

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Doutorado)

EVANDRO MAZETTO BRIZOLA

CÓDIGOS QUÂNTICOS TOPOLÓGICOS A PARTIR DE  
TESSELAÇÕES SEMIRREGULARES DE SUPERFÍCIES  
NÃO-ORIENTÁVEIS E NOVOS CÓDIGOS DE SUBSISTEMA

Maringá-PR

2023

---

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÓDIGOS QUÂNTICOS TOPOLÓGICOS A PARTIR DE  
TESSELAÇÕES SEMIRREGULARES DE SUPERFÍCIES  
NÃO-ORIENTÁVEIS E NOVOS CÓDIGOS DE SUBSISTEMA

TESE DE DOUTORADO

EVANDRO MAZETTO BRIZOLA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Dr. Eduardo Brandani da Silva.

Maringá

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

B862co Brizola, Evandro Mazetto  
Códigos quânticos topológicos a partir de  
tesselações semirregulares de superfícies não-  
orientáveis e novos códigos de subsistema / Evandro  
Mazetto Brizola. -- Maringá, 2023.  
173 f. : il. color.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Eduardo Brandani da  
Silva.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
Matemática Aplicada, 2023.

1. Códigos quânticos estabilizadores. 2. Códigos  
coloridos em superfícies. 3. Códigos em superfícies  
compactas não-orientáveis. 4. Tesselações  
semirregulares. 5. Códigos de subsistema  
topológicos. 6. Stabilizer quantum codes. 7. Surface  
codes. 8. Color codes. 9. Codes on non-orientable  
compact surfaces. 10. Topological subsystem codes.  
I. Silva, Eduardo Brandani da, orient. II.  
Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências  
Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática -  
Área de Concentração: Matemática Aplicada. III.  
Título.

CDD 22.ed. 003.54

Edilson Damasio CRB9-1.123

# **EVANDRO MAZETTO BRIZOLA**

## **CÓDIGOS QUÂNTICOS TOPOLÓGICOS A PARTIR DE TESSELAÇÕES SEMIRREGULARES DE SUPERFÍCIES NÃO-ORIENTÁVEIS E NOVOS CÓDIGOS DE SUBSISTEMA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

### **COMISSÃO JULGADORA:**

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva - UEM (Presidente)

Prof. Dr. Marcelo de Oliveira Terra Cunha - IMECC-UNICAMP

Prof. Dr. Waldir Silva Soares Junior - UTFPR/Pato Branco

Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani - UEM

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM

Aprovado em: 20 de abril de 2023.

Local de defesa: Bloco F67 – Auditório do Departamento de Matemática.

---

---

# AGRADECIMENTOS

---

Primeiramente, agradeço a Deus e a Nossa Senhora da Conceição Aparecida por todas as bênçãos recebidas e por me darem forças para realizar com muito empenho e dedicação mais essa etapa de meus estudos.

Agradeço a meus pais Valter Brizola e Iria Mazetto Brizola por todo o suporte dado nesse período.

À minha esposa Patrine Kieling de Lima Brizola por sempre estar ao meu lado me apoiando em todos os momentos.

Ao meu orientador, professor Dr. Eduardo Brandani da Silva, por todos os ensinamentos compartilhados e por todas as horas dedicadas em reuniões e conversas para me auxiliar durante esse período.

Agradeço ao colega Douglas Copatti pelos momentos de conversas sobre os seus códigos e ao professor Antonio Breda d'Azevedo pela ajuda com a utilização do software GAP.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo suporte financeiro sem o qual a presente pesquisa não poderia ser desenvolvida.

---

---

# RESUMO

---

Neste trabalho apresentamos um amplo estudo sobre os códigos quânticos estabilizadores e sobre os códigos de subsistema topológicos, trazendo inovação para estas duas áreas. Para os códigos estabilizadores, em especial, para os códigos coloridos, obtemos uma condição suficiente para que a distância desses códigos seja exatamente  $d = 2$ . Fornecemos também um limitante superior para a distância desses mesmos códigos sobre tesselações regulares e um limitante superior para a distância sobre tesselações semirregulares, para podermos assim, abordar os casos que não são contemplados através da condição para a distância ser 2. Esses resultados valem tanto para superfícies compactas orientáveis quanto superfícies compactas não-orientáveis. Realizamos também a construção dos códigos quânticos de superfície e coloridos em superfícies compactas não-orientáveis sobre tesselações semirregulares, onde fornecemos várias tabelas com os parâmetros obtidos. Por fim, com respeito aos códigos de subsistema topológicos, apresentamos uma nova construção desses códigos, a qual nos fornece novas famílias de códigos e fornecemos uma nova família de código obtida através de uma construção já existente, devida a Sarvepalli e Brown.

**Palavras-chave:** Códigos quânticos estabilizadores, códigos de superfície, códigos coloridos, códigos em superfícies compactas não-orientáveis, tesselações semirregulares, distância dos códigos coloridos, códigos de subsistema topológicos.

---

---

# ABSTRACT

---

In this work we present a broad study about stabilizer quantum codes and topological subsystem codes, bringing innovation to these two areas. For stabilizer codes, in particular for color codes, we obtain a sufficient condition that the distance of these codes is exactly  $d = 2$ . We also provide an upper bound for the distance of these same codes under regular tessellations and an upper bound for the distance under semi-regular tessellations, so that we can approach the cases that are not contemplated through the condition for the distance to be 2. These results are valid both for orientable compact surfaces and non-orientable compact surfaces. We also perform the construction of surface and color quantum codes on non-orientable compact surfaces under semi-regular tessellations, where we provide several tables with the obtained parameters. Finally, regarding the topological subsystem codes, we present a new construction of these codes, which provides us with new families of codes and we provide a new family of codes obtained through an already existing construction, due to Sarvepalli and Brown.

**Keywords:** Stabilizer quantum codes, surface codes, color codes, codes on non-orientable compact surfaces, semi-regular tessellations, distance color codes, topological subsystem codes.

---

---

# SUMÁRIO

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Qubit . . . . .	5
1.2 Produto Tensorial e Matrizes de Pauli . . . . .	7
1.3 Geometria Hiperbólica . . . . .	9
1.4 Tesselações . . . . .	13
<b>2 Códigos Quânticos Corretores de Erros</b>	<b>22</b>
2.1 Códigos Estabilizadores . . . . .	23
2.2 Códigos Quânticos Topológicos . . . . .	28
2.2.1 Códigos Quânticos de Superfície . . . . .	29
2.2.2 Códigos Quânticos de Superfície em Superfícies Compactas Orientáveis com $g \geq 2$ . . . . .	34
2.3 Códigos Quânticos Coloridos . . . . .	37
2.3.1 Códigos Quânticos Coloridos em Superfície Compactas Orientáveis com $g \geq 2$ . . . . .	41
2.4 Códigos de Superfície e Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ . . . . .	42
2.4.1 Códigos Quânticos de Superfície em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ . . . . .	43

2.4.2	Códigos Quânticos Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ . . . . .	44
2.5	Códigos de Superfície e Coloridos em Superfícies Orientáveis Sobre Tesselações Semirregulares . . . . .	46
2.5.1	Códigos de Superfícies Sobre Tesselações Semirregulares . . . . .	46
2.5.2	Códigos Coloridos Sobre Tesselações Semirregulares . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Distância dos Códigos Coloridos</b>	<b>54</b>
3.1	Distância dos Códigos Coloridos Sobre Tesselações Regulares . . . . .	55
3.2	Distância dos Códigos Coloridos Sobre Tesselações Semirregulares . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Códigos de Superfície e Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com <math>g \geq 3</math> Sobre Tesselações Semirregulares</b>	<b>67</b>
4.1	Códigos de Superfície em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ Sobre Tesselações Semirregulares . . . . .	68
4.2	Códigos Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ Sobre Tesselações Semirregulares . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Códigos de Subistema</b>	<b>103</b>
5.1	Principais Elementos dos Códigos de Subistema . . . . .	104
5.2	Códigos de Subistema Topológicos . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Novos Códigos de Subistema Topológicos</b>	<b>126</b>
6.1	Construção dos Novos Códigos de Subistema . . . . .	127
6.2	Famílias de Códigos de Subistema Topológicos . . . . .	134
	<b>Considerações Finais</b>	<b>162</b>
	<b>Referências</b>	<b>163</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>170</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

O primeiro modelo de computação quântica descrito em 1982 por Benioff [8], embora baseado na cinemática e dinâmica quântica era, no sentido computacional estabelecido em [27], efetivamente clássico. Também em 1982 foi proposto por Feynman [35] o primeiro modelo de computador baseado nos princípios da mecânica quântica. Esse modelo foi o que mais se aproximou de um simulador quântico universal. Já em 1985, um grande avanço ocorreu nessa área quando Deutsch [27] descreveu um modelo inteiramente quântico de uma versão quântica da máquina de Turing.

Uma das maiores dificuldades em realizar computação quântica está na decoerência quântica que é a questão do decaimento quântico, o que foi alertado por Unruh [68]. Uma forma de contornar esse efeito é a utilização de códigos quânticos corretores de erros, o qual é uma ferramenta matemática utilizada para codificar estados físicos de sistema quântico.

Os primeiros códigos quânticos corretores de erros foram inspirados nos códigos corretores de erros clássicos introduzidos em 1948 por Shannon [60]. Em 1995, foi exibido por Shor [61] o primeiro código quântico corretor de erro. Esse código foi uma combinação de outros dois códigos de três qubits, onde um deles protege o estado quântico contra erros bit flip e o outro protege o estado quântico contra erros phase-flip, onde somente o primeiro deles possui um análogo clássico.

Um dos maiores avanços na codificação quântica ocorreu em 1996 com a construção dos códigos quânticos CSS por Calderbank e Shor [22] e Steane [65]. A partir desses códigos foi gerado uma das classes mais importantes de códigos quânticos conhecida até hoje, os códigos quânticos estabilizadores [38].

No ano seguinte, foi desenvolvido por Kitaev [47] um novo código chamado de código

tórico de Kitaev, o qual faz parte de uma classe de códigos conhecida como códigos topológicos. Uma grande vantagem e novidade desse código foi o fato de que os seus geradores estabilizadores agiam em uma pequena quantidade de qubits em sua vizinhança. Códigos com essa propriedade são ditos geometricamente locais. Uma vantagem dos geradores estabilizadores agirem em uma pequena quantidade de qubits em sua vizinhança é que isso torna as palavras quânticas resistentes aos ruídos locais [14].

Em 2009, fazendo uso de propriedades da geometria hiperbólica, os autores Albuquerque, Palazzo e Silva [2] generalizaram o código de Kitaev para superfícies compactas orientáveis com gênero  $g \geq 2$ . Nesse caso, foi utilizada uma tesselação regular qualquer, diferente do código de Kitaev, onde a tesselação utilizada era formada por quadrados. Esses códigos topológicos também são chamados de códigos de superfície.

Outra classe de códigos quânticos topológicos conhecida como códigos coloridos foi desenvolvida em 2006 por Bombín e Martin-Delgado [16], o qual fazia uso de tesselações trivalentes e 3-coloríveis no toro. Esses códigos também fazem parte da classe de códigos estabilizadores.

Já em 2018, também fazendo uso de propriedades da geometria hiperbólica, Soares e Silva [63], realizaram uma generalização dos códigos coloridos para superfícies compactas orientáveis com gênero  $g \geq 2$ , onde fizeram uso de tesselações trivalentes e 3-coloríveis regulares. Essa construção foi inspirada em [2]. Quando comparado com os códigos de superfície, os códigos coloridos apresentam a vantagem de codificar o dobro de qubits para uma mesma superfície.

Bhowmik, Maity e Silva [10] realizaram em 2021 a construção tanto dos códigos quânticos de superfície quanto dos códigos coloridos em superfícies compactas não-orientáveis de gênero  $g \geq 3$ . Quando  $g \geq 3$  for par, os códigos obtidos coincidem com os códigos em superfícies compactas orientáveis de gênero  $h = \frac{g}{2}$ . Assim, a novidade dos códigos apresentados está nos casos em que  $g \geq 3$  é ímpar.

Em 2022, Copatti [24] fez a construção dos códigos de superfície e dos códigos coloridos em superfícies compactas orientáveis de gênero  $g \geq 2$  utilizando tesselações semirregulares. Essa construção generaliza tanto [2] quanto [63], pois os mesmos utilizavam somente tesselações regulares. No caso dos códigos coloridos não foi abordado a questão da distância.

Outro grupo importante de códigos quânticos o qual também faz parte dos códigos estabilizadores são os códigos de subsistema [3], [5], [57]. Esses códigos são o resultado de aplicar o formalismo estabilizador à correção de erro quântico do operador [48], [49], o que generaliza a teoria padrão de correção de erro quântico e fornece uma estrutura unificada para a correção ativa de erros e técnicas passivas de prevenção de erros, tornando os códigos de subsistema a classe mais versátil de códigos quânticos corretores de erros conhecida até o momento.

Com o passar dos anos, inúmeros trabalhos foram realizados nessa área. Damos destaque a construção dos códigos de subsistema topológicos realizado por Bombín [13] em 2010, o qual fez uso de tesselações trivalentes e 3-coloríveis. Apesar de em [5] já ter sido utilizado tesselações para a construção de códigos de subsistema, devido aos geradores estabilizadores desses códigos serem não-locais, os mesmos não podem ser considerados topológicos.

Também em 2010, Suchara, Bravyi e Terhal [67] estabeleceram algumas condições para determinar códigos de subsistema topológicos e demonstraram que os códigos de subsistema topológicos podem ser vistos como uma espécie de generalização do modelo honeycomb de Kitaev, para hipergrafos trivalentes. Também em [67] foi apresentado uma condição necessária e suficiente sobre a medição da síndrome de erro de um código de subsistema, o qual é um resultado muito importante e é utilizado para garantir que um código de subsistema seja topológico.

Em 2012, Sarvepalli e Brown [59] apresentaram uma nova construção de códigos de subsistema topológicos inspirados em [67], onde apresentaram algumas famílias de códigos. Esse é um dos poucos trabalhos onde são fornecidos os parâmetros dos códigos, devido a dificuldade de determinar certos padrões dentro dessa classe de códigos.

Em um primeiro momento, este trabalho se propõe a apresentar uma condição suficiente para que a distância dos códigos coloridos seja exatamente  $d = 2$  e fornecer um limitante superior para a distância desses mesmos códigos. Ainda dentro da classe dos códigos quânticos topológicos, utilizando técnicas semelhantes as utilizadas em [10] e [24], vamos apresentar novos códigos de superfície e coloridos a partir de tesselações semirregulares de superfícies não-orientáveis.

Posteriormente, tendo em vista os códigos de subsistema construídos em [13], [59] e [67],

vamos apresentar uma nova construção e novas famílias de códigos de subsistema topológicos.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: No Capítulo 1, apresentaremos os conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Em seguida, no Capítulo 2, abordaremos vários códigos quânticos corretores de erros, os quais são essenciais para a compreensão de nossos resultados. No Capítulo 3, apresentaremos a nossa primeira contribuição, a qual está relacionada com a distância dos códigos coloridos. Primeiramente, fornecemos uma condição suficiente para que a distância dos códigos coloridos sobre tesselações regulares seja exatamente  $d = 2$ . Em seguida forneceremos um limitante superior para a distância dos códigos coloridos. Abordaremos tanto o caso dos códigos coloridos sobre tesselações regulares quanto sobre tesselações semirregulares. Já no Capítulo 4, realizaremos a construção dos nossos códigos quânticos de superfície e coloridos em superfícies compactas não-orientáveis com gênero  $g \geq 3$ , utilizando tesselações semirregulares. No Capítulo 5, trataremos sobre os códigos de subsistema e sobre os códigos de subsistema topológicos. Por fim, no Capítulo 6, construiremos novos códigos de subsistema topológicos e apresentaremos 4 novas famílias desses códigos juntamente com os seus parâmetros.

---

# Preliminares

---

Antes de falarmos sobre os códigos quânticos e apresentarmos os nossos resultados, iremos apresentar alguns elementos que são indispensáveis para a compreensão desses códigos e para a compreensão dos resultados que obtivemos.

Abordaremos algumas notações utilizadas na mecânica quântica que costumamos utilizar com certa frequência quando trabalhamos com códigos quânticos. Não apresentamos um estudo sobre mecânica quântica, para isso recomendamos [40], [51], [56] e [58]. Veremos também sobre as matrizes de Pauli, vários conceitos de Geometria Hiperbólica e falaremos sobre tesselações.

Este capítulo está dividido da seguinte forma. Na seção 1.1, abordaremos algumas notações importantes e introduzimos o conceito de qubit. Em seguida, na seção 1.2, falaremos sobre produto tensorial, sobre as matrizes de Pauli, que são os operadores mais importantes que utilizamos em códigos quânticos e sobre o grupo de Pauli. Já na seção 1.3, falaremos sobre os principais conceitos de Geometria Hiperbólica que formam a base de todo o nosso estudo. Por fim, na seção 1.4, abordaremos o assunto de tesselação, tanto regular quanto semirregular. As tesselações são os objetos matemáticos fundamentais para a construção dos nossos códigos.

## 1.1 Qubit

Antes de falarmos sobre o qubit, falaremos de algumas notações importantes utilizadas na mecânica quântica e que aparecerão neste trabalho. Essas notações utilizadas em mecânica quântica são conhecidas como notação de Dirac. Um vetor, também chamado de ket é

denotado por  $|\psi\rangle$ . Já o vetor dual à  $|\psi\rangle$ , também chamado de bra é denotado por  $\langle\psi|$ . Assim, o produto interno entre os vetores  $|\varphi\rangle$  e  $|\psi\rangle$  é denotado por  $\langle\varphi|\psi\rangle$ . O produto tensorial entre os vetores  $|\varphi\rangle$  e  $|\psi\rangle$  pode ser denotado por  $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$  ou  $|\varphi\psi\rangle$  ou  $|\varphi\rangle|\psi\rangle$ . Para mais notações utilizadas na mecânica quântica recomendamos [56].

Um qubit (ou bit quântico) é o sistema quântico mais simples possível, e é o sistema quântico fundamental que utilizaremos em todo esse trabalho.

Diferentemente do bit clássico que pode assumir somente um estado (0 ou 1), o qubit pode estar no estado  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , em que

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou, ainda, em uma superposição desses dois estados, isto é, podemos ter combinações lineares desses estados da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Observamos que o estado de um qubit é um vetor em um espaço vetorial complexo bidimensional  $\mathbb{C}^2$ .

Os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  conhecidos como estados na base computacional formam uma base ortonormal para o espaço vetorial, chamado de espaço de estados.

Um estado quântico  $|\psi\rangle$  é sempre assumido ser unitário, isto é,  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ . Logo, temos que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

No caso clássico, quando temos dois bits, podemos obter quatro estados, 00, 01, 10 e 11. Já no caso quântico, para dois qubits, temos os estados  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  e  $|11\rangle$  que são conhecidos como estados na base computacional para dois qubits. Perceba que esses estados pertencem ao espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$ .

A superposição desses quatro estados é dado por

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle,$$

em que

$$\sum_{i,j=0}^1 |\alpha_{ij}|^2 = 1.$$

Para  $n$  qubits, consideramos a base computacional como sendo formada pelos estados  $\{|j_{n-1}j_{n-2}\cdots j_0\rangle\}$ , onde  $j_k = 0, 1$  e essa base possui  $2^n$  vetores.

Os estados quânticos que utilizamos fazem parte de algum espaço vetorial complexo de dimensão finita  $\mathbb{C}^n$ , isto é, fazem parte de um espaço de Hilbert  $H$ , pois em espaços vetoriais dessa forma, um espaço de Hilbert é o mesmo que um espaço com produto interno.

## 1.2 Produto Tensorial e Matrizes de Pauli

**Definição 1.1.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Considere  $V$  e  $W$  espaços de Hilbert. Então  $V \otimes W$  ( $V$  tensor  $W$ ) é um espaço vetorial de dimensão  $m \cdot n$ . Os elementos de  $V \otimes W$  são combinações lineares de produtos tensoriais  $|v\rangle \otimes |w\rangle$  de elementos  $|v\rangle \in V$  e  $|w\rangle \in W$ .*

O produto tensorial de  $|v\rangle$  por ele mesmo  $j$  vezes, será denotado por  $|v\rangle^{\otimes j}$ .

**Definição 1.2.** *Sejam  $|v\rangle \in V$  e  $|w\rangle \in W$  vetores. Considere  $A$  e  $B$  operadores lineares em  $V$  e  $W$ , respectivamente. Definimos o operador linear  $A \otimes B$  em  $V \otimes W$  pela equação*

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) \equiv A|v\rangle \otimes B|w\rangle. \quad (1.2)$$

A representação matricial para o produto tensorial é conhecida como produto de Kronecker. Considere  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$  e  $B$  uma matriz de ordem  $p \times q$ . A representação matricial de  $A \otimes B$  é dada da seguinte forma:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}. \quad (1.3)$$

**Definição 1.3.** *O comutador entre dois operadores  $A$  e  $B$  é definido como*

$$[A, B] \equiv AB - BA. \quad (1.4)$$

Se  $[A, B] = 0$ , então  $AB = BA$  e assim, dizemos que  $A$  comuta com  $B$ .

Falaremos agora sobre as matrizes de Pauli. Tais matrizes, são definidas por

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Na maioria das vezes nos referimos a elas como operadores, pois representam operadores na base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Esses são os operadores mais importantes utilizados nos códigos quânticos, mais precisamente, nos códigos estabilizadores.

A matriz  $X$  também é conhecida como matriz bit flip, pois sua ação transforma um elemento da base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  no outro elemento da base, isto é,  $X|0\rangle = |1\rangle$  e  $X|1\rangle = |0\rangle$ . Já a matriz  $Z$  também é conhecida como matriz phase shift, pois sua ação na base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  fixa o estado  $|0\rangle$  e muda a phase do estado  $|1\rangle$ , isto é,  $Z|0\rangle = |0\rangle$  e  $Z|1\rangle = -|1\rangle$ .

Alguns fatos importantes sobre as matrizes de Pauli é que todas elas são Hermitianas e unitárias, isto é, a matriz transposta conjugada  $P^\dagger = P$  e  $PP^\dagger = I$  com  $P \in \{I, X, Y, Z\}$ . Outro fato de extrema importância é que as matrizes de Pauli anticomutam duas a duas, considerando duas matrizes distintas ( $X, Y$  e  $Z$ ).

Dado um estado de três qubits, uma notação que frequentemente usamos para os operadores de Pauli é o operador juntamente com um índice, como por exemplo,  $Z_2X_3$ . Esse operador é o operador  $Z$  agindo no segundo qubit do estado e o operador  $X$  agindo no terceiro qubit do estado. Sempre escreveremos  $Z_2X_3$  ao invés de escrevermos  $I \otimes Z \otimes X$ . Esse operador leva o estado  $|000\rangle$  no estado  $|001\rangle$ , pois

$$\begin{aligned} Z_2X_3|000\rangle &= I \otimes Z \otimes X (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= I|0\rangle \otimes Z|0\rangle \otimes X|0\rangle \\ &= |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \\ &= |001\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando as matrizes de Pauli juntamente com o número complexo  $i$ , obtemos um grupo importante que costumamos utilizar com frequência, chamado de grupo de Pauli, o qual definiremos agora.

**Definição 1.4.** *Considere os operadores de Pauli em um único qubit  $\{I, X, Y, Z\}$ . Definimos*

o grupo de Pauli  $P_n$  como sendo o grupo formado pelos elementos da forma  $i^j A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ , onde  $A_l \in \{I, X, Y, Z\}$  e  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Exemplo 1.5.** O grupo de Pauli  $P_1$  é formado pelos elementos  $i^j A_1$ , onde  $A_1 \in \{I, X, Y, Z\}$  e  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ , ou seja,  $P_1 = \{\pm I, \pm iI, \pm X, \pm iX, \pm Y, \pm iY, \pm Z, \pm iZ\}$ .

Como as matrizes de Pauli comutam ou anticomutam, segue que dois elementos quaisquer  $M, N \in P_n$  comutam ou anticomutam. Segue do fato de que as matrizes de Pauli são Hermitianas e unitárias que todos os elementos do grupo de Pauli são unitários, isto é,  $MM^\dagger = I$  e o quadrado de qualquer elemento de  $P_n$  é igual a  $\pm I$ , isto é,  $M^2 = \pm I$  para todo  $M \in P_n$ .

Outro fato importante sobre os operadores de Pauli é que, se ignorarmos  $i$ , então podemos escrever um operador de Pauli qualquer em  $P_n$ , como um produto tensorial de operadores de Pauli  $X$  juntamente com a identidade  $I$ , vezes, um produto tensorial de operadores de Pauli  $Z$  juntamente com a identidade  $I$ .

## 1.3 Geometria Hiperbólica

**Definição 1.6.** O disco de Poincaré  $\mathbb{D}$  é o conjunto dos números complexos  $z$  tal que  $|z| < 1$ , isto é,  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ .

**Definição 1.7.** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tais que  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ . A aplicação  $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , dada por  $\gamma(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$  é chamada de transformação de Möbius.

O conjunto de todas as transformações de Möbius de  $\mathbb{D}$ , denotado por  $Möb(\mathbb{D})$ , é um grupo com a composição de aplicações. Toda transformação de Möbius é uma aplicação conforme, isto é, preserva ângulo e distância.

Associamos uma métrica canônica ao grupo de todas as transformações de Möbius da seguinte forma: Dados quaisquer  $\gamma_i(z) = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\bar{\beta}_i z + \bar{\alpha}_i} \in Möb(\mathbb{D})$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , tem-se  $dist(\gamma_1, \gamma_2) = \|(\alpha_1, \beta_1, \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_1) - (\alpha_2, \beta_2, \bar{\beta}_2, \bar{\alpha}_2)\|$ .

**Definição 1.8.** Um subgrupo  $\Gamma$  de  $Möb(\mathbb{D})$  é chamado de grupo Fuchsiano se é um grupo discreto em relação a topologia induzida pela métrica de  $Möb(\mathbb{D})$ .

**Teorema 1.9** (Adaptado de [45]). *Um subgrupo  $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{D})$  é um grupo Fuchsiano se, e somente se, atua propriamente descontinuamente sobre  $\mathbb{D}$ .*

**Corolário 1.10** (Adaptado de [45]). *Um subgrupo  $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{D})$  atua propriamente descontinuamente sobre  $\mathbb{D}$  se, e somente se, a órbita de qualquer elemento  $z \in \mathbb{D}$  é um subconjunto discreto de  $\mathbb{D}$ .*

**Proposição 1.11.** *Seja  $\Gamma$  um subgrupo de  $\text{Möb}(\mathbb{D})$ . São equivalentes:*

- (i)  $\Gamma$  é discreto (Fuchsiano);
- (ii)  $\text{Id}_\Gamma$  é um elemento isolado;
- (iii) A órbita de cada  $z \in \mathbb{D}$  é um subconjunto discreto de  $\mathbb{D}$ .

**Definição 1.12.** *O traço de uma transformação de Möbius  $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ , onde  $\gamma(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}$ , é dado por*

$$\tau(\gamma) = \left[ \text{tr} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right]^2 = (\alpha + \bar{\alpha})^2.$$

As transformações de Möbius se dividem em três classes distintas: parabólica, elíptica ou hiperbólica se  $\tau(\gamma)$  é igual, menor, ou maior do que quatro, respectivamente.

Outro conceito importante que damos destaque é o conceito das geodésicas. Uma geodésica é uma curva ligando dois pontos distintos, a qual tem comprimento mínimo em relação a métrica. No plano euclidiano as geodésicas são os segmentos de retas. Já no disco de Poincaré, as geodésicas são segmentos de círculos euclidianos ortogonais à fronteira do disco, em particular, seus diâmetros.

**Definição 1.13.** *Um polígono hiperbólico  $\mathbb{P}$  com  $n$  lados, chamado de  $n$ -gon, é um conjunto fechado convexo formado pela região limitada por  $n$  segmentos geodésicos hiperbólicos. A interseção de dois segmentos geodésicos é chamado de vértice. Um  $n$ -gon no qual todas as arestas têm o mesmo comprimento e a medida de seus ângulos internos são todos iguais é chamado de  $n$ -gon regular.*

**Teorema 1.14.** *Considere um triângulo hiperbólico cujos ângulos internos medem  $\alpha, \beta$  e  $\frac{\pi}{2}$ . Sejam  $a, b$  e  $c$  os comprimentos hiperbólicos dos lados oposto a  $\alpha, \beta$  e  $\frac{\pi}{2}$ , respectivamente. As seguintes relações são válidas:*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b), \quad (1.6)$$

$$\tanh(b) = \sinh(a) \tan(\beta), \quad (1.7)$$

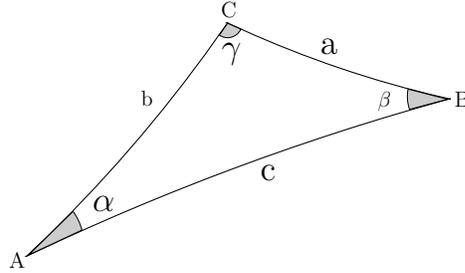
$$\sinh(b) = \sinh(c) \sin(\beta), \quad (1.8)$$

$$\tanh(a) = \tanh(c) \cos(\beta), \quad (1.9)$$

$$\cos(\alpha) = \cosh(a) \sin(\beta), \quad (1.10)$$

$$\cosh(c) = \cot(\alpha) \cot(\beta). \quad (1.11)$$

**Teorema 1.15.** *Considere um triângulo hiperbólico de vértices  $A, B$  e  $C$  com ângulos internos medindo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , respectivamente, e os respectivos lados opostos medindo  $a, b$  e  $c$ . São*



*válidas as seguintes relações:*

*i. A Lei dos Senos para Triângulos Hiperbólicos:*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}. \quad (1.12)$$

*ii. A 1ª Lei dos Cossenos para Triângulos Hiperbólicos:*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma). \quad (1.13)$$

*iii. A 2ª Lei dos Cossenos para Triângulos Hiperbólicos:*

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)}. \quad (1.14)$$

**Lema 1.16.** *Considere um triângulo cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com os respectivos ângulos opostos medindo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . O raio  $R$ , da circunferência inscrita neste triângulo, pode ser obtido através da relação*

$$\tanh^2(R) = \frac{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) + 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - 1}{2(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(\beta))(1 + \cos(\gamma))}.$$

Para determinar a área de um triângulo hiperbólico utilizamos o Teorema de Gauss-Bonnet, o qual nos garante que a área de um triângulo hiperbólico depende somente de seus ângulos.

**Teorema 1.17** (Gauss-Bonnet). *Seja  $\Delta$  um triângulo hiperbólico com ângulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$ . Então a área de  $\Delta$  é dada por  $\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ .*

Podemos determinar a área de um  $n$ -gon de ângulos internos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  decompondo esse  $n$ -gon em  $n$  triângulos e utilizando o Teorema de Gauss-Bonnet. Dessa forma, a área de um  $n$ -gon será dada por  $(n - 2)\pi - \sum_{j=1}^n \alpha_j$ .

## Emparelhamentos de Lados

**Definição 1.18.** *Seja  $\Gamma$  um grupo Fuchsiano e  $z_1 \in \mathbb{H}^2$  tal que  $\gamma(z_1) \neq z_1$  para todo  $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ . Então  $D_{z_1}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, z_1) \leq d(z, \gamma(z_1)), \forall \gamma \in \Gamma\}$  é uma região fundamental de  $\Gamma$ , chamada de região de Dirichlet.*

Qualquer superfície topológica compacta pode ser obtida a partir de um polígono  $\mathbb{P}'$  através de pares de arestas identificadas. Para isso, considere um grupo Fuchsiano  $\Gamma$  e  $D = D(p)$  um polígono de Dirichlet para  $\Gamma$ . Suponha que  $D$  possua finitos lados e  $s$  seja um lado de  $D$  tal que existe  $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$  e  $\gamma(s)$  também seja um lado de  $D$ . Logo  $\gamma^{-1} \in \Gamma \setminus \{Id\}$  leva  $\gamma(s)$  em  $s$ .

Os lados  $s$  e  $\gamma(s)$  são ditos estarem emparelhados e  $\gamma$  é chamado de emparelhamento de lados. Temos também que cada lado é uma aresta com orientação e como  $\gamma$  são isometrias que preservam orientação, então  $\gamma(s)$  possui mesma orientação que  $s$ .

Essa mesma transformação leva um vértice de  $s$  em um vértice de  $\gamma(s)$ . Para entender mais sobre esse processo, recomendamos [7], [21], [66] e [70].

Utilizando um emparelhamento de lados de  $\mathbb{P}'$  é possível definir um espaço de identificação  $S_{\mathbb{P}'}$ , onde existe uma função distância que coincide com a distância hiperbólica quando considerado regiões suficientemente pequenas no interior de  $\mathbb{P}'$ . Caso os ângulos de cada ciclo de vértices somem  $2\pi$  então isso torna  $\mathbb{P}'$  uma superfície hiperbólica.

Considerando  $\mathbb{P}'$  uma região fundamental para  $\Gamma$ , então uma superfície compacta  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é um espaço de identificação desse polígono, onde  $\mathbb{H}^2$  é o semiplano superior. O teorema a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para um polígono ser uma região fundamental.

**Teorema 1.19.** *(Condição de lado e ângulo) Se um polígono compacto  $\mathbb{P}'$  é região fundamental para um grupo de isometrias que preservam a orientação  $\Gamma$  de  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ , então*

- (i) *Para cada lado  $s$  de  $\mathbb{P}'$  existe um único lado  $s'$  de  $\mathbb{P}'$  tal que  $s' = \gamma(s)$ , para  $\gamma \in \Gamma$ ;*
- (ii) *Dado um emparelhamento de lados de  $\mathbb{P}'$ , para cada conjunto de vértices identificados, a soma dos ângulos deve ser igual a  $2\pi$ . Esse conjunto é um ciclo de vértices.*

**Teorema 1.20.** *(Poincaré) Um polígono compacto  $\mathbb{P}'$  satisfazendo as condições de lado e ângulo é uma região fundamental para o grupo  $\Gamma$  gerado pelas transformações de emparelhamento de lados de  $\mathbb{P}'$ , e  $\Gamma$  é grupo Fuchsiano.*

Para maiores informações sobre geometria hiperbólica recomendamos [4], [7], [45], [66] e [70].

## 1.4 Tesselações

**Definição 1.21.** *Dado um grupo Fuchsiano  $\Gamma$ , uma região fundamental para este é um subconjunto aberto  $F \subset \mathbb{D}$ , que possui as seguintes propriedades:*

i.  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{F}) = \mathbb{D};$

ii. *As imagens de  $F$  via elementos de  $\Gamma$  são duas a duas disjuntas.*

A família  $\{\gamma(F); \gamma \in \Gamma\}$  é chamada uma tesselação de  $\mathbb{D}$ . A tesselação é dita regular se  $F$  é um polígono regular.

**Definição 1.22.** *Seja  $v$  um vértice de uma tesselação. A quantidade de polígonos em que  $v$  pertence é chamada de valência de  $v$ .*

**Definição 1.23.** *Uma tesselação regular é uma cobertura de todo plano ou superfície por polígonos regulares, todos com o mesmo número de lados, sem sobreposições de tais polígonos, os quais se encontram somente ao longo de arestas completas ou em vértices. Uma tesselação regular é denotada por  $\{p, q\}$ , onde  $q$  polígonos regulares com  $p$  lados encontram-se em cada vértice.*

A definição de tesselação semirregular é análoga a tesselação regular, com a diferença de que os números de lados dos polígonos não precisam ser iguais. Denotamos uma tesselação semirregular gerada por  $t$   $p_i$ -gon, onde  $p_i$  é a quantidade de lados de cada polígono por  $\{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ , o que significa que em cada vértice  $v$  temos essa sequência de polígonos no sentido horário ou anti-horário.

**Definição 1.24.** *(Característica de Euler) Dada uma tesselação qualquer em uma superfície compacta sem bordo  $\mathbb{M}$ , considere  $V$ ,  $E$  e  $F$  o número de vértices, arestas e faces, respectivamente. A característica de Euler é definida como a quantidade*

$$\chi := V - E + F. \quad (1.15)$$

Temos também que se  $\mathbb{M}$  é uma superfície compacta orientável de gênero  $g$ , então

$$\chi(\mathbb{M}) = 2(1 - g). \quad (1.16)$$

Já se  $\mathbb{M}$  é uma superfície compacta não-orientável, então

$$\chi(\mathbb{M}) = 2 - g. \quad (1.17)$$

**Definição 1.25.** *O incentro de um polígono  $\mathbb{P}$  é o centro da circunferência inscrita a este, caso exista. Já o apótema de um polígono regular é o comprimento do raio da circunferência nele inscrita.*

O teorema a seguir, o qual foi adaptado de [7] nos diz quando existe uma circunferência inscrita no polígono  $\mathbb{P}$ .

**Teorema 1.26.** *Sejam  $\theta_1, \dots, \theta_t$  números reais, tais que  $0 \leq \theta_j < \pi$ , para cada  $j = 1, \dots, t$ . Existe um polígono hiperbólico  $\mathbb{P}$ , cujos ângulos internos medem, nesta ordem e a menos de uma permutação cíclica,  $\theta_1, \dots, \theta_t$  se, e somente se,  $\sum_j \theta_j < (t - 2)\pi$ . Nestas condições existe uma circunferência inscrita no polígono  $\mathbb{P}$ .*

A tesselação dual de uma tesselação é a tesselação obtida ligando os incentros dos polígonos adjacentes dessa tesselação. Assim, cada incentro do polígono da tesselação será um vértice da tesselação dual. Cada segmento de geodésica conectando dois incentros de dois polígonos adjacentes será uma aresta da tesselação dual.

Considere uma tesselação regular  $\{p, q\}$ . O ângulo interno de um  $p$ -gon em um vértice mede  $\frac{2\pi}{p}$ . Dividindo o polígono em  $p$  triângulos segue que o ângulo que está no centro do polígono mede  $\frac{2\pi}{p}$ , enquanto os demais ângulos do triângulo medem  $\frac{\pi}{q}$ . Para o caso euclidiano deverá ser satisfeita a equação

$$(p - 2)(q - 2) = 4, \quad (1.18)$$

o que só é verdade para três casos, a saber,  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 4\}$  e  $\{6, 3\}$ . Já para o caso hiperbólico existem infinitas possibilidades. O teorema a seguir nos garante isso.

**Teorema 1.27.** *Existe uma tesselação do plano hiperbólico por  $p$ -gons hiperbólicos regulares com  $q$  polígonos se encontrando em cada vértice se, e somente se,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}. \quad (1.19)$$

O próximo teorema que pode ser visto em [32], nos garante quando que existe uma tesselação de uma superfície  $\mathbb{M}$ .

**Teorema 1.28.** *Seja  $\mathbb{M}$  uma superfície fechada e sejam  $p, q, V, E$  e  $F$  inteiros positivos tais que*

$$V - E + F = \chi(\mathbb{M}), \quad (1.20)$$

$$pF = 2E = qV. \quad (1.21)$$

*Então os seguintes itens são satisfeitos:*

- (*Existência*): Existe um  $\{p, q\}$ -padrão em  $\mathbb{M}$  consistindo de  $F$  faces de  $p$  lados,  $E$  arestas e  $V$  vértices cada um com valência  $q$ ; exceto quando  $\mathbb{M}$  é o plano projetivo,  $\{p, q\} = \{3, 3\}$ ,  $V = F = 2$ , e  $E = 3$ ;
- (*Geometrização*): Um  $\{p, q\}$ -padrão em  $\mathbb{M}$  pode ser realizado geometricamente;
- (*Classificação*): Um  $\{p, q\}$ -padrão na esfera ou no plano projetivo é único. Para todas as outras superfícies  $\mathbb{M}$  os  $\{p, q\}$ -padrões em  $\mathbb{M}$  são classificados por classes de conjugação de subgrupos isomorfos ao grupo fundamental de  $\mathbb{M}$  nos grupos de Schwarz estendidos  $(p, q, 2)$ -triângulo.

**Definição 1.29.** Dizemos que uma tesselação é trivalente quando em cada vértice da tesselação encontram-se exatamente 3 arestas. E, a tesselação é dita ser 3-colorível quando é possível colorir todas as faces da tesselação usando apenas 3 cores, de forma que as faces vizinhas que compartilham uma mesma aresta (adjacentes) não tenham a mesma cor.

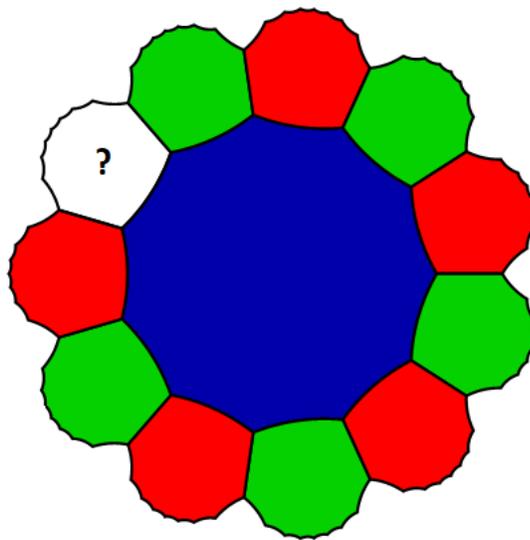


Figura 1.1: Tesselação do plano hiperbólico pelo polígono  $\{11, 3\}$ . É uma tesselação trivalente, mas não é 3-colorível.

**Observação 1.30.** Para que uma tesselação regular seja trivalente ela terá que ser da forma  $\{p, 3\}$ . No caso euclidiano existe somente uma possibilidade que é quando  $p = 6$ , pois deve

satisfazer (1.18). Já no caso hiperbólico deve satisfazer (1.19), logo,  $p > 6$ . Além disso, para que a tesselação seja também 3-colorível devemos ter que  $p$  deve ser par, pois se  $p$  for ímpar essa condição não será satisfeita, como pode ser visto na Figura 1.1.

Considere uma tesselação regular  $\{p, q\}$  do plano hiperbólico, temos que o comprimento de suas arestas podem ser calculados através da trigonometria para triângulos hiperbólicos. Aplicando as relações (1.10) e (1.11) sobre uma face qualquer dessa tesselação temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.31.** *Dada uma tesselação regular  $\{p, q\}$  do plano hiperbólico, onde  $l_{p,q}$  é o comprimento de aresta,  $a_{p,q}$  e  $r_{p,q}$  são comprimentos dos raios das circunferências inscrita e circunscrita a uma de suas faces, respectivamente, são válidas as seguintes relações:*

$$l_{p,q} = 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos \left( \frac{\pi}{p} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{q} \right)} \right]; \quad (1.22)$$

$$a_{p,q} = \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos \left( \frac{\pi}{q} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{p} \right)} \right]; \quad (1.23)$$

$$r_{p,q} = \operatorname{arccosh} \left[ \cot \left( \frac{\pi}{p} \right) \cot \left( \frac{\pi}{q} \right) \right]. \quad (1.24)$$

Já para uma tesselação semirregular da forma  $\{m_1, m_2, m_3\}$  temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.32.** *Em uma tesselação hiperbólica semirregular  $\{m_1, m_2, m_3\}$ , se  $L$  é o comprimento da aresta,  $a_i$  é o comprimento hiperbólico do apótema de cada  $m_i$ -gon,  $r_i$  é o comprimento hiperbólico do raio da circunferência circunscrita a cada  $m_i$ -gon e se  $A_i$  é a distância hiperbólica entre os incentros de um  $m_i$ -gon e um  $m_{i+1}$ -gon adjacentes, então*

$$A_i = \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos \left( \frac{2\pi}{m_i} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{m_{i+1}} \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{m_{i+2}} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{m_i} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{m_{i+1}} \right)} \right] \quad (1.25)$$

$$a_i = \frac{A_i - A_{i+1} + A_{i+2}}{2} \quad (1.26)$$

$$r_i = \operatorname{arctanh} \left[ \tanh(a_i) \sec \left( \frac{\pi}{m_i} \right) \right] \quad (1.27)$$

$$L = 2 \operatorname{arctanh} \left[ \operatorname{senh}(a_i) \tan \left( \frac{\pi}{m_i} \right) \right] \quad (1.28)$$

onde as operações com índices são realizadas módulo 3.

### Tesselações semirregulares derivadas das tesselações regulares $\{p, q\}$

Descreveremos três processos onde partimos da existência de uma tesselação regular  $\{p, q\}$  na superfície  $\mathbb{M}$  e obtemos uma tesselação semirregular. Esses processos são chamados de derivação por ponto médio, derivação por clipping e derivação pelo incentro.

**Processo de Derivação por Ponto Médio:** Dada uma tesselação regular  $\{p, q\}$  em uma superfície  $\mathbb{M}$ , tomamos os pontos médios de todas as suas arestas e conectamos os pontos médios de todos os pares de arestas adjacentes, como pode ser visto na Figura 1.2<sup>1</sup>. O  $p$ -gon continuará sendo um  $p$ -gon e em cada vértice da tesselação regular  $\{p, q\}$  obtemos um  $q$ -gon. Logo, temos a tesselação  $\{p, q, p, q\}$ . Observe que a quantidade de faces de  $\{p, q, p, q\}$  será a quantidade de faces mais a quantidade de vértices da tesselação  $\{p, q\}$ . A quantidade de vértices da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  será igual a quantidade de arestas de  $\{p, q\}$ . Já a quantidade de arestas de  $\{p, q, p, q\}$  será igual a quantidade de faces de  $\{p, q\}$  vezes o seu número de lados, ou seja,  $p$ .

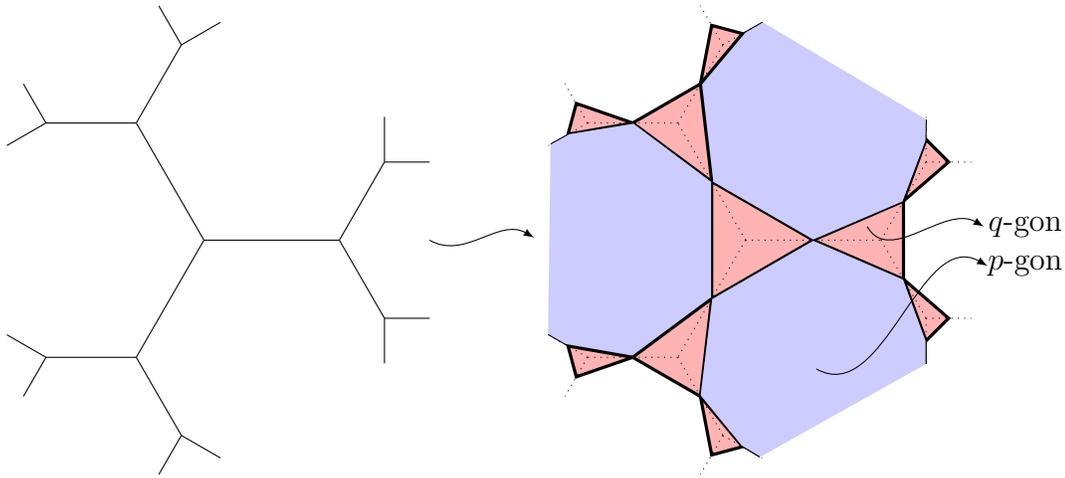


Figura 1.2: A tesselação derivada por ponto médio de  $\{p, q\}$  é a tesselação  $\{p, q, p, q\}$ .

Sejam  $L$  e  $l$  o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  e de uma aresta de  $\{p, q\}$ , respectivamente. Temos que  $l$  é dado em (1.22). Utilizando a lei dos senos no triângulo dado na Figura 1.3-(b), temos que

$$L = 2 \operatorname{arcsenh} \left[ \operatorname{senh} \left( \frac{l}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{q} \right) \right]. \quad (1.29)$$

<sup>1</sup>Figura retirada de [24].

