(t),\phi(t))]' \\
&= (\psi'(t),\psi(t)) + (\psi(t),\psi'(t)) + (\phi''(t),\phi(t)) + (\phi'(t),\phi'(t)) \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left[(\psi'(t),\psi(t))\right] + (\phi''(t),\phi(t)) + \|\phi'(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Mas, sabemos de $(0.0-3)$ que

$$\psi' = i\Delta\psi - |\psi|^2\psi - \gamma\psi + i\phi\psi$$

e

$$\phi'' = \Delta\phi - \int_0^t g(t-\tau)\Delta\phi(\tau)d\tau - \mu^2\phi - F(\phi,\phi') + \beta|\psi|^{2\theta},$$

então,

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &= 2\,\mathrm{Re}\left[i(\Delta\psi(t),\psi(t)) - \left(|\psi(t)|^2\psi(t),\psi(t)\right) - \gamma(\psi(t),\psi(t)) + i(\phi(t)\psi(t),\psi(t))\right] \\
&+ (\Delta\phi(t),\phi(t)) + \int_0^t g(t-\tau)\,(\nabla\phi(\tau),\nabla\phi(t))\,d\tau - \mu^2(\phi(t),\phi(t)) \\
&- \left(F\left(\phi(t),\phi'(t)\right),\phi(t)\right) + \beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) + \|\phi'(t)\|_2^2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left[-i\|\nabla\psi(t)\|_2^2 - \|\psi(t)\|_4^4 - \gamma\|\psi(t)\|_2^2 + i(\phi(t)\psi(t),\psi(t))\right] \\
&- \|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \int_0^t g(t-\tau)\,(\nabla\phi(\tau),\nabla\phi(t))\,d\tau - \mu^2\|\phi(t)\|_2^2 \\
&- \left(F\left(\phi(t),\phi'(t)\right),\phi(t)\right) + \beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) + \|\phi'(t)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &= -2\|\psi(t)\|_4^4 - 2\gamma\|\psi(t)\|_2^2 - \|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \int_0^t g(t-\tau)\,(\nabla\phi(\tau),\nabla\phi(t))\,d\tau \\
&- \mu^2\|\phi(t)\|_2^2 - \left(F\left(\phi(t),\phi'(t)\right),\phi(t)\right) + \beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) + \|\phi'(t)\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.0-8}
$$

Mas, por hipótese (H.1), temos que

$$
\begin{aligned}
&- \left(F\left(\phi(t),\phi'(t)\right),\phi(t)\right) = -\int_\Omega F\left(\phi(t),\phi'(t)\right)\phi(t)dx \\
&\leq -\int_\Omega \left[M_1\phi'(t)\phi(t) + M_2\left|\phi'(t)\right|^{q-1}\phi'(t)\phi(t) + M_3|\phi(t)|^{p-1}\phi(t)\phi(t)\right]dx \\
&= -M_1\int_\Omega \phi'(t)\phi(t)dx - M_2\int_\Omega \left|\phi'(t)\right|^{q-1}\phi'(t)\phi(t)dx - M_3\int_\Omega |\phi(t)|^{p+1}dx \\
&= -M_1\left(\phi'(t),\phi(t)\right) - M_2\left(\left|\phi'(t)\right|^{q-1}\phi'(t),\phi(t)\right) - M_3\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}.
\end{aligned}
\tag{3.0-9}
$$

Note que, a Desigualdade de Cauchy Schwartz e a Desigualdade de Young implicam

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-\tau)(\nabla\phi(\tau),\nabla\phi(t))d\tau \\
&= \int_0^t g(t-\tau)(\nabla\phi(\tau) - \nabla\phi(t) + \nabla\phi(t),\nabla\phi(t))d\tau \\
&= \int_0^t g(t-\tau)(\nabla\phi(\tau) - \nabla\phi(t),\nabla\phi(t))d\tau + \int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 d\tau \\
&\leq \int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(\tau) - \nabla\phi(t)\|_2\|\nabla\phi(t)\|_2 d\tau + \int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 d\tau
\end{aligned}
$$

$$\leq \int_0^t g(t-\tau)\left(\frac{1}{2}\|\nabla\phi(\tau)-\nabla\phi(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla\phi(t)\|_2^2\right)d\tau+\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 d\tau$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(\tau)-\nabla\phi(t)\|_2^2 d\tau+\frac{3}{2}\|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds. \tag{3.0-10}$$