Perceba pela Figura 1.3-(a) que o dual da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  é formado por quadriláteros, onde os seus lados tem todos o mesmo tamanho e são dados pelo raio da circunferência circunscrita no  $p$ -gon da tesselação regular  $\{p, q\}$ , o qual é dado por (1.24).

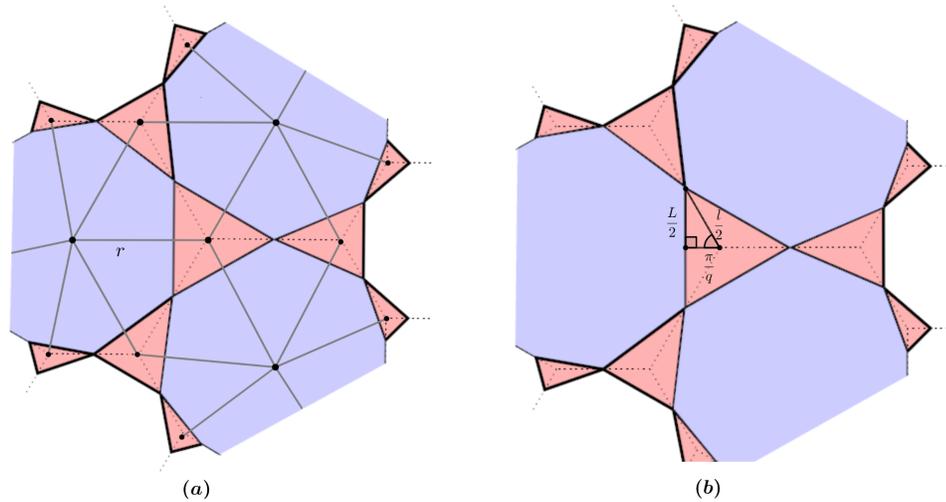


Figura 1.3: (a) Arestas cinzas formam a tesselação dual de  $\{p, q, p, q\}$ . (b) Triângulo utilizado para determinar o valor de  $L$ .

**Processo de Derivação por Clipping:** Dada uma tesselação regular  $\{p, q\}$  em uma superfície  $\mathbb{M}$ , “cortamos” a região próxima do vértice de cada  $p$ -gon, de forma que seja criado um  $2p$ -gon no lugar de cada  $p$ -gon e seja criado um  $q$ -gon em cada vértice da tesselação regular  $\{p, q\}$ , como pode ser visto na Figura 1.4<sup>2</sup>. Obtemos assim uma tesselação semirregular da forma  $\{2p, 2p, q\}$ . Observe que a quantidade de faces de  $\{2p, 2p, q\}$  será a quantidade de faces mais a quantidade de vértices da tesselação  $\{p, q\}$ . A quantidade de vértices da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  será igual ao dobro da quantidade de arestas de  $\{p, q\}$ . Já a quantidade de arestas de  $\{2p, 2p, q\}$  será igual a quantidade de arestas de  $\{p, q\}$ , mais a quantidade de  $q$ -gons (vértices de  $\{p, q\}$ ) vezes o seu número de lados, ou seja,  $q$ .

Sejam  $L$  o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  e  $a$  o apótema de um  $p$ -gon da tesselação  $\{p, q\}$ . Temos que  $a$  é dado por (1.23). Utilizando a relação (1.7) no triângulo dado na Figura 1.5-(b), temos que

$$L = 2 \operatorname{arctanh} \left[ \sinh(a) \tan \left( \frac{\pi}{2p} \right) \right]. \quad (1.30)$$

<sup>2</sup>Figura retirada de [24].

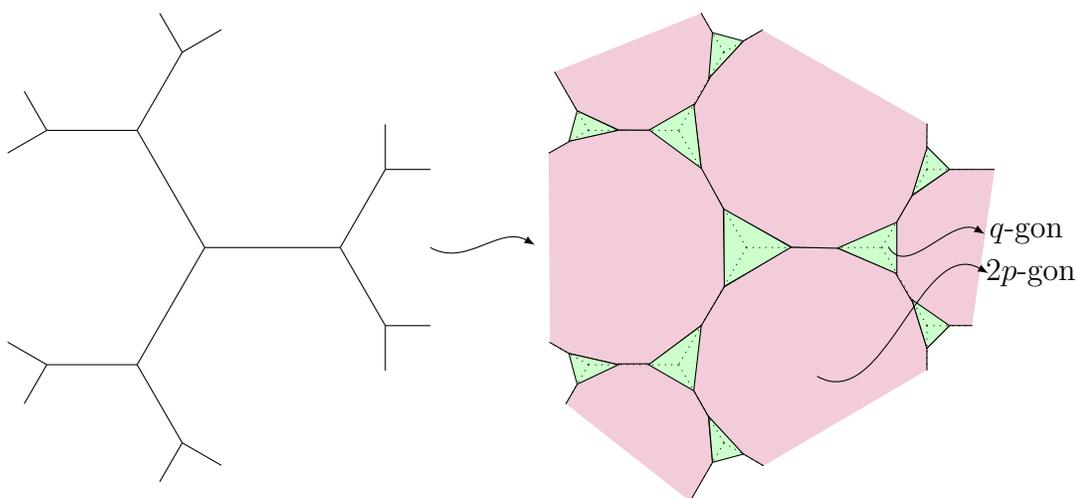


Figura 1.4: A tesselação derivada por clipping de  $\{p, q\}$  é a tesselação semirregular  $2p, 2p, q$ .

Perceba pela Figura 1.5-(a) que o dual da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  é formado por triângulos isósceles, onde essas arestas são iguais a duas vezes o apótema e ao raio da circunferência circunscrita em um  $p$ -gon da tesselação  $\{p, q\}$ , os quais são obtidos pela Proposição 1.31.

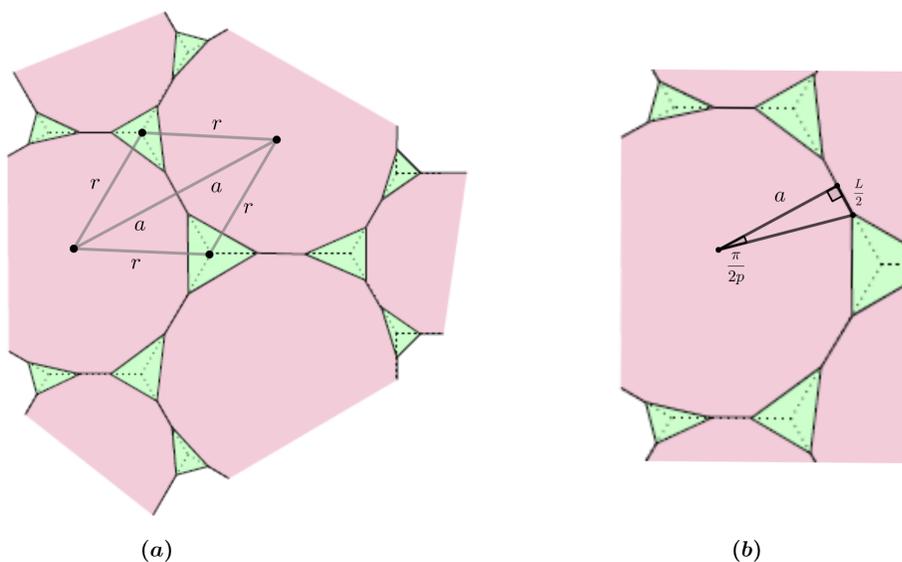


Figura 1.5: (a) Arestas cinzas formam a tesselação dual de  $\{2p, 2p, q\}$ . (b) Triângulo utilizado para determinar o valor de  $L$ .

**Processo de Derivação pelo Incentro:** Dada uma tesselação regular  $\{p, q\}$  em uma superfície  $\mathbb{M}$ , traçamos os raios das circunferências inscritas e circunscritas à cada face, respectivamente. Com isso, obtemos  $2p$  triângulos em cada  $p$ -gon. Em seguida traçamos

os segmentos de geodésica entre o incentro de todos os pares de triângulos com arestas em comum, e descartamos as arestas da tesselação original e as arestas dos triângulos retângulos, como pode ser visto na Figura 1.6<sup>3</sup>. Obtemos assim a tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 4\}$ . Observe que a quantidade de faces de  $\{2p, 2q, 4\}$  será a soma da quantidade de faces, arestas e vértices da tesselação  $\{p, q\}$ . A quantidade de vértices da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  será igual a quatro vezes a quantidade de arestas de  $\{p, q\}$ . Já a quantidade de arestas de  $\{2p, 2q, 4\}$  será igual a seis vezes a quantidade de arestas de  $\{p, q\}$ .

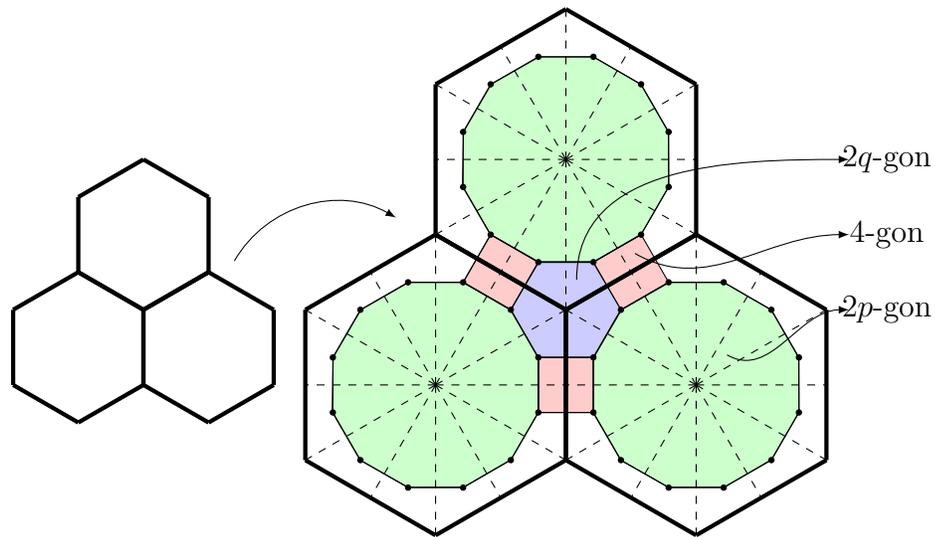


Figura 1.6: A tesselação derivada por incentro de  $\{p, q\}$  é a tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 4\}$ .

Seja  $L$  o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$ . Perceba que  $L$  é igual ao dobro do raio do círculo inscrito no triângulo formado pelas arestas tracejadas da Figura 1.6, o qual pode ser calculado pelo Lema 1.16. Logo,

$$L = 2 \operatorname{arctanh} \left[ \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - 1}{2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}} \right]. \quad (1.31)$$

Perceba também pela Figura 1.6 que o dual da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  é formado por triângulos retângulos, onde o comprimento dessas arestas são dados pelo apótema, pela metade do comprimento de uma aresta e pelo raio da circunferência circunscrita em um  $p$ -gon de  $\{p, q\}$ , os quais são obtidos pela Proposição 1.31.

<sup>3</sup>Figura retirada de [24].

---

# Códigos Quânticos Corretores de Erros

---

Neste capítulo abordaremos vários códigos quânticos corretores de erros que são de suma importância para o entendimento dos nossos códigos, os quais serão apresentados nos capítulos 4 e 6. Embora o assunto de correção de erro seja de extrema importância para os códigos, não trataremos desse assunto neste trabalho, pois nosso objetivo é realizar a construção dos códigos. Para detalhes sobre correção de erro recomendamos [28], [37], [52] e [56].

O primeiro código quântico corretor de erro que surgiu foi o código bit-flip de três qubits, o qual foi baseado no código clássico conhecido como código de repetição, que pode ser visto em [43]. Em seguida veio o código phase-shift, o qual não possui equivalente nos códigos clássicos, mas para proteger, identificar e corrigir erros é transformado no código bit-flip. Na sequência Peter Shor em 1995, criou o código de Shor [61], o qual é uma combinação dos dois códigos anteriores. Em 1996, foram desenvolvidos por Calderbank e Shor [22] e Steane [65] os códigos Calderbank-Shor-Steane, conhecidos como códigos CSS, os quais são construídos a partir dos códigos clássicos lineares. Não abordaremos esses códigos que acabamos de citar em nosso trabalho, para ver sobre a construção dos mesmos, além das literaturas já citadas, recomendamos [21], [56] e [62].

Os códigos quânticos corretores de erros que veremos aqui são todos códigos estabilizadores, por isso daremos maior profundidade em sua abordagem. Dentro dos códigos estabilizadores encontram-se os códigos topológicos, como por exemplo, os códigos de superfície e os códigos coloridos, os quais também veremos neste capítulo.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira. Na seção 2.1, abordaremos os principais

aspectos dos códigos estabilizadores. Em seguida, na seção 2.2, apresentaremos os códigos quânticos topológicos, onde abordaremos os códigos de superfície. Já na seção 2.3, veremos os códigos quânticos coloridos em superfícies compactas orientáveis. Na seção 2.4, abordaremos os códigos de superfície e coloridos em superfícies compactas não-orientáveis. Por fim, apresentamos na seção 2.5, os códigos de superfície e coloridos em superfícies compactas orientáveis sobre tesselações semirregulares.

## 2.1 Códigos Estabilizadores

Os códigos estabilizadores foram desenvolvidos por Gottesman em 1996 [38] e unificou em uma única classe boa parte dos códigos quânticos. Para realizar a construção dos códigos estabilizadores faremos uso de alguns conceitos básicos de teoria de grupos, como por exemplo, o conceito de grupo e subgrupo. Para ver esses e mais conceitos de teoria de grupos recomendamos [9], [31] e para um estudo mais aprofundado sobre os códigos estabilizadores sugerimos ao leitor as referências [23], [39] e [56].

Iniciaremos esta seção definindo operador estabilizador e grupo estabilizador, que são duas definições muito importantes para a sequência do nosso trabalho.

**Definição 2.1.** *Sejam  $|\psi\rangle$  um estado qualquer e  $P$  um operador qualquer que age em  $|\psi\rangle$ . Dizemos que  $|\psi\rangle$  é estabilizado pelo operador  $P$  se  $P|\psi\rangle = |\psi\rangle$ . Chamamos  $P$  de estabilizador.*

**Exemplo 2.2.** *Considere  $|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$  um estado de dois qubits. Note que*

$$X_1 X_2 |\psi\rangle = X_1 X_2 \left( \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{|11\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\psi\rangle$$

e

$$Z_1 Z_2 |\psi\rangle = Z_1 Z_2 \left( \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{|00\rangle - (-|11\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\psi\rangle.$$

*Assim,  $|\psi\rangle$  é estabilizado pelos operadores  $X_1 X_2$  e  $Z_1 Z_2$ .*

**Definição 2.3.** *Sejam  $\mathbf{S}$  um subgrupo do grupo de Pauli  $P_n$  e  $V_{\mathbf{S}}$  o conjunto de todos os estados de  $n$  qubits que são estabilizados por todos os elementos de  $\mathbf{S}$ . Chamamos  $V_{\mathbf{S}}$  de espaço vetorial estabilizado por  $\mathbf{S}$  e chamamos  $\mathbf{S}$  de estabilizador (ou grupo estabilizador) do espaço  $V_{\mathbf{S}}$ .*

**Exemplo 2.4.** Seja  $\mathbf{S} = \{I, Z_1Z_2, Z_2Z_3, Z_1Z_3\}$  um subgrupo de  $P_3$ . Como  $(Z_1Z_2)^2 = I$  e  $(Z_1Z_2)(Z_2Z_3) = Z_1Z_3$ , temos que  $\mathbf{S} = \langle Z_1Z_2, Z_2Z_3 \rangle$ , ou seja,  $\mathbf{S}$  é gerado por  $Z_1Z_2$  e  $Z_2Z_3$ . Para determinarmos  $V_{\mathbf{S}}$ , basta determinarmos os estados que são estabilizados pelos geradores de  $\mathbf{S}$ . Veja que  $Z_1Z_2$  estabiliza o subespaço gerado pelos estados  $|000\rangle, |001\rangle, |110\rangle$  e  $|111\rangle$ , e  $Z_2Z_3$  estabiliza o subespaço gerado pelos estados  $|000\rangle, |100\rangle, |011\rangle$  e  $|111\rangle$ . Observe que os estados  $|000\rangle$  e  $|111\rangle$  são comuns a ambos os geradores. Portanto, temos que  $V_{\mathbf{S}} = \langle |000\rangle, |111\rangle \rangle$ . Os estados  $|000\rangle$  e  $|111\rangle$  são chamados de estados lógicos e são denotados por  $|0_L\rangle = |000\rangle$  e  $|1_L\rangle = |111\rangle$ .

**Observação 2.5.** Exigimos que  $-I \notin \mathbf{S}$ , pois caso contrário  $V_{\mathbf{S}}$  será o espaço vetorial nulo. De fato, se  $-I \in \mathbf{S}$ , então dado um estado qualquer  $|\psi\rangle$ , temos que  $-I|\psi\rangle = |\psi\rangle \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$ . Portanto,  $V_{\mathbf{S}}$  será o espaço vetorial nulo. Assim, para qualquer grupo estabilizador  $\mathbf{S}$ , teremos que  $-I \notin \mathbf{S}$ , o que implica também que  $\pm iI \notin \mathbf{S}$ .

**Proposição 2.6.** Seja  $\mathbf{S}$  o estabilizador do espaço  $V_{\mathbf{S}}$ . Se  $V_{\mathbf{S}}$  é não-trivial, então:

- (i) Os elementos de  $\mathbf{S}$  comutam;
- (ii)  $-I$  não é um elemento de  $\mathbf{S}$ .

Nosso objetivo é que os geradores  $S_1, \dots, S_l$  de  $\mathbf{S}$  sejam independentes, isto é, se tirarmos qualquer um dos geradores  $S_i$ , o grupo  $\mathbf{S}$  gerado se tornará menor.

Um resultado que nos garante quando esses geradores são independentes faz uso do conceito de matriz de verificação, o qual definiremos agora.

**Definição 2.7.** Seja  $\mathbf{S} = \langle S_1, \dots, S_l \rangle$  um subgrupo de  $P_n$ . Considere uma matriz de ordem  $l \times 2n$ , onde cada linha corresponde a um dos geradores de  $\mathbf{S}$ . Essa correspondência é dada da seguinte forma: as primeiras  $n$  entradas de cada linha terão 1 na posição onde temos um operador  $X$  no gerador e as  $n$  últimas entradas de cada linha terão 1 na posição onde temos um operador  $Z$  no gerador. Se tivermos um 1 nas  $n$  primeiras e nas  $n$  últimas entradas, na mesma posição, então quer dizer que temos um operador  $Y$  no gerador. Essa matriz é chamada de matriz de verificação.

**Proposição 2.8.** *Seja  $\mathbf{S} = \langle S_1, \dots, S_l \rangle$  tal que  $-I \notin \mathbf{S}$ . Os geradores  $S_1, \dots, S_l$  são independentes se, e somente se, as linhas da matriz de verificação correspondente são linearmente independentes.*

**Proposição 2.9.** *Seja  $\mathbf{S} = \langle S_1, \dots, S_{n-k} \rangle$  gerado por  $s = n - k$  geradores independentes e que comutam entre si tal que  $-I \notin \mathbf{S}$ . Então  $V_{\mathbf{S}}$  é um espaço vetorial de dimensão  $2^k$ .*

A demonstração de ambas Proposições podem ser vistas em [56].

Vamos definir agora o código estabilizador.

**Definição 2.10.** *Sejam  $n$  a quantidade de qubits físicos e  $k$  a quantidade de qubits codificados. Um código estabilizador  $[n, k]$  é definido como sendo o espaço vetorial  $V_{\mathbf{S}}$  estabilizado por um subgrupo  $\mathbf{S}$  de  $P_n$  tal que  $-I \notin \mathbf{S}$  e  $\mathbf{S}$  possui  $s = n - k$  geradores independentes e que comutam, ou seja,  $\mathbf{S} = \langle S_1, \dots, S_{n-k} \rangle$  é abeliano. Denotamos esse código por  $\mathbf{C}(\mathbf{S})$  ou simplesmente por  $\mathbf{C}$ .*

No exemplo 2.4 temos um código estabilizador  $[3, 1]$ , onde  $\mathbf{C}$  é gerado por  $|0_L\rangle = |000\rangle$  e  $|1_L\rangle = |111\rangle$ .

Seja  $\mathbf{C}$  um código estabilizador. Vamos analisar agora os tipos de erros que podem ocorrer no código. Para isso, considere  $\mathbf{E} \in P_n$  um elemento qualquer do grupo de Pauli. Temos três possibilidades para  $\mathbf{E} \in P_n$  que são:

- (i)  $\mathbf{E} \in \mathbf{S}$ ;
- (ii)  $\mathbf{E} \notin \mathbf{S}$  e  $\mathbf{E}$  anticomuta com algum elemento de  $\mathbf{S}$ ;
- (iii)  $\mathbf{E} \notin \mathbf{S}$  e  $\mathbf{E}$  comuta com todos os elementos de  $\mathbf{S}$ .

Se  $\mathbf{E} \in \mathbf{S}$  então  $\mathbf{E}$  é um produto de geradores estabilizadores. Assim,  $\mathbf{E}$  age de maneira trivial em  $\mathbf{C}$ , levando cada estado  $|\psi\rangle \in \mathbf{C}$  nele mesmo, ou seja,  $\mathbf{E}$  não irá corromper o código. Desse modo, não precisamos nos preocupar com esses elementos, os quais nem mesmo devem ser chamados de erros.

Se  $\mathbf{E} \notin \mathbf{S}$  e  $\mathbf{E}$  anticomuta com algum elemento  $S_t$  do estabilizador, então  $\mathbf{E}$  leva  $\mathbf{C}$  para um subespaço ortogonal. De fato, sejam  $|\psi_i\rangle, |\psi_j\rangle \in \mathbf{C}$  elementos da base do espaço código.

Como  $\mathbf{E}$  anticomuta com  $S_t$  então

$$S_t \mathbf{E} |\psi_i\rangle = -\mathbf{E} S_t |\psi_i\rangle = -\mathbf{E} |\psi_i\rangle.$$

Logo,  $\langle \psi_j | \mathbf{E} |\psi_i\rangle = -\langle \psi_j | \mathbf{E} |\psi_i\rangle$  e, assim,  $\langle \psi_j | \mathbf{E} |\psi_i\rangle = 0$ . Portanto,  $\mathbf{E}$  leva  $\mathbf{C}$  para um subespaço ortogonal.

Esse tipo de erro pode ser detectado e possivelmente corrigido realizando uma medição projetiva apropriada. Para entender sobre medição projetiva recomendamos ao leitor [56].

Existe um teorema que nos diz quando um conjunto de erros pode ser corrigível. Antes de enunciá-lo vamos definir centralizador e normalizador de um subgrupo  $G$  de  $P_n$ .

**Definição 2.11.** *Seja  $G$  um subgrupo de  $P_n$ . O conjunto formado por todos os elementos  $P \in P_n$  tal que  $Pg = gP$  para todo  $g \in G$ , é chamado de centralizador de  $G$  em  $P_n$  e denotado por  $C(G)$ . E, o conjunto formado por todos os elementos  $P \in P_n$  tal que  $PgP^\dagger \in G$  para todo  $g \in G$ , é chamado de normalizador de  $G$  e denotado por  $N(G)$ .*

**Observação 2.12.** *Se  $-I \notin G$ , onde  $G$  é subgrupo de  $P_n$ , então  $N(G) = C(G)$ . Assim, como  $-I \notin \mathbf{S}$  temos que o normalizador e o centralizador do grupo estabilizador são iguais, isto é,  $N(\mathbf{S}) = C(\mathbf{S})$ .*

**Teorema 2.13. (Condições de correção de erros para códigos estabilizadores):** *Seja  $\mathbf{S}$  o estabilizador para um código estabilizador  $\mathbf{C}$ . Suponha que  $\{\mathbf{E}_i\}$  é um conjunto de operadores em  $P_n$  tal que  $\mathbf{E}_j^\dagger \mathbf{E}_l \notin N(\mathbf{S}) \setminus \mathbf{S}$  para todo  $j$  e  $l$ . Então  $\{\mathbf{E}_i\}$  é um conjunto de erros corrigíveis para o código  $\mathbf{C}$ .*

A demonstração desse teorema pode ser visto em [56].

Os erros que são realmente perigosos, ou seja, que corrompem o estado quântico são os erros  $\mathbf{E} \notin \mathbf{S}$  tais que  $\mathbf{E}$  comuta com todos os elementos de  $\mathbf{S}$ , isto é,  $\mathbf{E} \in N(\mathbf{S}) \setminus \mathbf{S}$ . Nesse caso,  $\mathbf{E}$  leva o espaço código nele mesmo, porém leva pelo menos um estado de  $\mathbf{C}$  em outro estado. De fato, sejam  $S \in \mathbf{S}$  um estabilizador qualquer e  $|\psi\rangle \in \mathbf{C}$  um estado qualquer, então

$$\mathbf{S}\mathbf{E}|\psi\rangle = \mathbf{E}\mathbf{S}|\psi\rangle = \mathbf{E}|\psi\rangle,$$

assim,  $\mathbf{E}|\psi\rangle \in \mathbf{C}$ , pois ele é estabilizado por  $\mathbf{S}$ . Como  $\mathbf{E} \notin \mathbf{S}$  então existe algum estado de  $\mathbf{C}$  que não é estabilizado por  $\mathbf{E}$ . A menos que difira de um elemento de  $\mathbf{S}$  por um fator fase,

**E** será indetectável para este código. Para mais informações sobre erros, recomendamos [6], [38], [39] e [56].

Os elementos  $\mathbf{E} \in N(\mathbf{S}) \setminus \mathbf{S}$  são chamados de operadores lógicos (ou operadores codificados). Para entender um pouco mais sobre esses operadores considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.14.** *Seja  $\mathbf{S}$  o grupo estabilizador dado no exemplo 2.4. Os elementos de  $N(\mathbf{S}) \setminus \mathbf{S}$  são  $i^j \times \{XXX, YYY, YXY, XYY, ZII, IZI, IIZ, ZZZ, YYY, XXY, XYX, YXX\}$ . Se tomarmos o grupo gerado pelos operadores  $XXX$  e  $ZII$ , cada elemento de  $N(\mathbf{S}) \setminus \mathbf{S}$  é igual a um elemento desse grupo vezes um elemento do grupo estabilizador.*

*Como vimos no exemplo 2.4 o espaço estabilizado por  $\mathbf{S}$ , ou seja, o espaço código  $\mathbf{C}$  é gerado pelos estados lógicos  $|0_L\rangle = |000\rangle$  e  $|1_L\rangle = |111\rangle$ . Perceba que  $XXX|0_L\rangle = |1_L\rangle$ ,  $XXX|1_L\rangle = |0_L\rangle$  e  $ZII|0_L\rangle = |0_L\rangle$ ,  $ZII|1_L\rangle = -|1_L\rangle$ . Logo,  $XXX$  e  $ZII$  agem como um operador do tipo  $X$  e do tipo  $Z$  no subespaço  $\mathbf{C}$ , respectivamente. Ambos operadores preservam o espaço código. Como todos os outros elementos do normalizador são estabilizadores, eles também preservam o espaço código.*

Seguindo a ideia do exemplo anterior, podemos definir o grupo quociente  $N(\mathbf{S})/\mathbf{S}$ , ou seja, o quociente do grupo normalizador pelo estabilizador, o que faz sentido pois  $\mathbf{S}$  é subgrupo normal de  $N(\mathbf{S})$ .

Em [30] é provado que  $N(\mathbf{S})/\mathbf{S} \simeq P_k$ , ou seja,  $N(\mathbf{S})/\mathbf{S}$  é isomorfo ao grupo de Pauli  $P_k$  de tamanho  $k = n - s$ , onde  $s$  é a quantidade de geradores estabilizadores independentes, logo  $|N(\mathbf{S})/\mathbf{S}| = |P_k| = 2^{2k+2}$ . Assim, existe uma bijeção entre os operadores lógicos e os cosets de  $N(\mathbf{S})/\mathbf{S}$ . Pode-se mostrar também, que  $N(\mathbf{S})/\mathbf{S}$  pode ser gerado por  $2k$  classes de equivalência de operadores lógicos independentes do tipo  $X$  e do tipo  $Z$  juntamente com  $i$ , que normalmente é ignorado, ou seja,

$$N(\mathbf{S})/\mathbf{S} = \langle \mathbf{S}, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_k, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \dots, \overline{Z}_k \rangle,$$

onde os  $2k$  representantes não-triviais para  $N(\mathbf{S})/\mathbf{S}$  são os operadores lógicos independentes.

Salientamos também que o conjunto de operadores lógicos  $\{\overline{X}_i, \overline{Z}_j, i, j = 1, \dots, k\}$  não é único e seus elementos satisfazem  $\overline{X}_i \overline{X}_j = \overline{X}_j \overline{X}_i$  e  $\overline{Z}_i \overline{Z}_j = \overline{Z}_j \overline{Z}_i$  para qualquer  $i, j = 1, \dots, k$ . Também,  $\overline{X}_i \overline{Z}_j = \overline{Z}_j \overline{X}_i$ , para  $i \neq j$  e  $\overline{X}_i \overline{Z}_j = -\overline{Z}_j \overline{X}_i$  para  $i = j$ .

Para mais informações sobre operadores lógicos recomendamos [6], [39] e [71].

Uma das importâncias dos operadores lógicos é que a distância dos códigos quânticos é definido pelos elementos desse grupo.

**Definição 2.15.** *Seja  $P \in P_n$ . Chamamos o número de termos no produto tensorial que são diferentes da identidade de peso do operador  $P$ .*

**Definição 2.16.** *O peso mínimo de um elemento de  $N(\mathbf{S}) \setminus \mathbf{S}$  é chamado de distância do código estabilizador  $\mathbf{C}$  e denotado por  $d$ . Logo  $\mathbf{C}$  é um código estabilizador  $[n, k, d]$ , onde  $n$  é a quantidade de qubits físicos,  $k$  é a quantidade de qubits codificados e  $d$  é a distância do código.*

A distância é uma medida muito importante para um código, pois ela diz o quão bom é o código quântico. Quanto maior for a distância, melhor será o código no sentido da correção de erros. O próximo resultado que pode ser visto em [50] é que nos garante isso.

**Lema 2.17.** *Qualquer erro com peso estritamente menor que a metade da distância de um código pode ser corrigido.*

## 2.2 Códigos Quânticos Topológicos

Nesta seção apresentamos alguns códigos quânticos conhecidos como códigos quânticos topológicos. Todos os códigos que veremos daqui para frente neste capítulo e no capítulo 4, fazem parte dessa classe de códigos. Conforme [12], esses códigos surgiram a partir do código tórico de Kitaev, o qual foi desenvolvido por Kitaev em 1997 [47]. Hoje, o código tórico de Kitaev é o exemplo mais simples de um código topológico chamado de código de superfície, que faremos a construção nesta seção. Todos os geradores estabilizadores de um código quântico topológico agem somente em uma pequena quantidade de qubits próximos. Códigos com essa propriedade são conhecidos como códigos locais.

Nos códigos topológicos que veremos neste trabalho, os qubits são fixados em tesselações bidimensionais, as quais são mergulhadas em alguma superfície compacta orientável ou não-orientável  $\mathbb{M}$ , como por exemplo, o  $g$ -toro, onde  $g$  é o gênero da superfície. A topologia dessas superfícies será de extrema importância para a obtenção dos parâmetros desses códigos.

Existem duas maneiras de abordar os códigos topológicos. A primeira delas é através do primeiro grupo de homologia, o qual é, assim como a característica de Euler, um invariante topológico. A segunda maneira é utilizando o conceito de geradores estabilizadores visto na seção 2.1, pois como já mencionamos, os códigos quânticos topológicos também são códigos estabilizadores.

Aqui iremos utilizar somente a segunda maneira. Para entender sobre a maneira envolvendo o primeiro grupo de homologia recomendamos [12] e [21].

### 2.2.1 Códigos Quânticos de Superfície

O primeiro caso de código quântico topológico que iremos abordar são os códigos quânticos de superfície, que são os exemplos mais básicos de códigos topológicos. Como exemplo, apresentaremos o código tórico de Kitaev. Para maiores informações sobre códigos de superfície recomendamos [26].

Dada uma superfície compacta e orientável  $M$ , fixamos uma tesselação nessa superfície e associamos um qubit a cada aresta dessa tesselação.

Sob essas condições, começaremos definindo dois operadores, um chamado de operador face e outro de operador vértice, os quais são os operadores mais importantes de um código de superfície.

**Definição 2.18.** *Sejam  $f$  uma face e  $v$  um vértice da tesselação fixada em  $M$ . Os operadores de Pauli*

$$X_f := \bigotimes_{e' \in \partial(f)} X_{e'} \quad e \quad Z_v := \bigotimes_{e' \in \partial(v)} Z_{e'}, \quad (2.1)$$

*são chamados de operador face e operador vértice, respectivamente, onde  $e' \in \partial(f)$  significa as arestas na fronteira de  $f$  e  $e' \in \partial(v)$  significa as arestas adjacentes ao vértice  $v$ .*

O operador face  $X_f$  consiste de um produto tensorial do operador de Pauli  $X$  agindo nos qubits que estão nas arestas pertencentes à face  $f$ , com a identidade agindo nos demais qubits, e o operador vértice  $Z_v$  consiste de um produto tensorial do operador de Pauli  $Z$  agindo nos qubits que estão nas arestas adjacentes ao vértice  $v$ , com a identidade agindo nos demais qubits, como pode ser visto na Figura 2.1.

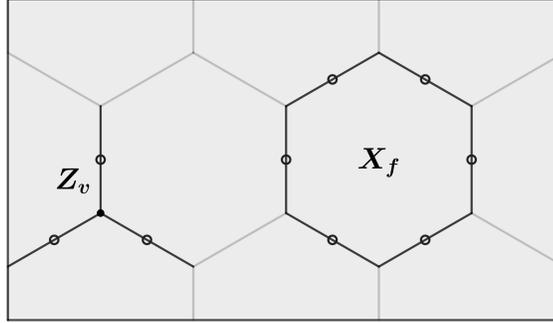


Figura 2.1: Ação do operador face  $X_f$  e do operador vértice  $Z_v$  agindo nos qubits da face  $f$  e nos qubits adjacentes ao vértice  $v$ , respectivamente. Os círculos abertos representam os qubits onde os operadores estão agindo.

Os operadores face e vértice são os operadores mais importantes de um código de superfície, pelo fato de que são os geradores estabilizadores desse código.

Para fazer parte dos geradores estabilizadores precisamos que todos os operadores comutem, o que de fato ocorre aqui, pois os operadores face são todos do tipo  $X$ , logo comutam entre si. Do mesmo modo, os operadores vértice são todos do tipo  $Z$ , logo também comutam entre si. Sabemos que  $X$  e  $Z$  anticomutam, mas  $X_f$  e  $Z_v$  terão nenhuma ou terão duas arestas em comum, portanto, os operadores face e vértice sempre comutarão.

Com isso, o código de superfície é definido da seguinte forma:

**Definição 2.19.** *Seja  $\mathbb{M}$  uma superfície compacta e considere uma tesselação em  $\mathbb{M}$ . O código de superfície  $\mathcal{C}$  é definido por*

$$\mathcal{C} = \{|\psi\rangle; X_f|\psi\rangle = |\psi\rangle, Z_v|\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall f, v\}, \quad (2.2)$$

onde  $X_f$  são os operadores face e  $Z_v$  são os operadores vértice.

Observe que os geradores estabilizadores  $X_f$  e  $Z_v$  não são todos independentes, pois

$$\prod_f X_f = I \quad \text{e} \quad \prod_v Z_v = I. \quad (2.3)$$

Como para cada face e cada vértice temos um gerador estabilizador, segue juntamente com (2.3) que a quantidade de geradores estabilizadores independentes será

$$s = V + F - 2. \quad (2.4)$$

Sabendo que a quantidade de geradores independentes em um código estabilizador  $[n, k]$  é  $s = n - k$ , segue que  $n - k = V + F - 2$ . E, nesse caso, como a quantidade  $n$  de qubits físicos será  $n = E$ , pois temos um qubit em cada aresta da tesselação, seguirá disso, de (1.15) e (1.16) que  $k = 2g$ .

Podemos fazer a mesma construção acima na tesselação dual da tesselação original (tesselação considerada inicialmente). Nesse caso, os operadores face da tesselação dual serão os operadores vértice da tesselação original e os operadores vértice da tesselação dual serão os operadores face da tesselação original.

Outros operadores importantes dos códigos quânticos topológicos são os operadores string, os quais definiremos na sequência.

Embora nossa abordagem aos códigos de superfície se dá através dos estabilizadores, definiremos mesmo assim alguns conceitos de homologia, pois os mesmos vão facilitar a compreensão do conceito de operador string. Para mais detalhes sobre homologia recomendamos [19], [36] e [42].

**Definição 2.20.** *Dada uma tesselação qualquer em uma superfície  $\mathbb{M}$ , chamamos os vértices de 0-cells, as arestas de 1-cells e as faces de 2-cells.*

**Definição 2.21.** *Considere uma tesselação qualquer em uma superfície  $\mathbb{M}$  e  $A_i$  o conjunto de todas as  $i$ -cells, para  $i = 0, 1, 2$ . Para cada  $A \subset A_i$ , definimos como uma  $i$ -cadeia em  $\mathbb{M}$  a soma formal finita*

$$c = \sum_i c_i p_i \text{ tal que } c_i = \begin{cases} 0; & p_i \notin A \\ 1; & p_i \in A \end{cases}.$$

Somando as  $i$ -cadeias, onde essa soma é feita módulo 2, formamos novas  $i$ -cadeias. É possível obter um grupo abeliano aditivo  $C_i$  com essa operação de soma, para  $i = 0, 1, 2$ , onde o elemento neutro corresponde ao conjunto vazio.

A partir desses grupos abelianos introduzimos três homomorfismos de grupos  $\partial_i$  para  $i = 0, 1, 2$ , chamados de operadores bordo, onde

$$\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1, \quad \partial_1 : C_1 \rightarrow C_0 \quad \text{e} \quad \partial_0 : C_0 \rightarrow \{0\}.$$

Esses homomorfismos  $\partial_i$  levam uma  $i$ -cadeia na soma das fronteiras de todas as  $i$ -cells que fazem parte dessa  $i$ -cadeia. Os elementos  $z \in C_1$  tal que  $\partial_1 z = 0$  são chamados de ciclos.

Dado um produto tensorial qualquer dos operadores  $X$  com a identidade  $I$ , temos que esse produto tensorial define uma 1-cadeia. As arestas em que  $X$  age correspondem ao valor 1 e as arestas onde  $I$  age, correspondem ao valor 0. Esse operador comuta com os operadores face  $X_f$ , pelo fato de que os operadores face são produtos tensoriais de  $X$  com a identidade, e comuta com um operador vértice  $Z_v$  se, e somente se, um número par de operadores  $X$  agem nas arestas adjacentes ao vértice  $v$ . Caso ele comute com todos os operadores vértice  $Z_v$ , então essa 1-cadeia é, mais precisamente um ciclo. De modo análogo, um produto tensorial qualquer dos operadores  $Z$  com a identidade  $I$ , comuta com todos os operadores vértice  $Z_v$ , e comuta com um operador face  $X_f$  se, e somente se, um número par de operadores  $Z$  agem nas arestas da face  $f$ . Caso ele comute com todos os operadores face  $X_f$ , então essa 1-cadeia é, mais precisamente, um ciclo na tesselação dual.

**Definição 2.22.** *As 1-cadeias com pontos finais, as que formam um loop e as que são imagem de uma 2-cadeia são chamadas de strings. Em especial, as com pontos finais são chamadas de strings abertas e, as que formam um loop ou são imagem de uma 2-cadeia são chamadas de strings fechadas. Os loops também são chamados de ciclos homologicamente não-triviais.*

Essa definição está ilustrada na Figura 2.2.

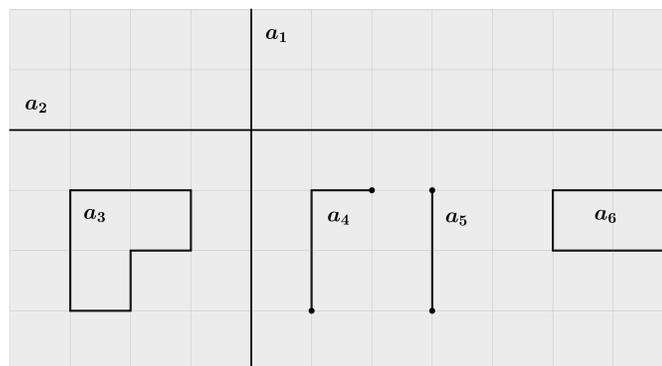


Figura 2.2: As strings  $a_4$  e  $a_5$  são abertas. Já as strings  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_6$  são fechadas, onde os loops  $a_1$  e  $a_2$  são ciclos homologicamente não-triviais.

**Definição 2.23.** *O produto tensorial dos operadores  $X$  com a identidade  $I$  que definem uma string  $\mu$  na tesselação e o produto tensorial dos operadores  $Z$  com a identidade  $I$  que definem uma string  $\mu^*$  na tesselação dual são chamados de operadores string e denotados por  $X_\mu$  e  $Z_{\mu^*}$ , respectivamente.*

**Observação 2.24.** *É possível mostrar que os operadores string na tesselação original e na tesselação dual anticomutam se, e somente se, eles se cruzam uma quantidade ímpar de vezes.*

Com esses conceitos em mãos podemos definir a distância de um código de superfície.

**Definição 2.25.** *A distância  $d$  do código de superfície é o peso do operador string correspondente à um ciclo homologicamente não-trivial (um loop), de menor peso, ou seja, a distância do código será o mínimo entre o número de arestas contidas no menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação e o número de arestas contidas no menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação dual.*

Temos assim um código de superfície  $[n, k, d]$ , onde os qubits físicos são  $n = E$ , os qubits codificados são  $k = 2g$  e a distância  $d$  é dada na definição anterior.

Os operadores string correspondentes à um ciclo homologicamente não-trivial (um loop) são os operadores lógicos definidos na seção 2.1.

**Exemplo 2.26.** *Código Tórico de Kitaev*

*Veremos agora o código tórico de Kitaev, o qual, como já mencionamos, é o exemplo mais simples de um código de superfície.*

*Para esse código, Kitaev tesselou o toro por  $l \times l$  quadrados.*

*Como temos um qubit em cada aresta e a quantidade de arestas da tesselação é  $2l^2$ , segue que a quantidade de qubits é  $n = 2l^2$ . Já a quantidade de qubits codificados é  $k = 2g$  e o gênero do toro é  $g = 1$ , logo, temos que  $k = 2$ .*

*Por fim, a distância do código tórico de Kitaev é  $d = l$ , pois os ciclos homologicamente não-triviais tem que se enrolar ao redor do toro, e o de menor comprimento tem comprimento  $l$ . Portanto, o código tórico de Kitaev é um código  $[2l^2, 2, l]$ . Perceba que quanto maior for o valor de  $l$ , maior será o número de qubits físicos para codificar os mesmos dois qubits lógicos.*

Para  $l = 2$  temos um código de superfície  $[8, 2, 2]$ .

Considere a Figura 2.3. Os geradores estabilizadores do Código Tórico de Kitaev são:

$$X_{f_1} = X1XXXIII, X_{f_2} = XIIIIXIX, X_{f_3} = IXXXIXII, X_{f_4} = IXIIIXXX, \\ Z_{v_1} = ZZZIIIIZI, Z_{v_2} = ZZIZIIIIZ, Z_{v_3} = IIZIZZZI \text{ e } Z_{v_4} = IIIZZZIZ.$$

De (2.3) segue que o grupo estabilizador  $\mathbf{S}$  é dado por  $\mathbf{S} = \langle X_{f_1}, X_{f_2}, X_{f_3}, Z_{v_1}, Z_{v_2}, Z_{v_3} \rangle$ .

Já os operadores lógicos são:  $\bar{X}_1 = IIIXIII, \bar{X}_2 = IIIIXXII, \bar{Z}_1 = IIZZIII$  e  $\bar{Z}_2 = ZIIIIZIII$ .

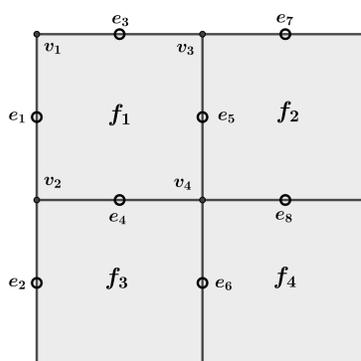


Figura 2.3: Tesselação  $2 \times 2$  no toro para o código tórico de Kitaev.

## 2.2.2 Códigos Quânticos de Superfície em Superfícies Compactas Orientáveis com $g \geq 2$

Seguindo os passos da construção dos códigos de superfície de Kitaev [47], em 2009, Albuquerque, Palazzo e Silva criaram os códigos de superfície em superfícies compactas orientáveis com  $g \geq 2$  [2], o qual generalizou a construção do código tórico de Kitaev, agora em um ambiente onde a geometria inerente é a geometria hiperbólica.

A construção desses códigos foi feito em tesselações do plano hiperbólico e até aquele momento haviam sido os códigos de superfície com os melhores parâmetros em comparação com os códigos topológicos já existentes.

A tesselação do plano hiperbólico pode ser classificada através de seu gênero, como por exemplo:  $\{4g, 4g\}$ ,  $\{4g + 2, 2g + 1\}$ ,  $\{8g - 4, 4\}$ ,  $\{12g - 6, 3\}$ , entre outros. Qualquer um

deses modelos pode ser usado para obter uma superfície topológica compacta orientável  $\mathbb{M}$  de gênero  $g$  desejada utilizando a transformação de emparelhamento de lados adequada, de modo que as condições de lados e ângulos, visto na seção 1.3, sejam satisfeitas.

Como a distância mínima de um código de superfície está relacionada com os ciclos homologicamente não-triviais da superfície, os autores escolheram trabalhar com um polígono  $\mathbb{P}'$  da forma  $\{4g, 4g\}$ , onde o emparelhamento de lados para obter a superfície é dado através dos lados opostos, pois desse modo se obtém a maior distância permitida.

Esses polígonos hiperbólicos que são usados como modelos planos para a superfície de gênero  $g \geq 2$  são chamados de polígonos fundamentais, o que pode ser visto em [7].

Vale observar que nem todos os polígonos dos modelos acima podem utilizar transformações de emparelhamento de lados opostos dos polígonos, pois nem todos satisfazem o Teorema de Poincaré, como pode ser visto em [44], [54] e [55].

Considerando  $\mathbb{P}'$  um polígono fundamental que gera o  $g$ -toro, o qual é um polígono com  $p'$  lados, onde  $q'$  polígonos com  $p'$  arestas encontram-se em cada vértice e tesselando  $\mathbb{P}'$  por polígonos hiperbólicos regulares  $\mathbb{P}$ , da forma  $\{p, q\}$ , os autores determinaram quantos polígonos  $\mathbb{P}$  são necessários para cobrir exatamente a área de  $\mathbb{P}'$ , ou seja, determinaram as soluções da equação

$$\mu(\mathbb{P}') = n_f \mu(\mathbb{P}), \quad (2.5)$$

onde  $\mu(\mathbb{P}')$  é a área do polígono fundamental  $\mathbb{P}'$ ,  $\mu(\mathbb{P})$  é a área de um polígono da tesselação  $\{p, q\}$  e  $n_f$  é o número de faces (polígonos) da tesselação  $\{p, q\}$ .

Como as tesselações obtidas da equação (2.5) satisfazem o Teorema 1.28, o qual também pode ser visto em [32], segue que elas são todas as tesselações possíveis para  $\mathbb{P}'$ .

Segue pelo Teorema de Gauss-Bonnet, por (1.15) e (1.16) que a área de uma superfície hiperbólica compacta  $\mathbb{M}$  gerada por um polígono  $\mathbb{P}'$  do tipo  $\{p', q'\}$  é dada por

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{M}) &= \mu(\mathbb{P}') \\ &= p' \left( \pi - \frac{2\pi}{p'} - \frac{2\pi}{q'} \right) \\ &= 4\pi(g - 1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Disso e do Teorema de Gauss-Bonnet segue que (2.5) pode ser escrito como:

$$4\pi(g-1) = n_f \left[ p \left( \pi - \frac{2\pi}{p} - \frac{2\pi}{q} \right) \right].$$

Logo, o número de faces da tesselação  $\{p, q\}$  de  $\mathbb{P}'$  é dado por

$$n_f = \frac{4q(g-1)}{pq - 2p - 2q}. \quad (2.7)$$

Substituindo os valores de  $p$  e  $q$  tais que  $p$  e  $q$  satisfaçam o Teorema 1.27, é possível determinar todas as tesselações de  $\mathbb{P}'$ . É claro que só fará sentido quando  $n_f$  for um número inteiro positivo.

Os operadores face  $X_f$  e vértice  $Z_v$  são dados como (2.1) e os geradores estabilizadores satisfazem as relações de independência (2.3). Logo, a quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$  continua sendo como (2.4).

A definição desses códigos segue como a Definição 2.19 e os operadores string também seguem como vimos anteriormente.

Vamos determinar os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  desses códigos.

Como aqui estamos denotando a quantidade  $F$  de faces por  $n_f$ , vamos denotar a quantidade de arestas  $E$  por  $n_e$  e de vértices  $V$  por  $n_v$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado por  $n = n_e$ . Pelo Teorema 1.28 temos que  $n_e = \frac{pn_f}{2}$ , logo,  $n = \frac{pn_f}{2}$ . Assim, como  $s = n_f + n_v - 2$ , onde  $n_v = \frac{pn_f}{q}$  e  $n_f$  é dado em (2.7), substituindo esses valores em  $k = n - s$  é possível determinar que a quantidade  $k$  de qubits codificados é dado por  $k = 2g$ .

Como a distância do código de superfície é dado pelo peso do menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação ou da tesselação dual, como visto na Definição 2.25, segue que em um  $4g$ -gon, esses ciclos são dados pelas geodésicas de menor comprimento que ligam os lados identificados de  $\mathbb{P}'$ . Pensando nas arestas da tesselação  $\{p, q\}$  de  $\mathbb{P}'$ , o menor ciclo homologicamente não-trivial é o caminho sobre as arestas que mais se aproximam das geodésicas de menor comprimento. Portanto, a distância do código será o mínimo entre o número de arestas do menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação e da tesselação dual.

Como não é possível determinar esse valor de maneira exata, os autores determinaram um limitante inferior para a distância. Aqui não iremos focar na construção, para mais detalhes sobre essa construção recomendamos [1].

Utilizando argumentos da trigonometria hiperbólica, os autores calcularam o comprimento mínimo  $d_h$  entre os lados opostos de  $\mathbb{P}^l$  (ou seja, entre as arestas emparelhadas) e calcularam os comprimentos de uma aresta  $l_{(p,q)}$  e  $l_{(q,p)}$  da tesselação  $\{p, q\}$  e da tesselação dual  $\{q, p\}$ , respectivamente, a quais são dadas pela Proposição 1.31. Em seguida, fizeram o quociente de  $d_h$  por  $l_{(p,q)}$  e por  $l_{(q,p)}$  e tomaram o menor dos dois valores. Se esse valor for um número inteiro, então ele será o limitante inferior. Caso contrário, o limitante será o menor inteiro maior que esse valor. Isto é,

$$d \geq d_{min} = \left\lceil \min \left\{ \frac{d_h}{l_{(p,q)}}, \frac{d_h}{l_{(q,p)}} \right\} \right\rceil, \quad (2.8)$$

onde  $d_h = 2 \operatorname{arccosh} [\cot (\pi/4g)]$

Repare que quanto menor for o comprimento dos lados das tesselações  $\{p, q\}$  e  $\{q, p\}$  maior será a distância mínima do código.

Com isso, temos definidos todos os parâmetros dos códigos de superfície em superfícies compactas orientáveis com  $g \geq 2$ . Em [1] e [2] é possível ver várias tabelas com os parâmetros dos códigos, com  $g$  variando de 2 a 5.

## 2.3 Códigos Quânticos Coloridos

Nesta seção abordaremos outro tipo de código topológico, os códigos quânticos coloridos que foram desenvolvidos por Bombín e Martin-Delgado em 2007, para superfícies compactas de gênero  $g = 1$  [16] e os códigos quânticos coloridos para superfícies compactas orientáveis de gênero  $g \geq 2$  que foram desenvolvidos por Soares e Silva em 2018 [63].

Os códigos quânticos coloridos são construídos sobre uma tesselação trivalente e 3-colorível. As cores utilizadas são vermelho (r), verde (g) e azul (b). Além de atribuir uma cor para cada face, de modo que as faces vizinhas (adjacentes) não possuam a mesma cor, é atribuído também uma cor para cada aresta, onde por exemplo, as arestas vermelhas são as arestas ad-

jacentes à faces verdes e azuis, ou seja, as arestas vermelhas não pertencem à faces vermelhas. De forma semelhante para as arestas verdes e azuis.

Dada uma superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$ , fixamos uma tesselação regular trivalente e 3-colorível  $\{p, 3\}$  sobre  $\mathbb{M}$  e associamos um qubit a cada vértice dessa tesselação. Sob essas condições, começaremos definindo os operadores face, que são os geradores estabilizadores dos códigos coloridos. Existem dois operadores face para cada face  $f$ , um do tipo  $X$  e outro do tipo  $Z$ . Não temos os operadores vértice nos códigos coloridos.

**Definição 2.27.** *Seja  $f$  uma face da tesselação trivalente e 3-colorível fixada na superfície  $\mathbb{M}$ . Os operadores de Pauli*

$$X_f := \bigotimes_{v \in f} X_v \quad e \quad Z_f := \bigotimes_{v \in f} Z_v \quad (2.9)$$

são chamados de operadores face, onde  $X_f$  é o operador face do tipo  $X$  e  $Z_f$  é o operador face do tipo  $Z$ .

O operador face  $X_f$  ( $Z_f$ ) consiste de um produto tensorial do operador de Pauli  $X$  ( $Z$ ) agindo nos qubits que estão nos vértices pertencentes a face  $f$ , com a identidade agindo nos demais qubit.

Perceba que os operadores face do tipo  $X$  sempre comutam entre si. Do mesmo modo, os operadores face do tipo  $Z$  sempre comutam entre si. Sabemos que  $X$  e  $Z$  anticomutam, mas  $X_f$  e  $Z_f$  sempre terão uma quantidade par de vértices em comum, portanto os operadores face  $X_f$  e  $Z_f$  sempre comutarão.

Com isso, o código quântico colorido é definido da seguinte forma:

**Definição 2.28.** *Seja  $\mathbb{M}$  uma superfície compacta e considere uma tesselação trivalente e 3-colorível em  $\mathbb{M}$ . O código colorido  $\mathcal{C}$  é definido por*

$$\mathcal{C} = \{|\psi\rangle; X_f|\psi\rangle = |\psi\rangle, Z_f|\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall f\}, \quad (2.10)$$

onde  $X_f$  e  $Z_f$  são os operadores face do tipo  $X$  e do tipo  $Z$ , respectivamente.

Considere  $F_r$ ,  $F_g$  e  $F_b$  os conjuntos das faces vermelhas, verdes e azuis, respectivamente. Observe que os geradores estabilizadores  $X_f$  e  $Z_f$  não são todos independentes, pois

$$\prod_{f \in F_r} \lambda_f = \prod_{f \in F_g} \lambda_f = \prod_{f \in F_b} \lambda_f \quad (2.11)$$

com  $\lambda = X, Z$ . Logo, quatro desses geradores não são independentes. Assim, o número de geradores estabilizadores independentes é

$$s = 2(F_r + F_g + F_b) - 4, \quad (2.12)$$

pois para cada face temos dois geradores estabilizadores e um total de  $F_r + F_g + F_b$  faces. Como quatro geradores não são independentes, descartamos 4.

Em [12], [16] e [63], os autores utilizaram o conceito de tesselação reduzida para obter o valor  $k$  de qubits codificados. Aqui porém, vamos determiná-lo sem utilizar a tesselação reduzida. Utilizamos somente que  $n - k = s$  e as equações (1.15), (1.16), (1.21) e (2.12). De fato,

$$\begin{aligned} k &= n - s \\ &= V - 2F + 4 - 2E + 2E - 2V + 2V \\ &= -2\chi + 4 \\ &= 4g. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Portanto, a quantidade  $k$  de qubits codificados depende apenas da superfície considerada, não importando a tesselação.

**Observação 2.29.** *Os códigos coloridos dobram o número de qubits codificados em relação aos códigos de superfície.*

Considere uma string fechada, ou seja, um loop ou uma imagem de uma 2-cadeia em uma tesselação do código colorido. Construímos seis operadores string diferentes, dois por cor, um do tipo  $X$  e outro do tipo  $Z$ . Denotamos esses operadores strings por  $S_\mu^{c\lambda}$  onde  $\lambda = X, Z$ ,  $\mu$  é a string e  $c$  é a cor, ou seja,  $c = r, g, b$ .

Veja que

$$S_\mu^{cx} = \prod_{v \in V_c^\mu} X_v \quad \text{e} \quad S_\mu^{cz} = \prod_{v \in V_c^\mu} Z_v, \quad (2.14)$$

onde  $V_c^\mu$  é o conjunto que contém os vértices que pertencem a uma aresta  $c$ -colorida de  $\mu$ .

Se fizermos o produto dos três operadores string  $S_\mu^{rx} S_\mu^{gx} S_\mu^{bx}$ , obtemos a identidade. Do mesmo modo para os operadores string do tipo  $Z$ . Assim, somente quatro operadores

string são independentes. Por esse fato, podemos considerar somente duas cores, como por exemplo, verde e azul.

Sejam  $\mu$  e  $\mu'$  duas strings quaisquer. Seus operadores string comutarão caso  $\mu$  e  $\mu'$  se cruzem um número par de vezes. Caso elas se cruzem um número ímpar de vezes temos que  $S_\mu^{cx}$  e  $S_{\mu'}^{c'z}$  comutarão, desde que  $c = c'$ , ou seja, desde que os operadores sejam da mesma cor. E, vão anticomutar caso  $c \neq c'$ , ou seja, caso os operadores sejam de cores diferentes. Os operadores string podem ter pontos finais nos bordos ou faces da sua cor, mas esses operadores sempre anticomutarão com os operadores faces correspondentes a esses pontos finais.

No caso dos códigos coloridos existe um terceiro operador, chamado de  $t$ -string ou string-nets, o qual surge da combinação de duas strings de cores diferentes. É possível que esse novo operador resulte em um operador com peso menor do que os operadores correspondentes as strings combinadas. Para exemplos desses operadores, recomendamos [12], [16] e [21].

A questão da distância dos códigos coloridos não é abordada de maneira clara na literatura.

O que podemos fazer em relação a distância nesse caso, é limita-la superiormente pelo menor ciclo homologicamente não-trivial que pudermos encontrar, pois caso a distância não seja o peso desse ciclo, então deverá ser menor.

Essa foi a ideia que usamos para determinar um limitante superior em função da quantidade de faces e do tipo de tesselação, para os códigos coloridos em superfícies compactas orientáveis com  $g \geq 2$ , que veremos no capítulo 3.

Como os códigos coloridos são códigos estabilizadores, então vale a definição de distância vista para os códigos estabilizadores, a qual é dada pelo menor peso entre os operadores de  $N(\mathbf{S}) \setminus \mathbf{S}$ . Porém, essa definição é bastante ampla e desejamos obter uma definição que nos forneça um número, assim como para os códigos de superfície, mesmo que esse número não nos forneça a distância exata.

### 2.3.1 Códigos Quânticos Coloridos em Superfície Compactas Orientáveis com $g \geq 2$

Apresentaremos agora a construção dos códigos quânticos coloridos em superfícies compactas orientáveis com  $g \geq 2$  desenvolvidos por Soares e Silva [63] em 2018, o qual generalizou a construção dos códigos coloridos feito em [16] apresentados anteriormente, agora em um ambiente onde a geometria inerente é a geometria hiperbólica. A construção desses códigos foi inspirado na construção dos códigos de superfície, desenvolvidos em [2] e que vimos na seção 2.2.2.

Do mesmo modo que o visto na seção 2.2, o polígono regular hiperbólico  $\mathbb{P}'$  utilizado como modelo planar da superfície, foi escolhido como sendo da forma  $\{4g, 4g\}$ , pelo fato de utilizar transformações que emparelham lados opostos do polígono.

A construção desses códigos foi feita sobre tesselações regulares trivalentes e 3-coloríveis do plano hiperbólico, ou seja, são utilizadas tesselações da forma  $\{p, 3\}$ , as quais devem satisfazer o Teorema 1.27. Logo, por esse teorema concluímos que  $p > 6$ . E, como vimos na seção 1.4, para fazer sentido em ser 3-colorível,  $p$  deve ser par.

Para determinar quais são as possíveis tesselações por polígonos hiperbólicos regulares  $\mathbb{P}$ , da forma  $\{p, 3\}$ , do polígono fundamental  $\mathbb{P}'$  que gera o  $g$ -toro, foi feito como nos códigos de superfície, onde foi encontrado a solução da equação (2.5), ou seja, foi determinado quantos polígonos  $\mathbb{P}$  são necessários para cobrir exatamente a área de  $\mathbb{P}'$ . Com a única diferença que agora  $q = 3$  é fixo.

Realizando exatamente as mesmas contas que para o código de superfície e trocando  $q = 3$ , obtemos que a quantidade de polígonos  $\mathbb{P}$  necessários para cobrir de maneira exata a área de  $\mathbb{P}'$  é dado por

$$n_f = \frac{12(g-1)}{p-6}, \quad (2.15)$$

com  $p > 6$ . O que só fará sentido se  $n_f$  for um número inteiro positivo.

Os geradores estabilizadores desse código são os operadores face dados na definição 2.27. As equações (2.11) e (2.12) continuam válidas aqui.

Vamos determinar somente os parâmetros  $n$  e  $k$  desses códigos, pois a distância  $d$  foi

limitada inferiormente pelo dobro da quantidade de arestas da tesselação reduzida, contida em um ciclo homologicamente não-trivial pertencente a tal tesselação. Porém, como veremos no capítulo 3, este limitante não está correto. Desse modo, utilizaremos os resultados desenvolvidos por nós, os quais também apresentaremos no capítulo 3.

Novamente denotamos a quantidade  $F$  de faces por  $n_f$ , a quantidade de arestas  $E$  por  $n_e$  e a quantidade de vértices  $V$  por  $n_v$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado por  $n = n_v$ , pois os qubits são fixados nos vértices da tesselação. Segue da equação (1.21) que  $n_v = \frac{pn_f}{3}$ . Logo,  $n = \frac{pn_f}{3}$ .

Como  $n_f$  é dado em (2.15), concluímos que

$$n = \frac{4p(g-1)}{p-6}. \quad (2.16)$$

Pelo fato de ser código colorido, como vimos anteriormente, segue que a quantidade  $k$  de qubits codificados é dado por  $k = 4g$ . O que pode ser comprovado simplesmente utilizando que  $k = n - s$ ,  $n_v = \frac{pn_f}{3}$  e as equações (2.12) e (2.16).

## 2.4 Códigos de Superfície e Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$

Inspirados nos códigos de superfície de Albuquerque, Palazzo e Silva [2] e nos códigos coloridos de Soares e Silva [63], em 2021, Bhowmik, Maity e Silva [10] realizaram a construção dos códigos de superfície e dos códigos coloridos, agora para superfícies compactas não-orientáveis de gênero  $g \geq 3$  ímpar. Segundo os autores, a taxa assintótica  $\frac{k}{n}$  e a taxa  $\frac{d}{n}$  dos códigos em superfícies não-orientáveis obtidos foi melhor que as taxas obtidas dos códigos em superfícies orientáveis.

Apresentaremos brevemente a construção desses códigos, bem como algumas de suas diferenças em relação aos códigos de superfície [2] e aos códigos coloridos [63] em superfícies orientáveis, juntamente com os parâmetros desses códigos. Para mais detalhes sobre esses códigos recomendamos [10].

### 2.4.1 Códigos Quânticos de Superfície em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$

A construção dos códigos de superfície em superfícies não-orientáveis é semelhante a construção em superfícies orientáveis, com algumas diferenças importantes. A primeira delas é que toda superfície compacta não-orientável de gênero  $g$  pode ser obtida a partir de um polígono  $\mathbb{P}'$  da forma  $\{2g, 2g\}$ , através de um emparelhamento de lados opostos. Outra diferença importante é que a característica de Euler de uma superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  de gênero  $g$  é dada por (1.17), isto é,

$$\chi(\mathbb{M}) = 2 - g. \quad (2.17)$$

Logo, realizando contas análogas as feitas (2.6), segue que

$$\mu(\mathbb{M}) = \mu(\mathbb{P}') = 2\pi(g - 2). \quad (2.18)$$

De (2.5), (2.18) e do Teorema de Gauss-Bonnet temos que o número de faces  $n_f$  de uma tesselação  $\{p, q\}$  em uma superfície compacta não-orientável de gênero  $g \geq 3$  será

$$n_f = \frac{2q(g - 2)}{pq - 2p - 2q}, \quad (2.19)$$

onde  $p$  e  $q$  satisfazem o Teorema 1.27. Assim, é possível determinar todas as tesselações de  $\mathbb{P}'$ , o que só fará sentido quando  $n_f$  for um número inteiro positivo.

Os geradores estabilizadores desse código e a definição do código de superfície  $\mathbf{C}$  são os mesmos dados em (2.1) e (2.2). A quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$  também será o mesmo que dado em (2.4).

Como a quantidade  $n$  de qubits físicos é dada pelo número de arestas  $n_e$ , pois os qubits são colocados nas arestas da tesselação  $\{p, q\}$ , segue que

$$n = n_e = \frac{pn_f}{2} = \frac{pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (2.20)$$

A quantidade  $k$  de qubits codificados é dado por  $k = g$ , o que pode ser confirmado substituindo os valores de  $n$  e  $s$  em  $k = n - s$ .

Como a definição de distância que vimos nos códigos de superfície não depende da orientação da superfície, segue que a distância de um código de superfície em uma superfície

compacta não-orientável de gênero  $g \geq 3$ , também será dado pelo menor ciclo homologicamente não-trivial da tesselação  $\{p, q\}$  ou de sua tesselação dual  $\{q, p\}$ . Desse modo, segue que um limitante inferior para a distância  $d$  de um código de superfície em superfícies compactas não-orientáveis é dado por

$$d \geq d_{min} = \left[ \min \left\{ \frac{d_h}{l_{(p,q)}}, \frac{d_h}{l_{(q,p)}} \right\} \right], \quad (2.21)$$

onde  $d_h = 2 \operatorname{arccosh} [\cot(\pi/2g)]$  é o comprimento hiperbólico da geodésica ortogonal comum aos lados emparelhados de  $\mathbb{P}'$  e  $l_{(p,q)}$  e  $l_{(q,p)}$ , dados pela Proposição 1.31, são o comprimento das arestas da tesselação  $\{p, q\}$  e da tesselação dual  $\{q, p\}$  de  $\mathbb{P}$ , respectivamente.

Repare que a diferença entre os códigos é o fato de que, para as superfícies orientáveis  $\mathbb{M}$  de gênero  $l$  a característica de Euler é dada por  $\chi(\mathbb{M}) = 2 - 2l$  e para as superfícies não-orientáveis  $\mathbb{M}$  de gênero  $g$  é dada por  $\chi(\mathbb{M}) = 2 - g$ . Porém, quando a característica de Euler de uma superfície compacta orientável e de uma não-orientável coincidem, temos que os códigos de superfícies obtidos são os mesmos. O que garante isso é o seguinte teorema que pode ser visto em [10].

**Teorema 2.30.** *Sejam  $\mathbb{M}_g$  uma superfície não-orientável com gênero  $g$  e  $\mathbb{M}_l$  uma superfície orientável com gênero  $l$ . Se  $\chi(\mathbb{M}_g) = \chi(\mathbb{M}_l)$ , então os códigos de superfícies são os mesmos para ambas as superfícies.*

**Observação 2.31.** *Segue do teorema anterior que as superfícies compactas não-orientáveis de gênero par produzem os mesmos códigos de superfícies já existentes.*

## 2.4.2 Códigos Quânticos Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$

A construção dos códigos coloridos em superfícies não-orientáveis é semelhante a construção em superfícies orientáveis. As diferenças que aparecem se devem as mesmas diferenças apresentadas nos códigos de superfície, ou seja, a região fundamental  $\mathbb{P}'$  da superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  de gênero  $g \geq 3$  é da forma  $\{2g, 2g\}$  e a característica de Euler é  $\chi(\mathbb{M}) = 2 - g$ .

Os geradores estabilizadores desse código, a definição do código colorido  $\mathbf{C}$  e a quantidade

de geradores estabilizadores independentes  $s$  são as mesmas dadas em (2.9), (2.10) e (2.12), respectivamente.

As tesselações utilizadas para tesselar a superfície compacta não-orientável  $\mathbb{M}$  são da forma  $\{p, 3\}$ . Logo, trocando  $q = 3$  em (2.19) segue que

$$n_f = \frac{6(g-2)}{p-6} \text{ com } p \geq 8 \text{ par.} \quad (2.22)$$

Como a quantidade  $n$  de qubits físicos é dada pelo número de vértices, pois os qubits são colocados nos vértices da tesselação  $\{p, 3\}$ , segue que

$$n = n_v = \frac{pn_f}{3} = \frac{2p(g-2)}{p-6}. \quad (2.23)$$

A quantidade  $k$  de qubits codificados é dado por  $k = 2g$ , o que pode ser comprovado de maneira análoga ao que fizemos no caso orientável, agora com  $\chi(\mathbb{M}) = 2 - g$ . Veja que esse valor é o dobro do valor obtido para os códigos de superfícies não-orientáveis.

Para a distância  $d$  desses códigos, como pode ser visto em [10], os autores utilizaram o limitante inferior dado em [63], porém, como veremos no capítulo 3, este limitante não está correto, sendo assim, não podemos utilizá-lo também para o caso não-orientável. Desse modo, utilizaremos os resultados desenvolvidos por nós e que apresentaremos no capítulo 3, os quais não dependem da orientação da superfície.

A diferença entre os códigos coloridos em superfícies compactas orientáveis  $\mathbb{M}_l$  de gênero  $l$ , das superfícies não-orientáveis  $\mathbb{M}_g$  de gênero  $g$ , é dada pelo fato da característica de Euler ser diferente. Porém, quando a característica de Euler de uma superfície compacta orientável e de uma não-orientável coincidem, temos que os códigos coloridos obtidos são os mesmos. O seguinte teorema que pode ser visto em [10] garante isso.

**Teorema 2.32.** *Sejam  $\mathbb{M}_g$  uma superfície não-orientável com gênero  $g$  e  $\mathbb{M}_l$  uma superfície orientável com gênero  $l$ . Se  $\chi(\mathbb{M}_g) = \chi(\mathbb{M}_l)$ , então os códigos quânticos coloridos são os mesmos para ambas as superfícies.*

**Observação 2.33.** *Segue do teorema anterior que os códigos coloridos em superfícies não-orientáveis com gênero par produzem códigos coloridos já existentes.*

## 2.5 Códigos de Superfície e Coloridos em Superfícies Orientáveis Sobre Tesselações Semirregulares

Em uma tentativa de generalizar os códigos de superfície obtidos por Albuquerque, Palazzo e Silva [2] e os códigos coloridos obtidos por Soares e Silva em [63], em 2022 o autor Copatti [24] utilizou técnicas semelhantes a essas duas construções para obter novos códigos quânticos de superfície e coloridos, em superfícies compactas orientáveis de gênero  $g \geq 2$ , agora associados à tesselações hiperbólicas semirregulares.

Apresentaremos brevemente algumas famílias de códigos de superfície e coloridos em tesselações semirregulares que serão importantes para obtermos os nossos códigos, pois como veremos, a construção de ambos é basicamente a mesma. Para mais detalhes sobre essa construção e demais famílias de códigos basta ver [24].

### 2.5.1 Códigos de Superfícies Sobre Tesselações Semirregulares

Os códigos de superfície em superfícies compactas orientáveis  $\mathbb{M}$  com  $g \geq 2$  sobre tesselações semirregulares que veremos neste trabalho, são os códigos construídos nas tesselações  $\{p, q, p, q\}$ ,  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$ . Essas tesselações são provenientes das tesselações derivadas vistas na seção 1.4.

A construção dos códigos de superfície sobre essas tesselações é praticamente análogo aos códigos de superfície em tesselações regulares que vimos na seção 2.2. O polígono regular hiperbólico  $\mathbb{P}'$ , utilizado como modelo planar da superfície topológica compacta orientável  $\mathbb{M}$  de gênero  $g \geq 2$ , segue sendo da forma  $\{4g, 4g\}$ .

Os geradores estabilizadores, a definição do código  $\mathbf{C}$  e a quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$ , seguem como em (2.1), (2.2) e (2.4), respectivamente. Desse modo, os parâmetros  $n$  e  $d$  dependem da tesselação semirregular. Assim, o autor teve que analisar cada caso individualmente. O parâmetro  $k$  depende somente da topologia da superfície e não da tesselação, por isso, segue que  $k = 2g$ . Porém, analogamente ao que fizemos nas seções passadas, fazendo as substituições apropriadas é possível mostrar em cada caso que esse valor é preservado.

Como as tesselações semirregulares  $\{p, q, p, q\}$ ,  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$  são provenientes da tesselação regular  $\{p, q\}$ , sabemos que a quantidade de faces  $n_f$ , arestas  $n_e$  e vértices  $n_v$  de  $\{p, q\}$  são dados por

$$n_f = \frac{4q(g-1)}{pq-2p-2q}, \quad n_e = \frac{2pq(g-1)}{pq-2p-2q} \quad \text{e} \quad n_v = \frac{4p(g-1)}{pq-2p-2q}, \quad (2.24)$$

e precisamos desses valores para determinar a quantidade de faces, arestas e vértices das tesselações semirregulares.

A definição da distância  $d$  segue a mesma do caso regular. A diferença no caso das tesselações semirregulares é que as arestas da tesselação dual não possuem todas o mesmo comprimento como no caso regular. Desse modo, os autores limitaram inferiormente a distância  $d$  do código, tomando o menor inteiro, maior que o mínimo entre o quociente de  $d_h$  pelo comprimento da aresta da tesselação semirregular e o quociente de  $d_h$  pelos comprimentos das arestas da tesselação dual da semirregular.

Além dessas três famílias de códigos que veremos aqui, foi obtido mais uma infinidade de códigos, pois como estão construindo códigos em superfícies orientáveis, utilizaram alguns resultados que garantem a existência de infinitas tesselações semirregulares, sem precisar partir de uma tesselação regular  $\{p, q\}$ . Para ver esses resultados recomendamos [33] e [34], bem como [24], onde também pode ser visto a construção desses códigos e várias tabelas com as tesselações existentes e os respectivos parâmetros dos códigos com  $g$  variando de 2 a 5.

### Parâmetros dos Códigos de Superfície da Tesselação $\{p, q, p, q\}$ no $g$ -toro $g \geq 2$

Sejam  $N_f$ ,  $N_e$  e  $N_v$  a quantidade de faces, arestas e vértices da tesselação  $\{p, q, p, q\}$ . Pelo processo da derivação por ponto médio na tesselação regular  $\{p, q\}$  vimos que

$$N_f = n_f + n_v, \quad (2.25)$$

$$N_e = pn_f = qn_v, \quad (2.26)$$

$$N_v = n_e = \frac{pn_f}{2}. \quad (2.27)$$

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas de  $\{p, q, p, q\}$ , logo segue que

$$n = \frac{4pq(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.28)$$

Já a quantidade de qubits codificados  $k$ , como já mencionamos, é dado por  $k = 2g$ .

Para calcularmos o limitante inferior para a distância  $d$  precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual. O comprimento de uma aresta da tesselação  $\{p, q, p, q\}$ , denotado por  $L$ , é dado em (1.29), ou seja,

$$L = 2 \operatorname{arcsenh} \left[ \operatorname{senh} \left( \frac{l}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{q} \right) \right], \quad (2.29)$$

onde  $l = 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/p)}{\operatorname{sen}(\pi/q)} \right]$  é o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{p, q\}$ .

O dual da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  é formado por quadriláteros onde os seus lados tem todos o mesmo tamanho. Como vimos na seção 1.4, essa aresta é igual ao raio da circunferência circunscrita no  $p$ -gon da tesselação regular  $\{p, q\}$  e é dado em (1.24). Logo, denotando esse comprimento por  $L^*$ , temos que

$$L^* = \operatorname{arccosh} \left[ \cot \left( \frac{\pi}{p} \right) \cot \left( \frac{\pi}{q} \right) \right]. \quad (2.30)$$

Portanto, um limitante inferior para a distância desse código será dado por

$$d \geq d_{\min} = \left\lceil \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L^*} \right\} \right\rceil.$$

### Parâmetros dos Códigos de Superfície da Tesselação $\{2p, 2p, q\}$ no $g$ -toro $g \geq 2$

Sejam  $N_f$ ,  $N_e$  e  $N_v$  a quantidade de faces, arestas e vértices da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$ . Pelo processo de derivação por Clipping na tesselação regular  $\{p, q\}$  vimos que

$$N_f = n_f + n_v, \quad (2.31)$$

$$N_e = n_e + qn_v, \quad (2.32)$$

$$N_v = 2n_e = qn_v = pn_f. \quad (2.33)$$

A quantidade de qubits físicos  $n$  será dado pela quantidade de arestas de  $\{2p, 2p, q\}$ , logo, segue que

$$n = \frac{6pq(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.34)$$

Já a quantidade de qubits codificados  $k$  é dado por  $k = 2g$ .

Para calcularmos o limitante inferior para a distância  $d$  precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual. O comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$ , denotado por  $L$ , é dado em (1.30), ou seja,

$$L = 2 \operatorname{arctanh} \left[ \sinh(a) \tan \left( \frac{\pi}{2p} \right) \right], \quad (2.35)$$

onde  $a = \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)} \right]$  é o comprimento do apótema da tesselação  $\{p, q\}$ .

O dual da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  é formado por triângulos isósceles. Como observado na seção 1.4, essas arestas são iguais a duas vezes o apótema e ao raio da circunferência circunscrita em um  $p$ -gon da tesselação  $\{p, q\}$ . Denotando esses comprimentos por  $L_1^*$  e  $L_2^*$ , temos que

$$L_1^* = 2a = 2 \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)} \right] \quad \text{e} \quad L_2^* = r = \operatorname{arccosh} \left[ \cot \left( \frac{\pi}{q} \right) \cot \left( \frac{\pi}{p} \right) \right]. \quad (2.36)$$

Portanto, um limitante inferior para a distância desse código será dado por

$$d \geq d_{\min} = \left[ \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \frac{d_h}{L_2^*} \right\} \right].$$

### Parâmetros dos Códigos de Superfície da Tesselação $\{2p, 2q, 4\}$ no $g$ -toro $g \geq 2$

Sejam  $N_f$ ,  $N_e$  e  $N_v$  a quantidade de faces, arestas e vértices da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$ . Pelo processo de derivação por incentro na tesselação regular  $\{p, q\}$  vimos que

$$N_f = n_f + n_v + n_e, \quad (2.37)$$

$$N_e = 3pn_f, \quad (2.38)$$

$$N_v = 2pn_f. \quad (2.39)$$

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas de  $\{2p, 2q, 4\}$ , logo segue que

$$n = \frac{12pq(g-1)}{pq - 2p - 2q}. \quad (2.40)$$

A quantidade de qubits codificados  $k$  segue sendo  $k = 2g$ .

Para calcularmos o limitante inferior para a distância  $d$  precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual. O

comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$ , denotado por  $L$ , é dado em (1.31), ou seja,

$$L = 2 \operatorname{arctanh} \left[ \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - 1}{2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}} \right]. \quad (2.41)$$

O dual da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  é formado por triângulos retângulos, logo, devemos calcular o comprimento dos seus três lados. Como observado na seção 1.4, os comprimentos dessas arestas são dados pela Proposição 1.31. Denotando tais comprimentos por  $L_1^*$ ,  $L_2^*$  e  $L_3^*$ , temos que

$$L_1^* = \frac{l}{2} = \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/p)}{\operatorname{sen}(\pi/q)} \right], \quad (2.42)$$

$$L_2^* = a = \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/q)}{\operatorname{sen}(\pi/p)} \right], \quad (2.43)$$

$$L_3^* = r = \operatorname{arccosh} \left[ \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) \cot\left(\frac{\pi}{q}\right) \right], \quad (2.44)$$

onde  $l$ ,  $a$  e  $r$  são, respectivamente, o comprimento da aresta, do apótema e do raio da circunferência circunscrita de um  $p$ -gon da tesselação  $\{p, q\}$ .

Portanto, um limitante inferior para a distância desse código será dado por

$$d \geq d_{\min} = \left\lceil \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \frac{d_h}{L_2^*}, \frac{d_h}{L_3^*} \right\} \right\rceil.$$

### 2.5.2 Códigos Coloridos Sobre Tesselações Semirregulares

Lembrando que para a construção dos códigos coloridos é necessário que a tesselação seja trivalente e 3-colorível e os polígonos devem ter uma quantidade par de lados, ou seja, as tesselações são da forma  $\{2p, 2q, 2r\}$ . Para as tesselações semirregulares  $\{2p, 2q, 2r\}$  do  $g$ -toro com  $g \geq 2$  é necessário que seja satisfeito

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

Partindo da existência da tesselação regular  $\{p, q\}$ , que não precisa ser trivalente e 3-colorível, e realizando os processos de derivação por Clipping e derivação por Incentro, obtemos as tesselações semirregulares trivalentes  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$ , respectivamente. Se

$q$  for par em  $\{p, q\}$ , então obtemos que  $\{2p, 2p, q\}$  será também 3-colorível, logo, poderá ser usada para a construção de códigos coloridos. Temos que  $\{2p, 2q, 4\}$  sempre será 3-colorível, logo, também poderá ser usada para construir tais códigos.

Apresentamos aqui os códigos construídos nas tesselações  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$  provenientes das tesselações derivadas. Em [24], o autor apresenta também os códigos coloridos obtidos sobre as tesselações  $\{2p, 2q, 2r\}$ , construídas intrinsecamente sobre o  $g$ -toro com  $g \geq 2$ , sem depender da existência da tesselação regular  $\{p, q\}$ .

A construção dos códigos coloridos sobre essas tesselações é praticamente análoga aos códigos coloridos em tesselações regulares que vimos na seção 2.3, onde o polígono regular hiperbólico  $\mathbb{P}'$ , utilizado como modelo planar da superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$  é da forma  $\{4g, 4g\}$ .

Os geradores estabilizadores, a definição do código  $\mathbf{C}$  e a quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$  seguem como em (2.9), (2.10) e (2.12), respectivamente. Desse modo, o parâmetro  $n$  depende da tesselação semirregular. Assim, o autor teve que analisar cada caso individualmente. O parâmetro  $k$  depende somente da topologia da superfície e não da tesselação, por isso, segue que  $k = 4g$ . Porém, analogamente ao que fizemos nas seções passadas, fazendo as substituições apropriadas é possível mostrar em cada caso que esse valor é preservado.

A distância  $d$  dos códigos coloridos em superfícies compactas sobre tesselações semirregulares da forma  $\{2p, 2q, 2r\}$ , será apresentada de modo particular no capítulo 3, pois os resultados referentes a ela são mais uma de nossas contribuições que apresentaremos nesse trabalho.

Esses resultados que apresentaremos no capítulo 3, dependem da quantidade de faces vermelhas, verdes e azuis da tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$ . Por isso, fixamos os  $2p$ -gons de vermelho, os  $2q$ -gons de verde e os  $2r$ -gons de azul. Desse modo, para determinarmos os parâmetros desses códigos é necessário que sejam determinadas as quantidades de faces, vértices, arestas e as quantidades de faces vermelhas, verdes e azuis de cada tipo de tesselação.

Vale observar que em [24] os autores não apresentaram qualquer informação sobre a distância.

**Parâmetros dos Códigos Coloridos da Tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  no  $g$ -toro  $g \geq 2$**

A quantidade  $N_f$  de faces,  $N_e$  de arestas e  $N_v$  de vértices da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  são dadas pelas equações (2.31), (2.32) e (2.33), respectivamente, ou seja,

$$N_f = \frac{4(p+q)(g-1)}{pq-2p-2q}, \quad (2.45)$$

$$N_e = \frac{6pq(g-1)}{pq-2p-2q}, \quad (2.46)$$

$$N_v = \frac{4pq(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.47)$$

Como podemos ver pela Figura 1.4, na tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  temos que as faces vermelhas e verdes são iguais e são dadas por  $\frac{n_f}{2}$  e, as faces azuis são dadas por  $F_b = n_v$ , onde  $n_f$  e  $n_v$  são as quantidades de faces e vértices da tesselação  $\{p, q\}$ , isto é,

$$F_r = F_g = \frac{2q(g-1)}{pq-2p-2q} \quad \text{e} \quad F_b = \frac{4p(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.48)$$

Repare que  $F_r + F_g + F_b = N_f$ , como deveria ser.

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de vértices de  $\{2p, 2p, q\}$ , logo, segue que

$$n = \frac{4pq(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.49)$$

Já a quantidade de qubits codificados  $k$  é dado por  $k = 4g$ .

**Parâmetros dos Códigos Coloridos da Tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  no  $g$ -toro  $g \geq 2$**

A quantidade  $N_f$  de faces,  $N_e$  de arestas e  $N_v$  de vértices da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  são dadas pelas equações (2.37), (2.38) e (2.39), respectivamente, ou seja,

$$N_f = \frac{2(pq+2p+2q)(g-1)}{pq-2p-2q}, \quad (2.50)$$

$$N_e = \frac{12pq(g-1)}{pq-2p-2q}, \quad (2.51)$$

$$N_v = \frac{8pq(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.52)$$

Como podemos ver pela Figura 1.6, na tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  temos que  $F_r = n_f$ ,  $F_g = n_v$  e  $F_b = n_e$ , onde  $n_f$ ,  $n_v$  e  $n_e$  são as quantidades de faces, vértices e arestas da tesselação

$\{p, q\}$ , isto é,

$$F_r = \frac{4q(g-1)}{pq-2p-2q}, \quad F_g = \frac{4p(g-1)}{pq-2p-2q} \quad \text{e} \quad F_b = \frac{2pq(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.53)$$

Repare que  $F_r + F_g + F_b = N_f$ , como deveria ser.

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de vértices de  $\{2p, 2q, 4\}$ , logo, segue que

$$n = \frac{8pq(g-1)}{pq-2p-2q}. \quad (2.54)$$

Já a quantidade de qubits codificados  $k$  é dado por  $k = 4g$ .

# Distância dos Códigos Coloridos

Os autores Soares e Silva fizeram uma construção para a distância  $d$  dos códigos coloridos, que podem ser visto em [62] e [63]. Porém, algum tempo depois foi apontado por Markus Grass uma possível falha nessa construção, mais precisamente no caso com  $g = 2$  e  $p = 8$ , o que foi comprovado com a nossa ajuda realizando a construção dos geradores estabilizadores independentes do código  $\{8, 3\}$  no bitoro.

Eles haviam determinado um limitante inferior para a distância obtendo um código  $[16, 8, 4]$  na tesselação  $\{8, 3\}$  no bitoro. Porém, determinando os geradores estabilizadores ou até mesmo observando a tesselação, a qual pode ser vista na Figura 3.1, é possível perceber que a distância será, na verdade,  $d = 2$  e não 4, como havia sido determinado. Logo, o código colorido possui parâmetros  $[16, 8, 2]$  e não  $[16, 8, 4]$  como apontado.

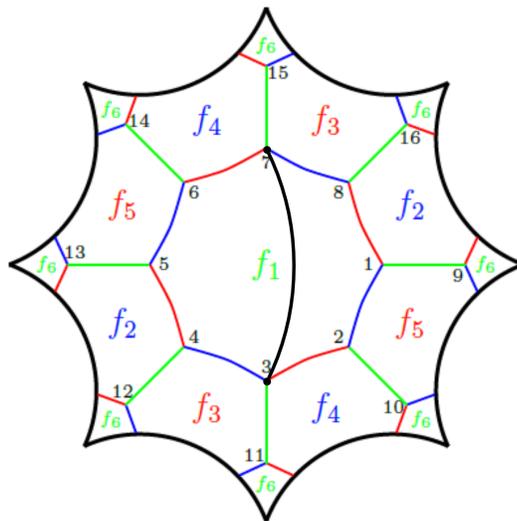


Figura 3.1: Tesselação  $\{8, 3\}$  no bitoro, onde é possível ver que a distância será  $d = 2$ .

Apresentaremos neste capítulo, a nossa primeira contribuição que veremos nesse trabalho. Primeiramente, fornecemos uma condição suficiente para que a distância dos códigos coloridos sobre tesselações regulares seja exatamente  $d = 2$ , a qual será dada em relação a quantidade de faces e vértices da tesselação. Em seguida forneceremos um limitante superior para a distância dos códigos coloridos, também sobre tesselações regulares. Esse limitante é dado em função da quantidade de faces e do tipo de tesselação  $\{p, 3\}$  que estamos considerando. Desse modo, para ambos os resultados não importa a orientação da superfície. Isso faz com que esses resultados possam ser usados tanto para os códigos coloridos em superfícies compactas orientáveis visto na seção 2.3, quanto para os códigos coloridos em superfícies compactas não-orientáveis visto na seção 2.4.

Esse mesmo limitante superior que apresentaremos para os códigos coloridos sobre tesselações regulares, também é válido tanto para os códigos coloridos sobre tesselações semirregulares, visto na seção 2.5, quanto para os nossos códigos coloridos em superfícies não-orientáveis sobre tesselações semirregular, os quais apresentaremos no capítulo 4. Porém, como o limitante é dado em função da quantidade de faces e do tipo de tesselação, e temos que a quantidade de faces vermelhas, verdes e azuis não são necessariamente iguais, precisaremos adaptar o limitante para esse caso. Também fazendo uma pequena adaptação, temos que a condição suficiente para que a distância seja  $d = 2$  continua válida nesse caso.

Para facilitar o entendimento de ambos os casos, dividiremos este capítulo da seguinte forma. Na seção 3.1, apresentaremos a distância dos códigos coloridos sobre as tesselações regulares. Já na seção 3.2, apresentaremos a distância dos códigos coloridos sobre as tesselações semirregulares.

## 3.1 Distância dos Códigos Coloridos Sobre Tesselações Regulares

Antes de apresentarmos uma condição suficiente para que a distância mínima dos códigos coloridos seja exatamente  $d = 2$ , veremos um resultado que garante que a quantidade de faces vermelhas, verdes e azuis em uma tesselação trivalente e 3-colorível  $\{p, 3\}$  são iguais.

Primeiramente lembramos que o número de faces, arestas e vértices de uma tesselação  $\{p, 3\}$  em um  $g$ -toro com  $g \geq 2$  é dado por:

$$n_f = \frac{12(g-1)}{p-6}, \quad n_e = \frac{6p(g-1)}{p-6} \quad \text{e} \quad n_v = \frac{4p(g-1)}{p-6}. \quad (3.1)$$

**Proposição 3.1.** *A quantidade de faces verdes  $F_g$ , vermelhas  $F_r$  e azuis  $F_b$  em uma tesselação trivalente e 3-colorível  $\{p, 3\}$  são iguais.*

*Demonstração.* De fato, sejam  $E_i$  e  $F_i$  com  $i \in \{r, g, b\}$  a quantidade de arestas e faces de uma única cor, respectivamente. Como de cada vértice emanam 3 arestas, sendo uma de cada cor, e cada aresta possui somente dois vértices, segue que

$$E_r = E_g = E_b = \frac{n_v}{2}.$$

Temos também que de cada face vermelha emanam  $p$  arestas vermelhas. Como cada aresta vermelha está ligando 2 faces vermelhas, segue que

$$E_r = \frac{pF_r}{2}.$$

Mas  $E_r = \frac{n_v}{2}$ . Logo,

$$\frac{n_v}{2} = E_r = \frac{pF_r}{2} \Leftrightarrow F_r = \frac{n_v}{p}.$$

Analogamente, temos que  $F_g = F_b = \frac{n_v}{p}$ .

Portanto,

$$F_r = F_g = F_b = \frac{n_v}{p} = \frac{4(g-1)}{p-6} = \frac{n_f}{3}.$$

■

Sejam  $f_{g_1}, f_{g_2}, \dots, f_{g_t}, f_{r_1}, f_{r_2}, \dots, f_{r_t}$  e  $f_{b_1}, f_{b_2}, \dots, f_{b_t}$ , as faces verdes, vermelhas e azuis, respectivamente, onde  $t = \frac{n_f}{3}$ .

Agora, dado um vértice  $v_1$  qualquer, temos que existe uma única tripla de faces  $\{f_{g_i}, f_{r_j}, f_{b_l}\}$  com  $i, j, l \in \{1, \dots, \frac{n_f}{3}\}$  tal que  $v_1$  pertence as três faces. Escreveremos nesse caso que  $v_1 \in \{f_{g_i}, f_{r_j}, f_{b_l}\}$ . Caso exista  $v_2 \in \{f_{g_i}, f_{r_j}, f_{b_l}\}$ , com  $v_2 \neq v_1$ , então se tomarmos  $\overline{X} = X_1 X_2$ , temos que  $\overline{X}$  comuta com os operadores face, porém não é um estabilizador. Logo, deverá ser um operador lógico. Assim, a distância de um tal código será  $d = 2$ , pois menor do que 2

não é possível, já que um operador da forma  $X_j$  ou  $Z_j$  vai anticomutar com os estabilizadores que contêm o vértice  $v_j$ .

Antes de enunciarmos a condição suficiente para que a distância do código seja  $d = 2$ , observe que a quantidade de possíveis triplas de faces distintas (uma face de cada cor) é dado por

$$h = F_g F_r F_b = \left( \frac{4(g-1)}{p-6} \right)^3. \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.2.** Para  $n_f = 3$  temos que  $F_g = 1$ , logo,  $h = 1^3 = 1$ . Para  $n_f = 6$  temos que  $F_g = 2$ , logo,  $h = 2^3 = 8$ . Para  $n_f = 9$  temos que  $F_g = 3$ , logo,  $h = 3^3 = 27$ . Para  $n_f = 12$  temos que  $F_g = 4$ , logo,  $h = 4^3 = 64$ , e assim por diante.

**Teorema 3.3.** Sejam  $h$  como dado na equação (3.2) e  $n_v$  a quantidade de vértices da tesselação (qubits do código). Uma condição suficiente para que a distância do código colorido seja sempre  $d = 2$  é que  $h < n_v$ .