Substituindo $(3.0-9)$ e (3) em $(3.0-8)$,

$$\begin{aligned}\rho'(t) &\leq -2\gamma\|\psi(t)\|_2^2-\|\nabla\phi(t)\|_2^2-\mu^2\|\phi(t)\|_2^2-M_3\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}+\|\phi'(t)\|_2^2\\ &-2\|\psi(t)\|_4^4-M_1\left(\phi'(t),\phi(t)\right)-M_2\left(|\phi'(t)|^{q-1}\phi'(t),\phi(t)\right)\\ &+\beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right)+\frac{1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t)+\frac{3}{2}\|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds.\end{aligned} \tag{3.0-11}$$

Seja $N_1=\min\left\{2\gamma,1,\frac{(p+1)}{2},\right\}$. Então

$$\begin{aligned}&1\left[\|\phi'(t)\|_2^2+\|\nabla\phi(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi(t)\|_2^2\right]+2\gamma\|\psi(t)\|_2^2+\frac{2M_3}{(p+1)}\frac{(p+1)}{2}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2\\ &\geq N_1\left[\|\phi'(t)\|_2^2+\|\nabla\phi(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi(t)\|_2^2\right]+N_1\|\psi(t)\|_2^2+\frac{2M_3}{(p+1)}N_1\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\\ &+\frac{N_1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau-\frac{N_1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2\\ &\geq\frac{N_1}{2}\left\{\|\phi'(t)\|_2^2+\|\nabla\phi(t)\|_2^2+\mu^2\|\phi(t)\|_2^2+\|\psi(t)\|^2+\frac{2M_3}{(p+1)}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\right\}\\ &+\frac{N_1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau-\frac{N_1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2\\ &=N_1(E(t)+\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2)=N_1e(t),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\left[-\|\phi'(t)\|_2^2-\|\nabla\phi(t)\|_2^2-\mu^2\|\phi(t)\|_2^2\right]-2\gamma\|\psi(t)\|_2^2-\frac{2M_3}{(p+1)}\frac{(p+1)}{2}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\\ &-\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2\leq -N_1e(t),\end{aligned} \tag{3.0-12}$$

Assim, somando $-(g\Box\nabla\phi)(t) - \|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds$ em $(3.0-11)$ temos

$$\begin{aligned}
&\rho'(t) + \left[-(g\Box\nabla\phi)(t) - \|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds\right]\\
&\leq -\left\{2\gamma\|\psi(t)\|_2^2 + \|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \mu^2\|\phi(t)\|_2^2 + M_3\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|\phi'(t)\|_2^2\right\}\\
&+\frac{1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) + \frac{3}{2}\|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds + \left[-(g\Box\nabla\phi)(t) - \|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds\right]\\
&-2\|\psi(t)\|_4^4 - M_1\left(\phi'(t),\phi(t)\right) - M_2\left(|\phi'(t)|^{q-1}\phi'(t),\phi(t)\right)\\
&+\beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) + 2\left\|\phi'(t)\right\|_2^2\\
&=\left[-\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 - \|\nabla\phi(t)\|_2^2 - \mu^2\|\phi(t)\|_2^2\right] - 2\gamma\|\psi(t)\|_2^2 - \frac{2M_3}{(p+1)}\frac{(p+1)}{2}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla\phi(t)-\nabla\phi(\tau)\|_2^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla\phi(t)\|_2^2\\
&-2\|\psi(t)\|_4^4 - M_1\left(\phi'(t),\phi(t)\right) - M_2\left(|\phi'(t)|^{q-1}\phi'(t),\phi(t)\right)\\
&+\beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) + 2\left\|\phi'(t)\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Daí, por $(3.0-12)$ temos

$$\begin{aligned}
&\rho'(t) + \left[-(g\Box\nabla\phi)(t) - \|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds\right]\\
&\leq -N_1 e(t) - 2\|\psi(t)\|_4^4 - M_1\left(\phi'(t),\phi(t)\right) - M_2\left(|\phi'(t)|^{q-1}\phi'(t),\phi(t)\right)\\
&+\beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) + 2\left\|\phi'(t)\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\rho'(t) \leq -N_1 e(t) - 2\|\psi(t)\|_4^4 - M_1\left(\phi'(t),\phi(t)\right) - M_2\left(|\phi'(t)|^{q-1}\phi'(t),\phi(t)\right)\\
&+\beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) + 2\left\|\phi'(t)\right\|_2^2 + (g\Box\nabla\phi)(t) + \|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.0-13}$$