*Demonstração.* De fato, se  $h < n_v$ , ou seja, se a quantidade de triplas de faces distintas (uma de cada cor) for menor do que a quantidade de vértices, então suponha sem perda de generalidade que cada uma dessas triplas possui pelo menos um vértice. Porém, após fazermos isso vai sobrar pelo menos um vértice, pois  $h < n_v$ . Logo, esse vértice vai pertencer as três faces de uma tripla que já possui um outro vértice. Desse modo garantimos que vai existir pelo menos uma tripla de faces distintas (uma de cada cor) com no mínimo dois vértices distintos em comum. Portanto, teremos um operador lógico de peso 2. ■

**Exemplo 3.4.** Para  $g = 2$  temos somente dois casos de tesselações:  $\{8, 3\}$  e  $\{10, 3\}$ .

Para a tesselação  $\{8, 3\}$  temos  $n_f = 6$ . Sejam  $f_{g_1}, f_{g_2}$  as faces verdes,  $f_{r_1}, f_{r_2}$  as faces vermelhas e  $f_{b_1}, f_{b_2}$  as faces azuis. Logo, existem  $h = 2^3 = 8$  triplas distintas possíveis:

$$\begin{aligned} & \{f_{g_1}, f_{r_1}, f_{b_1}\}, \{f_{g_1}, f_{r_1}, f_{b_2}\}, \{f_{g_1}, f_{r_2}, f_{b_1}\}, \{f_{g_1}, f_{r_2}, f_{b_2}\}, \\ & \{f_{g_2}, f_{r_1}, f_{b_1}\}, \{f_{g_2}, f_{r_1}, f_{b_2}\}, \{f_{g_2}, f_{r_2}, f_{b_1}\}, \{f_{g_2}, f_{r_2}, f_{b_2}\}. \end{aligned}$$

A quantidade de vértices nesse caso será

$$n_v = \frac{pn_f}{3} = \frac{8 \cdot 6}{3} = 16.$$

Assim, podemos afirmar que pelo menos uma das triplas acima terá no mínimo dois vértices distintos em comum. Nesse caso sabemos que cada um deles possuem dois vértices distintos em comum, basta olharmos a Figura 3.1. Logo, a distância será  $d = 2$ .

**Corolário 3.5.** *Considere um código colorido em uma superfície compacta com gênero  $g \geq 2$ . Se a quantidade de faces  $n_f$  for igual a 3, 6 ou 9 então a distância do código será sempre  $d = 2$ .*

*Demonstração.* De fato, para  $n_f = 3$  temos que  $n_v = p$  e  $h = 1$ . Como  $p \geq 8$  segue que  $h = 1 < p = n_v$ , logo, pelo Teorema 3.3 concluímos que  $d = 2$ .

Para  $n_f = 6$  temos que  $n_v = 2p$  e  $h = 8$ . Como  $p \geq 8$  segue que  $h = 8 < 2p = n_v$ , logo, segue pelo Teorema 3.3 que  $d = 2$ .

Por fim, para  $n_f = 9$  temos que  $n_v = 3p$  e  $h = 27$ . Veja que se  $p = 8$  então  $h = 27 > 24 = n_v$ . Mas nesse caso,  $p$  não pode ser igual a 8, pois caso  $p = 8$  temos que

$$9 = \frac{12(g-1)}{8-6} \Leftrightarrow 9 = 6(g-1) \Leftrightarrow g = \frac{5}{2},$$

o que é um absurdo. Assim,  $p \geq 10$ , e com isso segue que  $h = 27 < 30 \leq n_v$ . Logo, pelo Teorema 3.3, segue que  $d = 2$ .

Portanto, se  $n_f$  for igual a 3, 6 ou 9 temos que  $d = 2$ . ■

**Observação 3.6.** *Esse método visto no Teorema 3.3 pode ser usado para qualquer valor de  $n_f$ , porém  $h < n_v$  vale somente para alguns valores de  $g$  e  $p$ . Por exemplo, para  $n_f = 12$  temos que  $n_v = 4p$  e  $h = 64$ . Para que  $64 = h < n_v = 4p$  ocorra, devemos ter  $p \geq 18$ , logo  $g \geq 13$ . Assim, pelo Teorema 3.3, quando  $n_f = 12$  também podemos concluir que  $d = 2$  desde que  $p \geq 18$  e  $g \geq 13$ . Seguindo a construção dada em [63] para  $p = 18$  e  $g = 13$  teríamos  $d = 4$ , o que não é verdade.*

**Corolário 3.7.** *A distância do código colorido será  $d = 2$  para quaisquer valores de  $g$  e  $p$  se*

$$16(g-1)^2 < p(p-6)^2.$$

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.3 que a distância do código colorido será  $d = 2$  se  $h < n_v$ , onde  $h$  é dado em (3.2) e  $n_v$  é dado em (2.16). Logo,

$$\begin{aligned} h < n_v &\Leftrightarrow \left(\frac{4(g-1)}{p-6}\right)^3 < \frac{4p(g-1)}{p-6} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4(g-1)}{p-6}\right)^2 < p \\ &\Leftrightarrow 16(g-1)^2 < p(p-6)^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos o desejado. ■

**Observação 3.8.** Como  $h = \left(\frac{n_f}{3}\right)^3$  e  $n_v = \frac{pn_f}{3}$ , segue que

$$h < n_v \Leftrightarrow \left(\frac{n_f}{3}\right)^3 < \frac{pn_f}{3} \Leftrightarrow n_f^2 < 9p.$$

**Exemplo 3.9.** Se quisermos saber quando que um código colorido com 12 faces terá distância  $d = 2$ , basta usarmos a observação 3.8. Desse modo, temos que

$$12^2 < 9p \Leftrightarrow 144 < 9p \Leftrightarrow p > 16.$$

Assim, se tivermos  $n_f = 12$  com  $p > 16$ , teremos  $d = 2$  não importando o gênero da superfície.

Infelizmente não conseguimos utilizar esse método de maneira que englobe todos os códigos coloridos. Por isso, forneceremos um limitante superior para a distância mínima desses códigos.

**Observação 3.10.** Seja  $\beta = \{f_1, f_2, \dots, f_{n_f/3}\}$  o conjunto de todas as faces verdes da tesselação  $\{p, 3\}$ . Considerando uma aresta verde dessa tesselação, ela conecta duas faces verdes, digamos  $f_i$  e  $f_j$  de  $\beta$  e contém dois qubits. Quando escrevermos  $f_i \longleftrightarrow f_j$ , quer dizer que as faces  $f_i$  e  $f_j$  estão conectadas por uma aresta verde da tesselação. Utilizaremos isso na demonstração dos próximos resultados.

**Proposição 3.11.** Se  $\{p, 3\}$  é uma tesselação 3-colorível, tal que  $\frac{n_f}{3} \leq p$ , então a distância do código colorido subjacente à esta tesselação é  $d \leq 4$ .

*Demonstração.* De fato, fixe a face verde  $f_1 \in \beta$ . Dela emanam  $p$  arestas verdes conectando outras faces verdes de  $\beta$ . Sejam  $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p} \in \beta$  essas faces, ou seja,

$$f_1 \longleftrightarrow f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}.$$

(1) Se  $i_j = 1$  para algum  $j = 1, \dots, p$ , então teremos uma aresta verde que conecta  $f_1$  nela mesma. Logo, neste caso,  $d = 2$ .

(2) Se  $i_j \neq 1$  para todo  $j = 1, \dots, p$ , como temos  $p$  arestas distintas que emanam de  $f_1$  e no máximo  $p - 1$  faces distintas possíveis para a chegada dessas arestas, segue que para pelo menos um  $l \in \{1, \dots, p\}$ , vai existir um  $u \in \{1, \dots, p\}$  com  $u \neq l$  tal que  $f_{i_l} = f_{i_u}$ . Suponha sem perda de generalidade que  $f_{i_l} = f_{i_u} = f_2$ . Assim, existem duas arestas verdes distintas ligando as faces  $f_1$  e  $f_2$ , ou seja,

$$f_1 \xleftrightarrow{e_1} f_2 \xleftrightarrow{e_2} f_1$$

forma um ciclo homologicamente não-trivial. Logo, o operador proveniente desse ciclo será um operador lógico de peso 4 e, assim,  $d \leq 4$ . Portanto, se  $\frac{n_f}{3} \leq p$ , então  $d \leq 4$ . ■

Seguindo um raciocínio semelhante, conseguimos determinar alguns casos onde a distância será  $d \leq 6$ , ou seja, conseguimos limitar superiormente por 6.

**Exemplo 3.12.** *Considere a tesselação  $\{8, 3\}$ . Não existe  $n_f = 27$  para  $p = 8$ , pois  $27 \neq 6(g - 1)$ . Mas é possível  $n_f = 30$ , logo temos 10 faces de cada cor. Sejam  $f_1, \dots, f_{10}$  todas as 10 faces verdes dessa tesselação. Fixe a face  $f_1$  e perceba que dela emanam 8 arestas verdes ligando  $f_1$  à outras faces verdes. Se duas dessas arestas distintas ligam  $f_1$  a uma mesma face, digamos  $f_2$ , então temos um operador com peso 4. Como ele não é estabilizador e comuta com os estabilizadores, concluímos que será um operador lógico. Assim, a distância nesse caso será  $d \leq 4$ .*

*Caso essas arestas conectam  $f_1$  somente com faces distintas, pelo fato de termos 9 faces restando (pois temos 10 faces no total), segue que sobrará uma única face que ainda não foi conectada. Suponha sem perda de generalidade que a face que sobrou foi  $f_{10}$ . Fixando agora a face  $f_9$  que está conectada com  $f_1$ . Temos também 8 arestas que emanam de  $f_9$ . Se duas dessas arestas distintas ligam  $f_9$  a uma mesma face, digamos  $f_2$ , então segue que teremos*

um operador lógico com peso 4. Logo,  $d \leq 4$ . Caso essas arestas conectam  $f_9$  somente com faces distintas, segue que  $f_9$  está conectada com  $f_1, f_{i_1}, \dots, f_{i_7}$ , onde  $f_{i_j}$  é distinta de  $f_1$  para  $j = 1, \dots, 7$  e  $f_{i_j} \neq f_{i_l}$  sempre que  $j \neq l$ . Como a única face que ainda não apareceu foi a  $f_{10}$ , dessas 7 faces restantes (já sabemos que  $f_1$  se conecta) que se conectam com  $f_9$ , pelo menos 6 delas já se conectaram com  $f_1$ . Suponha que  $f_{i_1} = f_2$ . Logo,  $f_9$  está conectada com  $f_2$ . Desse modo, temos

$$f_1 \xleftrightarrow{e_1} f_9 \xleftrightarrow{e_2} f_2 \xleftrightarrow{e_3} f_1.$$

Portanto, teremos um operador com peso 6 que comuta com todos os estabilizadores, mas não é um estabilizador, ou seja, será um operador lógico. Assim,  $d \leq 6$ .

Disso, podemos obter a seguinte proposição cuja demonstração é semelhante ao que acabamos de fazer no Exemplo 3.12.

**Proposição 3.13.** *Se  $\{p, 3\}$  é uma tesselação 3-colorível tesselandando um  $g$ -toro com  $g \geq 2$ , tal que  $\frac{n_f}{3} \leq 2p - 1$ , então a distância do código colorido subjacente à esta tesselação é  $d \leq 6$ .*

*Demonstração.* Analogamente a Proposição 3.11, fixe a face verde  $f_1 \in \beta$ . Dela emanam  $p$  arestas verdes conectando outras faces verdes de  $\beta$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\frac{n_f}{3} > p$ , pois caso contrário estaríamos dentro da Proposição 3.11. Sejam  $f_{i_1}, \dots, f_{i_p} \in \beta$  essas faces verdes, ou seja,

$$f_1 \longleftrightarrow f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}.$$

- (1) Se  $i_j = 1$  para algum  $j = 1, \dots, p$ , então teremos uma aresta verde conectando  $f_1$  nela mesma. Logo, neste caso,  $d = 2$ .
- (2) Se  $i_j \neq 1$  para todo  $j = 1, \dots, p$ , como temos  $p$  arestas distintas que emanam de  $f_1$  e no mínimo  $p$  faces distintas possíveis para a chegada dessas arestas, caso existam  $l, u \in \{1, \dots, p\}$  distintos tais que  $f_{i_l} = f_{i_u}$ , então vão existir duas arestas distintas ligando as faces  $f_1$  e  $f_{i_l}$ . Logo,  $d \leq 4$ .
- (3) Se  $f_{i_l} \neq f_{i_u}$  para todo  $l, u \in \{1, \dots, p\}$  distintos, suponha sem perda de generalidade que

$$f_1 \longleftrightarrow f_2, f_3, \dots, f_{p+1}.$$

Agora fixe a face verde  $f_{p+1} \in \beta$ . Dela também emanam  $p$  arestas verdes da tesselação conectando outras faces verdes de  $\beta$ . Sejam  $f_1, f_{j_1}, \dots, f_{j_{p-1}}$  essas faces, ou seja,

$$f_{p+1} \longleftrightarrow f_1, f_{j_1}, \dots, f_{j_{p-1}}.$$

Realizando os processos (1) e (2) agora com  $j_t = p+1$  em (1), caso algum deles seja verdadeiro, temos que  $d = 2$  ou  $d \leq 4$ , respectivamente.

Se  $f_{j_l} \neq f_{j_u}$  para todo  $l, u \in \{1, \dots, p-1\}$  distintos, perceba que, como  $n_f/3 \leq 2p-1$  e já utilizamos  $p+1$  faces distintas  $(f_1, f_2, \dots, f_{p+1})$ , então restam no máximo  $h = p-2$  faces distintas possíveis para se conectar com  $f_{p+1}$ . Porém, emanam  $p$  arestas de  $f_{p+1}$ , das quais uma já está conectada com  $f_1$ , sobrando assim  $p-1$  arestas para conectar  $p-2$  faces distintas possíveis. Disso, concluímos que pelo menos uma das faces  $f_{j_u}$  já apareceram antes. Do fato de que  $f_{j_l} \neq f_{j_u}$  para todo  $l, u \in \{1, \dots, p-1\}$  distintos e  $f_1$  aparece uma única vez, segue que essa última face que aparece deve pertencer ao conjunto  $\{f_2, f_3, \dots, f_p\}$ , ou seja, é uma face que se conecta com  $f_1$ . Suponha que seja  $f_2$ . Logo,

$$f_1 \xleftrightarrow{e_1} f_{p+1} \xleftrightarrow{e_2} f_2 \xleftrightarrow{e_3} f_1$$

forma um ciclo homologicamente não-trivial. Portanto,  $d \leq 6$  e, assim, segue o desejado. ■

Podemos generalizar as Proposições 3.11 e 3.13 da seguinte forma.

**Teorema 3.14.** *A distância  $d$  de um código quântico colorido em superfícies compactas com  $g \geq 2$  sobre tesselações regulares  $\{p, 3\}$  com  $p \geq 8$  par, é limitada superiormente por  $d \leq 4 + 2m$  se  $\frac{n_f}{3} \leq (m+1)p - m$ , onde  $m = 0, 1, 2, \dots$  e  $n_f$  é a quantidade de faces da tesselação.*

*Demonstração.* Queremos provar que se  $\frac{n_f}{3} \leq (m+1)p - m$  então  $d \leq 4 + 2m$ . Faremos isso por indução sobre  $m$ .

Para  $m = 0$  e  $m = 1$ , temos que o resultado segue pelas Proposições 3.11 e 3.13.

Suponha que seja verdadeiro para  $m$  e vamos provar que vale para  $m+1$ .

Como vale para  $m$ , suponha s.p.g que a sequência de faces distintas conectadas seja

$$f_1 \xleftrightarrow{e_1} f_{p+1} \xleftrightarrow{e_2} f_{2p} \xleftrightarrow{e_3} f_{3p-1} \xleftrightarrow{e_4} \dots \xleftrightarrow{e_m} f_{(mp-m+2)} \xleftrightarrow{e_{m+1}} f_j \xleftrightarrow{e_{m+2}} f_1. \quad (3.3)$$

Suponha que  $(m+1)p - m < \frac{n_f}{3}$ , pois caso contrário pela hipótese de indução temos que  $d \leq 4 + 2m < 4 + 2m + 2$ , logo, teríamos o desejado.

Como  $\frac{n_f}{3} > (m+1)p - m$  segue que  $\frac{n_f}{3}$  é no mínimo  $(m+1)p - m + 1$ . Logo, considerando que todas as  $p$  faces conectadas com  $f_{(mp-m+2)}$  são distintas temos que  $f_j$  na sequência (3.3) é  $f_{(m+1)p-m+1}$ . Realizando os mesmos processos que foram realizados nos casos anteriores, temos que se aparecer conectado com a face  $f_{(m+1)p-m+1}$  qualquer face conectada às faces anteriores que não seja  $f_1$ , então fecharemos o ciclo e  $d \leq 4 + 2m$ , o que também satisfaz o que desejamos. Como existem no máximo  $\frac{n_f}{3} = (m+2)p - (m+1)$  faces e supondo que as  $p$  faces conectadas com  $f_{(m+1)p-m+1}$  não aparecem conectadas com nenhuma das faces da sequência, exceto  $f_1$ , segue que

$$f_{(m+1)p-m+1} \longleftrightarrow f_{(mp-m+2)}, \underbrace{f_{(m+1)p-m+1+1}, \dots, f_{(m+2)p-(m+1)}}_{p-2}, f_j,$$

onde  $f_j$  é alguma das faces que já foram conectadas. Se  $f_j \in \{f_2, \dots, f_p\}$ , então  $f_j \longleftrightarrow f_1$ .

Portanto,

$$f_1 \xleftrightarrow{e_1} f_{p+1} \xleftrightarrow{e_2} f_{2p} \xleftrightarrow{e_3} f_{3p-1} \xleftrightarrow{e_4} \dots \xleftrightarrow{e_m} f_{(mp-m+2)} \xleftrightarrow{e_{m+1}} f_{(m+1)p-m+1} \xleftrightarrow{e_{m+2}} f_j \xleftrightarrow{e_{m+3}} f_1,$$

o que implica em  $d \leq 4 + 2(m+1)$ . Se  $f_j$  pertencer à algum dos outros conjuntos de faces, então pela hipótese de indução seguirá o desejado. ■

**Exemplo 3.15.** Considere o caso  $\frac{n_f}{3} \leq 3p - 2$  então  $d \leq 8$ . Se  $n_f = 48$ , ou seja,  $\frac{n_f}{3} = 16$  e  $p = 8$ , podemos ter um operador de peso 8

$$f_1 \xleftrightarrow{e_1} f_9 \xleftrightarrow{e_2} f_{16} \xleftrightarrow{e_3} f_2 \xleftrightarrow{e_4} f_1.$$

Porém, todos os geradores estabilizadores tem peso 8 e os correspondentes as faces azuis e vermelhas podem ser obtidos através dessa sequência. Garantimos que existe um operador lógico de peso 8 da seguinte maneira.

Seja  $\beta = \{f_1, \dots, f_{16}\}$ . Fixe a face  $f_1$  e suponha que  $f_1 \longleftrightarrow f_2, f_3, \dots, f_9$ . Fixamos agora  $f_9$  e supomos que  $f_9 \longleftrightarrow f_1, f_{i_1}, \dots, f_{i_7}$ , onde  $i_j \in \{10, \dots, 16\}$  para  $j = 1, \dots, 7$ , pois caso algum dos  $i_j \in \{2, \dots, 8\}$  então teríamos um operador de peso 6, logo  $d \leq 6$ . Desse modo, temos que  $f_1 \longleftrightarrow f_2, f_3, \dots, f_9$  e  $f_9 \longleftrightarrow f_1, f_{i_1}, \dots, f_{i_7}$ .

Agora fixamos  $f_{16}$ . Temos que  $f_{16} \longleftrightarrow f_9, f_{l_1}, \dots, f_{l_7}$ . Se para algum  $j = 1, \dots, 7$  tivermos  $l_j = 1$  ou  $l_j \in \{10, 11, \dots, 15\}$  então, em ambos os casos temos  $d \leq 6$ .

Assim, supondo que  $l_j \in \{2, \dots, 8\}$  para  $j = 1, \dots, 7$ , ou seja,  $f_{16} \longleftrightarrow f_9, f_2, f_3, \dots, f_8$  temos

$$\begin{aligned} f_1 &\longleftrightarrow f_9 \longleftrightarrow f_{16} \longleftrightarrow f_2 \longleftrightarrow f_1, \\ f_1 &\longleftrightarrow f_9 \longleftrightarrow f_{16} \longleftrightarrow f_3 \longleftrightarrow f_1, \\ &\vdots \\ f_1 &\longleftrightarrow f_9 \longleftrightarrow f_{16} \longleftrightarrow f_8 \longleftrightarrow f_1. \end{aligned}$$

Como uma aresta pertence a somente 2 faces, segue que desses 7 ciclos que encontramos, somente 1 deles pode ser homologicamente trivial, ou seja, somente 1 deles pode ser um gerador estabilizador. Pois a aresta que parte de  $f_1$  para  $f_9$  pertence a duas faces distintas e a aresta que parte de  $f_9$  para  $f_{16}$  também pertence a duas faces distintas, onde uma dessas duas últimas faces é a mesma de uma das duas primeiras. Caso isso não ocorra, trocamos  $f_{16}$  por alguma das faces  $f_{10}, \dots, f_{15}$  de modo que isso ocorra. Portanto, temos um operador lógico de peso 8 e, assim,  $d \leq 8$ .

## 3.2 Distância dos Códigos Coloridos Sobre Tesselações Semirregulares

Dada uma tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  em um  $g$ -toro com  $g \geq 2$ , como pode ser visto em [24], temos que a quantidade de faces, arestas e vértices são dados, respectivamente por

$$N_f = \frac{2(pq + pr + qr)(g - 1)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad (3.4)$$

$$N_e = \frac{6pqr(g - 1)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad (3.5)$$

$$N_v = \frac{4pqr(g - 1)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (3.6)$$

Fixamos os  $2p$ -gons de vermelho, os  $2q$ -gons de verde e os  $2r$ -gons de azul, e denotamos a quantidade de faces vermelhas por  $F_R$ , verdes  $F_G$  e azuis por  $F_B$ . Logo, temos que as

quantidades de faces são dadas por  $\frac{N_v}{2p}$ ,  $\frac{N_v}{2q}$  e  $\frac{N_v}{2r}$ , respectivamente, isto é,

$$F_R = \frac{2qr(g-1)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad F_G = \frac{2pr(g-1)}{pqr - pq - pr - qr} \quad \text{e} \quad F_B = \frac{2pq(g-1)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (3.7)$$

O Teorema 3.3, o qual fornece uma condição suficiente para que a distância mínima dos códigos coloridos seja exatamente  $d = 2$ , continua válida para as tesselações semirregulares, com a diferença de que  $h = F_R F_G F_B$  é dado por

$$h = \frac{8p^2 q^2 r^2 (g-1)^3}{(pqr - pr - pq - qr)^3}. \quad (3.8)$$

**Corolário 3.16.** *Suponha que exista a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  em um  $g$ -toro. Se*

$$2pqr(g-1)^2 < (pqr - pq - pr - qr)^2,$$

*então a distância do código colorido será  $d = 2$ .*

A demonstração desse resultado segue de maneira análoga ao Corolário 3.7.

O limitante superior para a distância  $d$  desses códigos, segue de maneira semelhante ao que fizemos no caso regular. Como vimos na Proposição 3.1, no caso regular, a quantidade de faces vermelhas, verdes e azuis eram iguais e todas tinham a mesma quantidade de lados, então bastava analisar para uma cor de face, ou seja, se  $\frac{n_f}{3} \leq (m+1)p - m$  então teríamos  $d \leq 4 + 2m$ . Já no caso semirregular, na maioria das vezes, a quantidade de faces vermelhas, verdes e azuis são distintas e a quantidade de lados dos polígonos também são distintos. Desse modo, devemos analisar cada tipo de face de maneira separada.

Seguindo de maneira análoga ao feito no caso regular, porém agora para cada tipo de face de maneira separada, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.17.** *A distância  $d$  de um código quântico colorido em superfícies compactas com  $g \geq 2$  sobre tesselações semirregulares da forma  $\{2p, 2q, 2r\}$  com  $p, q, r \neq 2$ , é limitada superiormente por  $d \leq 4 + 2m$  se  $F_R \leq 2p(m+1) - m$  ou  $F_G \leq 2q(m+1) - m$  ou  $F_B \leq 2r(m+1) - m$ , onde  $m = 0, 1, 2, \dots$  e  $F_R$ ,  $F_G$  e  $F_B$  são as quantidades de faces vermelhas, verdes e azuis.*

A demonstração desse resultado é análoga ao feito no Teorema 3.14, porém aqui temos 3 desigualdades para analisar, mas basta que somente uma seja satisfeita para termos que  $d \leq 4 + 2m$ .

Observe que o caso  $p, q$  ou  $r$  igual a 2 foi excluído. Para esse caso temos uma pequena diferença nas desigualdades. Suponha s.p.g que  $r = 2$ , ou seja, os 4-gons são azuis. Perceba pela Figura 3.2 que por causa dos 4-gons teremos que duas arestas distintas verdes e vermelhas ligam duas mesmas faces, resultando em um estabilizador dado pelo 4-gon que é englobado por essas arestas. Assim, não teremos mais que cada aresta que emana de, por exemplo, um  $2p$ -gon pode ligar uma face distinta, já que duas arestas distintas ligam uma mesma face. Desse modo, em vez de considerarmos as  $2p$  arestas que emanam de um  $2p$ -gon, iremos considerar somente  $p$  arestas. Do mesmo modo, para os  $2q$ -gons, consideramos somente  $q$  arestas. Para os 4-gons não temos esse problema. Logo, um limitante superior para a distância será dado pelo seguinte teorema:

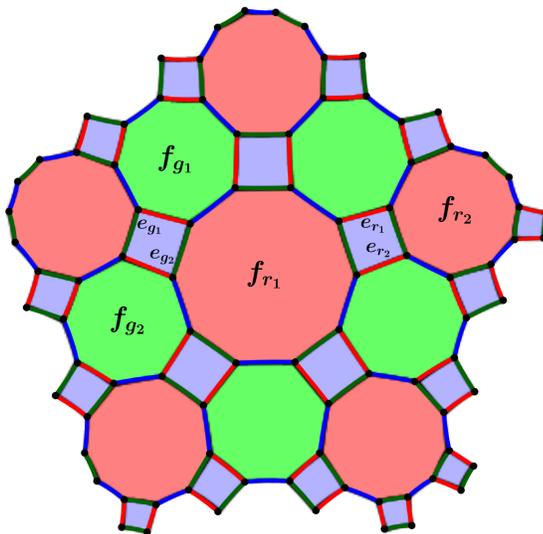


Figura 3.2: As arestas distintas  $e_{r_1}$  e  $e_{r_2}$  estão ligando as faces  $f_{r_1}$  e  $f_{r_2}$  e as arestas distintas  $e_{g_1}$  e  $e_{g_2}$  estão ligando as faces  $f_{g_1}$   $f_{g_2}$ .

**Teorema 3.18.** *A distância  $d$  de um código quântico colorido em superfícies compactas com  $g \geq 2$  sobre tesselações semirregulares da forma  $\{2p, 2q, 4\}$  é limitada superiormente por  $d \leq 4 + 2m$  se  $F_R \leq (m + 1)p - m$  ou  $F_G \leq (m + 1)q - m$  ou  $F_B \leq 4(m + 1) - m$ , onde  $m = 0, 1, 2, \dots$  e  $F_R, F_G$  e  $F_B$  são as quantidades de faces vermelhas, verdes e azuis.*

A demonstração desse teorema segue de maneira análoga ao Teorema 3.14 fazendo as alterações apropriadas.

# Códigos de Superfície e Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ Sobre Tesselações Semirregulares

---

Inspirados em Bhowmik, Maity e Silva [10], que fizeram os códigos de superfície e coloridos em superfícies compactas não-orientáveis com  $g \geq 3$ , sobre tesselações regulares e em Copatti [24], que fez os códigos de superfície e coloridos em superfícies compactas orientáveis com  $g \geq 2$ , sobre tesselações semirregulares, vamos realizar neste capítulo a construção de códigos quânticos de superfície e coloridos em superfícies compactas não-orientáveis com  $g \geq 3$ , utilizando tesselações semirregulares.

Os Teoremas 2.30 e 2.32 continuam válidos para as tesselações semirregulares. Por isso, a novidade estará nos códigos em superfícies não-orientáveis de gênero ímpar, já que para gênero par, vão coincidir com os mesmos códigos construídos em [24].

Esses códigos sobre superfícies não-orientáveis são uma das nossas principais contribuições que apresentaremos neste trabalho.

Infelizmente, não temos nenhum resultado como foi usado em [24], que garante a existência de várias famílias de tesselações semirregulares em superfícies não-orientáveis. Mas mesmo assim, conseguimos garantir algumas famílias provenientes da existência da tesselação regular  $\{p, q\}$ , pois como pode ser visto em [10], não temos restrições para a existência desse tipo de

tesselação em uma superfície não-orientável, a não ser o fato de que a quantidade de faces dada em (2.19) seja um número inteiro.

Conseguimos garantir a existência de mais algumas famílias de tesselações semirregulares, dada a existência de certos triângulos e quadriláteros na superfície, os quais são garantidos através de permutações involutórias que satisfazem certas condições.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira. Na seção 4.1, realizaremos a construção dos nossos códigos de superfície sobre as tesselações semirregulares  $\{p, q, p, q\}$ ,  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$ , provenientes da tesselação regular  $\{p, q\}$ . Ainda nesta seção, também construiremos os códigos de superfícies sobre várias tesselações semirregulares que não dependem da existência da tesselação  $\{p, q\}$ . Em seguida, na seção 4.2, apresentaremos a construção dos nossos códigos coloridos sobre as tesselações  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$ , provenientes da tesselação regular  $\{p, q\}$ . Por fim, nesta mesma seção, também construiremos os códigos coloridos sobre as tesselações  $\{2p, 2q, 2r\}$ , que não dependem de  $\{p, q\}$ .

## 4.1 Códigos de Superfície em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ Sobre Tesselações Semirregulares

Faremos nesta seção a construção dos códigos quânticos de superfície em superfícies compactas não-orientáveis  $\mathbb{M}$  com gênero  $g \geq 3$ , sobre tesselações semirregulares. Através dos processos descritos na seção 1.4, dada a existência da tesselação regular  $\{p, q\}$  construiremos os códigos de superfície sobre as tesselações  $\{p, q, p, q\}$ ,  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$ . Construiremos também os códigos de superfície sobre as tesselações  $\{2p, 2q, 2r\}$ ,  $\{2p, q, 2p, r\}$  e  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$ , onde partiremos da existência de certos triângulos hiperbólicos na superfície, os quais são garantidos através da existência de permutações involutórias satisfazendo algumas condições. Partindo da existência de certos quadriláteros na superfície e também utilizando as permutações involutórias, faremos a construção dos códigos sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ . Por fim, faremos a construção dos códigos de superfície sobre as tesselações  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$  e  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$ . Como pode ser visto em [53], essas

duas últimas tesselações existem no plano hiperbólico, mas infelizmente, ainda não conseguimos garantir sua existência em superfícies para um valor qualquer de  $m$ . Porém, caso venham a existir, já temos o processo de construção dos códigos de superfície sobre tais tesselações.

A construção desses códigos de superfície é semelhante a construção em superfícies orientáveis, visto na seção 2.5. As diferenças que aparecem, se devem as mesmas diferenças apresentadas nos códigos de superfície da seção 2.4, ou seja, a região fundamental  $\mathbb{P}'$  da superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  de gênero  $g \geq 3$  é da forma  $\{2g, 2g\}$  e a característica de Euler é  $\chi(\mathbb{M}) = 2 - g$ .

Os geradores estabilizadores, a definição do código  $\mathbf{C}$  e a quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$ , seguem como em (2.1), (2.2) e (2.4), respectivamente. Já os parâmetros  $n$  e  $d$  dependem da tesselação semirregular. Desse modo, assim como em [24], tivemos que analisar cada caso individualmente. O parâmetro  $k$  depende somente da topologia da superfície e não da tesselação, por isso, segue que  $k = g$ , bem como visto na seção 2.4. Porém, fazendo as substituições apropriadas é possível mostrar em cada caso que esse valor é preservado.

Como as tesselações semirregulares  $\{p, q, p, q\}$ ,  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$  são provenientes da tesselação regular  $\{p, q\}$ , sabemos pelo que foi visto na seção 2.4 que a quantidade de faces  $n_f$ , arestas  $n_e$  e vértices  $n_v$  de  $\{p, q\}$  são dados por

$$n_f = \frac{2q(g-2)}{pq-2p-2q}, \quad n_e = \frac{pq(g-2)}{pq-2p-2q} \quad \text{e} \quad n_v = \frac{2p(g-2)}{pq-2p-2q}. \quad (4.1)$$

Assim como no caso orientável, precisamos desses valores para determinarmos a quantidade de faces, arestas e vértices dessas tesselações semirregulares.

A distância  $d$  será limitada inferiormente como visto na seção 2.5, ou seja, tomamos o menor inteiro maior que o mínimo entre o quociente de  $d_h$  pelo comprimento da aresta da tesselação semirregular e o quociente de  $d_h$  pelos comprimentos das arestas da tesselação dual da semirregular, onde  $d_h$  é o comprimento hiperbólico da geodésica ortogonal comum aos lados emparelhados de  $\mathbb{P}'$ , o qual é dado no caso não-orientável por  $d_h = 2 \operatorname{arccosh} \left[ \cot \left( \frac{\pi}{2g} \right) \right]$ .

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{p, q, p, q\}$

Sejam  $N_f$ ,  $N_e$  e  $N_v$  a quantidade de faces, arestas e vértices da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  derivada da tesselação regular  $\{p, q\}$ , as quais são dadas em (2.25), (2.26) e (2.27), respectivamente. Logo, para o caso não-orientável temos que

$$N_f = \frac{(2p + 2q)(g - 2)}{pq - 2p - 2q}, \quad N_e = \frac{2pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q} \quad \text{e} \quad N_v = \frac{pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.2)$$

Repare que de (4.2) segue que  $N_v - N_e + N_f = 2 - g$ , como desejado.

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas, logo, segue que

$$n = \frac{2pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.3)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual, o que já vimos nas seções 1.4 e 2.5. Lembrando que o dual da tesselação  $\{p, q, p, q\}$  é formado por quadriláteros, onde os seus lados tem todos o mesmo tamanho e são dados pelo raio da circunferência circunscrita no  $p$ -gon da tesselação regular  $\{p, q\}$ . Portanto, um limitante inferior para a distância desse código será dado por

$$d_{\min} = \left\lceil \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L^*} \right\} \right\rceil,$$

onde  $L$  e  $L^*$  são dados em (2.29) e (2.30), respectivamente.

Apresentamos na Tabela 4.1 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  do nosso código de superfície sobre a tesselação  $\{p, q, p, q\}$  proveniente da existência da tesselação  $\{p, q\}$ , para os gêneros  $g = 3$  e 5, juntamente com as tesselações  $\{p, q, p, q\}$  utilizadas.

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{2p, 2p, q\}$

Sejam  $N_f$ ,  $N_e$  e  $N_v$  a quantidade de faces, arestas e vértices da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  derivada da tesselação regular  $\{p, q\}$ , as quais são dadas em (2.31), (2.32) e (2.33), respectivamente. Logo, para o caso não-orientável temos que

$$N_f = \frac{(2p + 2q)(g - 2)}{pq - 2p - 2q}, \quad N_e = \frac{3pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q} \quad \text{e} \quad N_v = \frac{2pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.4)$$

$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$	$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$
3	$\{7, 3, 7, 3\}$	$[42, 3, 4]$	5	$\{6, 4, 6, 4\}$	$[36, 5, 4]$
3	$\{8, 3, 8, 3\}$	$[24, 3, 3]$	5	$\{12, 3, 12, 3\}$	$[36, 5, 3]$
3	$\{5, 4, 5, 4\}$	$[20, 3, 3]$	5	$\{15, 3, 15, 3\}$	$[30, 5, 3]$
3	$\{9, 3, 9, 3\}$	$[18, 3, 3]$	5	$\{5, 5, 5, 5\}$	$[30, 5, 3]$
3	$\{12, 3, 12, 3\}$	$[12, 3, 2]$	5	$\{7, 4, 7, 4\}$	$[28, 5, 3]$
3	$\{6, 4, 6, 4\}$	$[12, 3, 2]$	5	$\{8, 4, 8, 4\}$	$[24, 5, 3]$
3	$\{5, 5, 5, 5\}$	$[10, 3, 2]$	5	$\{24, 3, 24, 3\}$	$[24, 5, 2]$
3	$\{8, 4, 8, 4\}$	$[8, 3, 2]$	5	$\{10, 4, 10, 4\}$	$[20, 5, 2]$
3	$\{6, 6, 6, 6\}$	$[6, 3, 2]$	5	$\{6, 6, 6, 6\}$	$[18, 5, 3]$
5	$\{7, 3, 7, 3\}$	$[126, 5, 6]$	5	$\{16, 4, 16, 4\}$	$[16, 5, 2]$
5	$\{8, 3, 8, 3\}$	$[72, 5, 5]$	5	$\{7, 7, 7, 7\}$	$[14, 5, 2]$
5	$\{5, 4, 5, 4\}$	$[60, 5, 5]$	5	$\{12, 6, 12, 6\}$	$[12, 5, 2]$
5	$\{9, 3, 9, 3\}$	$[54, 5, 4]$	5	$\{10, 10, 10, 10\}$	$[10, 5, 2]$

Tabela 4.1: Tesselações e parâmetros dos códigos de superfície em superfícies não-orientáveis sobre a tesselação  $\{p, q, p, q\}$  com  $g = 3$  e  $5$ .

Repare que de (4.4) segue que  $N_v - N_e + N_f = 2 - g$ , como desejado.

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas, logo, segue que

$$n = \frac{3pq(g-2)}{pq-2p-2q}. \quad (4.5)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual, o que também já vimos nas seções 1.4 e 2.5. Lembrando que o dual da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  é formado por triângulos isósceles e suas arestas são iguais a duas vezes o apótema e ao raio da circunferência circunscrita em um  $p$ -gon da tesselação regular  $\{p, q\}$ . Portanto, um limitante inferior para a distância desse código será dado por

$$d_{\min} = \left[ \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \frac{d_h}{L_2^*} \right\} \right],$$

onde  $L$  é dado em (2.35) e  $L_1^*$  e  $L_2^*$  são dados em (2.36).

Apresentamos na Tabela 4.2 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  do nosso código de superfície sobre a tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  proveniente da existência da tesselação  $\{p, q\}$ , para os gêneros  $g = 3$  e  $5$ , juntamente com as tesselações  $\{2p, 2p, q\}$  utilizadas.

$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$	$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$	$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$
3	{6, 6, 7}	[63, 3, 4]	5	{6, 6, 7}	[189, 5, 6]	5	{14, 14, 4}	[42, 5, 2]
3	{14, 14, 3}	[63, 3, 3]	5	{14, 14, 3}	[189, 5, 4]	5	{8, 8, 8}	[36, 5, 3]
3	{6, 6, 8}	[36, 3, 3]	5	{6, 6, 8}	[108, 5, 5]	5	{6, 6, 24}	[36, 5, 2]
3	{16, 16, 3}	[36, 3, 2]	5	{16, 16, 3}	[108, 5, 3]	5	{16, 16, 4}	[36, 5, 2]
3	{8, 8, 5}	[30, 3, 3]	5	{8, 8, 5}	[90, 5, 4]	5	{48, 48, 3}	[36, 5, 1]
3	{10, 10, 4}	[30, 3, 2]	5	{10, 10, 4}	[90, 5, 3]	5	{8, 8, 10}	[30, 5, 2]
3	{6, 6, 9}	[27, 3, 3]	5	{6, 6, 9}	[81, 5, 4]	5	{20, 20, 4}	[30, 5, 2]
3	{18, 18, 3}	[27, 3, 2]	5	{18, 18, 3}	[81, 5, 2]	5	{12, 12, 6}	[27, 5, 2]
3	{8, 8, 6}	[18, 3, 2]	5	{6, 6, 12}	[54, 5, 3]	5	{8, 8, 16}	[24, 5, 2]
3	{6, 6, 12}	[18, 3, 2]	5	{12, 12, 4}	[54, 5, 3]	5	{32, 32, 4}	[24, 5, 1]
3	{12, 12, 4}	[18, 3, 2]	5	{8, 8, 6}	[54, 5, 3]	5	{14, 14, 7}	[21, 5, 2]
3	{24, 24, 3}	[18, 3, 1]	5	{24, 24, 3}	[54, 5, 2]	5	{12, 12, 12}	[18, 5, 2]
3	{10, 10, 5}	[15, 3, 2]	5	{6, 6, 15}	[45, 5, 3]	5	{24, 24, 6}	[18, 5, 1]
3	{8, 8, 8}	[12, 3, 2]	5	{10, 10, 5}	[45, 5, 3]	5	{20, 20, 10}	[15, 5, 1]
3	{16, 16, 4}	[12, 3, 1]	5	{30, 30, 3}	[45, 5, 2]			
3	{12, 12, 6}	[9, 3, 1]	5	{8, 8, 7}	[42, 5, 3]			

Tabela 4.2: Tesselações e parâmetros dos códigos de superfície em superfícies não-orientáveis sobre a tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  com  $g = 3$  e  $5$ .

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{2p, 2q, 4\}$

Sejam  $N_f$ ,  $N_e$  e  $N_v$  a quantidade de faces, arestas e vértices da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  derivada da tesselação regular  $\{p, q\}$ , as quais são dadas em (2.37), (2.38) e (2.39), respectivamente.

Logo, para o caso não-orientável temos que

$$N_f = \frac{(pq + 2p + 2q)(g - 2)}{pq - 2p - 2q}, \quad N_e = \frac{6pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q} \quad \text{e} \quad N_v = \frac{4pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.6)$$

Repare que de (4.6) segue que  $N_v - N_e + N_f = 2 - g$ , como desejado.

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas, logo, segue que

$$n = \frac{6pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.7)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual, o que vimos nas seções 1.4 e 2.5. Lembrando que o dual da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  é formado por triângulos retângulos, onde suas arestas são iguais a metade do comprimento da aresta, ao apótema e ao raio da circunferência circunscrita, de um  $p$ -gon da tesselação regular  $\{p, q\}$ .

Portanto, um limitante inferior para a distância desse código será dado por

$$d_{\min} = \left[ \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \frac{d_h}{L_2^*}, \frac{d_h}{L_3^*} \right\} \right],$$

onde  $L$ ,  $L_1^*$ ,  $L_2^*$  e  $L_3^*$  são dados em (2.41), (2.42), (2.43) e (2.44), respectivamente.

Apresentamos na Tabela 4.3 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  do nosso código de superfície sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  proveniente da existência da tesselação  $\{p, q\}$ , para os gêneros  $g = 3$  e  $5$ , juntamente com as tesselações  $\{2p, 2q, 4\}$  utilizadas.

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{2p, 2q, 2r\}$

Faremos a construção dos códigos de superfície sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$ , a qual não é proveniente da existência da tesselação regular  $\{p, q\}$ . Para garantir a existência de tal tesselação na superfície  $\mathbb{M}$ , devemos primeiramente garantir a existência de uma tesselação formada por triângulos hiperbólicos  $\mathbb{T}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  e  $\frac{\pi}{r}$ , onde no vértice  $i$  existem  $2i$  triângulos todos de ângulos  $\frac{\pi}{i}$  para  $i = p, q, r$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ . Em [25], temos que uma condição necessária e suficiente para que exista uma tesselação formada por tais triângulos na superfície compacta não-orientável  $\mathbb{M}$ , é que existam três permutações involutórias regulares  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$  no grupo simétrico  $S_{\mathbf{X}}$ , isto é, sem pontos fixos, onde  $\mathbf{X}$  é o número de triângulos, tais que essas permutações satisfaçam

$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$	$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$
3	{14, 6, 4}	[126, 3, 4]	5	{12, 8, 4}	[108, 5, 4]
3	{16, 6, 4}	[72, 3, 3]	5	{24, 6, 4}	[108, 5, 3]
3	{10, 8, 4}	[60, 3, 3]	5	{10, 10, 4}	[90, 5, 3]
3	{18, 6, 4}	[54, 3, 3]	5	{30, 6, 4}	[90, 5, 3]
3	{24, 6, 4}	[36, 3, 2]	5	{14, 8, 4}	[84, 5, 3]
3	{12, 8, 4}	[36, 3, 2]	5	{16, 8, 4}	[72, 5, 3]
3	{10, 10, 4}	[30, 3, 2]	5	{48, 6, 4}	[72, 5, 2]
3	{16, 8, 4}	[24, 3, 2]	5	{20, 8, 4}	[60, 5, 2]
3	{12, 12, 4}	[18, 3, 2]	5	{12, 12, 4}	[54, 5, 3]
5	{14, 6, 4}	[378, 5, 6]	5	{32, 8, 4}	[48, 5, 2]
5	{16, 6, 4}	[216, 5, 5]	5	{14, 14, 4}	[42, 5, 2]
5	{10, 8, 4}	[180, 5, 5]	5	{24, 12, 4}	[36, 5, 2]
5	{18, 6, 4}	[162, 5, 4]	5	{20, 20, 4}	[30, 5, 2]

Tabela 4.3: Tesselações e parâmetros dos códigos de superfície em superfícies não-orientáveis sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  com  $g = 3$  e 5.

- (1)  $R_0^2 = R_1^2 = R_2^2 = (R_1R_2)^p = (R_2R_0)^q = (R_0R_1)^r = 1$ ;
- (2)  $R_1R_2$ ,  $R_2R_0$  e  $R_0R_1$  sejam permutações regulares;
- (3) O grupo gerado por  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$  age transitivamente.

Tendo essas condições satisfeitas é garantido a existência da tesselação formada por esses triângulos. Assim, tomando a tesselação dual dessa tesselação formada pelos triângulos  $\mathbb{T}$ , obtemos a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  desejada.

Para assegurarmos que vão existir tesselações formadas pelos triângulos  $\mathbb{T}$  em superfícies não-orientáveis  $\mathbb{M}$  e, conseqüentemente, tesselações da forma  $\{2p, 2q, 2r\}$ , foi necessário construir uma rotina no software GAP (veja Apêndice A), com a ajuda de Antonio Breda d’Azevedo, adaptando [25] para o caso não-orientável, a qual nos fornece para cada gênero  $g \geq 3$ , as possíveis tesselações dessa superfície formadas pelos triângulos  $\mathbb{T}$ . Em seguida,

essa mesma rotina encontra as três permutações involutórias regulares  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$  no grupo simétrico  $S_{\mathbf{X}}$ , caso elas existam. Devido ao tamanho do grupo  $S_{\mathbf{X}}$ , mesmo deixando o programa rodar por muito tempo, não foi possível determinar se todos os candidatos a tesselação realmente satisfazem os itens (1), (2) e (3).

Assumindo a existência de tal tesselação por triângulos  $\mathbb{T}$ , determinaremos para uma tesselação qualquer  $\{2p, 2q, 2r\}$  os parâmetros  $[n, k, d]$  do código de superfície para  $g \geq 3$ . Pelo fato de estarmos partindo de uma tesselação formada por triângulos  $\mathbb{T}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  e  $\frac{\pi}{r}$ , precisamos determinar a quantidade de faces, arestas e vértices dessa tesselação, para depois determinarmos essas mesmas coisas para a tesselação dual.

Lembramos que a área de um polígono hiperbólico de  $m$  lados com vértices  $v_1, \dots, v_m$  e ângulos internos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  é dado por  $\mu(\mathbb{P}) = (m - 2)\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)$ .

Como a área de uma superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  é dada por (2.17) e temos que  $\mu(\mathbb{M}) = n_f \mu(\mathbb{P})$ , segue que

$$n_f = \frac{\mu(\mathbb{M})}{\mu(\mathbb{P})} = \frac{2\pi(g - 2)}{(m - 2)\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)}. \quad (4.8)$$

Logo, como temos o triângulo  $\mathbb{T}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  e  $\frac{\pi}{r}$  segue que, se  $\mathbb{T}$  tessela  $\mathbb{M}$  e denotando a quantidade  $\mathbf{X}$  de triângulos por  $n_f$ , então

$$n_f = \frac{2pqr(g - 2)}{pqr - pq - pr - qr} \quad (4.9)$$

com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ .

Como o polígono  $\mathbb{T}$  é um triângulo, então a quantidade de arestas é dado por

$$n_e = \frac{3n_f}{2}. \quad (4.10)$$

Pelo fato do triângulo  $\mathbb{T}$  possuir os seus vértices com valências distintas teremos que contar a quantidade de vértices de maneira separada. Desse modo, a quantidade de vértices de valência  $2p$ ,  $2q$  e  $2r$  são dados por

$$n_{v_{2p}} = \frac{n_f}{2p}, \quad n_{v_{2q}} = \frac{n_f}{2q} \quad \text{e} \quad n_{v_{2r}} = \frac{n_f}{2r},$$

onde  $n_{v_{2j}}$  é o número de vértices de valência  $2j$  com  $j = p, q, r$ . Logo, o total de vértices será

$$n_v = n_{v_p} + n_{v_q} + n_{v_r} = \frac{n_f}{2p} + \frac{n_f}{2q} + \frac{n_f}{2r}. \quad (4.11)$$

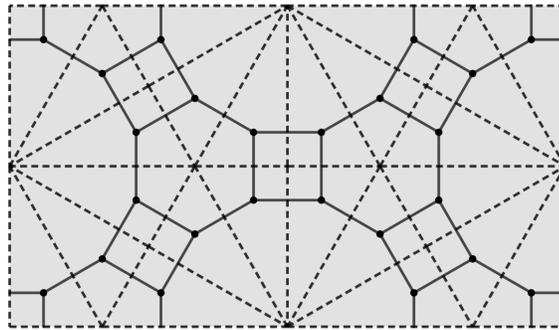


Figura 4.1: Arestas tracejadas formam a tesselação dada pelos triângulos e as arestas contínuas formam sua tesselação dual  $\{2p, 2q, 2r\}$ .

Repare que de (4.9), (4.10) e (4.11) segue que  $n_v - n_e + n_f = 2 - g$ , como desejado.

O dual da tesselação formada pelos triângulos  $\mathbb{T}$  será a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$ , como pode ser visto na Figura 4.1, onde a quantidade de arestas  $N_e$  e vértices  $N_v$  serão dados por

$$N_e = n_e = \frac{3n_f}{2}, \quad (4.12)$$

$$N_v = n_f = \frac{2pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.13)$$

O número de faces será

$$N_f = N_{f_{2p}} + N_{f_{2q}} + N_{f_{2r}}, \quad (4.14)$$

onde  $N_{f_{2p}} = \frac{n_f}{2p}$ ,  $N_{f_{2q}} = \frac{n_f}{2q}$  e  $N_{f_{2r}} = \frac{n_f}{2r}$  são respectivamente, as quantidades de  $2p$ -gons,  $2q$ -gons e  $2r$ -gons da tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas de  $\{2p, 2q, 2r\}$ , logo

$$n = \frac{3pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.15)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual. Lembrando que a tesselação dual de  $\{2p, 2q, 2r\}$  é formada pelos triângulos  $\mathbb{T}$ , então devemos calcular o comprimento de suas três arestas.

Considere a Figura 4.2 e veja que os lados do triângulo são as somas dos apótemas. Desse modo, temos que  $L_1^* = a_1 + a_2$ ,  $L_2^* = a_2 + a_3$  e  $L_3^* = a_3 + a_1$ .

Para determinarmos os valores dos apótemas e conseqüentemente os valores de  $L_1^*$ ,  $L_2^*$  e  $L_3^*$ , basta usarmos a Proposição 1.32 trocando  $m_1 = 2p$ ,  $m_2 = 2q$  e  $m_3 = 2r$ . Essa proposição também nos fornece o comprimento  $L$  de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$ .

Portanto, a distância  $d$  do código será limitada inferiormente por

$$d_{\min} = \left[ \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \frac{d_h}{L_2^*}, \frac{d_h}{L_3^*} \right\} \right], \quad (4.16)$$

onde  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 2r\}$  e  $L_1^*$ ,  $L_2^*$  e  $L_3^*$  são os comprimentos das três arestas do triângulo  $\mathbb{T}$  da tesselação dual de  $\{2p, 2q, 2r\}$ .

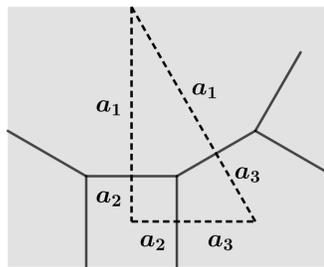


Figura 4.2: As somas dos apótemas dos polígonos da tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  correspondem aos comprimentos dos lados do triângulo.

Desse modo, fica determinado todos os parâmetros  $[n, k, d]$  do nosso código quântico de superfície em superfícies não-orientáveis com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 2r\}$ .

Apresentamos na Tabela 4.4, somente os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  para as tesselações  $\{2p, 2q, 2r\}$  onde foi obtido as três permutações involutórias regulares  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$ . Também apresentamos a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$ , juntamente com as permutações obtidas para os gêneros  $g = 3$  e  $g = 5$ , e a quantidade  $\mathbf{X}$  de triângulos.

Para o caso  $g = 3$ , obtemos 12 possibilidades de tesselações. Dessas, somente 4 a implementação retornou as permutações involutórias. Já para o caso  $g = 5$  obtemos 24 possibilidades de tesselações. Dessas, somente 2 o software GAP nos forneceu as permutações involutórias. Vale destacar que o software ficou rodando por aproximadamente 24 horas.

$g$	$\mathbf{X}$	Tesselação	Permutações	$[n, k, d_{\min}]$
3	8	$\{8, 8, 8\}$	$R_0 = (1,4)(2,6)(3,8)(5,7)$ $R_1 = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)$ $R_2 = (1,3)(2,5)(4,7)(6,8)$	$[12, 3, 2]$
3	12	$\{4, 12, 12\}$	$R_0 = (1,3)(2,9)(4,12)(5,7)(6,10)(8,11)$ $R_1 = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)$ $R_2 = (1,12)(2,11)(3,5)(4,6)(7,9)(8,10)$	$[18, 3, 2]$
3	12	$\{6, 6, 12\}$	$R_0 = (1,3)(2,8)(4,12)(5,7)(6,9)(10,11)$ $R_1 = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)$ $R_2 = (1,12)(2,10)(3,5)(4,7)(6,8)(9,11)$	$[18, 3, 2]$
3	16	$\{4, 8, 16\}$	$R_0 = (1,3)(2,13)(4,15)(5,10)(6,14)(7,11)(8,16)(9,12)$ $R_1 = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,16)$ $R_2 = (1,16)(2,15)(3,6)(4,5)(7,10)(8,9)(11,13)(12,14)$	$[24, 3, 2]$
5	12	$\{12, 12, 12\}$	$R_0 = (1,3)(2,7)(4,12)(5,8)(6,10)(9,11)$ $R_1 = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)$ $R_2 = (1,12)(2,10)(3,5)(4,7)(6,9)(8,11)$	$[18, 5, 2]$
5	16	$\{8, 8, 16\}$	$R_0 = (1,3)(2,15)(4,9)(5,10)(6,14)(7,11)(8,16)(12,13)$ $R_1 = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,16)$ $R_2 = (1,16)(2,5)(3,6)(4,15)(7,10)(8,13)(9,11)(12,14)$	$[24, 5, 2]$

Tabela 4.4: Parâmetros dos códigos de superfície em superfícies não-orientáveis sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  com  $g = 3$  e  $5$ , somente para os casos onde foi obtido as permutações involuntórias regulares.

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{2p, q, 2p, r\}$

Faremos a construção dos códigos de superfície sobre a tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$ . Para isso, precisamos que a superfície  $\mathbb{M}$  seja tesselada por triângulos hiperbólicos  $\mathbb{T}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  e  $\frac{\pi}{r}$ , assim como no caso anterior. Fixamos  $q$  ímpar, para obter somente tesselações diferentes da  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  que apresentaremos mais a frente. Fixamos também  $q \neq r$ , pois caso contrário teríamos  $\{2p, q, 2p, q\}$  que já obtemos em  $\{p, q, p, q\}$ . Por fim, exigimos que

a quantidade de triângulos dado em (4.9), denotado agora por  $n_{f_{\mathbb{T}}}$ , seja um número inteiro par.

A maneira de garantirmos a existência da tesselação pelos triângulos  $\mathbb{T}$  é análoga ao caso anterior. A única diferença aqui é que estamos fazendo a restrição para os valores de  $q$ ,  $r$  e  $n_{f_{\mathbb{T}}}$ , fazendo com que tenhamos, nesse caso, menos possibilidades de tesselações.

Adaptamos a rotina do software GAP utilizada no caso anterior com as restrições impostas aqui (veja Apêndice A), o qual nos fornece para cada gênero  $g \geq 3$  as possíveis tesselações da superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  formadas pelos triângulos  $\mathbb{T}$  e encontra as três permutações involutórias regulares  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$  no grupo simétrico  $S_{\mathbf{X}}$ , caso elas existam. Devido as restrições impostas, temos que os casos possíveis são os casos onde o grupo  $S_{\mathbf{X}}$  é muito grande, fazendo com que o programa GAP, mesmo rodando por muito tempo, não consiga determinar se todos os candidatos a tesselação realmente satisfazem os itens (1), (2) e (3). Por isso, para essa construção conseguimos obter poucos casos confirmando a existência da tesselação pelos triângulos  $\mathbb{T}$ .

Para obtermos a tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$  devemos juntar dois triângulos  $\mathbb{T}$  e apagar a aresta que liga os vértices com ângulos  $\frac{\pi}{q}$  e  $\frac{\pi}{r}$  como na Figura 4.3-(a), por isso exigimos que  $n_{f_{\mathbb{T}}}$  seja par. Assim, a superfície  $\mathbb{M}$  será tesselada por quadriláteros  $\mathbb{P}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{2\pi}{q}$ ,  $\frac{\pi}{p}$  e  $\frac{2\pi}{r}$ . Tomando o dual dessa tesselação formada pelos quadriláteros, obtemos a tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$ , como na Figura 4.3-(b).

Assumindo a existência de tal tesselação por quadriláteros  $\mathbb{P}$ , determinaremos para uma tesselação qualquer  $\{2p, q, 2p, r\}$  os parâmetros  $[n, k, d]$  do código de superfície para  $g \geq 3$ . Para isso, precisamos determinar a quantidade de faces, arestas e vértices dessa tesselação, para depois determinarmos essas mesmas coisas para a tesselação dual.

Como os quadriláteros  $\mathbb{P}$  são obtidos juntando dois triângulos  $\mathbb{T}$ , e sabemos que a quantidade de triângulos é dado por (4.9), segue que a quantidade de quadriláteros será a metade de  $n_{f_{\mathbb{T}}}$ , ou seja,

$$n_f = \frac{pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.17)$$

Já a quantidade de arestas é dado por

$$n_e = 2n_f = \frac{2pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.18)$$

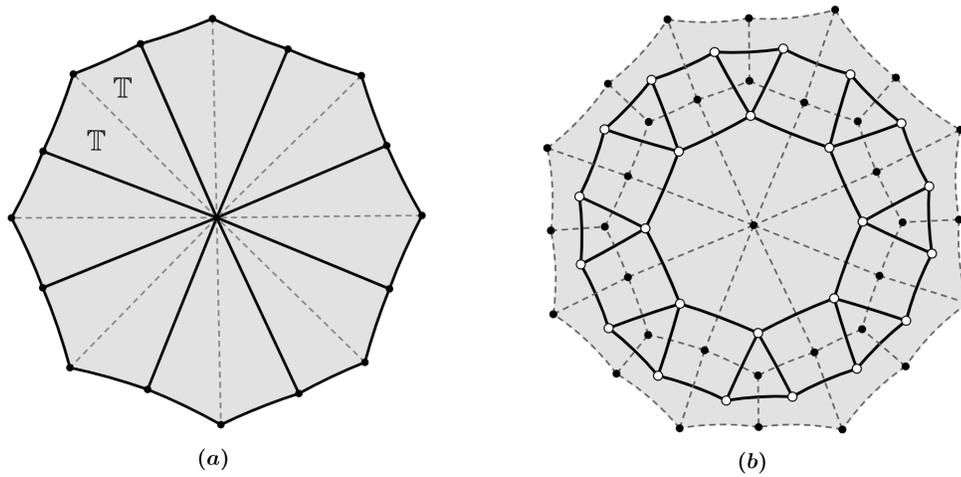


Figura 4.3: (a) Apagamos as arestas tracejadas para formar os quadriláteros. (b) Arestas contínuas formam a tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$  dual da tesselação formada pelos quadriláteros.

Pelo fato do quadrilátero  $\mathbb{P}$  possuir os seus vértices com valências distintas, teremos que contar a quantidade de vértices de maneira separada. Desse modo, a quantidade de vértices de valência  $2p$ ,  $q$  e  $r$  é dado por

$$n_{v_{2p}} = \frac{n_f}{p}, \quad n_{v_q} = \frac{n_f}{q} \quad \text{e} \quad n_{v_r} = \frac{n_f}{r},$$

onde  $n_{v_j}$  é o número de vértices de valência  $j$  com  $j = 2p, q, r$ . Logo, o total de vértices será

$$n_v = n_{v_{2p}} + n_{v_q} + n_{v_r}. \quad (4.19)$$

Repare que de (4.17), (4.18) e (4.19) segue que  $n_v - n_e + n_f = 2 - g$ , como desejado.

Como o dual da tesselação formada pelos quadriláteros  $\mathbb{P}$  será a tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$ , segue que a quantidade de arestas  $N_e$  e vértices  $N_v$  serão dados por

$$N_e = n_e = \frac{2pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad (4.20)$$

$$N_v = n_f = \frac{pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.21)$$

O número de faces será

$$N_f = N_{f_{2p}} + N_{f_q} + N_{f_r}, \quad (4.22)$$

onde  $N_{f_{2p}} = \frac{n_f}{p}$ ,  $N_{f_q} = \frac{n_f}{q}$  e  $N_{f_r} = \frac{n_f}{r}$  são respectivamente, as quantidades de  $2p$ -gons,  $q$ -gons e  $r$ -gons da tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas de  $\{2p, q, 2p, r\}$ , logo

$$n = \frac{2pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.23)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual. Lembrando que a tesselação dual de  $\{2p, q, 2p, r\}$  é formada pelos quadriláteros  $\mathbb{P}$ , e da maneira como foram construídos, eles vão possuir somente duas arestas distintas.

Observe a Figura 4.4, onde  $A_p, A_q, A'_p$  e  $A_r$  são os incentros dos  $2p$ -gons,  $q$ -gons,  $2p$ -gons e  $r$ -gons, respectivamente. Unindo os pontos  $A_p, A_q, A'_p$  e  $A_r$  obtemos o quadrilátero  $\mathbb{P}$  que é formado pela união dos dois triângulos  $\mathbb{T}$  iniciais. Temos que  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$ ,  $a_p, a_q$  e  $a_r$  são os apótemas dos  $2p$ -gons,  $q$ -gons e  $r$ -gons, respectivamente. Veja que os lados do quadrilátero são as somas dos apótemas. Desse modo, temos que  $L_1^* = a_p + a_q$  e  $L_2^* = a_p + a_r$ .

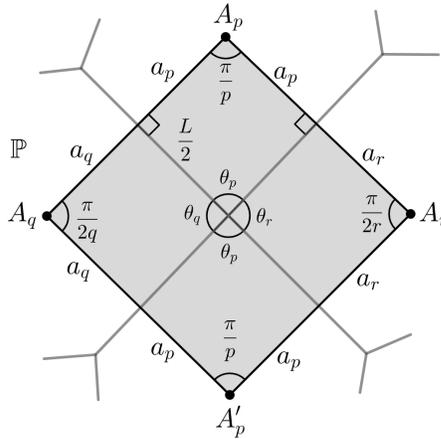


Figura 4.4: Polígono  $\mathbb{P}$  utilizado para determinar os comprimentos de  $L$ ,  $L_1^*$  e  $L_2^*$ .

Para determinarmos o valor de  $L$  vamos utilizar uma afirmação dada na demonstração do Teorema 1.2.9 de [64], que diz que

$$\theta_i = 2 \arcsen \left[ \frac{\cos(\pi/i)}{\cosh(L/2)} \right], \quad (4.24)$$

onde, nesse caso,  $i = 2p, q, r$  e ainda temos que

$$2\theta_{2p} + \theta_q + \theta_r = 2\pi. \quad (4.25)$$

Substituindo (4.24) em (4.25), obtemos uma equação somente em  $L$ , a qual só pode ser resolvida de maneira numérica.

Uma vez obtido  $L$ , conseguimos obter os valores dos apótemas  $a_p$ ,  $a_q$  e  $a_r$  utilizando a equação (1.7), ou seja,  $\tanh\left(\frac{L}{2}\right) = \sinh(a_j) \tan(\beta)$ , onde  $\beta = \frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$  para  $j = p, q, r$ , respectivamente. Conseqüentemente, obtemos os valores de  $L_1^*$  e  $L_2^*$ .

Portanto, a distância  $d$  do código será limitada inferiormente por

$$d_{\min} = \left[ \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \frac{d_h}{L_2^*} \right\} \right], \quad (4.26)$$

onde  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação semirregular  $\{2p, q, 2p, r\}$  e  $L_1^*$  e  $L_2^*$  são os comprimentos das arestas do quadrilátero  $\mathbb{P}$  da tesselação dual.

Desse modo, fica determinado todos os parâmetros  $[n, k, d]$  do nosso código quântico de superfície em superfícies não-orientáveis com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p, q, 2p, r\}$ .

Para esses códigos, o único caso onde obtemos as permutações involutórias foi para a tesselação  $\{6, 3, 6, 6\}$  com  $g = 3$ . As permutações obtidas foram  $R_0 = (1, 3)(2, 11)(4, 12)(5, 7)(6, 9)(8, 10)$ ,  $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)$  e  $R_2 = (1, 12)(2, 10)(3, 5)(4, 7)(6, 8)(9, 11)$ . Vale destacar que o software ficou rodando por aproximadamente 24 horas, porém, devido ao tamanho de  $\mathbf{X}$ , conseguimos obter somente as permutações para um caso.

Apresentamos na Tabela 4.5, os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  dos códigos sobre as tesselações  $\{2p, q, 2p, r\}$  para os gêneros  $g = 3$  e  $5$ . Também apresentamos a tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$ , juntamente com a quantidade de triângulos  $\mathbf{X}$ .

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$

Faremos agora a construção dos códigos de superfície sobre a tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$ , onde  $p, q$  aparecem  $r$ -vezes. Para isso, precisamos que a superfície  $\mathbb{M}$  seja tessellada por triângulos hiperbólicos  $\mathbb{T}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  e  $\frac{\pi}{r}$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ , assim como nos casos anteriores. A única exigência que fazendo aqui é que a quantidade de triângulos dado em (4.9), seja um número inteiro divisível por  $2r$ .

A maneira de garantirmos a existência da tesselação pelos triângulos  $\mathbb{T}$  com a exigência feita acima, é análoga ao caso  $\{2p, 2q, 2r\}$ . Assim, adaptamos a rotina do software GAP

$g$	$\mathbf{X}$	Tesselção	$[n, k, d_{\min}]$
3	12	{6, 3, 6, 6}	[12, 3, 2]
3	20	{10, 5, 10, 2}	[20, 3, 2]
3	24	{4, 3, 4, 12}	[24, 3, 2]
3	24	{6, 3, 6, 4}	[24, 3, 3]
3	24	{24, 3, 24, 2}	[24, 3, 2]
3	36	{6, 9, 6, 2}	[36, 3, 3]
3	36	{4, 3, 4, 9}	[36, 3, 3]
3	36	{18, 3, 18, 2}	[36, 3, 3]
3	40	{4, 5, 4, 4}	[40, 3, 4]
3	40	{8, 5, 8, 2}	[40, 3, 3]
3	48	{4, 3, 4, 8}	[48, 3, 3]
3	48	{16, 3, 16, 2}	[48, 3, 3]
3	84	{4, 3, 4, 7}	[84, 3, 5]
3	84	{14, 3, 14, 2}	[84, 3, 4]
3	84	{6, 7, 6, 2}	[84, 3, 4]
5	24	{6, 3, 6, 12}	[24, 5, 2]
5	24	{8, 3, 8, 6}	[24, 5, 2]
5	24	{12, 3, 12, 4}	[24, 5, 2]
5	28	{14, 7, 14, 2}	[28, 5, 2]
5	36	{6, 3, 6, 6}	[36, 5, 3]
5	48	{48, 3, 48, 2}	[48, 5, 2]
5	48	{4, 3, 4, 24}	[48, 5, 2]
5	56	{4, 7, 4, 4}	[56, 5, 4]
5	56	{8, 7, 8, 2}	[56, 5, 3]
5	60	{4, 3, 4, 15}	[60, 5, 3]
5	60	{30, 3, 30, 2}	[60, 5, 3]
5	60	{6, 15, 6, 2}	[60, 5, 3]
5	60	{10, 5, 10, 2}	[60, 5, 3]
5	72	{4, 3, 4, 12}	[72, 5, 3]
5	72	{6, 3, 6, 4}	[72, 5, 5]
5	72	{24, 3, 24, 2}	[72, 5, 3]
5	108	{18, 3, 18, 2}	[108, 5, 4]
5	108	{4, 3, 4, 9}	[108, 5, 4]
5	108	{6, 9, 6, 2}	[108, 5, 4]
5	144	{4, 3, 4, 8}	[144, 5, 5]
5	144	{16, 3, 16, 2}	[144, 5, 5]
5	120	{8, 5, 8, 2}	[120, 5, 5]
5	120	{4, 5, 4, 4}	[120, 5, 6]
5	252	{6, 7, 6, 2}	[252, 5, 6]
5	252	{14, 3, 14, 2}	[252, 5, 6]
5	252	{4, 3, 4, 7}	[252, 5, 7]

Tabela 4.5: Parâmetros dos códigos sobre a tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$  para  $g = 3$  e  $g = 5$ .

utilizada no caso  $\{2p, 2q, 2r\}$  com a exigência imposta aqui (veja Apêndice A), o qual nos fornece para cada gênero  $g \geq 3$  as possíveis tesselações da superfície não-orientável  $\mathbb{M}$ , formadas pelos triângulos  $\mathbb{T}$  e encontra as três permutações involutórias regulares  $R_0, R_1$  e  $R_2$  no grupo simétrico  $S_{\mathbf{X}}$ , caso elas existam, onde  $\mathbf{X} = n_{f_{\mathbb{T}}}$ . Novamente, devido ao tamanho do grupo  $S_{\mathbf{X}}$ , mesmo deixando o programa rodar por muito tempo, não foi possível determinar

se todos os candidatos a tesselação realmente satisfazem os itens (1), (2) e (3).

Para obtermos a tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  devemos pegar todos os vértices  $v$  com valência  $2r$ , ou seja, todos os vértices que possuem ângulos de  $\frac{\pi}{r}$  e apagar as arestas que chegam nesses vértices. Obtendo assim um polígono  $\mathbb{P}$  com  $2r$  arestas e com  $2r$  ângulos internos alternando entre  $\frac{2\pi}{p}$  e  $\frac{2\pi}{q}$ , como na Figura 4.5-(a), por isso exigimos que  $n_{f_{\mathbb{T}}}$  seja divisível por  $2r$ . Tomando o dual dessa tesselação formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$ , obtemos a tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$ , como na Figura 4.5-(b).

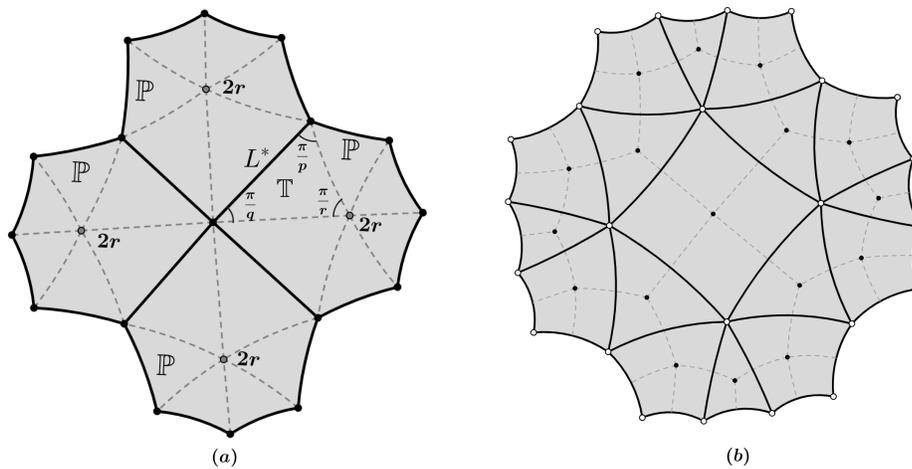


Figura 4.5: (a) Apagamos as arestas tracejadas para formar o polígono  $\mathbb{P}$ . (b) Arestas contínuas formam a tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  dual da tesselação formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$ .

Assumindo a existência de tal tesselação pelos polígonos  $\mathbb{P}$ , determinaremos de maneira geral os parâmetros  $[n, k, d]$  do código de superfície para  $g \geq 3$ . Para isso, precisamos determinar a quantidade de faces, arestas e vértices dessa tesselação para depois determinarmos essas mesmas coisas para a tesselação dual.

Como os polígonos  $\mathbb{P}$  são obtidos pegando todos os vértices  $v$  com valência  $2r$  e apagando as arestas que chegam nesses vértices, ou seja, são obtidos juntando  $2r$  triângulos  $\mathbb{T}$ , e sabemos que a quantidade de triângulos é dado por (4.9), segue que a quantidade de polígonos  $\mathbb{P}$  será

$$n_f = \frac{n_{f_{\mathbb{T}}}}{2r} = \frac{pq(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.27)$$

A quantidade de arestas é dado por

$$n_e = \frac{2rn_f}{2} = \frac{pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad (4.28)$$

pois cada polígono  $\mathbb{P}$  possui  $2r$  arestas e cada aresta pertence a dois polígonos.

Pelo fato do polígono  $\mathbb{P}$  possuir os seus vértices com valências distintas, teremos que contar a quantidade de vértices de maneira separada. Desse modo, a quantidade de vértices de valência  $p$  e  $q$  são dados por

$$n_{v_p} = \frac{rn_f}{p} \quad \text{e} \quad n_{v_q} = \frac{rn_f}{q},$$

onde  $n_{v_j}$  é o número de vértices de valência  $j$  com  $i = p, q$ . Logo, o total de vértices será

$$n_v = n_{v_p} + n_{v_q}. \quad (4.29)$$

Repare que de (4.27), (4.28) e (4.29) segue que  $n_v - n_e + n_f = 2 - g$ , como desejado.

O dual da tesselação formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$  será a tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  onde  $p, q$  aparecem  $r$ -vezes e a quantidade de arestas  $N_e$  e vértices  $N_v$  serão dados por

$$N_e = n_e = \frac{pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad (4.30)$$

$$N_v = n_f = \frac{pq(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.31)$$

O número de faces será

$$N_f = N_{f_p} + N_{f_q}, \quad (4.32)$$

onde  $N_{f_p} = \frac{rn_f}{p}$  e  $N_{f_q} = \frac{rn_f}{q}$  são respectivamente, as quantidades de  $p$ -gons e  $q$ -gons da tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas, logo

$$n = \frac{pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.33)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual. Lembrando que a tesselação dual é formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$ , e da maneira como

foram construídos esses polígonos, eles vão possuir todas as arestas iguais, as quais são dadas pela aresta não apagada do triângulo  $\mathbb{T}$ .

Para determinar o comprimento  $L^*$  de uma aresta da tesselação dual de  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  considere o triângulo  $\mathbb{T}$  dado na Figura 4.5-(a). Como temos os três ângulos do triângulo, usando a 2ª Lei dos cossenos dada em (1.14), segue que

$$L^* = \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\cos(\pi/q) \cos(\pi/p) + \cos(\pi/r)}{\operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{sen}(\pi/p)} \right]. \quad (4.34)$$

Infelizmente, tendo  $L^*$  não conseguimos determinar o valor de  $L$ . Por isso, vamos proceder como no caso anterior.

Observe a Figura 4.6, onde  $A_p$  e  $A_q$  são os incentros dos  $p$ -gons e dos  $q$ -gons, respectivamente. Unindo os pontos  $A_p$  e  $A_q$  obtemos o polígono  $\mathbb{P}$ . Temos que  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$ ,  $a_p$  e  $a_q$  são os apótemas dos  $p$ -gons e dos  $q$ -gons, respectivamente.

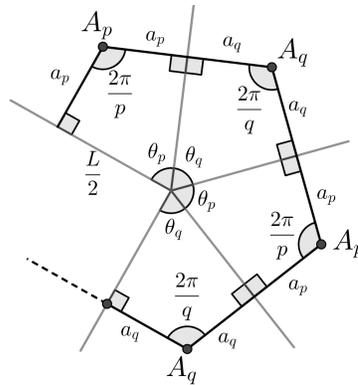


Figura 4.6: Polígono  $\mathbb{P}$  utilizado para determinar os comprimentos de  $L$  e  $L^*$ .

Para determinarmos o valor de  $L$ , vamos novamente utilizar a afirmação dada na demonstração do Teorema 1.2.9 de [64], ou seja,

$$\theta_i = 2 \operatorname{arcsen} \left[ \frac{\cos(\pi/i)}{\cosh(L/2)} \right], \quad (4.35)$$

onde, nesse caso,  $i = p, q$  e ainda temos que

$$r\theta_p + r\theta_q = 2\pi. \quad (4.36)$$

Substituindo (4.35) em (4.36), obtemos uma equação somente em  $L$ , a qual só pode ser resolvida de maneira numérica.

Veja que, uma vez obtido  $L$ , poderíamos determinar o valor de  $L^*$  também como fizemos no caso anterior, pois  $L^* = a_p + a_q$ .

Portanto, a distância  $d$  do código será limitada inferiormente por

$$d_{\min} = \left\lceil \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L^*} \right\} \right\rceil, \quad (4.37)$$

onde  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação semirregular  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  e  $L^*$  é o comprimento da aresta do polígono  $\mathbb{P}$  da tesselação dual.

Desse modo, ficam determinados todos os parâmetros  $[n, k, d]$  do nosso código quântico de superfície sobre a tesselação semirregular  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$ , onde  $p, q$  aparecem  $r$  vezes.

Apresentamos na Tabela 4.6, somente os parâmetros  $n, k$  e  $d$  para as tesselações onde foi obtido as três permutações involutórias regulares  $R_0, R_1$  e  $R_2$ . Também apresentamos os valores de  $p, q$  e  $r$ , juntamente com as permutações obtidas para os gêneros  $g = 3$  e  $g = 5$ , e a quantidade  $\mathbf{X}$  de triângulos.

Para o caso  $g = 3$ , obtemos 14 possibilidades de tesselações. Dessas, somente 5 o software GAP nos forneceu as permutações involutórias. Já para o caso  $g = 5$ , obtemos 30 possibilidades de tesselações. Dessas, somente 3 o software GAP nos forneceu as permutações involutórias. Vale destacar que o software ficou rodando por aproximadamente 24 horas.

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$

Faremos a construção dos códigos de superfície sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ . Para isso, precisamos que a superfície  $\mathbb{M}$  seja tesselada por quadriláteros hiperbólicos  $\mathbb{Q}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$  e  $\frac{\pi}{t}$ , onde no vértice  $i$  existem  $2i$  quadriláteros todos de ângulos  $\frac{\pi}{i}$ , onde  $i = p, q, r, t$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{t} < 2$ . Uma condição necessária e suficiente para que exista uma tesselação formada por tais quadriláteros na superfície compacta não-orientável  $\mathbb{M}$ , é que existam quatro permutações involutórias regulares  $R_0, R_1, R_2$  e  $R_3$  no grupo simétrico  $S_{\mathbf{X}}$ , isto é, sem pontos fixos, onde  $\mathbf{X}$  é o número de quadriláteros, tais que essas permutações satisfaçam

$g$	$\mathbf{X}$	$p, q, r$	Permutações	$[n, k, d_{\min}]$
3	8	4, 4, 4	$R_0 = (1, 4)(2, 6)(3, 8)(5, 7)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)$ $R_2 = (1, 3)(2, 5)(4, 7)(6, 8)$	[4, 3, 1]
3	12	3, 3, 6	$R_0 = (1, 3)(2, 8)(4, 12)(5, 7)(6, 9)(10, 11)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)$ $R_2 = (1, 12)(2, 10)(3, 5)(4, 7)(6, 8)(9, 11)$	[6, 3, 1]
3	12	3, 6, 3	$R_0 = (1, 3)(2, 11)(4, 12)(5, 8)(6, 9)(7, 10)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)$ $R_2 = (1, 12)(2, 10)(3, 5)(4, 7)(6, 8)(9, 11)$	[6, 3, 2]
3	12	6, 6, 2	$R_0 = (1, 3)(2, 4)(5, 11)(6, 12)(7, 9)(8, 10)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)$ $R_2 = (1, 12)(2, 10)(3, 5)(4, 7)(6, 9)(8, 11)$	[6, 3, 2]
3	16	4, 8, 2	$R_0 = (1, 3)(2, 4)(5, 11)(6, 12)(7, 15)(8, 16)(9, 13)(10, 14)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)$ $R_2 = (1, 16)(2, 5)(3, 6)(4, 15)(7, 10)(8, 13)(9, 11)(12, 14)$	[8, 3, 2]
5	12	6, 6, 6	$R_0 = (1, 3)(2, 7)(4, 12)(5, 8)(6, 10)(9, 11)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)$ $R_2 = (1, 12)(2, 10)(3, 5)(4, 7)(6, 9)(8, 11)$	[6, 5, 1]
5	16	4, 4, 8	$R_0 = (1, 3)(2, 15)(4, 9)(5, 10)(6, 14)(7, 11)(8, 16)(12, 13)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)$ $R_2 = (1, 16)(2, 5)(3, 6)(4, 15)(7, 10)(8, 13)(9, 11)(12, 14)$	[8, 5, 1]
5	16	4, 8, 4	$R_0 = (1, 3)(2, 15)(4, 7)(5, 11)(6, 9)(8, 16)(10, 14)(12, 13)$ $R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)$ $R_2 = (1, 16)(2, 5)(3, 6)(4, 15)(7, 10)(8, 13)(9, 11)(12, 14)$	[8, 5, 2]

Tabela 4.6: Parâmetros dos códigos de superfície em superfícies não-orientáveis sobre a tesselção  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  com  $g = 3$  e 5, somente para os casos onde foi obtido as permutações involuntórias regulares.

- (1)  $R_0^2 = R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_0R_1)^p = (R_1R_3)^q = (R_3R_2)^r = (R_2R_0)^t = 1$ ;
- (2)  $R_0R_1, R_1R_3, R_3R_2$  e  $R_2R_0$  sejam permutações regulares;
- (3) O grupo gerado por  $R_0, R_1, R_2$  e  $R_3$  age transitivamente.

Tendo essas condições satisfeitas é garantido a existência da tesselação formada por esses quadriláteros. Assim, tomando a tesselação dual dessa tesselação formada pelos quadriláteros  $\mathbb{Q}$ , obtemos a tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  desejada.

Para assegurarmos que vão existir tesselações formadas pelos quadriláteros  $\mathbb{Q}$  em superfícies não-orientáveis  $\mathbb{M}$  e, conseqüentemente, tesselações da forma  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ , adaptamos, com a ajuda de Antonio Breda d'Azevedo, a rotina no software GAP utilizada no caso  $\{2p, 2q, 2r\}$ , o qual nos fornece para cada gênero  $g \geq 3$ , as possíveis tesselações dessa superfície, formadas pelos quadriláteros  $\mathbb{Q}$ . Em seguida, essa mesma rotina, a qual pode ser vista no Apêndice A, encontra as quatro permutações regulares  $R_0R_1, R_1R_3, R_3R_2$  e  $R_2R_0$  no grupo simétrico  $S_{\mathbf{X}}$ , caso elas existam. Devido ao tamanho de  $S_{\mathbf{X}}$ , não foi possível determinar se todos os candidatos a tesselação realmente satisfazem os itens (1), (2) e (3).

Assumindo a existência de tal tesselação por quadriláteros  $\mathbb{Q}$ , determinaremos de maneira geral os parâmetros  $[n, k, d]$  do código de superfície para  $g \geq 3$ . Pelo fato de estarmos partindo de uma tesselação formada por quadriláteros  $\mathbb{Q}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$  e  $\frac{\pi}{t}$ , precisamos determinar a quantidade de faces, arestas e vértices dessa tesselação para depois determinarmos essas mesmas coisas para a tesselação dual.

De (4.8) segue que, se  $\mathbb{Q}$  tessela  $\mathbb{M}$ , então

$$n_f = \frac{2pqrt(g-2)}{2pqrt - pqr - prt - qrt - pqt}, \quad (4.38)$$

com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{t} < 2$ .

Como o polígono  $\mathbb{Q}$  é um quadrilátero, então a quantidade de arestas é dado por

$$n_e = 2n_f. \quad (4.39)$$

Pelo fato do quadrilátero  $\mathbb{Q}$  possuir os seus vértices com valências distintas, teremos que contar a quantidade de vértices de maneira separada. Desse modo, a quantidade de vértices

de valência  $2p$ ,  $2q$ ,  $2r$  e  $2t$  são dados por

$$n_{v_{2p}} = \frac{n_f}{2p}, \quad n_{v_{2q}} = \frac{n_f}{2q}, \quad n_{v_{2r}} = \frac{n_f}{2r} \text{ e } n_{v_{2t}} = \frac{n_f}{2t},$$

onde  $n_{v_{2i}}$  é a quantidade de vértices de valência  $2i$  com  $i = p, q, r, t$ . Logo, o total de vértices será

$$n_v = n_{v_{2p}} + n_{v_{2q}} + n_{v_{2r}} + n_{v_{2t}} = \frac{n_f}{2p} + \frac{n_f}{2q} + \frac{n_f}{2r} + \frac{n_f}{2t}. \quad (4.40)$$

Repare que de (4.38), (4.39) e (4.40) segue que  $n_v - n_e + n_f = 2 - g$ , como desejado.

O dual da tesselação formada pelos quadriláteros  $\mathbb{Q}$  será a tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ , como pode ser visto na Figura 4.7, onde a quantidade de arestas  $N_e$  e vértices  $N_v$  serão dados por

$$N_e = n_e = \frac{4pqrt(g-2)}{2pqrt - pqr - prt - qrt - pqt}, \quad (4.41)$$

$$N_v = n_f = \frac{2pqrt(g-2)}{2pqrt - pqr - prt - qrt - pqt}. \quad (4.42)$$

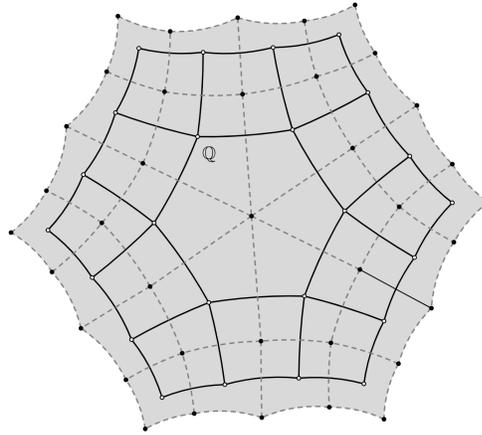


Figura 4.7: Arestas tracejadas formam a tesselação dada pelos quadriláteros  $\mathbb{Q}$  e as arestas contínuas formam sua tesselação dual  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ .

O número de faces será

$$N_f = N_{f_{2p}} + N_{f_{2q}} + N_{f_{2r}} + N_{f_{2t}}, \quad (4.43)$$

onde  $N_{f_{2p}} = \frac{n_f}{2p}$ ,  $N_{f_{2q}} = \frac{n_f}{2q}$ ,  $N_{f_{2r}} = \frac{n_f}{2r}$  e  $N_{f_{2t}} = \frac{n_f}{2t}$  são respectivamente, as quantidades de  $2p$ -gons,  $2q$ -gons,  $2r$ -gons e  $2t$ -gons da tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas de  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ , logo

$$n = \frac{4pqrt(g-2)}{2pqrt - pqr - prt - qrt - pqt}. \quad (4.44)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual. Lembrando que a tesselação dual de  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  é formada pelos quadriláteros  $\mathbb{Q}$ , então devemos calcular o comprimento de suas quatro arestas.

Observe a Figura 4.8, onde  $A_p, A_q, A_r$  e  $A_t$  são os incentros dos  $2p$ -gons,  $2q$ -gons,  $2r$ -gons e  $2t$ -gons, respectivamente. Unindo os pontos  $A_p, A_q, A_r$  e  $A_t$  obtemos o quadrilátero  $\mathbb{Q}$  que é o polígono que iniciamos a construção. Temos que  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ ,  $a_p, a_q, a_r$  e  $a_t$  são os apótemas dos  $2p$ -gons,  $2q$ -gons,  $2r$ -gons e  $2t$ -gons, respectivamente. Veja que os lados do quadrilátero são as somas dos apótemas. Desse modo, temos que  $L_1^* = a_p + a_q$ ,  $L_2^* = a_q + a_r$ ,  $L_3^* = a_r + a_t$  e  $L_4^* = a_t + a_p$ .

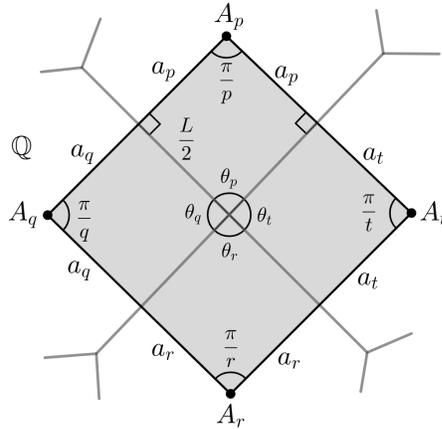


Figura 4.8: Polígono  $\mathbb{Q}$  utilizado para determinar os comprimentos de  $L, L_1^*, L_2^*, L_3^*$  e  $L_4^*$ .

Para determinarmos o valor de  $L$  vamos proceder como nos casos anteriores, ou seja, usamos que

$$\theta_i = 2 \arcsen \left[ \frac{\cos(\pi/2i)}{\cosh(L/2)} \right], \quad (4.45)$$

onde, nesse caso,  $i = p, q, r, t$  e ainda temos que

$$\theta_p + \theta_q + \theta_r + \theta_t = 2\pi. \quad (4.46)$$

Substituindo (4.45) em (4.46), obtemos uma equação somente em  $L$ , a qual só pode ser resolvida de maneira numérica.

Uma vez obtido  $L$ , conseguimos obter os valores dos apótemas  $a_i$  utilizando a equação (1.7), ou seja,  $\tanh\left(\frac{L}{2}\right) = \sinh(a_i) \tan(\beta_i)$ , onde  $\beta_i = \frac{\pi}{2i}$  para  $i = p, q, r, t$ . Consequentemente, obtemos os valores de  $L_1^*$ ,  $L_2^*$ ,  $L_3^*$  e  $L_4^*$ .

Portanto, a distância  $d$  do código será limitada inferiormente por

$$d_{\min} = \left[ \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \frac{d_h}{L_2^*}, \frac{d_h}{L_3^*}, \frac{d_h}{L_4^*} \right\} \right], \quad (4.47)$$

onde  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  e  $L_1^*$ ,  $L_2^*$ ,  $L_3^*$  e  $L_4^*$  são os comprimentos das arestas do quadrilátero  $\mathbb{Q}$  da tesselação dual.

Desse modo, ficam determinados todos os parâmetros  $[n, k, d]$  do nosso código de superfície em superfícies não-orientáveis com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ .

Para esses códigos, os únicos casos onde obtemos as permutações involutórias foi para as tesselações  $\{4, 4, 4, 8\}$  com  $g = 3$  e  $\{4, 8, 8, 8\}$  com  $g = 5$ . As permutações obtidas para o primeiro caso foram  $R_0R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)$ ,  $R_1R_3 = (1, 2)(3, 4)(5, 7)(6, 8)$ ,  $R_3R_2 = (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$  e  $R_2R_0 = (1, 8, 4, 5)(2, 7, 3, 6)$ . Já para o segundo caso foram  $R_0R_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)$ ,  $R_1R_3 = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)$ ,  $R_3R_2 = (1, 2, 4, 5)(3, 6, 8, 7)$  e  $R_2R_0 = (1, 7, 8, 6)(2, 3, 5, 4)$ . Mesmo o software GAP rodando por quase 24 horas, devido ao tamanho de  $\mathbf{X}$ , conseguimos obter somente as permutações para dois caso.

Apresentamos na Tabela 4.7, os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  dos códigos sobre as tesselações  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  para os gêneros  $g = 3$  e  $5$ . Também apresentamos a tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$ , juntamente com a quantidade de quadriláteros  $\mathbf{X}$ .

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$

Faremos a construção dos códigos de superfície sobre a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$ . Perceba que estamos generalizando os casos  $\{2p, 2q, 2r\}$  para  $m = 3$  e  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  para  $m = 4$ . Não temos garantido que tal tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$  com  $m \geq 5$  exista na superfície, mas temos a garantia que existirá no plano, como pode ser visto [53]. Por isso, para a construção desses códigos estaremos assumindo que tal tesselação exista na superfície não-orientável  $\mathbb{M}$ .

$g$	$\mathbf{X}$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$
3	8	{4, 2, 4, 8}	[16, 3, 2]
3	12	{4, 2, 4, 6}	[24, 3, 3]
5	8	{4, 4, 8, 8}	[16, 5, 2]
5	12	{4, 2, 6, 12}	[24, 5, 2]
5	12	{4, 2, 12, 6}	[24, 5, 2]
5	12	{4, 3, 4, 12}	[24, 5, 2]

$g$	$\mathbf{X}$	Tesselação	$[n, k, d_{\min}]$
5	12	{4, 3, 6, 6}	[24, 5, 3]
5	16	{4, 2, 4, 16}	[32, 5, 2]
5	20	{4, 2, 4, 10}	[40, 5, 3]
5	24	{4, 2, 4, 8}	[48, 5, 3]
5	36	{4, 2, 4, 6}	[72, 5, 5]

Tabela 4.7: Parâmetros dos códigos sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2s\}$  para  $g = 3$  e  $g = 5$ .

Suponha que uma superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  seja tesselada por um polígono  $\mathbb{P}$  com incentro e ângulos internos  $\frac{\pi}{p_1}, \dots, \frac{\pi}{p_m}$ , onde no vértice “ $p_i$ ” existem  $2p_i$  polígonos todos de ângulos  $\frac{\pi}{p_i}$  para  $i = 1, \dots, m$  tais que  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < m - 2$ . Assim, tomando a tesselação dual dessa tesselação formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$ , obtemos a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$ .

Assumindo a existência de tal tesselação pelos polígonos  $\mathbb{P}$ , determinaremos os parâmetros  $[n, k, d]$  do código quântico de superfície para  $g \geq 3$ . Pelo fato de estarmos partindo de um polígono  $\mathbb{P}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p_1}, \dots, \frac{\pi}{p_m}$ , precisamos determinar a quantidade de faces, arestas e vértices dessa tesselação para depois determinamos essas mesmas coisas para a tesselação dual.