Ainda, pela Desigualdade de Cauchy Schwartz e pela Desigualdade de Yong, considerando $\eta > 0$ arbitrario, temos

$$
\begin{aligned}
-M_1\left(\phi'(t),\phi(t)\right) &\leq M_1\|\phi'(t)\|_2\|\phi(t)\|_2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{\eta}\mu}{\sqrt{2}}\|\phi(t)\|_2\right)\left(\frac{\sqrt{2}M_1}{\sqrt{\eta}\mu}\|\phi'(t)\|_2\right) \\
&\leq \frac{\eta\mu^2}{4}\|\phi(t)\|_2^2+\frac{M_1^2}{\eta\mu^2}\|\phi'(t)\|_2^2 \\
&= \frac{\eta\mu^2}{4}\|\phi(t)\|_2^2+C_1(\eta)\left\|\phi'(t)\right\|^2,
\end{aligned}
\tag{3.0-14}
$$

onde $C_1(\eta)=\frac{M_1^2}{\eta\mu^2}$. Além disso, pela Desigualdade de Holder e pela Desigualdade de Young, onde $p=\frac{(q+1)}{q}$ e $q=q+1$, temos

$$
\begin{aligned}
&-M_2\left(\left|\phi'(t)\right|^{q-1}\phi'(t),\phi(t)\right) \\
&=-M_2\int_\Omega\left|\phi'(t)\right|^{q-1}\phi'(t)\phi(t)dx \\
&\leq M_2\int_\Omega\left|\phi'(t)\right|^{q}|\phi(t)|dx \\
&\leq M_2\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q}\|\phi(t)\|_{q+1} \\
&=\left(\frac{M_2}{\sqrt[q+1]{\eta(q+1)}}\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q}\right)\left(\sqrt[q+1]{\eta(q+1)}\|\phi(t)\|_{q+1}\right) \\
&\leq\left[\frac{M_2^{\frac{q+1}{q}}}{[\eta(q+1)]^{\frac{1}{q}}}\frac{q}{q+1}\right]\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q\frac{q+1}{q}}+\frac{\left(\sqrt[q+1]{\eta(q+1)}\right)^{q+1}}{q+1}\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} \\
&=C_2(\eta)\left\|\phi'(t)\right\|_{q+1}^{q+1}+\eta\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1},
\end{aligned}
\tag{3.0-15}
$$

onde $C_2(\eta)=\frac{M_2^{\frac{q+1}{q}}q}{\eta^{\frac{1}{q}}(q+1)^{1+\frac{1}{q}}}$, e novamente pelas Desigualdades de Cauchy Schwarz e Young,

$$
\begin{aligned}
\beta\left(|\psi(t)|^{2\theta},\phi(t)\right) &\leq \beta\left\||\psi(t)|^{2\theta}\right\|_2\|\phi(t)\|_2 \\
&=\beta\|\psi(t)\|_{4\theta}^{2\theta}\|\phi(t)\|_2 \\
&=\left(\frac{2\beta}{\sqrt{\eta}\mu}\|\psi(t)\|_{4\theta}^{2\theta}\right)\left(\sqrt{\eta}\frac{\mu}{2}\|\phi(t)\|_2\right) \\
&\leq C_3(\eta)\|\psi(t)\|_{4\theta}^{4\theta}+\eta\frac{\mu^2}{4}\|\phi(t)\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.0-16}
$$

onde $C_3(\eta)=\frac{4\beta^2}{\eta\mu^2}$.

Logo, substituindo $(3.0-14),(3.0-15)$ e $(3.0-16)$ em $(3.0-13)$ temos

$$\begin{aligned}\rho'(t) &\leq -N_1 e(t) - 2\|\psi(t)\|_4^4 + \frac{\eta\mu^2}{4}\|\phi(t)\|_2^2 + C_1(\eta)\,\|\phi'(t)\|_2^2 + C_2(\eta)\,\|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} \\ &+ \eta\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} + C_3(\eta)\|\psi(t)\|_{4\theta}^{4\theta} + \eta\frac{\mu^2}{4}\|\phi(t)\|_2^2 + 2\,\|\phi'(t)\|_2^2 \\ &+ (g\Box\nabla\phi)(t) + \|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\rho'(t) &\leq -N_1 e(t) - 2\|\psi(t)\|_4^4 + C(\eta)\{\|\phi'(t)\|^2 + \|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} + \|\psi(t)\|_{4\theta}^{4\theta}\} \\ &+ \eta\frac{\mu^2}{2}\|\phi(t)\|_2^2 + 2\,\|\phi'(t)\|_2^2 + \eta\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} \\ &+ (g\Box\nabla\phi)(t) + \|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds,\end{aligned} \tag{3.0-17}$$

onde $C(\eta) = \max\limits_i\{C_i(\eta); i = 1,2,3\}$.

Logo, substituindo $(3.0-5)$ e $(3.0-17)$ na definição de energia perturbada, obtemos

$$\begin{aligned}e'_\epsilon(t) &= e'(t) + \epsilon\rho'(t) \\ &\leq -\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_4^4 - \delta_1\|\psi(t)\|_2^2 - \delta_2\,\|\phi'(t)\|_2^2 - M_2\,\|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} \\ &- \frac{m_1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 \\ &- \epsilon N_1 e(t) - 2\epsilon\|\psi(t)\|_4^4 + \epsilon C(\eta)\left\{\|\phi'(t)\|_2^2 + \|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} + \|\psi(t)\|_{4\theta}^{4\theta}\right\} \\ &+ \epsilon\eta\frac{\mu^2}{2}\|\phi(t)\|_2^2 + \epsilon\eta\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} + 2\epsilon\,\|\phi'(t)\|_2^2 + \epsilon(g\Box\nabla\phi)(t) + \epsilon\|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds.\end{aligned}$$

Observemos que $1 \leq 2\theta \leq 2$, logo

$$\|\psi(t)\|_{4\theta}^{4\theta} \leq \|\psi(t)\|_2^2 + \|\psi(t)\|_4^4.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}e'_\epsilon(t) &\leq -\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_4^4 - \delta_1\|\psi(t)\|_2^2 - \delta_2\,\|\phi'(t)\|_2^2 - M_2\,\|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} \\ &- \frac{m_1}{2}(g\Box\nabla\phi)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 \\ &- \epsilon N_1 e(t) - 2\epsilon\|\psi(t)\|_4^4 + \epsilon C(\eta)\left\{\|\phi'(t)\|_2^2 + \|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} + \|\psi(t)\|_2^2 + \|\psi(t)\|_4^4\right\} \\ &+ \epsilon\eta\frac{\mu^2}{2}\|\phi(t)\|_2^2 + \epsilon\eta\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} + 2\epsilon\,\|\phi'(t)\|_2^2 + \epsilon(g\Box\nabla\phi)(t) + \epsilon\|\nabla\phi(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds.\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
e'_\epsilon(t) \leq &-\epsilon N_1 e(t) + \left[-\frac{1}{2} - 2\epsilon + \epsilon C(\eta)\right] \|\psi(t)\|_4^4 \\
&+ [-\delta_2 + \epsilon C(\eta) + 2\epsilon] \|\phi'(t)\|_2^2 \\
&+ [-M_2 + \epsilon C(\eta)] \|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} \\
&+ [\epsilon C(\eta) - \delta_1] \|\psi(t)\|_2^2 \\
&+ \epsilon\eta\frac{\mu^2}{2}\|\phi(t)\|_2^2 + \epsilon\eta\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} \\
&+ \left[-\frac{m_1}{2} + \epsilon\right] (g\Box\nabla\phi)(t) \\
&+ \left[-\frac{1}{2}g(t) + \epsilon\int_0^t g(s)ds\right] \|\nabla\phi(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.0-18}$$