De (4.8) segue que, se  $\mathbb{P}$  tessela  $\mathbb{M}$ , então

$$n_f = \frac{2(g-2)}{m-2 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_m}}, \quad (4.48)$$

com  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < m - 2$ .

Como o polígono  $\mathbb{P}$  possui  $m$  lados, segue que a quantidade de arestas é dada por

$$n_e = \frac{mn_f}{2}. \quad (4.49)$$

Pelo fato do polígono  $\mathbb{P}$  possuir, possivelmente, os seus vértices com valências distintas, teremos que contar a quantidade de vértices de maneira separada. Desse modo, a quantidade de vértices de valência  $2p_i$  será

$$n_{v_{2p_i}} = \frac{n_f}{2p_i},$$

onde  $n_{v_{2p_i}}$  é a quantidade de vértices de valência  $2p_i$  com  $i = 1, \dots, m$ . Logo, o total de vértices será

$$n_v = \sum_{i=1}^m m n_{v_{2p_i}}. \quad (4.50)$$

Repare que de (4.48), (4.49) e (4.50) segue que  $n_v - n_e + n_f = 2 - g$ , como desejado.

O dual da tesselação formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$  será a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$ , onde a quantidade de arestas  $N_e$  e vértices  $N_v$  serão dados por

$$N_e = n_e = \frac{m(g-2)}{m-2-\frac{1}{p_1}-\dots-\frac{1}{p_m}}, \quad (4.51)$$

$$N_v = n_f = \frac{2(g-2)}{m-2-\frac{1}{p_1}-\dots-\frac{1}{p_m}}. \quad (4.52)$$

O número de faces será

$$N_f = \sum_{i=1}^m N_{f_{2p_i}} \quad (4.53)$$

onde  $N_{f_{2p_i}} = \frac{n_f}{2p_i}$  é a quantidade de  $2p_i$ -gons para  $i = 1, \dots, m$  da tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas, logo

$$n = \frac{m(g-2)}{m-2-\frac{1}{p_1}-\dots-\frac{1}{p_m}}. \quad (4.54)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , basta generalizarmos o feito para o caso  $m = 3$  e  $m = 4$ . Assim, considere  $A_{p_i}$  o incentro do  $2p_i$ -gon com  $i = 1, \dots, m$ . Unimos esses pontos de modo a obtermos o polígono  $\mathbb{P}$  que é dado no início. Temos que  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$  e  $a_{p_i}$  é o apótema do  $2p_i$ -gon, onde  $i = 1, \dots, m$ . Denotando por  $L_1^*, \dots, L_m^*$ , os comprimentos dos  $m$  lados de  $\mathbb{P}$ , segue que

$$L_i^* = \begin{cases} a_i + a_{i+1}, & \text{se } i = 1, \dots, m-1 \\ a_m + a_1, & \text{se } i = m \end{cases} \quad (4.55)$$

Determinamos o valor de  $L$  somente de maneira numérica, e com ele determinamos os valores dos apótemas  $a_{p_i}$  do mesmo que fizemos nos casos anteriores. Conseqüentemente, obtemos os valores de  $L_i^*$  para  $i = 1, \dots, m$ . Portanto, a distância  $d$  do código será limitada inferiormente por

$$d_{\min} = \left\lceil \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \dots, \frac{d_h}{L_m^*} \right\} \right\rceil, \quad (4.56)$$

onde  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação semirregular  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$  e  $L_1^*, \dots, L_m^*$  são os comprimentos das arestas do polígono  $\mathbb{P}$  da tesselação dual.

Desse modo, fica determinado todos os parâmetros  $[n, k, d]$  do nosso código quântico de superfície em superfícies compactas não-orientáveis com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m\}$ , caso ela exista.

### Códigos de Superfície Sobre a Tesselação $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$

Faremos a construção dos códigos de superfície sobre a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$ . Do mesmo modo que no caso anterior, não temos a garantia que tal tesselação exista na superfície para um valor qualquer de  $m$ , mas temos a garantia que existirá no plano, como pode ser visto em [53]. Por isso, para a construção desses códigos também estaremos assumindo que tal tesselação exista na superfície não-orientável  $\mathbb{M}$ .

Suponha que uma superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  seja tesselada por um polígono  $\mathbb{P}$  com incentro e ângulos internos  $\frac{\pi}{p_1}, \dots, \frac{\pi}{p_m}, \frac{2\pi}{q}$  com  $q$  ímpar, onde no vértice “ $p_i$ ” existem  $2p_i$  polígonos todos de ângulos  $\frac{\pi}{p_i}$  para  $i = 1, \dots, m$  e no vértice “ $q$ ” existem  $q$  polígonos todos de ângulo  $\frac{2\pi}{q}$  tais que  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} + \frac{2}{q} < m - 1$ . Assim, tomando a tesselação dual dessa tesselação formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$ , obtemos a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$ .

Assumindo a existência de tal tesselação pelos polígonos  $\mathbb{P}$ , determinaremos os parâmetros  $[n, k, d]$  do código quântico de superfície para  $g \geq 3$ . Como estamos partindo de um polígono  $\mathbb{P}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p_1}, \dots, \frac{\pi}{p_m}, \frac{2\pi}{q}$ , precisamos determinar a quantidade de faces, arestas e vértices dessa tesselação para depois determinamos essas mesmas coisas para a tesselação dual.

De (4.8), segue que se  $\mathbb{P}$  tessela  $\mathbb{M}$ , então

$$n_f = \frac{2(g-2)}{m-1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_m} - \frac{2}{q}} \quad (4.57)$$

com  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} + \frac{2}{q} < m - 1$ .

Como o polígono  $\mathbb{P}$  possui  $(m+1)$  lados, segue que a quantidade de arestas é dada por

$$n_e = \frac{(m+1)n_f}{2}. \quad (4.58)$$

Pelo fato do polígono  $P$  possuir, possivelmente, os seus vértices com valências distintas, teremos que contar a quantidade de vértices de maneira separada. Desse modo, temos que

$$n_{v_{2p_i}} = \frac{n_f}{2p_i} \text{ e } n_{v_q} = \frac{n_f}{q},$$

onde  $n_{v_{2p_i}}$  com  $i = 1, \dots, m$  e  $n_{v_q}$  são a quantidade de vértices de valência  $2p_i$  e  $q$ , respectivamente. Logo, o total de vértices será

$$n_v = \sum_{i=1}^m n_{v_{2p_i}} + n_{v_q}. \quad (4.59)$$

Repare que de (4.57) (4.58) e (4.59) segue  $n_v - n_e + n_f = 2 - g$ , como desejado.

O dual da tesselação formada pelos polígonos  $\mathbb{P}$  será a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$ , onde a quantidade de arestas  $N_e$  e vértices  $N_v$  serão dados por

$$N_e = n_e = \frac{(m+1)(g-2)}{m-1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_m} - \frac{2}{q}}, \quad (4.60)$$

$$N_v = n_f = \frac{2(g-2)}{m-1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_m} - \frac{2}{q}}. \quad (4.61)$$

O número de faces será

$$N_f = \sum_{i=1}^m N_{f_{2p_i}} + N_{f_q}, \quad (4.62)$$

onde  $N_{f_{2p_i}} = \frac{n_f}{2p_i}$  e  $N_{f_q} = \frac{n_f}{q}$  são a quantidade de  $2p_i$ -gons para  $i = 1, \dots, m$  e de  $q$ -gons.

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de arestas, logo

$$n = \frac{(m+1)(g-2)}{m-1 - \frac{1}{p_1} - \dots - \frac{1}{p_m} - \frac{2}{q}}. \quad (4.63)$$

Para calcularmos o limitante inferior da distância  $d$ , precisamos calcular o comprimento de uma aresta da tesselação  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$  e o comprimento das arestas da tesselação dual, ou seja, das arestas de  $\mathbb{P}$ . Como os  $m+1$  lados do polígono  $\mathbb{P}$  podem ser distintos, devemos calcular o comprimento de cada um deles.

Analogamente aos demais casos, determinamos o valor de  $L$  somente de maneira numérica, e com ele determinamos os valores dos apótemas dos  $2p_i$ -gons e do  $q$ -gon do mesmo que fizemos nos casos anteriores, os quais são os comprimentos dos  $m+1$  lados de  $\mathbb{P}$ . Conseqüentemente,

obtemos os valores de  $L_i^*$  para  $i = 1, \dots, m + 1$ . Portanto, a distância  $d$  do código será limitada inferiormente por

$$d_{\min} = \left\lceil \min \left\{ \frac{d_h}{L}, \frac{d_h}{L_1^*}, \dots, \frac{d_h}{L_{m+1}^*} \right\} \right\rceil, \quad (4.64)$$

onde  $L$  é o comprimento de uma aresta da tesselação semirregular  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$  e  $L_1^*, \dots, L_{m+1}^*$  são os comprimentos das arestas do polígono  $\mathbb{P}$  da tesselação dual.

Desse modo, fica determinado todos os parâmetros  $[n, k, d]$  do nosso código quântico de superfície em superfícies compactas não-orientáveis com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m, q\}$ , caso ela exista.

## 4.2 Códigos Coloridos em Superfícies Compactas Não-Orientáveis com $g \geq 3$ Sobre Tesselacões Semirregulares

Faremos nesta seção a construção dos códigos quânticos coloridos em superfícies compactas não-orientáveis  $\mathbb{M}$  com gênero  $g \geq 3$  sobre tesselações semirregulares. As tesselações que utilizaremos para fazer essa construção são as tesselações semirregulares  $\{2p, 2p, q\}$  e  $\{2p, 2q, 4\}$  provenientes da tesselação regular  $\{p, q\}$ . Como comentado na seção 2.5, se  $q$  for par em  $\{p, q\}$ , então obtemos que  $\{2p, 2p, q\}$  será 3-colorível e poderá ser usada para a construção de códigos coloridos. Já  $\{2p, 2q, 4\}$  pode ser usada sem nenhuma restrição quanto aos valores de  $p$  e  $q$ . Construiremos também os códigos coloridos sobre as tesselações  $\{2p, 2q, 2r\}$ , as quais vimos na seção passada que são obtidas a partir da existência de certos triângulos hiperbólicos na superfície.

A construção desses códigos coloridos sobre tesselações semirregulares é semelhante a construção em superfícies orientáveis visto na seção 2.5, com as mesmas diferenças apresentadas nos códigos coloridos da seção 2.4, ou seja, a região fundamental  $\mathbb{P}'$  da superfície não-orientável  $\mathbb{M}$  de gênero  $g \geq 3$  é da forma  $\{2g, 2g\}$  e a característica de Euler é  $\chi(\mathbb{M}) = 2 - g$ .

Os geradores estabilizadores, a definição do código  $\mathbf{C}$  e a quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$ , seguem como em (2.9), (2.10) e (2.12), respectivamente. Já o

parâmetro  $n$  depende da tesselação semirregular. Desse modo, assim como fizemos na seção passada, vamos analisar cada caso individualmente. O parâmetro  $k$  depende somente da topologia da superfície e não da tesselação, por isso, segue que  $k = 2g$ , bem como visto na seção 2.4. Porém, fazendo as substituições apropriadas é possível mostrar em cada caso que esse valor é preservado.

Para a distância  $d$  desses códigos, utilizaremos o mesmo limitante superior desenvolvido por nós, que apresentamos no capítulo 3. Esse limitante depende somente da quantidade de faces vermelhas, verdes e azuis, e do tipo da tesselação, não dependendo da orientação da superfície. Assim, para as tesselações da forma  $\{2p, 2q, 2r\}$  com  $p, q, r \neq 2$  utilizaremos o Teorema 3.17. Já para as tesselações da forma  $\{2p, 2q, 4\}$  utilizaremos o Teorema 3.18. O Teorema 3.3 continua valendo aqui no caso semirregular não-orientável, basta fazermos as alterações apropriadas. Podemos utilizar também o Corolário 3.16 para determinarmos se a distância será exatamente 2.

Como visto na seção 2.5, para determinarmos os parâmetros desses códigos é necessário que sejam determinados as quantidades de faces, vértices, arestas e as quantidades de faces vermelhas, verdes e azuis de cada tipo de tesselação.

### Códigos Coloridos Sobre a Tesselação $\{2p, 2p, q\}$

A quantidade  $N_f$  de faces,  $N_e$  de arestas e  $N_v$  de vértices da tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  são dadas pela equação (4.4), ou seja,

$$N_f = \frac{(2p + 2q)(g - 2)}{pq - 2p - 2q}, \quad N_e = \frac{3pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q} \quad \text{e} \quad N_v = \frac{2pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.65)$$

O total de faces vermelhas e verdes na tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  são iguais e são dadas por  $F_R = F_G = \frac{n_f}{2}$ , já a quantidade de faces azuis é dada por  $F_B = n_v$ , onde  $n_f$  e  $n_v$  são as quantidades de faces e vértices da tesselação  $\{p, q\}$ , isto é,

$$F_R = F_G = \frac{q(g - 2)}{pq - 2p - 2q} \quad \text{e} \quad F_B = \frac{2p(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.66)$$

Repare que  $F_R + F_G + F_B = N_f$ , como deveria ser.

Os qubits físicos  $n$  são dados pela quantidade de vértices de  $\{2p, 2p, q\}$ , logo, segue que

$$n = N_v = \frac{2pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.67)$$

Já a quantidade de qubits codificados  $k$  é dado por  $k = 2g$  e para a distância  $d$  utilizamos o que foi visto no capítulo 3 e comentado na introdução dessa seção.

Desse modo, ficam determinados todos os parâmetros dos códigos quânticos coloridos em superfícies não-orientáveis  $\mathbb{M}$  com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p, 2p, q\}$ .

Apresentamos na Tabela 4.8 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  do nosso código colorido sobre a tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  proveniente da existência da tesselação  $\{p, q\}$  com  $q$  par, para os gêneros  $g = 3, 5$  e  $7$ , juntamente com as tesselações  $\{2p, 2p, q\}$  utilizadas.

$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\max}]$	$g$	Tesselação	$[n, k, d_{\max}]$
3	$\{6, 6, 8\}$	$[24, 6, 4]$	5	$\{12, 12, 12\}$	$[12, 10, 2]$
3	$\{10, 10, 4\}$	$[20, 6, 4]$	7	$\{6, 6, 8\}$	$[120, 14, 4]$
3	$\{6, 6, 12\}$	$[12, 6, 2]$	7	$\{10, 10, 4\}$	$[100, 14, 8]$
3	$\{12, 12, 4\}$	$[12, 6, 2]$	7	$\{12, 12, 4\}$	$[60, 14, 4]$
3	$\{8, 8, 8\}$	$[8, 6, 2]$	7	$\{6, 6, 12\}$	$[60, 14, 4]$
5	$\{6, 6, 8\}$	$[72, 10, 4]$	7	$\{6, 6, 16\}$	$[48, 14, 4]$
5	$\{10, 10, 4\}$	$[60, 10, 6]$	7	$\{8, 8, 8\}$	$[40, 14, 4]$
5	$\{12, 12, 4\}$	$[36, 10, 4]$	7	$\{18, 18, 4\}$	$[36, 14, 4]$
5	$\{6, 6, 12\}$	$[36, 10, 4]$	7	$\{6, 6, 36\}$	$[36, 14, 4]$
5	$\{14, 14, 4\}$	$[28, 10, 4]$	7	$\{28, 28, 4\}$	$[28, 14, 2]$
5	$\{8, 8, 8\}$	$[24, 10, 4]$	7	$\{12, 12, 8\}$	$[24, 14, 2]$
5	$\{6, 6, 24\}$	$[24, 10, 2]$	7	$\{8, 8, 24\}$	$[24, 14, 2]$
5	$\{20, 20, 4\}$	$[20, 10, 2]$	7	$\{10, 10, 20\}$	$[20, 14, 2]$
5	$\{8, 8, 16\}$	$[16, 10, 2]$	7	$\{16, 16, 16\}$	$[16, 14, 2]$

Tabela 4.8: Tesselações e parâmetros dos códigos coloridos em superfícies não-orientáveis sobre a tesselação  $\{2p, 2p, q\}$  com  $q$  par,  $g = 3, 5$  e  $7$ .

### Códigos Coloridos Sobre a Tesselação $\{2p, 2q, 4\}$

A quantidade  $N_f$  de faces,  $N_e$  de arestas e  $N_v$  de vértices da tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  são dadas pela equação (4.6), ou seja,

$$N_f = \frac{(pq + 2p + 2q)(g - 2)}{pq - 2p - 2q}, \quad N_e = \frac{6pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q} \quad \text{e} \quad N_v = \frac{4pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.68)$$

O total de faces vermelhas, verdes e azuis na tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  são dadas por  $F_R = n_f$ ,  $F_G = n_v$  e  $F_B = n_e$ , respectivamente, onde  $n_f$ ,  $n_v$  e  $n_e$  são as quantidades de faces, vértices e arestas da tesselação  $\{p, q\}$ , isto é,

$$F_R = \frac{2q(g - 2)}{pq - 2p - 2q}, \quad F_G = \frac{2p(g - 2)}{pq - 2p - 2q} \quad \text{e} \quad F_B = \frac{pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.69)$$

Repare que  $F_R + F_G + F_B = N_f$ , como deveria ser.

Os qubits físicos  $n$  são dados pela quantidade de vértices de  $\{2p, 2q, 4\}$ , logo, segue que

$$n = N_v = \frac{4pq(g - 2)}{pq - 2p - 2q}. \quad (4.70)$$

Já a quantidade de qubits codificados  $k$  é dado por  $k = 2g$  e para a distância  $d$  utilizamos o Teorema 3.18.

Desse modo, ficam determinados todos os parâmetros dos códigos quânticos coloridos em superfícies não-orientáveis  $\mathbb{M}$  com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 4\}$ .

Apresentamos na Tabela 4.9 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  do nosso código colorido sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 4\}$  proveniente da existência da tesselação  $\{p, q\}$  com  $q$  par, para os gêneros  $g = 3$  e  $5$ , juntamente com as tesselações  $\{2p, 2q, 4\}$  utilizadas.

### Códigos Coloridos Sobre a Tesselação $\{2p, 2q, 2r\}$

Para garantir a existência da tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ , a qual não é proveniente da existência da tesselação regular  $\{p, q\}$ , na superfície não-orientável  $\mathbb{M}$ , utilizaremos o mesmo processo feito no caso dos códigos de superfície sobre essa mesma tesselação. Utilizaremos também a mesma rotina do software GAP que usamos no caso dos códigos de superfícies, pois o que vai mudar entre esses dois códigos será somente os parâmetros.

$g$	Tesselacão	$[n, k, d_{\max}]$	$g$	Tesselacão	$[n, k, d_{\max}]$	$g$	Tesselacão	$[n, k, d_{\max}]$
3	{6, 14, 4}	[84, 6, 4]	5	{6, 14, 4}	[252, 10, 8]	5	{8, 16, 4}	[48, 10, 4]
3	{6, 16, 4}	[48, 6, 4]	5	{6, 16, 4}	[144, 10, 6]	5	{8, 20, 4}	[40, 10, 4]
3	{6, 18, 4}	[36, 6, 4]	5	{6, 18, 4}	[108, 10, 4]	5	{8, 32, 4}	[32, 10, 4]
3	{6, 24, 4}	[24, 6, 4]	5	{6, 24, 4}	[72, 10, 4]	5	{10, 10, 4}	[60, 10, 6]
3	{8, 10, 4}	[40, 6, 4]	5	{6, 30, 4}	[60, 10, 4]	5	{12, 12, 4}	[36, 10, 4]
3	{8, 12, 4}	[24, 6, 4]	5	{6, 48, 4}	[48, 10, 4]	5	{12, 24, 4}	[24, 10, 2]
3	{8, 16, 4}	[16, 6, 2]	5	{8, 10, 4}	[120, 10, 8]	5	{14, 14, 4}	[28, 10, 4]
3	{10, 10, 4}	[20, 6, 4]	5	{8, 12, 4}	[72, 10, 4]	5	{20, 20, 4}	[20, 10, 2]
3	{12, 12, 4}	[12, 6, 2]	5	{8, 14, 4}	[56, 10, 4]			

Tabela 4.9: Tesselacões e parâmetros dos códigos coloridos em superfícies não-orientáveis sobre a tesselacão  $\{2p, 2q, 4\}$  com  $g = 3$  e 5.

A quantidade de arestas  $N_e$ , vértices  $N_v$  e faces  $N_f$  da tesselacão  $\{2p, 2q, 2r\}$  são dadas pelas equações (4.12), (4.13) e (4.14), respectivamente, ou seja

$$N_e = \frac{3pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad N_v = \frac{2pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr} \quad \text{e} \quad N_f = \frac{(pq + pr + qr)(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.71)$$

O total de faces vermelhas, verdes e azuis na tesselacão  $\{2p, 2q, 2r\}$  são dados por  $F_R = \frac{n_f}{2p}$ ,  $F_G = \frac{n_f}{2q}$  e  $F_B = \frac{n_f}{2r}$ , onde  $n_f$  é dado por (4.9), ou seja, são respectivamente, as quantidades de  $2p$ -gons,  $2q$ -gons e  $2r$ -gons da tesselacão  $\{2p, 2q, 2r\}$ . Assim,

$$F_R = \frac{qr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}, \quad F_G = \frac{pr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr} \quad \text{e} \quad F_B = \frac{pq(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.72)$$

Repare que  $F_R + F_G + F_B = N_f$ , como deveria ser.

Os qubits físicos  $n$  são dados pela quantidade de vértices de  $\{2p, 2q, 2r\}$ , logo, segue que

$$n = \frac{2pqr(g-2)}{pqr - pq - pr - qr}. \quad (4.73)$$

Já a quantidade de qubits codificados  $k$  é dado por  $k = 2g$  e para a distância  $d$  utilizamos o que foi visto no capítulo 3.

Desse modo, fica determinado todos os parâmetros  $[n, k, d]$  do nosso código quântico colorido em superfícies não-orientáveis com  $g \geq 3$  sobre a tesselação semirregular  $\{2p, 2q, 2r\}$ .

Apresentamos na Tabela 4.10 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $d$  do nosso código colorido sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  para os gêneros  $g = 3$  e  $5$ , juntamente com as tesselações  $\{2p, 2q, 2r\}$  utilizadas e a quantidade  $\mathbf{X}$  de triângulos. Não apresentaremos as permutações involutórias regulares, pois as obtidas estão apresentadas na Tabela 4.4.

$g$	$\mathbf{X}$	Tesselação	$[n, k, d_{\max}]$
3	8	{8, 8, 8}	[8, 6, 2]
3	12	{4, 12, 12}	[12, 6, 2]
3	12	{6, 6, 12}	[12, 6, 2]
3	16	{4, 8, 16}	[16, 6, 2]
3	20	{4, 10, 10}	[20, 6, 4]
3	24	{4, 6, 24}	[24, 6, 4]
3	24	{6, 6, 8}	[24, 6, 4]
3	24	{4, 8, 12}	[24, 6, 4]
3	36	{4, 6, 18}	[36, 6, 4]
3	40	{4, 8, 10}	[40, 6, 4]
3	48	{4, 6, 16}	[48, 6, 4]
3	84	{4, 6, 14}	[84, 6, 4]
5	12	{12, 12, 12}	[12, 10, 2]
5	16	{8, 8, 16}	[16, 10, 2]
5	20	{4, 20, 20}	[20, 10, 2]
5	24	{6, 8, 12}	[24, 10, 4]
5	24	{8, 8, 8}	[24, 10, 4]
5	24	{4, 12, 24}	[24, 10, 2]
5	24	{6, 6, 24}	[24, 10, 2]
5	28	{4, 14, 14}	[28, 10, 4]
5	32	{4, 8, 32}	[32, 10, 4]
5	36	{6, 6, 12}	[36, 10, 4]
5	36	{4, 12, 12}	[36, 10, 4]
5	40	{4, 8, 20}	[40, 10, 4]
5	48	{4, 8, 16}	[48, 10, 4]
5	48	{4, 6, 48}	[48, 10, 4]
5	56	{4, 8, 14}	[56, 10, 4]
5	60	{4, 6, 30}	[60, 10, 4]
5	60	{4, 10, 10}	[60, 10, 4]
5	72	{4, 8, 12}	[72, 10, 4]
5	72	{6, 6, 8}	[72, 10, 6]
5	72	{4, 6, 24}	[72, 10, 4]
5	108	{4, 6, 18}	[108, 10, 4]
5	120	{4, 8, 10}	[120, 10, 6]
5	144	{4, 6, 16}	[144, 10, 4]
5	252	{4, 6, 14}	[252, 10, 6]

Tabela 4.10: Tesselções, parâmetros dos códigos coloridos em superfícies não-orientáveis sobre a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$  com  $g = 3$  e  $5$ .

---

# Códigos de Subsistema

---

Neste capítulo abordaremos os códigos de subsistema, os quais também são códigos estabilizadores. Segundo Bombín [13], esses códigos são o resultado de aplicar o formalismo estabilizador à correção de erro quântico do operador [48], [49]. Como pode ser visto em [57], Poulin afirma que a correção de erro quântico do operador generaliza a teoria padrão de correção de erro quântico e fornece uma estrutura unificada para a correção ativa de erros e técnicas passivas de prevenção de erros, o que, segundo Aly e Klappenecker [3], tornou os códigos de subsistema a classe mais versátil de códigos quânticos corretores de erros conhecidos até aquele momento.

Nos códigos de subsistema nem todos os qubits lógicos que formam o espaço código  $\mathbf{C}$  são usados como qubits lógicos, ou seja, são usados para codificar informação. Uma parte desses qubits são considerados como qubits gauge, os quais não codificam informação alguma. Além de outras consequências, esses qubits absorvem o efeito dos erros que ocorrem neles.

Nesses códigos, o espaço código  $\mathbf{C}$  é decomposto em um produto tensorial de dois espaços vetoriais (dois subsistemas), onde somente um deles é utilizado para codificar informações.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira: Na seção 5.1, apresentaremos os principais elementos dos códigos de subsistema, como por exemplo, os principais grupos necessários para sua construção e definição. Falaremos sobre a distância e daremos um exemplo de tal código, conhecido como código de Bacon-Shor [5]. Na seção 5.2, abordaremos os códigos de subsistema topológicos, onde traremos algumas vantagens importantes desses códigos em relação aos códigos quânticos topológicos. Trataremos também dos principais aspectos da construção de tais códigos feito em [13] e sua generalização feita em [67] e [59]. Por fim, veremos duas famílias de códigos de subsistema topológicos apresentadas em [59].

## 5.1 Principais Elementos dos Códigos de Subsistema

A definição de código de subsistema é semelhante aos códigos estabilizadores, pois também teremos um grupo estabilizador  $\mathbf{S}$  e o espaço código  $\mathbf{C}$  também é dado como no capítulo 2.

Como vimos na seção 2.1, temos um espaço código  $\mathbf{C}$  onde as informações são codificadas. A partir desse espaço código, o qual é um subespaço do espaço de Hilbert  $H$ , podemos decompor  $H$  na soma direta  $H = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}^\perp$ .

Nos códigos de subsistema o espaço código  $\mathbf{C}$  não é mais utilizado de maneira completa. O mesmo admite uma estrutura de subsistema, de modo que podemos escrever  $\mathbf{C}$  como  $\mathbf{C} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ , onde  $\mathbb{A}$  é o subsistema de  $\mathbf{C}$  que é utilizado para codificar as informações. Já o subsistema  $\mathbb{B}$  não codifica informações e os erros que ocorrem nele são ignorados. Portanto, dizemos que o subsistema  $\mathbb{B}$  contribui com graus de liberdade gauge. Pelo fato de usarmos subsistemas é que o código é chamado de código de subsistema.

Para obter os subsistemas  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  precisamos de dois grupos, os quais são fundamentais para a construção dos códigos de subsistema.

O primeiro deles é o grupo gauge, denotado por  $\mathcal{G}$ , o qual é um subgrupo do grupo de Pauli  $P_n$ . Mais precisamente, esse grupo será um subgrupo normal de  $N(\mathbf{S})$  e será gerado pelo grupo estabilizador  $\mathbf{S}$ , por  $\langle i \rangle$  e por um subconjunto arbitrário de  $X'_j$  e  $Z'_j$  com  $j > s$ , onde  $s$  é a quantidade de geradores estabilizadores independentes.

O segundo grupo fundamental para a construção dos códigos de subsistema é o grupo lógico  $\mathcal{L} = N(\mathbf{S})/\mathcal{G}$ , o qual é grupo pelo fato de  $\mathcal{G}$  ser subgrupo normal de  $N(\mathbf{S})$ .

É exigido que os elementos de  $\mathcal{G}$  comutem com os elementos de  $\mathcal{L}$ . Segundo Poulin [57], uma consequência deles comutarem é que os geradores  $X'_j$  e  $Z'_j$  de  $\mathcal{G}$  devem aparecer sempre aos pares. Desse modo, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\mathcal{G} = \langle i, S_1, \dots, S_s, X'_{s+1}, \dots, X'_{s+r}, Z'_{s+1}, \dots, Z'_{s+r} \rangle, \quad (5.1)$$

com  $s + r \leq n$ . É comum o fator fase ser ignorado e o grupo gauge ser considerado sendo somente

$$\mathcal{G} = \langle \mathbf{S}, X'_{s+1}, \dots, X'_{s+r}, Z'_{s+1}, \dots, Z'_{s+r} \rangle. \quad (5.2)$$

Logo, segue que

$$\mathcal{L} \simeq \langle X'_{s+r+1}, Z'_{s+r+1}, \dots, X'_n, Z'_n \rangle. \quad (5.3)$$

Como os elementos de  $\mathcal{G}$  comutam com os elementos de  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{G} \times \mathcal{L} \simeq N(\mathbf{S})$ , pode ser visto em [69] que é possível induzir uma estrutura de subsistema no espaço código  $\mathbf{C}$ , de modo que tenhamos  $\mathbf{C} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ , onde o grupo  $\mathcal{G}$  age de maneira trivial em  $\mathbb{A}$  e  $\mathcal{L}$  age de maneira trivial em  $\mathbb{B}$ . Segue também que  $\mathbb{A} \simeq (\mathbb{C}^2)^{\otimes k}$  e  $\mathbb{B} \simeq (\mathbb{C}^2)^{\otimes r}$ . Veja que se utilizarmos  $\mathbb{B}$  como sendo um espaço unidimensional, então teremos exatamente os códigos quânticos corretores de erros.

Repare que  $\mathcal{L}$  age como os operadores lógicos dos códigos estabilizadores. Assim, a maior novidade até agora nos códigos de subsistema é a presença do grupo gauge  $\mathcal{G}$ .

A ação dos operadores gauge no espaço código  $\mathbf{C}$  induz a seguinte relação de equivalência em  $\mathbf{C}$ . Sejam  $|\psi\rangle, |\psi'\rangle \in \mathbf{C}$ , temos que

$$|\psi\rangle \sim |\psi'\rangle \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{G} \text{ tal que } |\psi'\rangle = g|\psi\rangle.$$

Por definição, estados equivalentes  $|\psi_{\mathbb{A}}\rangle \otimes |\psi_{\mathbb{B}}\rangle$  e  $|\psi'_{\mathbb{A}}\rangle \otimes |\psi'_{\mathbb{B}}\rangle$  carregam a mesma informação, mesmo se  $|\psi_{\mathbb{B}}\rangle$  e  $|\psi'_{\mathbb{B}}\rangle$  forem diferentes.

Outro fato importante do grupo gauge é que o grupo estabilizador  $\mathbf{S}$  do código de subsistema pode ser descrito utilizando  $\mathcal{G}$ , devido a identidade  $\mathbf{S} = \mathcal{G} \cap C(\mathcal{G})$ , onde  $C(\mathcal{G})$  é o centralizador de  $\mathcal{G}$  no grupo de Pauli. Assim, para caracterizarmos os códigos de subsistema basta termos o seu grupo gauge  $\mathcal{G}$ .

Vale observar que nos códigos estabilizadores tínhamos  $n = k + s$ . Já nos códigos de subsistema dividimos os  $n$  qubits virtuais em três conjuntos:  $s$  qubits estabilizadores,  $r$  qubits gauge e  $k$  qubits lógicos, onde os qubits físicos agora são dados por  $n = k + r + s$ . Os operadores relacionados ao primeiro conjunto são dados pelos geradores estabilizadores independentes  $S_1, \dots, S_s$  que fixam o espaço código  $2^{n-s=r+k}$ -dimensional  $\mathbf{C}$ . Já o segundo é gerado por  $X'_{s+j}$  e  $Z'_{s+j}$  com  $j = 1, \dots, r$ , que agem nos  $r$  qubits virtuais do subsistema  $\mathbb{B}$ , os quais não codificam informações úteis e o seu único propósito é absorver as transformações gauge, por isso são chamados de qubits gauge. Logo, o grupo gauge  $\mathcal{G}$  possui dimensão  $2r + s$ , ou seja,  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ . Por fim, o terceiro e último conjunto é formado pelos operadores

restantes, que são os operadores lógicos como nos códigos estabilizadores. Assim, denotamos esses operadores por  $\bar{X}_j$  e  $\bar{Z}_j$  com  $j = 1, \dots, k$ , os quais geram o conjunto  $\mathcal{L}$  e agem somente nos  $k$  qubits lógicos do subsistema  $\mathbb{A}$ .

Como os elementos de  $\mathcal{L}$  são os operadores lógicos do código de subsistema, eles são elementos do normalizador de  $\mathbf{S}$ , isto é, são elementos de

$$N(\mathbf{S}) = \langle \mathcal{G}, \bar{X}_1, \bar{Z}_1, \dots, \bar{X}_k, \bar{Z}_k \rangle. \quad (5.4)$$

Outros dois operadores que costumam aparecer com frequência na literatura sobre os códigos de subsistema, são os operadores lógicos bare e os operadores lógicos dressed. Os operadores lógicos bare se referem aos elementos de  $C(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{G}$ . Esses elementos preservam o espaço código  $\mathbf{C}$  e agem trivialmente nos qubits gauge. Já os operadores lógicos dressed se referem aos elementos de  $N(\mathbf{S}) \setminus \mathcal{G}$ . Como vale a identidade  $N(\mathbf{S}) = C(\mathcal{G}) \cdot \mathcal{G}$ , onde “ $\cdot$ ” é o produto dos elementos de  $C(\mathcal{G})$  pelos elementos de  $\mathcal{G}$ , temos que qualquer operador lógico dressed pode ser escrito como um produto de um operador lógico bare por um operador gauge.

Como pode ser visto em [17] a distância dos códigos de subsistema é definida da seguinte forma.

**Definição 5.1.** *A distância  $d$  de um código de subsistema é o peso mínimo de um operador de Pauli que comuta com todos os estabilizadores e age não-trivialmente no subsistema lógico  $\mathbb{A}$ , ou seja, será o peso mínimo de um operador lógico dressed não-trivial, isto é,*

$$d = \min_{P \in N(\mathbf{S}) \setminus \mathcal{G}} |P| = \min_{\substack{P \in C(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{G} \\ G \in \mathcal{G}}} |PG|, \quad (5.5)$$

onde  $|P|$  e  $|PG|$  são os pesos dos operadores de Pauli  $P$  e  $PG$ , respectivamente.

Assim, temos quatro parâmetros para os códigos de subsistema, o qual é denotado por  $[[n, k, r, d]]$ , onde  $n$  é a quantidade de qubits físicos,  $k$  a quantidade de qubits codificados,  $r$  a quantidade de qubits gauge e  $d$  a distância do código.

Apresentaremos agora um exemplo de código de subsistema, conhecido como código Bacon-Shor, o qual foi introduzido por Bacon em [5]. Esse código é definido em uma tesselação  $l \times l$ , onde os qubits são fixados em seus vértices.

Os geradores estabilizadores desse código são dados da seguinte forma:

Nos qubits pertencentes a duas linhas vizinhas age um operador do tipo  $X$  e nos qubits pertencentes a duas colunas vizinhas age um operador do tipo  $Z$ , como podem ser vistos na Figura 5.1 ou seja,

$$\mathbf{S} := \langle X_{i,-}X_{i+1,-}, Z_{-,i}Z_{-,i+1}; i = 1, \dots, l-1 \rangle, \quad (5.6)$$

onde  $X_{i,-}$  significa que o operador  $X$  está agindo em todos os qubits da  $i$ -ésima linha e  $Z_{-,i}$  significa que o operador  $Z$  está agindo em todos os qubits da  $i$ -ésima coluna.

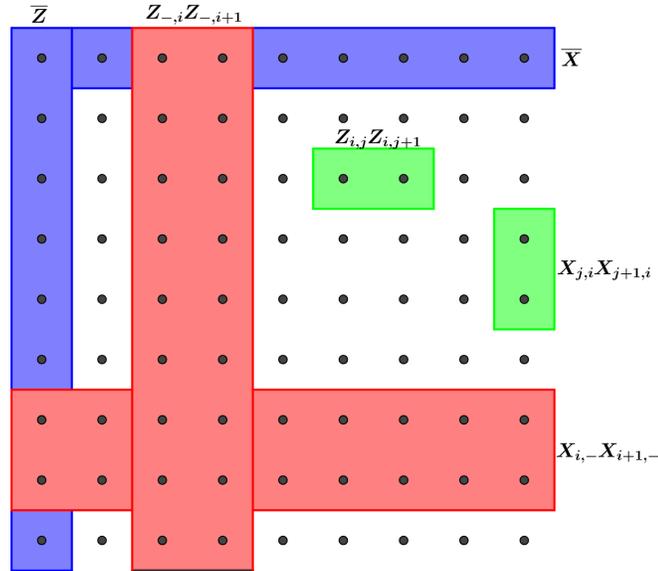


Figura 5.1: Tesselação  $l \times l$  para o código de Bacon-Shor, onde estão definidos os geradores estabilizadores independentes  $X_{i,-}X_{i+1,-}$  e  $Z_{-,i}Z_{-,i+1}$ , os geradores independentes do grupo gauge  $X_{j,i}X_{j+1,i}$  e  $Z_{i,j}Z_{i,j+1}$  e os operadores lógicos  $\bar{X} := X_{1,-}$  e  $\bar{Z} := Z_{-,1}$ .

Veja que a quantidade de geradores estabilizadores independentes é dado por  $s = 2(l-1)$ , logo, a dimensão do espaço código  $\mathbf{C}$  será  $2^{l^2-2(l-1)} = 2^{(l-1)^2+1}$ .

O grupo gauge  $\mathcal{G}$  é gerado pelos operadores  $X_{j,i}X_{j+1,i}$  e  $Z_{i,j}Z_{i,j+1}$ , para  $i = 1, \dots, l$  e  $j = 1, \dots, l-1$ . Esses operadores são todos independentes, logo,  $\dim \mathcal{G} = 2l(l-1)$ . Como  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ , segue que  $r = (l-1)^2$ , ou seja, o grupo gauge  $\mathcal{G}$  age em  $(l-1)^2$  qubits.

Veja na Figura 5.1 que esses operadores agem em dois qubits, onde  $X_{j,i}X_{j+1,i}$  age em 2 qubits consecutivos da mesma coluna e  $Z_{i,j}Z_{i,j+1}$  age em 2 qubits consecutivos da mesma

linha.

Já o grupo  $\mathcal{L}$  dos operadores lógicos é formado pelo par  $\bar{X} := X_{1,-}$  e  $\bar{Z} := Z_{-,1}$ , que também estão ilustrados na Figura 5.1, ou seja,  $\mathcal{L} = \langle \bar{X}, \bar{Z} \rangle$  e, assim, temos que  $k = 1$ . Veja que  $\bar{X}$  e  $\bar{Z}$  anticomutam.

Com  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{L}$  em mãos e utilizando [69], podemos decompor o espaço código  $\mathbf{C}$  como  $\mathbf{C} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ , onde o subsistema  $\mathbb{A}$  é um espaço bidimensional e o subsistema  $\mathbb{B}$  é um espaço  $2^{(l-1)^2}$ -dimensional.

A distância do código de Bacon-Shor é  $d = l$  pela maneira que foram escolhidos os operadores lógicos, já que eles tem peso  $l$ .

Portanto, o código Bacon-Shor é um código de subsistema do tipo  $[[l^2, 1, (l-1)^2, l]]$ .

Agora veremos um exemplo prático desse código de Bacon-Shor:

**Exemplo 5.2.** *Código de Bacon-Shor*  $[[4, 1, 1, 2]]$ .

Considere a Figura 5.2. Seguindo a construção feita anteriormente, temos que  $\mathbf{S} = \langle X_1 X_2 X_3 X_4, Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \rangle$ ,  $\mathcal{G} = \langle X_1 X_3, X_2 X_4, Z_1 Z_2, Z_3 Z_4 \rangle$  e  $\mathcal{L} = \langle X_1 X_2, Z_1 Z_3 \rangle$ .

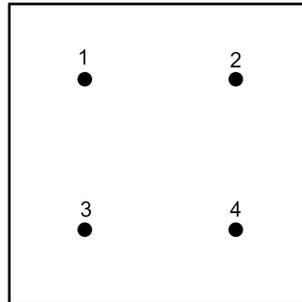


Figura 5.2: Tesselação  $2 \times 2$  para o código de Bacon-Shor.

Se quisermos escrever  $\mathcal{G}$  como visto anteriormente, ele fica da seguinte forma:

$$\mathcal{G} = \langle X_1 X_2 X_3 X_4, Z_1 Z_2 Z_3 Z_4, X_1 X_3, Z_1 Z_2 \rangle = \langle \mathbf{S}, X_1 X_3, Z_1 Z_2 \rangle.$$

Com  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{L}$  podemos decompor o espaço código  $\mathbf{C}$  nos subsistemas  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , onde ambos possuem dimensão 2.

Os qubits estabilizados por  $S$  são:

$$\begin{aligned} |00, 00\rangle &= |0000\rangle + |1111\rangle; \\ |00, 10\rangle &= |1100\rangle + |0011\rangle; \\ |00, 01\rangle &= |1010\rangle + |0101\rangle; \\ |00, 11\rangle &= |0110\rangle + |1001\rangle. \end{aligned}$$

Os dois primeiros qubits estão representando os qubits estabilizados, o terceiro representa o qubit lógico e o quarto representa o qubit gauge.

Podemos reescrever os qubits acima como

$$\begin{aligned} |0\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |0\rangle_{\mathbb{B}} &= |0000\rangle + |1111\rangle; \\ |1\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |0\rangle_{\mathbb{B}} &= |1100\rangle + |0011\rangle; \\ |0\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |1\rangle_{\mathbb{B}} &= |1010\rangle + |0101\rangle; \\ |1\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |1\rangle_{\mathbb{B}} &= |0110\rangle + |1001\rangle. \end{aligned}$$

Note que se aplicarmos  $X_1X_2$  em  $|0\rangle_{\mathbb{A}}$  teremos  $|1\rangle_{\mathbb{A}}$  e vice-versa, e  $Z_1Z_3$  em  $|0\rangle_{\mathbb{A}}$  teremos  $|0\rangle_{\mathbb{A}}$  e em  $|1\rangle_{\mathbb{A}}$  teremos  $-|1\rangle_{\mathbb{A}}$ . Já se aplicarmos os elementos de  $\mathcal{G}$ , eles vão agir como a identidade em  $\mathbb{A}$  e não-trivialmente em  $\mathbb{B}$ .

A relação de equivalência pode ser percebida aqui. Os estados  $|0\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |0\rangle_{\mathbb{B}}$  e  $|0\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |1\rangle_{\mathbb{B}}$  são equivalentes, pois  $X_1X_3 \in \mathcal{G}$  e  $X_1X_3(|0\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |0\rangle_{\mathbb{B}}) = |0\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |1\rangle_{\mathbb{B}}$ . Logo, esses estados carregam a mesma informação, mesmo sendo diferentes. O mesmo ocorre com  $|1\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |0\rangle_{\mathbb{B}}$  e  $|1\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |1\rangle_{\mathbb{B}}$  utilizando  $X_2X_4$ . Portanto, podemos considerar somente as palavras códigos

$$\begin{aligned} |0\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |0\rangle_{\mathbb{B}} &= |0000\rangle + |1111\rangle \\ |1\rangle_{\mathbb{A}} \otimes |0\rangle_{\mathbb{B}} &= |1100\rangle + |0011\rangle \end{aligned}$$

como geradores do código.

O código de subsistema de Bacon-Shor é caracterizado pelo fato de que os seus geradores estabilizadores são não-locais. Fato que faz com que esse código não possa ser chamado de código de subsistema topológico, como veremos na próxima seção.

Para maiores informações sobre os códigos de subsistema, sua construção, os conjuntos apresentados aqui, e para ver sobre a identificação e correção de erros, recomendamos [3], [17], [20] e [57].

## 5.2 Códigos de Subsistema Topológicos

Nesta seção apresentamos os códigos de subsistema topológicos. Esses códigos foram desenvolvidos primeiramente por Bombín [13] em 2010, o qual fazia uso de tesselações trivalentes e 3-coloríveis. No mesmo ano foram generalizados para hipergrafos trivalentes satisfazendo certas condições, por Suchara, Bravyi e Terhal [67]. Na sequência surgiram diversos trabalhos sobre esses códigos, também trabalhados no ambiente hiperbólico. Em 2012, Sarvepalli e Brown [59], acrescentaram mais uma condição sobre os hipergrafos que seria necessário em [67], mas não havia sido considerado. Apresentaram também duas famílias de códigos de subsistema topológicos, onde forneceram os parâmetros desses códigos, o que, segundo os mesmos, não é uma tarefa trivial para códigos de subsistema. Essas famílias de códigos construídas por Sarvepalli e Brown, seguem o modelo de construção obtendo hipergrafos trivalentes apresentados em [67]. Esses três trabalhos serviram de inspiração e forneceram as ferramentas necessárias para a construção de nossas famílias de códigos de subsistema topológicos que apresentaremos no próximo capítulo.

Os códigos de subsistema topológicos possuem todas as propriedades características dos códigos quânticos topológicos vistas no capítulo 2, como por exemplo, o fato de podermos visualizar os operadores dos códigos, o que segundo Breuckmann [20] torna o trabalho mais fácil e intuitivo, e também o fato de que os operadores correspondem a interação entre qubits vizinhos, o que faz com que tenhamos uma interpretação mais física dos códigos. Esses códigos também possuem algumas vantagens provenientes dos códigos de subsistema, como por exemplo, o fato dos códigos serem locais. Como veremos, uma das principais vantagens em comparação com os códigos quânticos topológicos, é que esses códigos necessitam de somente dois qubits vizinhos por vez para realizar a medição da síndrome para a correção de erro. Para ver outras vantagens dos códigos de subsistema topológicos recomendamos [13], [20] e [67].

Nos códigos de subsistema topológicos também é possível visualizar os qubits, assim como nos códigos quânticos topológicos, pois os mesmos são fixados nos vértices de alguma tesselação ou grafo bidimensional.

A construção dos códigos de subsistema topológicos combina as seguintes propriedades.

- ( $C_1$ ) O grupo estabilizador  $\mathbf{S} = \mathcal{G} \cap C(\mathcal{G})$  tem geradores espacialmente locais, isto é, a quantidade de elementos diferentes da identidade (seu peso) está dentro de um disco de raio  $O(1)$ . Os elementos de  $\mathbf{S}$  são identificados com os loops homologicamente triviais da tesselação;
- ( $C_2$ ) A extração da síndrome pode ser feita medindo os autovalores dos operadores link, os quais são 2-locais (2-qubits);
- ( $C_3$ ) O código codifica um ou mais qubits lógicos. Os operadores lógicos bare (em  $C(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{G}$ ) podem ser identificados com os loops homologicamente não-triviais.

**Definição 5.3.** *Um código de subsistema que satisfaz as propriedades ( $C_1$ ), ( $C_2$ ) e ( $C_3$ ) é chamado de código de subsistema topológico.*

A propriedade ( $C_1$ ) exige que os operadores estabilizadores ajam em uma pequena quantidade de qubits. Já a propriedade ( $C_3$ ) nos diz que os erros indetectáveis não-triviais aumentam com o tamanho da tesselação e são não-locais, o que segundo Breuckmann [20] é uma vantagem, pois a chance de ocorrer erros não-locais é muito menor do que os erros locais. Como pode ser visto em [18], essas duas propriedades são usadas com frequência também para descrever algumas propriedades dos códigos estabilizadores.

Por fim, a propriedade ( $C_2$ ) é a principal vantagem desses códigos em comparação com os códigos quânticos topológicos.

Caso somente a propriedade ( $C_3$ ) não seja satisfeita, então obtemos um código de subsistema que não codifica qubit lógico ( $k = 0$ ), ou seja, não codifica informação.

Um exemplo que satisfaz ( $C_1$ ) e ( $C_2$ ), mas não satisfaz ( $C_3$ ) é o modelo Honeycomb de Kitaev, que pode ser visto em [46]. Em [67] é provado que o código de subsistema construído nessa tesselação não codifica informação alguma. Também é provado que toda e qualquer tesselação ou grafo trivalente não codifica informação, visto como código de subsistema.

Agora abordaremos os principais aspectos da construção dos códigos de subsistema topológicos realizados por Bombín em [13], por Suchara, Bravyi e Terhal em [67] e por Sarvepalli e Brown em [59]. Mas antes disso, definiremos alguns conceitos básicos sobre teoria de grafos. Para ver mais sobre teoria de grafos recomendamos [11], [29] e [41].

**Definição 5.4.** *Um grafo é um par  $\Gamma = (V, E)$ , onde  $E$  é um subconjunto do conjunto  $V \times V$  de pares não-ordenados de  $V$ , isto é, os elementos de  $V$  são os vértices do grafo  $\Gamma$  e os elementos de  $E$  são as arestas do grafo  $\Gamma$ .*

**Definição 5.5.** *Sejam  $\Gamma = (V, E)$  e  $\gamma = (V', E')$  dois grafos. Se  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ , então  $\gamma$  é dito ser um subgrafo de  $\Gamma$ .*

**Definição 5.6.** *Um hipergrafo é um par  $\Gamma_h = (V, E)$ , onde os elementos de  $E$  são subconjuntos dos elementos de  $V$ . Se os subconjuntos são todos de tamanho dois, então  $\Gamma_h$  é um grafo padrão. E, um hipergrafo trivalente é um hipergrafo  $\Gamma_h$  tal que todo vértice pertence a exatamente três arestas distintas. É também dito que tal hipergrafo possui grau 3.*

**Definição 5.7.** *Seja  $\Gamma_h = (V, E)$  um hipergrafo. Qualquer elemento de  $E$  cujo tamanho é maior do que 2 é chamado de hiperaresta e o seu rank é o seu tamanho. Já o rank de um hipergrafo é o rank máximo de suas arestas.*

Com esses conceitos de teoria de grafos estamos aptos a desenvolver a construção dos códigos de subsistema topológicos.

A construção feita por Bombín, parte de uma tesselação  $\Gamma$  trivalente e 3-colorível e toma a tesselação dual  $\Gamma^*$ , a qual é uma tesselação formada por triângulos. Cada aresta da tesselação dual é transformada em uma face de quatro lados e cada vértice é transformado em uma face de tantos lados quanto a valência do vértice, o qual já é feito de maneira automática ao gerar as faces de quatro lados, como pode ser visto na Figura 5.3-(a). Essa nova tesselação será denotada por  $\bar{\Gamma}$ .

Em [13], Bombín identificou as arestas como sendo de três tipos: arestas sólidas, tracejadas e pontilhadas. Porém, para não causar confusão e padronizar com a nossa construção e a construção e linguagem realizada em [59], vamos colorir as arestas dessa nova tesselação da

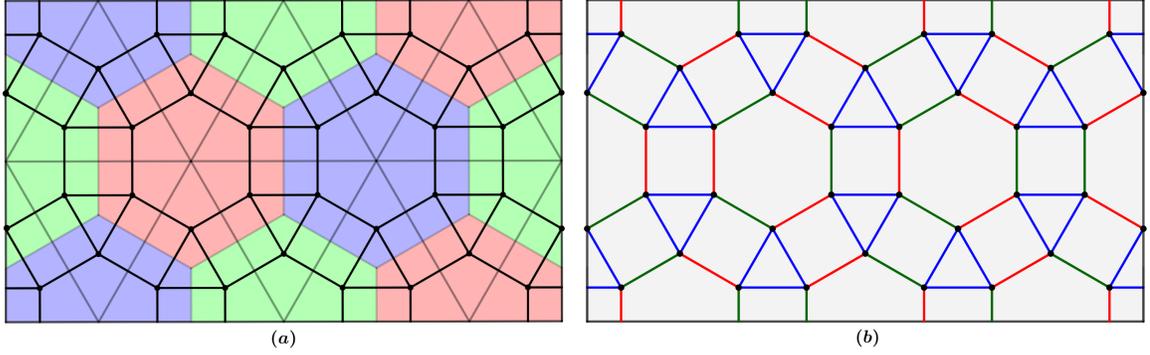


Figura 5.3: (a) Tesselação  $\{6, 6, 6\}$ , sua dual  $\Gamma^*$  e a nova tesselação  $\bar{\Gamma}$  formada pelas arestas pretas. (b) Arestas coloridas da tesselação  $\bar{\Gamma}$ .

seguinte maneira: Os triângulos colorimos de azul e as arestas das faces obtidas para cada vértice, alternamos nas cores verde e vermelha como pode ser visto na Figura 5.3-(b).

Os operadores agindo em cada aresta são chamados de operadores link (ou operadores aresta) e são dados da seguinte forma. Cada aresta  $e' = (u, v)$  está associado a um operador aresta  $\bar{K}_{e'} \in \{X_u X_v, Y_u Y_v, Z_u Z_v\}$ , onde  $\bar{K}_{e'} = Z_u Z_v$  se  $e'$  for uma aresta do triângulo (aresta azul),  $\bar{K}_{e'} = X_u X_v$  se  $e'$  for uma aresta vermelha e  $\bar{K}_{e'} = Y_u Y_v$  se  $e'$  for uma aresta verde. Repare que os operadores aresta são todos hermitianos, isto é,  $\bar{K}_{e'}^\dagger = \bar{K}_{e'}$ .

Através dos operadores aresta o grupo gauge  $\mathcal{G}$  é definido como

$$\mathcal{G} := \langle \bar{K}_{e'}; e' \in \bar{E} \rangle, \quad (5.7)$$

onde  $\bar{K}_{e'}$  são os operadores aresta e  $\bar{E}$  é o conjunto de arestas da tesselação  $\bar{\Gamma}$ . Repare que os geradores do grupo gauge  $\mathcal{G}$  são 2-locais.

Como vimos na seção 5.1, os códigos de subsistema podem ser caracterizados através do grupo gauge  $\mathcal{G}$  devido a identidade  $\mathbf{S} = \mathcal{G} \cap C(\mathcal{G})$ .

Utilizando os operadores string, Bombín determinou  $C(\mathcal{G})$ . A natureza das strings diferem do caso dos códigos quânticos topológicos. Para ver detalhes disso recomendamos [13].

Dado um subgrafo  $\gamma \in \bar{\Gamma}$  qualquer, o qual contém as três arestas de um triângulo ou nenhuma delas, e esse grafo não possua “pontos finais”, como pode ser visto na Figura 5.4,

ou seja, será uma string fechada. Esse subgrafo define um operador de Pauli

$$O_\gamma = \bigotimes_v P_v, \quad (5.8)$$

com  $P_v = I, X, Y, Z$ , de acordo com a cor da aresta do subgrafo, a qual o vértice  $v$  pertence.

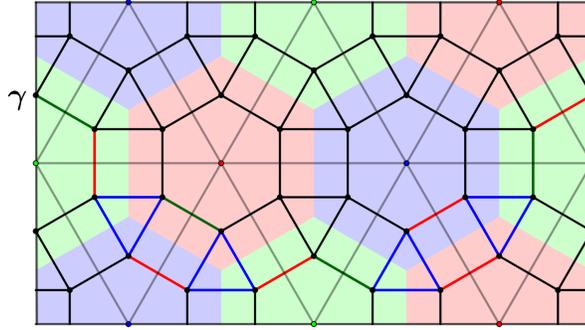


Figura 5.4: Arestas coloridas representando o subgrafo  $\gamma \in \bar{\Gamma}$ .

Segue que os operadores  $O_\gamma$  dados em (5.8) pertencem a  $C(\mathcal{G})$  e existe uma bijeção entre esses subgrafos e  $C(\mathcal{G})$ .

Os triângulos desses subgrafos são ligados aos pares e se olharmos ao mesmo tempo para a tesselação  $\Gamma^*$ , esses triângulos sempre conectam vértices da mesma cor. Isso permite classificar as strings de acordo com a cor. Assim como nos códigos coloridos, strings da mesma cor comutam, enquanto strings de cores diferentes anticomutam.

Defina  $S_v^c = O_\gamma$ , com  $c = r, g, b$  e  $\gamma$  é a string  $c$  colorida menor ao redor do vértice  $v \in V^*$  da tesselação  $\Gamma^*$  (veja Figura 5.5). Esses operadores são os geradores estabilizadores de  $\mathbf{S}$ , ou seja,  $\mathbf{S} = \langle S_v^c; v \in V^* \text{ e } c = r, g, b \rangle$ . Porém, esses geradores não são todos independentes, pois valem as seguintes relações:

$$\prod_c S_v^c = I \quad \text{e} \quad \prod_v S_v^c = I, \quad (5.9)$$

onde no primeiro caso variamos a cor e o vértice está fixo, já no segundo variamos o vértice e a cor está fixa. Logo, a quantidade de geradores estabilizadores independentes (ou seja, o rank de  $\mathbf{S}$ ) será  $s = 2V^* - 2$ , onde  $V^*$  é a quantidade de vértices da tesselação dual  $\Gamma^*$ . A quantidade de qubits físicos  $n$  será igual a  $n = 3F^*$ , onde  $F^*$  é a quantidade de faces da

tesselação  $\Gamma^*$ . Já a quantidade de qubits codificados é  $k = 2 - \chi = 2g$ . Como  $n = k + r + s$ , segue que o número de qubits gauge será  $r = 2F^* - \chi$ . Logo, os qubits gauge dependem da superfície.

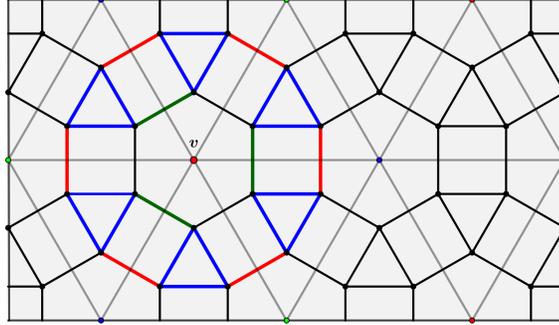


Figura 5.5: Arestas coloridas do operador  $S_v^g$ .

Para a distância  $d$ , Bombín diz que  $d \leq d_T$ , onde  $d_T$  é o comprimento mínimo em número de triângulos entre strings fechadas não-triviais. Isso se justifica, pois dado um operador string  $O_\gamma \in C(\mathcal{G})$  e definindo o conjunto  $E'$  como sendo o conjunto das arestas vermelhas, verdes e somente uma azul de cada triângulo de  $\gamma$ , temos que

$$G := \prod_{e' \in E'} \bar{K}_{e'} \in \mathcal{G},$$

e o peso do operador  $O_\gamma G$  é igual a quantidade de triângulos em  $O_\gamma$ . Ele também fornece um limitante inferior para a distância, o qual é dado por  $d \geq d_L$ , onde  $d_L$  é o comprimento mínimo em termos do número de arestas, entre os loops fechados homologicamente não-triviais na tesselação  $\Gamma^*$ .

Maiores detalhes sobre a distância, erros e sobre a síndrome de erro podem ser vistos em [13].

Agora falaremos sobre os códigos de subsistema topológicos construídos em [67]. Para construir esses códigos os autores usaram grafos, mais precisamente hipergrafos trivalentes  $\Gamma_h$  mergulhados em um plano ou no toro. Os qubits são fixados nos vértices e o conjunto de todos os vértices é denotado por  $V$ . As arestas são de dois tipos: arestas que conectam dois vértices, as quais são chamadas de link ou arestas de rank-2 e arestas que conectam 3 vértices, as quais são chamadas de triângulos ou arestas de rank-3. Os conjuntos de todas

as arestas de rank-2 e de rank rank-3 são denotados por  $E_2$  e  $E_3$ , respectivamente, logo,  $E = E_2 \cup E_3$ .

**Definição 5.8.** *Uma aresta  $e'$  é incidente a um vértice  $u$  se existir  $v \in V$  tal que  $e' = (u, v)$  ou se existirem  $v, w \in V$  tais que  $e' = (u, v, w)$ .*

Existem 4 restrições impostas em [67] para tais hipergrafos e mais uma imposta em [59]. São elas:

- ( $H_1$ )  $\Gamma_h$  tem apenas arestas de rank-2 ou de rank-3;
- ( $H_2$ ) Cada vértice tem exatamente três arestas incidentes;
- ( $H_3$ ) Duas arestas distintas se intersectam em no máximo um vértice;
- ( $H_4$ ) As arestas de rank-3 são duas a duas disjuntas;
- ( $H_5$ ) As arestas do hipergrafo  $\Gamma_h$  devem ser 3-coloríveis.

Assim como em [13] também é definido os operadores aresta, porém diferente de lá, existem aqui dois tipos. Os operadores link  $K_{e'}$  onde  $e' \in E_2$  e os operadores triângulo  $K_{e'}$  onde  $e' \in E_3$ . Por convenção, dada uma aresta  $e' = (u, v) \in E_2$ , temos que  $K_{e'} := X_u X_v$  ou  $K_{e'} := Y_u Y_v$ . Já se  $e' = (u, v, w) \in E_3$ , temos que  $K_{e'} := Z_u Z_v Z_w$ . Essa escolha não altera em nada o código, pois está sendo assumido um canal despolarizante, ou seja, os erros do tipo  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  ocorrem com a mesma probabilidade.

O próximo resultado que pode ser visto em [20] nos diz quando dois operadores aresta comutam.

**Teorema 5.9.** *(Regra de comutação) Sejam  $e', e'' \in E$  duas arestas quaisquer de  $\Gamma_h$ . Então, para seus respectivos operadores  $K_{e'}$  e  $K_{e''}$  temos que*

$$K_{e'} K_{e''} = (-1)^{\eta(e', e'')} K_{e''} K_{e'}, \quad (5.10)$$

com  $\eta(e', e'') = 0$ , se  $e'$  e  $e''$  compartilham uma quantidade par de vértices ou  $e', e'' \in E_3$ , e caso contrário  $\eta(e', e'') = 1$ .

**Observação 5.10.** *Para que os demais resultados sejam satisfeitos, isto é, para que o hipergrafo  $\Gamma_h$  admita definir um código de subsistema, é essencial que a regra de comutação seja satisfeita para todos os operadores aresta do hipergrafo  $\Gamma_h$ . Por isso, Sarvepalli e Brown acrescentaram a restrição  $(H_5)$  ao hipergrafo  $\Gamma_h$ . Somente  $(H_1), \dots, (H_4)$  não garantem a existência de códigos de subsistema. Por exemplo, como pode ser visto em [59], o grafo de Petersen (Figura 5.6) satisfaz  $(H_1), \dots, (H_4)$ , mas não admite definir um código de subsistema, pois suas arestas não são 3-coloríveis, o que faz com que a regra de comutação (Teorema 5.9) não seja satisfeito.*

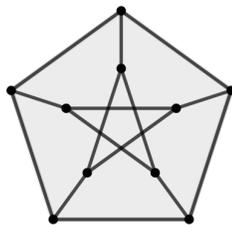


Figura 5.6: Grafo de Petersen, satisfaz  $(H_1), \dots, (H_4)$ , mas não satisfaz  $(H_5)$ .

Definiremos agora um hiperciclo fechado em um hipergrafo. A grosso modo, restringindo aos casos abordados em [13], esses hiperciclos fechados são as strings vistas anteriormente.

**Definição 5.11.** *Chamamos de hiperciclo fechado ou apenas hiperciclo, à um subconjunto de arestas  $M \subset E$  se todo vértice do hipergrafo tem um número par de arestas incidentes de  $M$ .*

Utilizando esses hiperciclos definimos um operador que será muito importante, chamado de operador loop.

**Definição 5.12.** *Seja  $M \subset E$  um hiperciclo fechado qualquer. O operador*

$$W(M) = \bigotimes_{e' \in M} K_{e'} \quad (5.11)$$

*é o produto tensorial entre os operadores link e os operadores triângulo agindo nas arestas de  $M$ . Chamamos  $W(M)$  de operador loop.*

Os próximos resultados nos dizem quando um operador aresta (link ou triângulo) comuta com um operador loop e quando dois operadores loop comutam. Suas demonstrações podem ser vistas em [20] e [67].

**Teorema 5.13.** *Sejam  $e' \in E$  uma aresta qualquer e  $M \subset E$  um hiperciclo fechado qualquer. Seus operadores correspondentes comutam se, e somente se,  $e'$  não é um triângulo contido em  $M$ , isto é,*

$$[W(M), K_{e'}] = 0 \Leftrightarrow e' \notin M \cap E_3.$$

**Corolário 5.14.** *Sejam  $M, M' \subset E$  dois hiperciclos fechados quaisquer, então*

$$W(M)W(M') = (-1)^{\eta(M, M')}W(M')W(M),$$

onde  $\eta(M, M') := |M \cap M' \cap E_3|$  é o número de triângulos compartilhados por  $M$  e  $M'$ .

**Observação 5.15.** *Segue pelo Corolário 5.14 que dois operadores loop vão comutar se tiverem uma quantidade par de triângulos em comum e anticomutar se tiverem uma quantidade ímpar de triângulos em comum. Assim, o número de triângulos em qualquer hiperciclo fechado deve ser par para que  $W(M)$  comute com ele mesmo.*

Juntando todos os operadores loop é possível definir o grupo

$$\mathcal{G}_{loop} := \{W(M); M \subseteq E \text{ é um hiperciclo fechado}\}. \quad (5.12)$$

Através desse grupo podemos obter o grupo gauge  $\mathcal{G}$  e o grupo estabilizador  $\mathbf{S} = \mathcal{G} \cap C(\mathcal{G})$  usando as identidades

$$\mathcal{G} = C(\mathcal{G}_{loop}) \text{ e } \mathbf{S} = \mathcal{G}_{loop} \cap C(\mathcal{G}_{loop}). \quad (5.13)$$

Logo, segue que  $C(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_{loop}$ .

Veja que essa abordagem feita em [67] é diferente da abordagem feita em [13].

Os operadores estabilizadores serão os operadores loop que comutam com todos os outros operadores loop. Já os operadores lógicos bare  $\bar{X}_i, \bar{Z}_i \in C(\mathcal{G})$  podem ser escolhidos como sendo um par de operadores loop satisfazendo as regras de comutação padrão dos operadores de Pauli.

Segundo os autores, obter os operadores lógicos e os estabilizadores dessa forma pode ser mais simples do que a partir dos operadores aresta, pois dessa forma os cálculos não são tão longos e eles nos fornecem alguma ideia em relação a natureza topológica dos códigos.

Para provar que  $C(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_{loop}$  e os demais resultados, é preciso transformar o hipergrafo  $\Gamma_h$  em um grafo ordinário, denotado por  $\bar{\Gamma}_h$ . Primeiramente, o conjunto de vértices  $\bar{V}$ , ou seja, de qubits de  $\bar{\Gamma}_h$  será o mesmo de  $\Gamma_h$ . As arestas de  $\bar{\Gamma}_h$  serão todas de rank-2, assim, os links, ou seja, as arestas de  $E_2$  continuarão sendo os mesmos links em  $\bar{\Gamma}_h$ . Já os triângulos serão transformados em links da seguinte forma: Dado um triângulo  $(u, v, w)$  iremos considerar como links  $(u, v)$ ,  $(u, w)$  e  $(v, w)$ , ou seja, cada triângulo contribui com três novos links em  $\bar{\Gamma}_h$ . Assim,  $\bar{\Gamma}_h$  é obtido de  $\Gamma_h$  somente transformando cada triângulo em três links.

Desse modo, o operador triângulo  $K_{e'} = Z_u Z_v Z_w$  será dividido em três operadores  $\bar{K}_{u,v} = Z_u Z_v$ ,  $\bar{K}_{u,w} = Z_u Z_w$  e  $\bar{K}_{v,w} = Z_v Z_w$ . Veja que esses três operadores não são independentes, pois  $\bar{K}_{u,v} \bar{K}_{u,w} \bar{K}_{v,w} = (Z_u Z_v)(Z_u Z_w)(Z_v Z_w) = I$ . Assim, denotando os operadores link  $K_{e'}$  também por  $\bar{K}_{e'}$ , temos que o grupo gauge  $\mathcal{G}$  segue como em (5.7), ou seja,  $\mathcal{G} = \langle \bar{K}_{e'}; e' \in \bar{E} \rangle$ , onde  $\bar{E}$  são as arestas de  $\bar{\Gamma}_h$ .

A demonstração do próximo resultado pode ser vista em [67].

**Lema 5.16.** *Seja  $\mathcal{G}$  o grupo gerado pelos operadores link  $\bar{K}_{e'}$  com  $e' \in \bar{E}$  uma aresta de  $\bar{\Gamma}_h$ . Então  $\mathcal{G}_{loop} = C(\mathcal{G})$ .*

Para ver que  $\mathcal{G} = C(\mathcal{G}_{loop})$ , basta ver que  $\mathcal{G} \subseteq C(\mathcal{G}_{loop})$  e dado um  $P \in P_n$  tal que  $PW(M) = W(M)P$  para todo  $W(M) \in \mathcal{G}_{loop}$ , ou seja, dado  $P \in C(\mathcal{G}_{loop})$  então  $P$  deverá ser escrito como produto dos geradores de  $\mathcal{G}$ .

O próximo resultado que também pode ser visto em [20] e [67] é um dos resultados mais importantes, pois ele nos diz quando  $(C_2)$  é satisfeito. Lembrando que o item  $(C_2)$  diz que a extração da síndrome pode ser feita medindo os autovalores dos operadores link, os quais são 2-locais, ou seja, medindo apenas os elementos do grupo gauge  $\mathcal{G}$ .

**Teorema 5.17.** *O autoestado de um estabilizador  $S \in \mathcal{S}$  pode ser medido por um conjunto de operadores link se, e somente se,  $S$  pode ser escrito como um produto desses operadores link, isto é,*

$$S = \bar{K}_m \cdots \bar{K}_1 \quad (5.14)$$

e  $\overline{K}_j$  comuta com o produto ordenado de todos os operadores link precedentes, isto é,

$$[\overline{K}_j, \overline{K}_{j-1} \cdots \overline{K}_1] = 0 \quad \forall j \in \{2, \dots, m\}. \quad (5.15)$$

A maneira de escrever o estabilizador  $S$  não importa e não é necessariamente única, porém deverá satisfazer (5.15).

Embora essa construção dos códigos de subsistema utilizando o grupo  $\mathcal{G}_{loop}$  feita em [67] e que acabamos de descrever, forneça códigos de subsistema, não necessariamente esses códigos serão topológicos. Quem percebeu e forneceu um contra-exemplo disso, o qual apresentaremos agora, foram Sarvepalli e Brown em [59]. Nesse contra-exemplo, é possível obter um estabilizador que é associado com um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial, ou seja, não irá satisfazer a condição  $(C_1)$  da definição 5.3. Mesmo satisfazendo  $(C_2)$  e  $(C_3)$ , não será um código de subsistema topológico.

Felizmente, isso não é uma restrição para ser código de subsistema, somente não será topológico. Assim, essa construção pode ser usada para construir códigos de subsistema topológicos, porém precisamos garantir de outras formas que realmente serão topológicos.

**Exemplo 5.18.** *(Contra-Exemplo)*

Considere o hipergrafo  $\Gamma_h$  dado na Figura 5.7-(a). Perceba que esse hipergrafo satisfaz as restrições  $(H_1), \dots, (H_5)$ . Logo, podemos construir códigos de subsistema utilizando  $\Gamma_h$ , o qual é descrito pelo grupo  $\mathcal{G}_{loop}$ .

Fazendo uma busca manual em  $\Gamma_h$  e utilizando a matriz de verificação, conseguimos determinar que  $\dim \mathcal{G} = 31$  e  $s = 7$ . Logo, como  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ , segue que  $r = 12$ .

A quantidade de qubits físicos  $n$  é dado pela quantidade de vértices, logo, temos que  $n = 20$ . Assim, a quantidade de qubits codificados  $k$ , será dado por  $k = 1$ . Desse modo, a condição  $(C_3)$  da definição 5.3 é satisfeita.

Novamente fazendo uma busca em  $\Gamma_h$ , determinamos que  $d = 2$ . Assim, temos um código de subsistema [[20, 1, 12, 2]].

Analizando os 7 geradores estabilizadores independentes é possível verificar que  $(C_2)$  também é satisfeito. Porém, o hiperciclo fechado  $\sigma$ , dado na Figura 5.7-(b), é homologicamente não-trivial e o operador loop proveniente de  $\sigma$ , denotado por  $W(\sigma)$ , é um estabilizador.

Portanto,  $(C_1)$  não é satisfeito e, conseqüentemente,  $\Gamma_h$  não fornece um código de subsistema topológico.

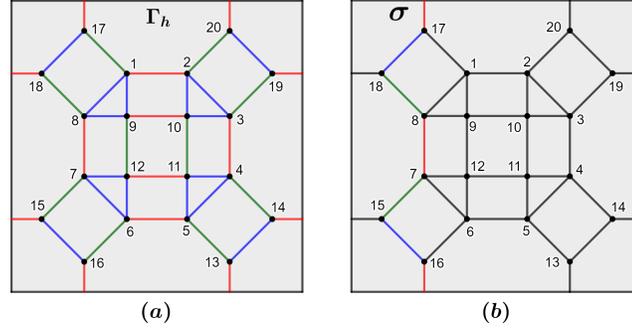


Figura 5.7: (a) Hipergrafo  $\Gamma_h$ . (b) Hiper ciclo fechado homologicamente não-trivial  $\sigma$  com as arestas coloridas.

Obter os parâmetros dos códigos de subsistema topológicos não é uma tarefa fácil, pois eles dependem do tipo do hipergrafo e da superfície onde o hipergrafo foi mergulhado. Assim, vale observar que em [67], os autores não abordam os parâmetros dos códigos, ou seja, eles não fornecem nenhuma família em particular de códigos de subsistema topológicos.

Para maiores detalhes sobre essa construção, exemplos desse código e exemplos sobre a extração da síndrome basta ver [20] e [67].

Falaremos agora sobre os códigos de subsistema topológicos construídos em [59].

Nesta construção Sarvepalli e Brown partem de um grafo trivalente e 3-colorível, denotado por  $\Gamma_2$ , impondo a restrição de que existe um conjunto não-vazio de faces cuja quantidade de lados é múltipla de e maior que 4, ou seja, congruente a  $4 \pmod{0}$  e maior do que 4.

A partir deste grafo é construído um hipergrafo trivalente  $\Gamma_h$  satisfazendo as condições  $(H_1), \dots, (H_5)$  vistas anteriormente e, com isso, é garantido que os códigos obtidos são códigos de subsistema, os quais são descritos por  $\mathcal{G}_{loop}$  como em [67].

Descreveremos agora como é feito o processo de construção do hipergrafo  $\Gamma_h$ .

Considere um grafo trivalente e 3-colorível  $\Gamma_2$  com a exigência de existir o conjunto não-vazio de faces como dito anteriormente. Sejam  $F_R$ ,  $F_B$  e  $F_G$  o conjunto de toda as faces vermelhas, azuis e verdes, respectivamente. Suponha sem perda de generalidade que as faces  $f \in F$ , tais que  $F \subseteq F_R$  são tais que a quantidade de lados de  $f$  seja congruente a  $4 \pmod{0}$

e maior do que 4. Para cada  $f \in F$  é adicionado uma face  $f'$  dentro de  $f$ , de modo que,  $f'$  possua a metade da quantidade de arestas de  $f$ .

Colorindo as arestas de  $f$  de maneira alternada utilizando as cores azul e verde, existem duas maneiras de construir as arestas de rank-3 (os triângulos) utilizando os vértices da face  $f'$  introduzida em  $f$ . A primeira maneira é formando triângulos utilizando um vértice de  $f'$  e uma aresta azul de  $f$ , como na Figura 5.8-(a), de modo que esses triângulos não tenham interseção, ou seja, eles são disjuntos. A segunda maneira é análoga a primeira, porém agora é considerado as arestas verdes no lugar das azuis, como na Figura 5.8-(b).

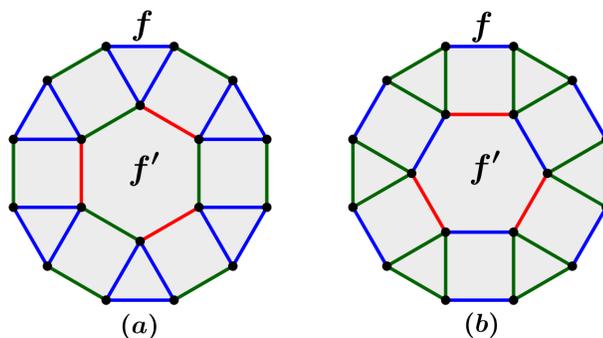


Figura 5.8: Arestas de rank-3 inseridas dentro da face  $f \in F$  a partir dos vértices da face  $f'$ . (a) arestas de rank-3 azuis e (b) arestas de rank-3 verdes.

As arestas de rank-3 são da mesma cor da aresta de  $f$  utilizada em sua construção. Já as arestas de  $f'$  são de cores distintas da cor das arestas de rank-3, como nas Figuras 5.8-(a) e 5.8-(b).

O grafo resultante é o hipergrafo  $\Gamma_h$  desejado.

Em [59], os autores demonstraram que o grafo  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_1), \dots, (H_5)$ . Portanto, dá origem a códigos de subsistema, cujo grupo dos operadores loop é dado como em (5.12) e o grupo gauge é dado por  $\mathcal{G} = C(\mathcal{G}_{loop})$ .

Do fato de  $F \subseteq F_R$  ser um subconjunto, os estabilizadores do código variam dependendo de  $F$ . Porém, dada uma face  $f \in F$  qualquer existem dois hiperciclos independentes em  $\Gamma_h$  que podemos associar com essa face e conseqüentemente, dois geradores estabilizadores independentes. O primeiro deles, denotado por  $f_{\sigma_1}$ , é composto somente pelas arestas de

$f'$ , como na Figura 5.9-(a). Já o segundo, denotado por  $f_{\sigma_2}$ , é formado pelos triângulos inseridos em  $f$ , juntamente com as arestas de rank-2 na fronteira de  $f$  e as arestas de  $f'$  de mesma cor que as arestas de  $f$ , como na Figura 5.9-(b). Em [59] é provado que os operadores  $W(f_{\sigma_1})$  e  $W(f_{\sigma_2})$  associados com esses hiperciclos são geradores estabilizadores independentes e satisfazem o Teorema 5.17.

É possível obter um terceiro hiperciclo  $f_{\sigma_3}$  (veja a Figura 5.9-(c)) e, conseqüentemente, um terceiro gerador estabilizador  $W(f_{\sigma_3})$ , realizando a soma módulo 2 de  $f_{\sigma_1}$  e  $f_{\sigma_2}$  e multiplicando  $W(f_{\sigma_1})$  por  $W(f_{\sigma_2})$ , respectivamente.

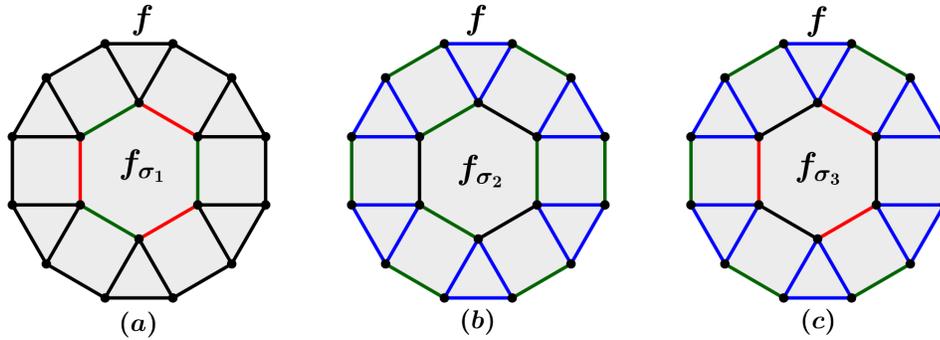


Figura 5.9: Hiperciclos correspondentes a face  $f \in F \subseteq F_R$  representados pelas arestas coloridas. (a) Hiperciclo  $f_{\sigma_1}$ , (b) hiperciclo  $f_{\sigma_2}$  e (c) Hiperciclo  $f_{\sigma_3}$ .

Veja que os operadores  $W(f_{\sigma_1})$  e  $W(f_{\sigma_2})$ , quando restrito aos casos abordados em [13], coincidem com os operadores  $S_v^c$  vistos anteriormente.

Para a questão da distância, os autores demonstraram que  $d$  será limitado superiormente pelo menor número de triângulos em um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial, assim como feito em [13], ou seja, será o menor peso entre os operadores de  $\mathcal{G}_{loop} \setminus \mathbf{S}$ , isto é,  $C(\mathcal{G}) \setminus \mathbf{S}$ .

Antes de apresentarmos duas famílias de códigos, onde é possível obter os parâmetros, precisamos apresentar uma maneira de construir um grafo trivalente e 3-colorível  $\Gamma_2$  a partir de outro grafo mergulhado em uma superfície. Essa construção se deve a [15], mas pode ser vista também em [59] e é utilizada para construir uma das famílias que apresentaremos na seqüência.

Dado um grafo  $\Gamma$  mergulhado em uma superfície é escolhido uma das cores para colorir

todas as suas faces. Cada aresta do grafo é transformada em duas arestas e as novas faces obtidas são coloridas todas da mesma cor, porém de uma cor diferente da cor já escolhida, como pode ser visto na Figura 5.10. Por fim, cada vértice de valência  $j$  é transformado em uma face de  $j$  arestas. Essas novas faces são todas coloridas com a cor que ainda não foi utilizada e, portanto, é obtido um grafo trivalente e 3-colorível, o qual é denorado por  $\Gamma_2$ .

O próximo resultado nos diz como construir a primeira família de códigos feita por Sarvepalli e Brown, juntamente com os parâmetros desses códigos. Sua demonstração pode ser vista em [59].

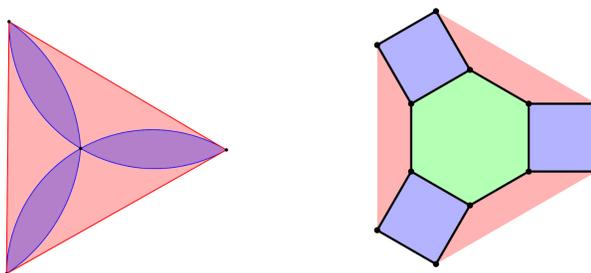


Figura 5.10: Transformando um grafo  $\Gamma$  qualquer em um grafo  $\Gamma_2$  trivalente e 3-colorível.

Antes de enunciarmos esse resultado, precisamos da definição de grafo bipartido.

**Definição 5.19.** Um grafo  $\Gamma = (V, E)$  é chamado de bipartido, se  $V$  admite uma partição em dois conjuntos tais que toda aresta tenha seus pontos finais em diferentes conjuntos. Os vértices no mesmo conjunto não podem ser adjacentes.

**Teorema 5.20.** Seja  $\Gamma$  um grafo tal que todo vértice tenha grau (valência) par maior do que dois. Construa um grafo trivalente e 3-colorível  $\Gamma_2$  usando a construção descrita anteriormente. Então, fazendo em  $\Gamma_2$  a construção do hipergrafo  $\Gamma_h$ , onde  $F$  será o conjunto das  $v$  faces de  $\Gamma_2$  e as arestas de rank-3 são as fronteiras das  $e$ -faces de  $\Gamma_2$ . Se  $l$  é o número de arestas de rank-3 de um hiperciclo homologicamente não-trivial, então obtemos um código de subsistema com parâmetros

$$[[6e, 1 + \delta_{\Gamma^*, \text{bipartido}} - \chi, 4e - \chi, d \leq l]], \quad (5.16)$$

onde  $e = |E(\Gamma)|$  e  $\delta_{\Gamma^*, \text{bipartido}} = 1$  se  $\Gamma^*$  é bipartido e 0, caso contrário.

Antes de apresentarmos o próximo resultado que diz como construir a segunda família de códigos, precisamos da definição de grafo medial. A demonstração do resultado também encontra-se em [59].

**Definição 5.21.** *Chamamos de grafo medial de um grafo  $\Gamma$ , ao grafo que é obtido colocando um vértice em cada aresta de  $\Gamma$  e uma aresta conectando dois desses vértices, caso as arestas associadas a esses vértices em  $\Gamma$  sejam adjacentes. Denotamos o grafo medial de  $\Gamma$  por  $\Gamma_m$ .*

**Teorema 5.22.** *Sejam  $\Gamma$  um grafo cujos vértices possuem valências pares maiores do que 2 e  $\Gamma_m$  o seu grafo medial. Construa o grafo trivalente e 3-colorível  $\Gamma_2$  a partir de  $\Gamma_m^*$  (dual de  $\Gamma_m$ ) usando a construção apresentada anteriormente. Se  $\Gamma_m^*$  for bipartido, o conjunto das  $v$ -faces de  $\Gamma_2$ , denotado por  $F_v$ , forma uma bipartição  $F_v \cup F_f$ , onde  $|F_v| = |V(\Gamma)|$ . Fazendo a construção de  $\Gamma_h$  com  $F_v \subset F$  tal que as arestas de rank-3 não estão nas fronteiras das  $e$ -faces de  $\Gamma_2$ . Seja  $l$  o número de arestas de rank-3 em um hiperciclo homologicamente não-trivial, então obtemos um código de subsistema com parâmetros*

$$[[10e, 1 + \delta_{\Gamma^*, \text{bipartido}} - \chi, 6e - \chi, d \leq l]], \quad (5.17)$$

onde  $e = |E(\Gamma)|$  e  $\delta_{\Gamma^*, \text{bipartido}} = 1$  se  $\Gamma^*$  é bipartido e 0 caso contrário.

Em [59], os autores provaram que esses códigos não podem ser obtidos pela construção feita em [13]. Em particular, todos os códigos do Teorema 5.22 são distintos dos obtidos em [13] e os códigos do Teorema 5.20 são distintos quando o grafo  $\Gamma^*$  é não-bipartido. Eles também provaram que esses códigos satisfazem a condição  $(C_2)$  e que são códigos de subsistema topológicos.

Para ver esses resultados e maiores informações a respeito da síndrome, basta ver [59].

---

# Novos Códigos de Subsistema Topológicos

---

Inspirados nas construções de códigos de subsistema topológicos apresentados no Capítulo 5, construiremos neste capítulo novos códigos de subsistema e apresentaremos 4 novas famílias de códigos de subsistema topológicos. Duas dessas quatro famílias surgiram na tentativa de construir códigos nas tesselações trivalente e 3-coloríveis que não eram utilizadas em [59], a terceira surgiu de buscar famílias que não foram encontradas em [59] e a quarta surgiu de aplicarmos praticamente o mesmo método em tesselações que não eram utilizadas em [13]. Provaremos que esses códigos são códigos de subsistema topológicos, os quais são mais uma de nossas grandes contribuições que apresentamos neste trabalho.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira. Na seção 6.1 realizamos a construção de um novo hipergrafo  $\Gamma_h$  e provamos do mesmo modo que em [59] que esse hipergrafo admite a construção de códigos de subsistema. Apresentamos também de maneira geral, alguns estabilizadores e outros dados relevantes dessa construção. Na seção 6.2 apresentamos as 4 famílias de códigos de subsistema topológicos, onde duas dessas famílias são provenientes de casos particulares do hipergrafo  $\Gamma_h$  construído na seção 6.1. Já a terceira família é proveniente da construção dada em [59], mas que não foi abordada pelos autores e a quarta família é proveniente de um hipergrafo construído a partir da tesselação  $\{p, 3, 4, 3\}$  de maneira semelhante a utilizada para as famílias anteriores. Também nesta seção provamos que essas famílias de códigos são de fato, códigos de subsistema topológicos e fornecemos algumas tabelas com parâmetros.

## 6.1 Construção dos Novos Códigos de Subsistema

Nesta seção apresentamos uma espécie de generalização da construção devida a Sarvepalli e Brown em [59] e que vimos no Capítulo 5. Porém, ao invés de partirmos de um grafo trivalente e 3-colorível, partiremos de uma tesselação trivalente e 3-colorível. Apesar da abordagem por grafos ser mais genérica do que por tesselações, fizemos a escolha pela construção partindo de tesselações, principalmente por termos uma maior familiaridade com esse assunto e por causa da regularidade das tesselações. Também escolhemos as tesselações para que os parâmetros possam ser escritos em função delas e pelo fato de nos trabalhos [24] e [63] já terem sido determinadas todas as tesselações trivalentes e 3-coloríveis existentes nas superfícies, bem como calculado as quantidades de faces, arestas e vértices dessas tesselações, as quais utilizaremos aqui.

Considere uma tesselação trivalente e 3-colorível  $\{2p_1, 2p_2, 2p_3\}$ . Denotaremos o conjunto das faces vermelhas, verdes e azuis por  $F_R$ ,  $F_G$  e  $F_B$ , respectivamente. A fim de facilitar a escrita e a compreensão de nossa construção, vamos fixar as cores dos polígonos das tesselações da seguinte forma. Suponha sem perda de generalidade que os  $2p_1$ -gons são vermelhos, os  $2p_2$ -gons são verdes e os  $2p_3$ -gons são azuis.

Assim como em [59], considere  $F \subseteq F_R$  tal que  $F \neq \emptyset$  e assumamos que  $2p_1 > 4$  com  $p_1 > 2$  ímpar. Se realizarmos a construção de Sarvepalli e Brown, somente para tesselações trivalentes e 3-coloríveis  $\{2p_1, 2p_2, 2p_3\}$  teremos a restrição de que  $2p_1 > 4$  com  $p_1 > 2$  par, por isso iremos trabalhar somente com o caso  $p_1 > 2$  ímpar.

Para construirmos o hipergrafo  $\Gamma_h$ , inserimos uma face  $f'$  com  $p_1$  lados dentro de cada face  $f \in F$  e construímos os triângulos a partir dos vértices de  $f'$ , de modo que uma de suas arestas também seja aresta de um  $2p_3$ -gon azul e esses triângulos não se intersectem, como na Figura 6.1.

Ao fixarmos essa escolha em relação a construção dos triângulos juntamente com a fixação das cores, estamos fixando também uma ordem para as tesselações, pois, a tesselação  $\{6, 12, 4\}$  fornecerá um hipergrafo diferente da tesselação  $\{6, 4, 12\}$ , como pode ser visto na Figura 6.2.

**Observação 6.1.** *Se  $p_1$  for par, temos a construção feita em [59] basta colorir as arestas como vimos na seção 5.2. Porém, vale destacar que em nossa abordagem estamos partindo*

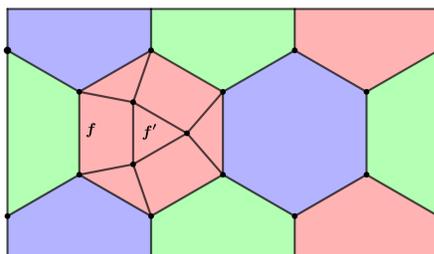


Figura 6.1: Tesselação  $\{6, 6, 6\}$ , onde na face hexagonal  $f \in F_R$  inserimos a face triangular  $f'$  e a partir dos vértices de  $f'$  construímos três triângulos.

de uma tesselação e não de um grafo, como em [59]. Ainda, se  $p_1$  for par,  $p_3 = 2$  e  $F = F_R$  então estamos dentro do Teorema 5.20, pois vamos ter  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$ . Essa é a única família dentro das tesselações na qual se aplica esse teorema.

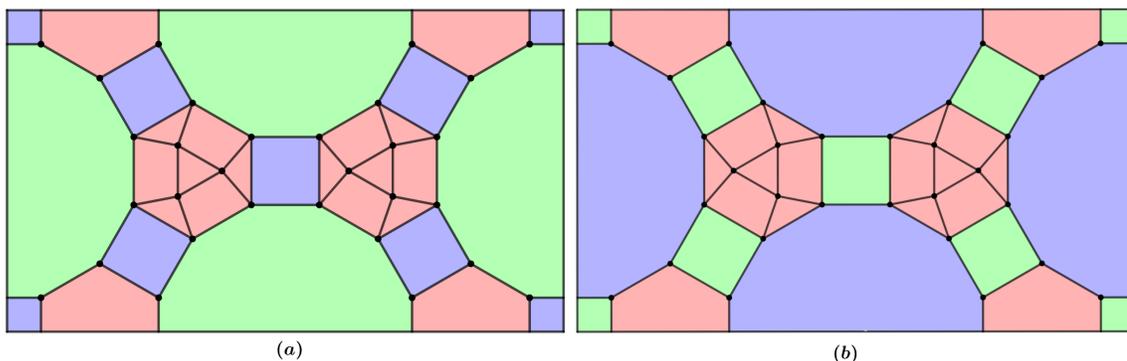


Figura 6.2: Triângulos inseridos dentro de duas faces de  $F_R$  nas tesselações (a)  $\{6, 12, 4\}$  e (b)  $\{6, 4, 12\}$ .

Repare que até o momento, nossa construção é basicamente a mesma que feita em [59], com a diferença de que estamos trabalhando somente com tesselações trivalentes e 3-coloríveis e estamos fixando  $p_1$  ímpar, e é essa escolha que nos fornecerá os novos códigos.

O caso  $p_1$  ímpar da maneira que foi feito até agora, não permite a construção de códigos de subsistema, pois o hipergrafo resultante, não satisfaz a restrição  $(H_5)$ , logo, não satisfaz a regra de comutação e, assim, não admite a construção de códigos de subsistema.

Para corrigir esse problema escolhemos três arestas distintas quaisquer de  $f'$  e tomamos

um ponto em cada uma delas, diferente dos extremos. Em seguida ligamos esses pontos de modo a obtermos um triângulo, como na Figura 6.3. As arestas onde tomamos os pontos, são agora duas arestas e esses pontos são novos vértices. Logo, a face  $f'$  passará a ter  $p_1 + 3$  arestas.

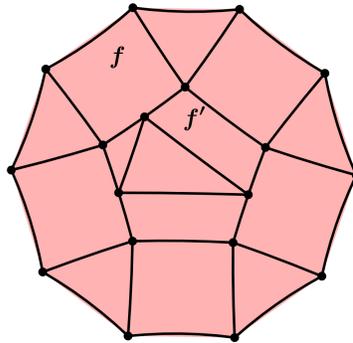


Figura 6.3: Face  $f \in F_R$  da tesselação hiperbólica  $\{10, 10, 4\}$ , onde construímos dentro da face  $f'$  um triângulo. Assim,  $f'$  possui agora 8 arestas.