Considerando que $q \leq p$, pelo Teorema $1.6.4$,

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} &= \int_\Omega |\phi(t)|^{q+1}dx \\
&= \int_\Omega |\phi(t)|^{q-1}|\phi(t)|^2dx \\
&\leq \int_\Omega (1 + |\phi(t)|)^{q-1}|\phi(t)|^2dx \\
&\leq \int_\Omega (1 + |\phi(t)|)^{p-1}|\phi(t)|^2dx \\
&\leq 2^{p-1}\int_\Omega \left(1 + |\phi(t)|^{p-1}\right)|\phi(t)|^2dx \\
&= 2^{p-1}\int_\Omega |\phi(t)|^2dx + 2^{p-1}\int_\Omega |\phi(t)|^{p+1}dx.
\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned}
\epsilon\eta\|\phi(t)\|_{q+1}^{q+1} &\leq \epsilon\eta 2^{p-1}\|\phi(t)\|_2^2 + \epsilon\eta 2^{p-1}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&\leq \epsilon\eta\lambda 2^{p-1}\|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \epsilon\eta 2^{p-1}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
&\leq \epsilon C_p(\eta)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 + \epsilon\eta 2^{p-1}\|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1},
\end{aligned} \tag{3.0-19}$$

com $C_p(\eta) = \eta\lambda 2^{p-1}$.

Reescrevendo $-\epsilon N_1 e(t) = -\frac{\epsilon N_1}{2}e(t) - \frac{\epsilon N_1}{2}e(t)$ e levando em conta que

$$\frac{\mu^2}{2}\|\phi(t)\|_2^2 \leq e(t).$$

Substituindo $(3.0-19)$ na desigualdade $(3.0-18)$, temos

$$\begin{aligned}
e_\epsilon'(t) \leq & \left[\frac{-\epsilon N_1}{2} + \epsilon\eta\right] e(t) \\
& + \left[-\frac{1}{2} - 2\epsilon + \epsilon C(\eta)\right] \|\psi(t)\|_4^4 \\
& + \left[-\delta_2 + \epsilon C(\eta) + 2\epsilon\right] \|\phi'(t)\|_2^2 \\
& + \left[-M_2 + \epsilon C(\eta)\right] \|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} \\
& + \left[\epsilon C(\eta) - \delta_1\right] \|\psi(t)\|_2^2 \\
& - \frac{\epsilon N_1}{2} e(t) + \epsilon\eta 2^{p-1} \|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}. \\
& + \left[-\frac{m_1}{2} + \epsilon\right] (g \Box \nabla\phi)(t) \\
& + \left[-\frac{1}{2} g(t) + \epsilon\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds + \epsilon C_p(\eta)\right] \|\nabla\phi(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.0-20}$$

Ainda, note que

$$-\frac{N_1}{2} e(t) \leq -\frac{N_1}{2}\frac{M_3}{(p+1)} \|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
e_\epsilon'(t) \leq & -\epsilon\left[\frac{N_1}{2} - \eta\right] e(t) \\
& - \left[\frac{1}{2} - \epsilon(C(\eta) - 2)\right] \|\psi(t)\|_4^4 \\
& - \left[\delta_2 - \epsilon(C(\eta) + 2)\right] \|\phi'(t)\|_2^2 \\
& - \left[M_2 - \epsilon C(\eta)\right] \|\phi'(t)\|_{q+1}^{q+1} \\
& - \left[\delta_1 - \epsilon C(\eta)\right] \|\psi(t)\|_2^2 \\
& + \epsilon\left[-\frac{N_1}{2}\frac{M_3}{(p+1)} + \eta 2^{p-1}\right] \|\phi(t)\|_{p+1}^{p+1} \\
& - \left[\frac{m_1}{2} - \epsilon\right] (g \Box \nabla\phi)(t) \\
& - \left[\frac{1}{2} g(t) - \epsilon\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds + C_p(\eta)\right] \|\nabla\phi(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.0-21}$$

Fixamos η, $C(\eta)$ e $C_p(\eta)$ nesta ordem tal que $\eta \leq \frac{N_1 M_3 2^{-p+1}}{2\epsilon(p+1)}$, então

$$\left[-\frac{N_1}{2}\frac{M_3}{(p+1)} + \eta 2^{p-1}\right] \leq 0.$$

Tomemos $\|g\|_{L^1(0,\infty)} < \frac{g(0)}{m_0}$, onde m_0 é a constante em (H.1).

Definamos $\epsilon_1 = \min\{\frac{-m_0\|g\|_{L^1(0,\infty)}+g(0)}{2[\|g\|_{L^1(0,\infty)}+C_p(\eta)]}, \frac{m_1}{2}, \frac{1}{2(C(\eta)-2)}, \frac{\delta_2}{2(C(\eta)+2)}, \frac{M_2}{C(\eta)}, \frac{\delta_1}{C(\eta)}, \}$, e considerando $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$. Temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$g(t) = \int_0^t g'(s)ds + g(0).$$

Daí, por (H.1)

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}g(t) + \epsilon\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds + \epsilon C_p(\eta) \\
&\leq -\frac{1}{2}\int_0^t g'(s)ds - \frac{g(0)}{2} + \epsilon\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds + \epsilon C_p(\eta) \\
&\leq -\frac{m_0}{2}\int_0^t g(s)ds - \frac{g(0)}{2} + \epsilon\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds + \epsilon C_p(\eta) \\
&\leq \left[-\frac{m_0}{2} + \epsilon\frac{1}{2}\right]\int_0^t g(s)ds - \frac{g(0)}{2} + \epsilon C_p(\eta) \\
&\leq \left[-\frac{m_0}{2} + \epsilon\frac{1}{2}\right]\|g\|_{L^1(0,\infty)} - \frac{g(0)}{2} + \epsilon C_p(\eta) \\
&= \left[\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C_p(\eta)\right]\epsilon + \frac{m_0}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)} - \frac{g(0)}{2} \\
&\leq \left[\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C_p(\eta)\right]\epsilon_1 + \frac{m_0}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)} - \frac{g(0)}{2} \\
&\leq \left[\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C_p(\eta)\right]\frac{-m_0\|g\|_{L^1(0,\infty)} + g(0)}{2[\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C_p(\eta)]} + \frac{m_0}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)} - \frac{g(0)}{2} = 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2}g(t) + \epsilon\frac{1}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)} + \epsilon C_p(\eta) \leq 0.$$

Ainda, como

$$\frac{m_1}{2} - \epsilon \geq \frac{m_1}{2} - \epsilon_1 \geq \frac{m_1}{2} - \frac{m_1}{2} = 0,$$

então

$$-[\frac{m_1}{2} - \epsilon] \leq 0.$$

Analogamente, obtemos que

$$-\left[\frac{1}{2} - \epsilon(C(\eta) - 2)\right] \leq 0,$$
$$-\left[\delta_2 - \epsilon(C(\eta) - 2)\right] \leq 0,$$
$$-\left[M_2 - \epsilon C(\eta)\right] \leq 0,$$
$$-\left[\delta_1 - \epsilon C(\eta)\right] \leq 0,$$
$$-\left[-\epsilon C(\eta) + \delta_1\right] \leq 0.$$

Portanto de $(3.0-21)$, existe uma constante $N = \frac{N_1}{2} - \eta$ tal que

$$e'_\epsilon(t) \leq -\epsilon N e(t) \quad \forall t \geq 0, \epsilon \in (0, \epsilon_1].$$

□

Continuando a prova do Teorema $3.0.1$**.**

Pelo Teorema $3.0.2$, existe uma contante $C_1 > 0$ tal que

$$|e_\varepsilon(t) - e(t)| \leq \varepsilon C_1 e(t), \quad \forall \varepsilon > 0, \forall t \geq 0.$$

Logo,

$$-\epsilon C_1 e(t) \leq e_\epsilon(t) - e(t) \leq \epsilon C_1 e(t),$$

ou seja,

$$[1 - \epsilon C_1]\, e(t) \leq e_\epsilon(t) \leq [\epsilon C_1 + 1]\, e(t).$$

Seja $\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2C_1}, \epsilon_1\right\}$, e consideremos $\epsilon \in (0, \varepsilon_0\ ]$. Então nós temos que $\varepsilon < \frac{1}{2C_1}$, disto podemos concluir que

$$[1 - \epsilon C_1]\, e(t) \geq \left[1 - \frac{1}{2C_1} C_1\right] e(t) = \frac{1}{2} e(t)$$

e

$$[\epsilon C_1 + 1]\, e(t) \leq \left[\frac{1}{2C_1} C_1 + 1\right] e(t) = \frac{3}{2} e(t).$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} e(t) \leq e_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2} e(t) \leq 2e(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.0-22}$$

Consequentemente, $-\varepsilon N e(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2} N e_\varepsilon(t)$ e segue do Teorema $3.0.3$ que

$$e'_\varepsilon(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2} N e_\varepsilon(t),$$

isto é,

$$e'_\varepsilon(t) + \frac{\varepsilon}{2} N e_\varepsilon(t) \leq 0.$$

Agora, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por $\exp\left(\frac{\varepsilon}{2} N t\right)$ temos

$$e'_\varepsilon(t) \exp\left(\frac{\epsilon}{2} N t\right) + \frac{\varepsilon}{2} N e_\varepsilon(t) \exp\left(\frac{\epsilon}{2} N t\right) \leq 0.$$

disto, deduzimos

$$\frac{d}{dt}\left[e_\varepsilon(t) \exp\left(\frac{\epsilon}{2} N t\right)\right] \leq 0.$$

Integrando a desigualdade de 0 a t, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$e_\epsilon(t) \exp\left(\frac{\epsilon}{2} N t\right) - e_\epsilon(0) \leq 0,$$

logo,

$$e_\epsilon(t) \leq e_\epsilon(0) \exp\left(\frac{-\epsilon}{2} N t\right). \tag{3.0-23}$$

Uma vez que $E(t) \leq l^{-1} e(t)$, por $(3.0-22)$ e $(3.0-23)$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} E(t) &\leq l^{-1} \frac{1}{2} e(t) \\
&\leq l^{-1} e_\epsilon(t) \\
&\leq l^{-1} e_\epsilon(0) \exp\left(\frac{-\epsilon}{2} N t\right) \\
&\leq 2 l^{-1} e(0) \exp\left(\frac{-\epsilon}{2} N t\right).
\end{aligned}$$

Disto e observando que $E(0) = e(0)$, concluimos que

$$E(t) \leq 4 l^{-1} E(0) \exp\left(\frac{-\epsilon}{2} N t\right),$$

encerrando a prova do Teorema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, R. A., Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics., Academic Press, INC., 1975.

[2] H. AMANN, Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Volume I: Abstract Linear Theory, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[3] ALMEIDA, A. F.;CAVALCANTI, M. M.;ZANCHETTA, J. P., Exponential stability for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping, Evol. Equ. Control Theory, **8** (2019), 847-865.

[4] BRÉZIS, H., Analyse Fonctionnelle - théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[5] BORTOT,C. A.; SOUZA, T. M.; ZANCHETTA J. P., Asymptotic behavior of the coupled Klein-Gordon-Schrödinger systems on compact manifolds. Math. Methods Appl. Sci., **45** (4) (2022), 2254-2275.

[6] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N., Global existence and uniform decay for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 7, 285–307 (2008)

[7] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D., Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev. Eduem, Maringá, PR, 2009.

[8] CAVALCANTI, M. M.;DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.;FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A., Uniform Stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping. Transactions of AMS, v.361, no 9, p.4561-4580, 2009.

[9] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N., Theory of Ordinary Differential Equations, MacGraw-Hill, New York, 1955.

[10] EVANS, L.C., Partial Differential Equations, University of California, Berkeley, 1998.

[11] FUKADA, I.; TSUTSUMI, M., On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations II. J. Math. Anal. Appl. 66, 358–378 (1978)

[12] KOMORNIK, V.: Exact Controllability and Stabilization, the Multiplier Method. Wiley/Masson, Paris (1994)

[13] LIMA, E. L., Análise no espaço $\mathbb{R}^n$, 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[14] LIONS, J.L.; MAGENES, E., Problémes aux Limites Non Homogénes et Applications, Volume I, Dunod, Paris, 1968.

[15] LIONS, J.L., Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[16] PARK, J.Y.; KIM, J.A., Uniform Decay for the Coupled Klein-Gordon-Schrödinger Equation with Linear Memory. Acta Appl Math 110, 449–467 (2010).

[17] MEDEIROS, L.A., Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos 16, IM-UFRJ.1983.

[18] MEDEIROS, L. A., Tópicos em Equações Diferenciais Parciais. Parte I. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

[19] MILLA MIRANDA, M., Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemticos 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[20] MISSAOUI, S., Regularity of the attractor for a coupled Klein-Gordon-Schrödinger system in $\mathbb{R}^3$ nonlinear KGS system, Commun. Pure Appl. Anal., **21** (2) (2022), 567-584.

[21] WEBLER, C. M.; ZANCHETTA, J. P., Exponential stability for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping in unbounded domains, Asymptot. Anal., **123** (3-4) (2021), 289-315.

[22] ZEIDLER, E., Nonlinear Functional Analysis and its Aplications. Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990..