Colorimos todas as arestas dos triângulos de azul e as outras arestas de  $f$ , onde foram inseridos os triângulos colorimos de vermelho. Para possíveis faces  $f \in F_R$  tais que  $f \notin F$  alternamos entre vermelho e azul, onde as arestas azuis são as que fazem fronteira com os  $2p_3$ -gons. Já para as  $p_1 + 3$  arestas de  $f'$  alternamos entre as cores vermelho e verde, e as arestas restante, as quais pertencem aos  $2p_2$ -gons e a  $2p_3$ -gons colorimos de verde, como na Figura 6.4.

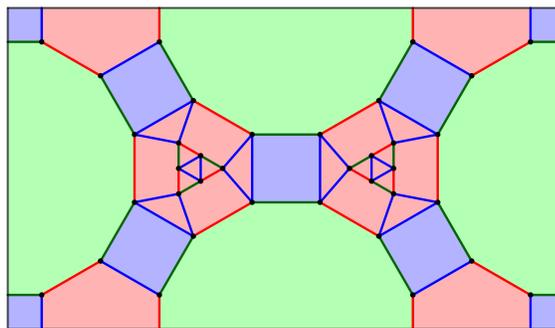


Figura 6.4: Hipergrafo  $\Gamma_h$  obtido a partir da tesselação  $\{6, 12, 4\}$ .

Perceba que ao construirmos o triângulo a partir de pontos tomados nas arestas de  $f'$ , corrigimos o problema do hipergrafo não satisfazer  $(H_5)$ .

Denotamos o hipergrafo resultante por  $\Gamma_h$  e usamos ele para construir os códigos de subsistema da mesma maneira que a feita em [67].

Para comprovar que o hipergrafo  $\Gamma_h$  dado em nossa construção pode ser usado para a construção de códigos de subsistema como em [67], vamos provar que  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_1), \dots, (H_5)$ , pois como vimos no capítulo passado, se o hipergrafo satisfizer essas cinco restrições, então será possível obter códigos de subsistema a partir dele.

**Teorema 6.2.** *O hipergrafo  $\Gamma_h$  obtido pela construção anterior partindo de uma tesselação  $\{2p_1, 2p_2, 2p_3\}$  com  $p_1 > 2$  ímpar, satisfaz as restrições  $(H_1), \dots, (H_5)$  e, portanto, da origem a códigos de subsistema cujo grupo formado pelos operadores loop é dado por*

$$\mathcal{G}_{loop} = \{W(M); M \subseteq E \text{ é um hiperciclo fechado}\}, \quad (6.1)$$

onde  $E$  é o conjunto formado pelas arestas de rank-2 e de rank-3, e o grupo gauge  $\mathcal{G}$  é dado por  $\mathcal{G} = C(\mathcal{G}_{loop})$ .

*Demonstração.* De fato, na tesselação  $\{2p_1, 2p_2, 2p_3\}$  temos somente arestas de rank-2. Ao inserirmos  $f'$  dentro de  $f \in F \subseteq F_R$  e criarmos os triângulos a partir dos vértices de  $f'$ , estamos produzindo somente arestas de rank-2 e rank-3. Do mesmo modo, ao criarmos o triângulo dentro de  $f'$  a partir de pontos tomados em três de suas arestas, estamos produzindo uma aresta de rank-3 e três de rank-2. Logo,  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_1)$ .

Segue também da forma que inserimos as faces  $f'$  e criamos os triângulos que os vértices originais de  $\{2p_1, 2p_2, 2p_3\}$  continuarão sendo trivalentes. Já os vértices de  $f'$  serão trivalentes por causa dos triângulos criados a partir de seus vértices. Da mesma forma, os três novos vértices serão trivalentes, pois eles dividem uma aresta em duas e possuem o novo triângulo como sendo a terceira aresta. Assim,  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_2)$ .

A restrição  $(H_3)$  é satisfeita, pois apesar de criarmos arestas de rank-2 e de rank-3, segue da maneira que elas foram criadas que duas arestas distintas quaisquer se intersectam em no máximo um vértice.

A restrição  $(H_4)$  também é satisfeita, pois quando criamos os triângulos a partir de  $f'$ , já exigimos que eles não se intersectem. E o último triângulo também é criado não tendo interseção com os demais. Logo, as arestas de rank-3 de  $\Gamma_h$  são duas a duas disjuntas.

Por fim, como já vimos, a restrição  $(H_5)$  é satisfeita, pois já construímos o triângulo dentro de  $f'$  para que a regra da comutação fosse válida, ou seja, para que as arestas de  $\Gamma_h$  fossem 3-coloríveis.

Portanto,  $\Gamma_h$  da origem a códigos de subsistema como construído em [67]. ■

**Observação 6.3.** *A escolha das três arestas de  $f'$  que terão os vértices do triângulo é feita, na maioria dos casos, de maneira aleatória, ou seja, não temos restrição alguma. Porém, teremos uma pequena restrição para duas famílias de tesselações. A primeira delas será para a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  com  $F = F_R$  e a segunda delas será para a tesselação  $\{2p_1, 4, 6\}$  também com  $F = F_R$ . Essa restrição se deve ao fato de que o Teorema 5.17 tem que ser satisfeito, para garantir assim que  $(C_2)$  é válido. Estudaremos de modo particular na próxima seção esses dois casos. Para quaisquer outras famílias de tesselações, podemos tomar as três arestas de  $f'$  de maneira aleatória.*

Do mesmo modo como vimos no Capítulo 5, fixamos os operadores triângulo  $K_{e'} = Z_u Z_v Z_w$ , onde  $e' = (u, v, w)$ . Ao transformarmos  $\Gamma_h$  no grafo ordinário  $\bar{\Gamma}_h$  teremos que  $\bar{K}_{u,v} = Z_u Z_v$ ,  $\bar{K}_{u,w} = Z_u Z_w$  e  $\bar{K}_{v,w} = Z_v Z_w$ . Assim, em  $\bar{\Gamma}_h$  dado  $e' = (u, v) \in \bar{E}$ , temos que  $\bar{K}_{e'} = Z_u Z_v$  se  $e' \in \bar{E}_B$ ,  $\bar{K}_{e'} = X_u X_v$  se  $e' \in \bar{E}_R$  e  $\bar{K}_{e'} = Y_u Y_v$  se  $e' \in \bar{E}_G$ , onde  $\bar{E}_B$ ,  $\bar{E}_R$  e  $\bar{E}_G$  são os conjuntos com todas as arestas azuis, vermelhas e verdes, respectivamente, do grafo  $\bar{\Gamma}_h$ .

Como o conjunto não-vazio  $F \subseteq F_R$  é um conjunto qualquer, não conseguimos determinar de maneira geral todos os estabilizadores do código. Porém, para cada  $f \in F$  conseguimos sempre determinar três geradores estabilizadores, onde somente dois são independentes e para cada  $2p_2$ -gon conseguimos determinar mais um gerador estabilizador independente. Mostramos isso no lema a seguir.

**Lema 6.4.** *Considere  $f_1 \in F$  e  $f_2 \in F_G$  quaisquer e realize a construção de  $\Gamma_h$ . Então existem três hiperciclos (dois independentes) que podemos associar com a face  $f_1$  e um hiperciclo independente que podemos associar com a face  $f_2$ . Consequentemente, vão existir três*

geradores estabilizadores (dois independentes) associados com  $f_1$  e um gerador estabilizador independente associado com  $f_2$ .

*Demonstração.* Sejam  $f'_1$  a face inserida em  $f \in F \subseteq F_R$  já com as três arestas a mais provenientes da inserção do triângulo dentro de  $f'_1$ . Defina  $f_{1\sigma_1}$  como sendo o hiperciclo formado pelas  $p_1 + 3$  arestas de rank-2 na fronteira de  $f'_1$ . Logo, segue que

$$W(f_{1\sigma_1}) = \prod_{e' \in \partial(f'_1) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(f'_1) \cap \bar{E}_G} \bar{K}_{e'} \quad (6.2)$$

pertence ao grupo  $\mathcal{G}_{loop}$  e pelo Corolário 5.14 temos que  $W(f_{1\sigma_1}) \in C(\mathcal{G}_{loop})$ . Assim,  $W(f_{1\sigma_1}) \in \mathcal{G}_{loop} \cap C(\mathcal{G}_{loop}) = \mathbf{S}$ .

Agora, defina  $f_{1\sigma_2}$  como sendo o hiperciclo consistindo de todas as arestas de rank-3 inseridas dentro de  $f_1$  e dentro de  $f'_1$ , juntamente com as arestas de rank-2 na fronteira de  $f_1$  e as arestas de rank-2 vermelhas na fronteira de  $f'_1$ . Logo, segue que

$$W(f_{1\sigma_2}) = \prod_{e' \in \partial(f_1) \cap \bar{E}_B} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(f_1) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(f'_1) \cap \bar{E}_G} \bar{K}_{e'} \quad (6.3)$$

pertence ao grupo  $\mathcal{G}_{loop}$ . Temos também que todo hiperciclo contém nenhum ou contém uma quantidade par de triângulos de  $W(f_{1\sigma_2})$ . Desse modo, pelo Corolário 5.14 temos que  $W(f_{1\sigma_2}) \in C(\mathcal{G}_{loop})$ . Assim,  $W(f_{1\sigma_2}) \in \mathcal{G}_{loop} \cap C(\mathcal{G}_{loop}) = \mathbf{S}$ .

O terceiro e último hiperciclo associado a  $f_1$ , o qual denotamos por  $f_{1\sigma_3}$  é a soma módulo 2 dos hiperciclos  $f_{1\sigma_1}$  e  $f_{1\sigma_2}$ . Já o operador loop  $W(f_{1\sigma_3})$  será o produto de  $W(f_{1\sigma_1})$  por  $W(f_{1\sigma_2})$ .

Por fim, para a face  $f_2 \in F_G$ , defina  $f_{2\sigma_1}$  como sendo o hiperciclo formado pelas  $2p_2$  arestas de rank-2 na fronteira de  $f_2$ . Logo, pelos mesmos argumentos utilizados para  $W(f_{1\sigma_1})$ , temos que

$$W(f_{2\sigma_1}) = \prod_{e' \in \partial(f_2) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(f_2) \cap \bar{E}_G} \bar{K}_{e'} \quad (6.4)$$

será um gerador estabilizador independente.

Portanto, segue o desejado. ■

**Lema 6.5.** *Os operadores estabilizadores  $W(f_{1\sigma_i})$  com  $i = 1, 2, 3$  e  $W(f_{2\sigma_1})$  do Lema anterior, satisfazem a condição  $(C_2)$  da definição de código de subsistema topológico.*

*Demonstração.* Segue de maneira imediata das equações (6.2), (6.3) e (6.4). ■

**Exemplo 6.6.** *Sejam  $f_1 \in F \subseteq F_R$  e  $f_2 \in F_G$  na construção de  $\Gamma_h$  sobre a tesselação  $\{6, 6, 6\}$ , como na Figura 6.5.*

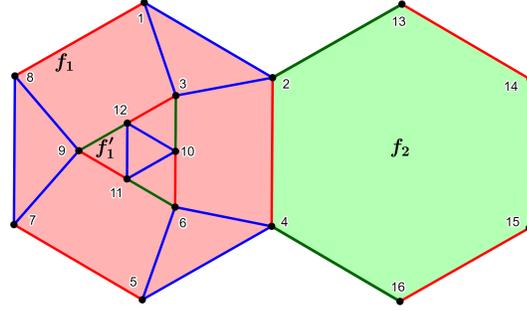


Figura 6.5: Face  $f_1 \in F \subseteq F_R$  e face  $f_2 \in F_G$  do hipergrafo  $\Gamma_h$  obtido da tesselação  $\{6, 6, 6\}$ .

Veja que  $f_{1\sigma_1}$  é formado pelas 6 arestas de  $f'_1$  inseridas dentro de  $f_1$ . Logo, o operador loop é dado como em (6.2), ou seja,  $W(f_{1\sigma_1}) = (X_3X_{12})(X_6X_{10})(X_9X_{11})(Y_3Y_{10})(Y_6Y_{11})(Y_9Y_{12})$ . Assim,  $W(f_{1\sigma_1})$  satisfaz o Teorema 5.17 e a condição  $(C_2)$ .

Já  $f_{1\sigma_2}$  é formado pelos três triângulos inseridos em  $f_1$ , pelo triângulo inserido em  $f'_1$ , pelas arestas vermelhas na fronteira de  $f_1$  e as arestas vermelhas na fronteira de  $f'_1$ . Segue de (6.3) que o operador loop é dado por

$$\begin{aligned} W(f_{1\sigma_2}) &= (Z_1Z_2Z_3)(Z_4Z_5Z_6)(Z_7Z_8Z_9)(Z_{10}Z_{11}Z_{12})(X_1X_8)(X_2X_4)(X_5X_7)(X_3X_{12}) \\ &\quad (X_9X_{11})(X_6X_{10}) \\ &= (Z_1Z_2)(Z_4Z_5)(Z_7Z_8)(X_1X_8)(X_2X_4)(X_5X_7)(Y_3Y_{10})(Y_6Y_{11})(Y_9Y_{12}), \end{aligned}$$

o qual também satisfaz o Teorema 5.17 e a condição  $(C_2)$ .

Por fim, temos que  $f_{2\sigma_1}$  é formado pelas 6 arestas de rank-2 de  $f_2$ . Logo, o operador loop é dado como em (6.4), ou seja,  $W(f_{2\sigma_1}) = (X_2X_4)(X_{13}X_{14})(X_{15}X_{16})(Y_4Y_{16})(Y_2Y_{13})(Y_{14}Y_{15})$ . Assim,  $W(f_{2\sigma_1})$  satisfaz o Teorema 5.17 e a condição  $(C_2)$ .

Falaremos sobre outros estabilizadores quando analisarmos os casos particulares na próxima seção.

Para finalizar essa seção vamos relembrar a quantidade de faces  $N_f$ , arestas  $N_e$  e vértices  $N_v$  da tesselação  $\{2p_1, 2p_2, 2p_3\}$  sobre uma superfície compacta orientável de gênero  $g \geq 2$ , assim como a quantidade de faces vermelhas  $F_R$ , verdes  $F_G$  e azuis  $F_B$ . Esses valores serão necessários para que possamos determinar os parâmetros de três das quatro famílias de códigos de subsistema topológicos que apresentaremos na próxima seção.

Como vimos no Capítulo 3, a quantidade de faces, arestas e vértices dessa tesselação são dadas por (3.4), (3.5) e (3.6), respectivamente, ou seja,

$$N_f = \frac{2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)(g-1)}{p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3}, \quad (6.5)$$

$$N_e = \frac{6p_1p_2p_3(g-1)}{p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3}, \quad (6.6)$$

$$N_v = \frac{4p_1p_2p_3(g-1)}{p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3}. \quad (6.7)$$

Já a quantidade de faces vermelhas, verdes e azuis são dadas por (3.7), isto é,

$$F_R = \frac{2p_2p_3(g-1)}{p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3},$$

$$F_G = \frac{2p_1p_3(g-1)}{p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3},$$

$$F_B = \frac{2p_1p_2(g-1)}{p_1p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3}.$$

## 6.2 Famílias de Códigos de Subsistema Topológicos

Apresentaremos nesta seção quatro famílias de códigos de subsistema topológicos, onde demonstraremos que as mesmos são de fato, topológicos. Também iremos exibir os parâmetros  $n$ ,  $k$ ,  $r$  e  $d$  desses códigos.

Duas dessas famílias são casos particulares da nossa construção vista na seção passada. A primeira família que veremos se refere ao caso em que partimos da tesselação  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  e consideramos  $F = F_R$ . Já a segunda e a terceira família se referem ao caso em que partimos da tesselação  $\{2p_1, 4, 6\}$  com  $p_1 > 4$  par e com  $p_1 > 6$  ímpar, respectivamente, e também consideramos  $F = F_R$ . Como o caso  $p_1 > 4$  par não foi analisado em [59], iremos abordar aqui. Por fim, a quarta e última família que iremos apresentar está relacionada a tesselação

$\{p, 4, 3, 4\}$  com  $p$  ímpar, onde resolvemos o problema de  $p$  ser ímpar introduzindo um triângulo dentro do  $p$ -gon, assim como fizemos na nossa construção na seção passada.

Esses códigos serão construídos tanto no toro quanto nas demais superfícies compactas orientáveis com gênero  $g \geq 2$ . Porém, no caso do toro temos somente um exemplo para a primeira família, que é partindo da tesselação  $\{6, 12, 4\}$ , um exemplo para a segunda família, que é partindo da tesselação  $\{12, 4, 6\}$  e nenhum exemplo para a terceira e quarta família.

### **Códigos de Subistema Topológicos Provenientes da Construção do Hipergrafo $\Gamma_h$ Sobre a Tesselação $\{2p_1, 2p_2, 4\}$ com $p_1 > 2$ ímpar**

Considere a tesselação trivalente e 3-colorível  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  com  $p_1 > 2$  ímpar sobre uma superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$ . Utilizando  $F = F_R$ , construa o hipergrafo  $\Gamma_h$  como visto na seção 6.1. Porém, a maneira de escolhermos as arestas de  $f'$  onde tomaremos os vértices do triângulo que inserimos dentro dela, não poderá ser feita de maneira aleatória.

Como vimos na seção 5.2, ao realizarmos a construção do hipergrafo  $\Gamma_h$  para  $p_1 > 2$  par e  $F = F_R$ , temos que cada  $f \in F_R$  determina três geradores estabilizadores (2 independentes). Além disso, pelo fato de considerar  $F = F_R$ , também teremos que cada  $f \in F_G$  determina três geradores estabilizadores (2 independentes), como pode ser visto na Figura 6.6. Na demonstração do Teorema 5.20, que pode ser visto em [59] é mostrado que esses últimos são geradores estabilizadores.

Para a nossa construção, também queremos que cada  $f \in F_G$  nos forneça três geradores estabilizadores (2 independentes). Mas, quando acrescentamos os triângulos dentro de  $f'_i$ , estamos criando uma aresta a mais ao hiperciclo envolvendo os triângulos ao redor de algumas faces  $f \in F_G$ . Isso será um problema, pois, dessa forma, o estabilizador proveniente desse hiperciclo não irá satisfazer o Teorema 5.17, logo, não satisfaz  $(C_2)$  e, conseqüentemente, não poderemos obter códigos de subistema topológicos. Para resolvermos isso, impomos a restrição de que esses triângulos sejam construídos em  $f'_i$ , de modo que não aumente novos vértices ou aumente uma quantidade par de vértices em cada hiperciclo envolvendo os triângulos ao redor de  $f \in F_G$ , como pode ser visto na Figura 6.7, onde acrescentamos quatro novos vértices ao hiperciclo envolvendo os triângulos ao redor de  $f$ .

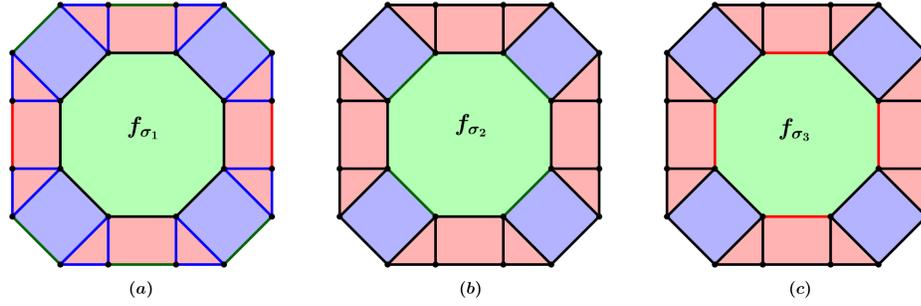


Figura 6.6: Hiperciclos da face  $f \in F_G$  sobre o hipergrafo  $\Gamma_h$  obtido a partir da tesselação  $\{8, 8, 4\}$ . Em preto temos os hiperciclos: (a)  $f_{\sigma_1}$  formado pelas arestas de rank-2 de  $f$ ; (b)  $f_{\sigma_2}$  formado pelas arestas de rank-3 ao redor de  $f$ , pelas arestas de rank-2 vermelhas de  $f$  e demais arestas vermelhas e verdes ao redor de  $f$ , necessárias para completar o hiperciclo; (c)  $f_{\sigma_3}$  soma módulo 2 de  $f_{\sigma_1}$  e  $f_{\sigma_2}$ .

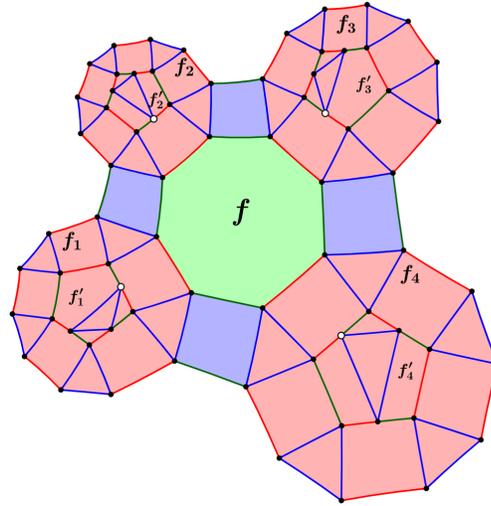


Figura 6.7: Parte de um hipergrafo  $\Gamma_h$  obtido a partir da tesselação hiperbólica  $\{10, 8, 4\}$ , onde acrescentamos 4 novos vértices (destacados em branco), ou seja, 4 novas arestas para o hiperciclo envolvendo os triângulos ao redor de  $f \in F_G$ .

Se não aumentar nenhum vértice no hiperciclo  $f_{\sigma_2}$  com  $f \in F_G$ , temos que o operador loop será dado por

$$W(f_{\sigma_2}) = \prod_{e' \in \partial(\bar{f}) \cap \bar{E}_B} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(\bar{f}) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(\bar{f}) \cap \bar{E}_G} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(\bar{f}) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'}, \quad (6.8)$$

onde  $\bar{f}$  é a “face” composta pelas arestas de rank-2 de  $\bar{\Gamma}_h$  que englobam a face  $f \in F_G$  (veja

a Figura 6.8) e são utilizadas nos hiperciclos  $f_{\sigma_2}$  e  $f_{\sigma_3}$ ,

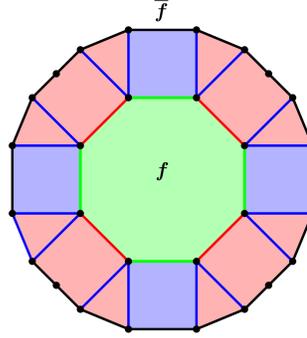


Figura 6.8: Representação da “face”  $\bar{f}$ , a qual é composta pelas arestas em preto de  $\bar{\Gamma}_h$  que englobam a face  $f \in F_G$ .

Caso aumente uma quantidade par de vértices não conseguiremos escrever o operador loop como na equação (6.8), separando pelas cores das arestas, mas isso não impedirá que o operador loop satisfaça o Teorema 5.17.

**Exemplo 6.7.** Considere a face  $f$  dada na Figura 6.9-(a), a qual representa uma face de  $F_G$  proveniente da construção do hipergrafo  $\Gamma_h$  sobre a tesselação hiperbólica  $\{10, 8, 4\}$ . Se não tivermos novos vértices nas arestas de rank-2 de  $\bar{f}$ , segue que o hiperciclo  $f_{\sigma_2}$  que envolve a face  $f \in F_G$  fornece o operador loop

$$\begin{aligned} W(f_{\sigma_2}) = & (Z_1 Z_2)(Z_4 Z_5)(Z_7 Z_8)(Z_{10} Z_{11})(Z_{13} Z_{14})(Z_{16} Z_{17})(Z_{19} Z_{20})(Z_{22} Z_{23}) \\ & (X_1 X_{23})(X_5 X_7)(X_{11} X_{13})(X_{17} X_{19})(Y_2 Y_4)(Y_8 Y_{10})(Y_{14} Y_{16})(Y_{20} Y_{22}) \\ & (X_3 X_{24})(X_6 X_9)(X_{12} X_{15})(X_{18} X_{21}). \end{aligned}$$

Considerando que aumente somente um vértice (qubit 25 na Figura 6.9-(b)), não será possível escrever as 21 arestas de modo que elas satisfaçam o Teorema 5.17, pois as arestas de rank-2 de  $\bar{f}$  estão em uma quantidade ímpar, logo, nunca irão comutar. Por isso, exigimos que a quantidade de vértices, se aumentar, seja par.

Já na Figura 6.9-(c) aumentou dois vértices (qubits 25 e 26). Logo, o operador loop será

dado por

$$\begin{aligned} W(f_{\sigma_2}) = & (Z_1 Z_2)(Z_4 Z_5)(X_7 X_{26})(Y_8 Y_{10})(X_{11} X_{13})(Y_{14} Y_{16})(X_{17} X_{19})(Y_{20} Y_{22})(X_{23} X_{25}) \\ & (Y_1 Y_{25})(Y_2 Y_4)(Y_5 Y_{26})(Z_7 Z_8)(Z_{10} Z_{11})(Z_{13} Z_{14})(Z_{16} Z_{17})(Z_{19} Z_{20})(Z_{22} Z_{23}) \\ & (X_3 X_{24})(X_6 X_9)(X_{12} X_{15})(X_{18} X_{21}). \end{aligned}$$

Perceba que não conseguimos separar os operadores link pelas cores como na equação (6.8), mas mesmo assim, esse operador satisfaz o Teorema 5.17.

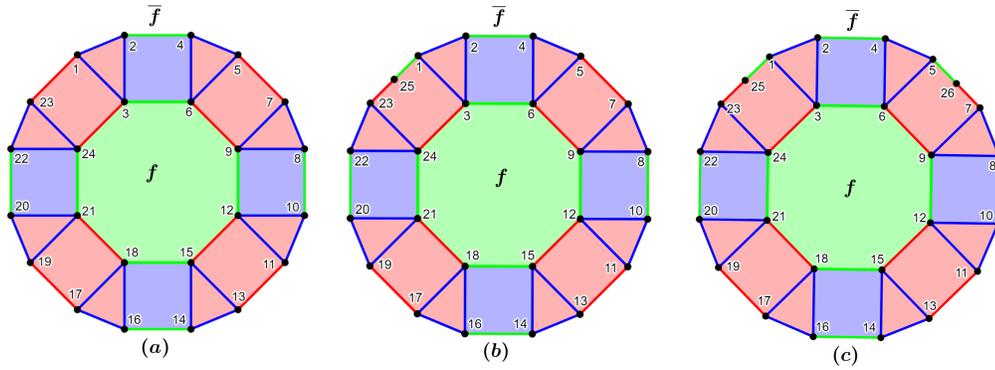


Figura 6.9: Representação de uma face  $f \in F_G$  proveniente da construção do hipergrafo  $\Gamma_h$  sobre a tesselação  $\{10, 8, 4\}$ . (a) Nenhum novo vértice, (b) um novo vértice e (c) dois novos vértices nas arestas de rank-2 de  $\bar{f}$ .

O que nos garante que podemos fazer essa restrição quanto a maneira que fixamos os triângulos dentro de  $f'_i$ , de modo que os hiper ciclos de  $f \in F_G$  forneçam estabilizadores satisfazendo o Teorema 5.17, é o fato de termos um quantidade finita de  $2p_1$ -gons e  $2p_2$ -gons. Desse modo, temos que cada  $f \in F_G$  irá fornecer três geradores estabilizadores (2 independentes).

Assim, os geradores estabilizadores desse código serão dados pelo Lema 6.4 e pelos operadores loops  $W(f_{\sigma_2})$  e  $W(f_{\sigma_3})$  com  $f \in F_G$ , onde  $W(f_{\sigma_2})$  é o operador loop que acabamos de descrever e  $W(f_{\sigma_3})$  é o produto de  $W(f_{\sigma_1})$  por  $W(f_{\sigma_2})$ . Logo, esse código de subsistema satisfaz a condição  $(C_2)$ .

Com isso, vamos determinar a quantidade de geradores estabilizadores independentes. Segue do que acabamos de ver e do Lema 6.4, que cada  $f \in F_R$  determina 2 geradores es-

tabilizadores independentes e cada  $f \in F_G$  também determina 2 geradores estabilizadores independentes. Porém, ao juntarmos todos esses estabilizadores, nem todos serão independentes, pois temos a seguinte relação de independência válida

$$\prod_{f \in F_G} W(f_{\sigma_2}) = \prod_{f \in F_R} W(f_{\sigma_1}). \quad (6.9)$$

Para o caso de  $p_1$  par, ou seja, para o Teorema 5.20 poderão existir outras relações de independência, como pode ser visto na demonstração desse Teorema em [59]. Porém, para a nossa construção, a única relação válida nesse caso é a relação (6.9). Desse modo, a quantidade de geradores estabilizadores independentes será

$$s = 2F_R + 2F_G - 1. \quad (6.10)$$

Vamos agora determinar os parâmetros  $n$ ,  $k$ ,  $r$  e  $d$  do nosso código de subsistema.

Como temos somente um caso euclidiano, o qual é dado por  $\{6, 12, 4\}$ , a determinação dos parâmetros é feita em relação as tesselações mergulhadas em superfícies compactas orientáveis de gênero  $g \geq 2$ . Porém, vale a mesma construção para o caso  $\{6, 12, 4\}$ , com a diferença de que teremos que contar a quantidade de faces de maneira manual.

Como sabemos os valores de  $N_v$  e  $F_R$ , podemos determinar a quantidade  $n$  de qubits físicos, a qual é dada pela quantidade de vértices do hipergrafo  $\Gamma_h$ , ou seja,

$$n = N_v + p_1 F_R + 3F_R = \frac{12(p_1 p_2 + 2p_2)(g-1)}{p_1 p_2 - 2p_1 - 2p_2}. \quad (6.11)$$

Sabemos também que a quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$  é dado em (6.10) e que  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ , assim, vamos determinar a quantidade  $r$  de qubits gauge. Lembrando que o grupo gauge  $\mathcal{G}$  é dado por  $\mathcal{G} = \langle \overline{K}_{e'}; e' \in \overline{E} \rangle$ .

Para determinarmos a  $\dim \mathcal{G}$ , precisamos determinar a quantidade de geradores independentes, ou seja, precisamos determinar a quantidade de operadores link independentes.

Como mencionado no Capítulo 5, as arestas de rank-3, ou seja, os triângulos de  $\Gamma_h$ , quando são transformados em três arestas de rank-2 nos fornecem somente dois operadores link independentes. Juntando esses dois operadores link independentes com todos os operadores link de  $\Gamma_h$ , temos ainda que não serão todos independentes, pois eles vão obedecer as relações

de independência obtidas para  $s$ , que nesse caso é dado somente pela equação (6.9). Desse modo, temos que a quantidade de geradores independentes de  $\mathcal{G}$  será a quantidade de arestas de rank-2 de  $\Gamma_h$ , mais duas vezes a quantidade de arestas de rank-3, menos a quantidade de relações de independência.

Temos que as arestas de rank-2 e de rank-3 para o hipergrafo  $\Gamma_h$ , obtido pela nossa construção sobre a tesselação  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  são dadas por

$$E_2 = 2p_2F_G + (p_1 + 3)F_R \quad \text{e} \quad E_3 = (p_1 + 1)F_R. \quad (6.12)$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{G} &= 2p_2F_G + (p_1 + 3)F_R + 2(p_1 + 1)F_R - 1 \\ &= 2p_2F_G + 3p_1F_R + 5F_R - 1 \\ &= N_v + N_e + 5F_R - 1, \end{aligned}$$

pois  $2p_2F_G = N_v$  e  $3p_1F_R = N_e$ .

Como  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$  e  $s = 2F_G + 2F_R - 1$ , temos

$$\begin{aligned} 2r + 2F_G + 2F_R - 1 &= N_v + N_e + 5F_R - 1 \Leftrightarrow \\ 2r &= N_v + N_e + 5F_R - 2F_G - 2F_R - 2F_B + 2F_B + 2N_v - 2N_v \\ &= -2(N_v - N_e + N_f) + 2N_v + 5F_R \\ &= -2\chi + 2N_v + 5F_R, \end{aligned}$$

pois  $F_G + F_R + F_B = N_f$  e  $2F_B + N_v = N_e$ . Portanto,

$$r = -\chi + N_v + \frac{5F_R}{2}, \quad (6.13)$$

o que só fará sentido se  $r$  for um inteiro positivo.

Como já sabemos os valores de  $n$ ,  $r$  e  $s$  fica fácil determinarmos o valor de  $k$ , pois o mesmo é dado por  $k = n - r - s$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned}
k &= N_v + p_1 F_R + 3F_R + \chi - N_v - \frac{5F_R}{2} - 2F_R - 2F_G + 1 \\
&= N_e - N_v - 2F_R - 2F_G - 2F_B + 2F_B + 3F_R + \chi - \frac{5F_R}{2} + 1 \\
&= \frac{-2N_f + 4F_B + 6F_R - 5F_R + 2 + 2N_v - 2N_v + 2N_e - 2N_e}{2} \\
&= \frac{-2(N_v - N_e + N_f) + 3N_v - 2N_e + F_R + 2}{2} \\
&= -\chi + 1 + \frac{F_R}{2},
\end{aligned}$$

pois  $N_v + p_1 F_R = N_e$ ,  $4F_B = N_v$  e  $3N_v - 2N_e = 0$ . Portanto,

$$k = -\chi + 1 + \frac{F_R}{2}, \quad (6.14)$$

o que só fará sentido se  $k$  for um inteiro positivo.

Por fim, a distância  $d$  segue de maneira análoga ao feito no capítulo 5, ou seja, limitaremos superiormente pelo menor número de triângulos em um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial, isto é, será o menor peso entre os operadores de  $C(\mathcal{G}) \setminus \mathbf{S}$ .

Os dois próximos resultados são utilizados para provar que  $\Gamma_h$  satisfaz as condições  $(C_1)$  e  $(C_3)$  da definição de código de subistema topológico. Esses resultados podem ser vistos em [59], mas aqui mostraremos que são válidos para a nossa construção.

**Lema 6.8.** *Se  $\sigma$  é um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial de  $\Gamma_h$ . Então  $\sigma$  deve conter arestas de rank-3.*

*Demonstração.* Suponha que o hiperciclo  $\sigma$  não contenha arestas de rank-3. Segue de nossa construção que todo vértice do hipergrafo  $\Gamma_h$  é trivalente e possui uma aresta de rank-3 incidente nele. Temos também que  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_5)$  e as arestas de rank-3 são todas azuis. Assim,  $\sigma$  é formado por arestas de rank-2 que possuem cores alternadas entre vermelho e verde.

Se  $\sigma$  contém algum vértice  $v \in f'_1$  para  $f'_1$  inserida em  $f_1 \in F = F_R$ , então todos os  $p_1 + 3$  vértices de  $f'_1$  estão em  $\sigma$ , ou seja, o hiperciclo  $f_{1\sigma_1}$ , o qual é homologicamente trivial, faz parte de  $\sigma$ . Podemos realizar a soma módulo 2 de  $\sigma$  com  $f_{1\sigma_1}$ , descartando assim  $f_{1\sigma_1}$  de  $\sigma$ . Desse modo, restará em  $\sigma$  somente hiperciclos que não contenham vértices de  $f'_1$ . Podemos

fazer isso para todas as faces  $f'$  que possuem vértices em  $\sigma$ . Desse modo, os vértices restantes de  $\sigma$  serão vértices de faces de  $F_G$ . Novamente pelo fato de  $\sigma$  não possuir arestas de rank-3, segue que irá possuir todos os  $2p_2$  vértices de alguma face  $f_2 \in F_G$ , ou seja, possui  $f_{2\sigma_1}$ . Logo,  $\sigma$  é um hiperciclo homologicamente trivial, o que é um absurdo. Portanto,  $\sigma$  deve conter arestas de rank-3. ■

**Lema 6.9.** *Suponha que  $\sigma$  é um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial de  $\Gamma_h$ . Então,  $W(\sigma)$  não está no grupo gauge  $\mathcal{G}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $W(\sigma) \in \mathcal{G}$ . Então

$$W(\sigma) = \prod_{e' \in E_2 \cap \sigma} K_{e'} \prod_{e' \in E_3 \cap \sigma} K_{e'} \in \mathcal{G},$$

onde  $E_2$  e  $E_3$  são os conjuntos de arestas de rank-2 e rank-3 de  $\Gamma_h$ , respectivamente. Sabemos que as arestas de  $E_2 \cap \sigma$  são arestas de  $\bar{\Gamma}_h$  e os operadores link  $K_{e'}$  e  $\bar{K}_{e'}$  são os mesmos quando  $e' \in E_2 \cap \sigma$ . Assim, fazendo o produto de  $W(\sigma) \in \mathcal{G}$  e  $\prod_{e' \in E_2 \cap \sigma} \bar{K}_{e'} \in \mathcal{G}$ , segue que o operador do tipo  $Z$

$$O_\sigma = \prod_{e' \in E_3 \cap \sigma} K_{e'} = W(\sigma) \prod_{e' \in E_2 \cap \sigma} \bar{K}_{e'} \in \mathcal{G},$$

ou seja, será gerado pelos operadores link da forma  $\{X \otimes X, Y \otimes Y, Z \otimes Z\}$ .

Suponha que  $O_\sigma$  seja gerado por  $O_\sigma = K^{(X,Y)}K^{(Z)}$ , onde  $K^{(X,Y)}$  consiste apenas de operadores da forma  $X \otimes X$  e  $Y \otimes Y$ . Já  $K^{(Z)}$  consiste apenas de operadores da forma  $Z \otimes Z$ . Logo,  $O_\sigma K^{(Z)} = K^{(X,Y)}$  e as arestas no suporte de  $K^{(X,Y)}$  devem formar um hiperciclo fechado consistindo somente de arestas de rank-2. Pelo Lema anterior, esse hiperciclo fechado é homologicamente trivial e consiste da união de hiperciclos que são fronteiras de uma coleção de faces  $f \in F_G$  e  $f'_i$  com  $f_i \in F_R$ . Denotamos essa coleção por  $\mathcal{F}$ . Assim, as arestas de rank-3 de  $\sigma$  estão incidentes nos vértices desse hiperciclo obtido através de  $K^{(X,Y)}$ .

Considere o operador  $O' = \prod_{f \in \mathcal{F}} W(f_{\sigma_i})$ , onde  $f_{\sigma_i}$  é um hiperciclo associado com  $f$ , o qual irá conter todas as arestas de rank-3 de  $\sigma$ .

Afirmção: As arestas de rank-3, as quais incidem nos vértices no suporte de  $K^{(X,Y)}$ , mas não estão em  $\sigma$ , também não estão em  $O'$ .

De fato, suponha que  $v$  não seja um vértice no suporte de  $O_\sigma$ , mas seja um vértice no suporte de  $K^{(X,Y)}$ . Então, os três operadores gauge  $X_v X_i$ ,  $Y_v Y_j$  e  $Z_v Z_u$  agem em  $v$ . Logo, suponha sem perda de generalidade que  $u$  seja um vértice no suporte de  $K^{(Z)}$ . Assim,  $u$  não é um vértice no suporte de  $O_\sigma$ , pois caso contrário, como  $u$  pertence ao suporte de  $K^{(Z)}$ , então  $v$  pertenceria ao suporte de  $O_\sigma$ , o que é um absurdo.

Agora, seja  $e' \in E_3 \setminus \sigma$  tal que  $e'$  tem exatamente dois vértices no suporte de  $O_\sigma K^{(Z)} = K^{(X,Y)}$ . Logo, existem duas faces  $f_a$  e  $f_b$  associadas com esses dois vértices. Assim, existe um hiperciclo  $f_{a\sigma_2}$  que engloba  $f_a$  e contém  $e'$  e existe um hiperciclo  $f_{b\sigma_2}$  que engloba  $f_b$  e contém  $e'$ . Então o operador  $W(f_{a\sigma_2})W(f_{b\sigma_2})$  não possui suporte em  $e'$ . Logo, os vértices de  $e'$  não estão no suporte de  $O'$ .

Continuando esse procedimento obtemos estabilizadores, os quais tem suporte no mesmo conjunto de arestas de  $O_\sigma$ , o que implica que  $\sigma$  é homologicamente trivial, pois será gerado por uma combinação de hiperciclos triviais, o que é um absurdo. Portanto,  $W(\sigma) \notin \mathcal{G}$ . ■

**Observação 6.10.** *O Lema 6.8 garante que os hiperciclos fechados homologicamente não-triviais  $\sigma$  possuem arestas de rank-3. O que é muito importante, pois caso contrário  $W(\sigma)$  seria um estabilizador e  $(C_1)$  e  $(C_3)$  não seriam satisfeitos. Já o Lema 6.9 garante que  $W(\sigma) \notin \mathcal{G} = C(\mathcal{G}_{loop})$ , garantindo assim que os operadores lógicos podem ser identificados com os hiperciclos fechados homologicamente não-triviais e os operadores estabilizadores podem ser identificados com os hiperciclos fechados homologicamente triviais, ou seja, valem  $(C_3)$  e  $(C_1)$ , respectivamente.*

**Teorema 6.11.** *Considere uma tesselação trivalente e 3-colorível  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  com  $p_1 > 2$  ímpar. Aplicando a construção de  $\Gamma_h$  com  $F = F_R$  vista na seção 6.1, obtemos códigos de subsistemas topológicos com parâmetros*

$$\left[ \left[ N_e + 3F_R, -\chi + 1 + \frac{F_R}{2}, -\chi + N_v + \frac{5F_R}{2}, d \leq l \right] \right] \quad (6.15)$$

onde  $l$  é a quantidade de triângulos em um hiperciclo homologicamente não-trivial.

*Demonstração.* Segue pelo Teorema 6.2 que  $\Gamma_h$  fornece códigos de subsistema e segue pelo Lema 6.5 e pela equação (6.8) que esse código de subsistema satisfaz  $(C_2)$ . Já pelos Lemas 6.8

e 6.9 temos que irá satisfazer  $(C_1)$  e  $(C_3)$ . Logo, o código obtido é um código de subsistema topológico. Por fim, pelas equações (6.11), (6.13) e (6.14) temos que os parâmetros  $n$ ,  $r$  e  $k$  são dados como em (6.15). Já a questão da distância ser limitada pela quantidade de triângulos em um hiper ciclo homologicamente não-trivial segue do que vimos durante a seção. Portanto, temos o desejado. ■

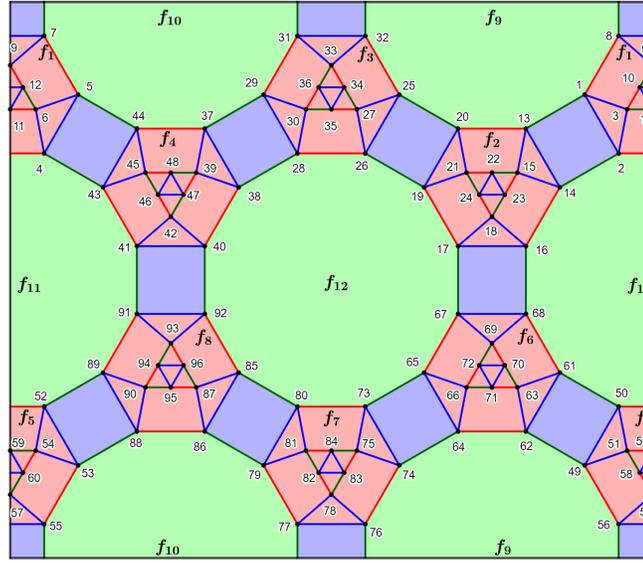


Figura 6.10: Hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente da tesselação  $\{6, 12, 4\}$ .

**Exemplo 6.12.** Considere o hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente da tesselação  $\{6, 12, 4\}$  ilustrado na Figura 6.10. Pelo Teorema 6.11, obtemos um código de subsistema topológico através de  $\Gamma_h$ .

Vamos determinar os parâmetros desse código.

Esse hipergrafo possui 96 vértices, ou seja, 96 qubits. Logo, segue que  $n = 96$ . Para determinarmos  $r$ , precisamos determinar  $s$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  e  $\dim \mathcal{G}$ . Lembrando que a quantidade de geradores estabilizadores independentes é dado por  $s = 2F_R + 2F_G - 1$  e, nesse caso,  $F_R = 8$  e  $F_G = 4$ , logo,  $s = 23$ . Já  $E_2$  e  $E_3$  são dados por  $E_2 = 2p_2F_G + (p_1 + 3)F_R$  e  $E_3 = (p_1 + 1)F_R$ . Logo, nesse caso,  $E_2 = 96$  e  $E_3 = 32$ . Como  $\dim \mathcal{G} = E_2 + 2E_3 - 1$ , segue que  $\dim \mathcal{G} = 159$ . Mas  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ , assim, segue que  $159 = 2r + 23 \iff r = 68$ . Agora, como  $k = n - r - s$ , segue que  $k = 5$ .

Por fim, fazendo uma busca pelos hiper ciclos homologicamente não-triviais, o que possui

a menor quantidade de triângulos encontrado, possui  $l = 4$  triângulos. Logo,  $d \leq 4$ .

Portanto, obtemos um código de subsistema topológico com parâmetros  $[[96, 5, 68, 4]]$ .

Para finalizar o estudo sobre essa família de códigos, apresentamos nas Tabelas 6.1 e 6.2 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $r$ , obtidos do hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente das tesselações  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  sobre uma superfície compacta orientável  $M$  com gênero  $g = 2, 3, 4$  e  $5$ . Também apresentamos em cada caso a quantidade  $s$  de geradores estabilizadores independentes juntamente com as tesselações  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  utilizada para construir  $\Gamma_h$ . Não apresentamos o valor de  $d$  em nenhuma das tabelas, pois apesar de termos um limitante superior para a distância, não temos ainda como determinar um valor de maneira geral.

$g$	Tesselação	$s$	$[[n, k, r, d]]$
2	{6, 14, 4}	79	$[[336, 17, 240, d]]$
2	{14, 6, 4}	79	$[[288, 9, 200, d]]$
2	{6, 16, 4}	43	$[[192, 11, 138, d]]$
2	{6, 18, 4}	31	$[[144, 9, 104, d]]$
2	{10, 8, 4}	35	$[[144, 7, 102, d]]$
2	{6, 20, 4}	25	$[[120, 8, 87, d]]$
2	{18, 6, 4}	31	$[[120, 5, 84, d]]$
2	{6, 24, 4}	19	$[[96, 7, 70, d]]$
2	{6, 36, 4}	13	$[[72, 6, 53, d]]$
2	{10, 10, 4}	15	$[[72, 5, 52, d]]$
2	{10, 20, 4}	5	$[[36, 4, 27, d]]$
3	{6, 14, 4}	159	$[[672, 33, 480, d]]$
3	{14, 6, 4}	159	$[[576, 17, 400, d]]$
3	{6, 16, 4}	87	$[[384, 21, 276, d]]$
3	{6, 18, 4}	63	$[[288, 17, 208, d]]$

$g$	Tesselação	$s$	$[[n, k, r, d]]$
3	{10, 8, 4}	71	$[[288, 13, 204, d]]$
3	{6, 20, 4}	51	$[[240, 15, 174, d]]$
3	{18, 6, 4}	63	$[[240, 9, 168, d]]$
3	{6, 24, 4}	39	$[[192, 13, 140, d]]$
3	{6, 28, 4}	33	$[[168, 12, 123, d]]$
3	{6, 36, 4}	27	$[[144, 11, 106, d]]$
3	{10, 10, 4}	31	$[[144, 9, 104, d]]$
3	{6, 60, 4}	21	$[[120, 10, 89, d]]$
3	{10, 12, 4}	21	$[[108, 8, 79, d]]$
3	{10, 20, 4}	11	$[[72, 7, 54, d]]$
3	{18, 12, 4}	9	$[[60, 6, 45, d]]$
3	{14, 28, 4}	5	$[[48, 6, 37, d]]$

Tabela 6.1: Tesselações e parâmetros dos códigos de subsistema topológicos provenientes de  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  com  $p_1 > 2$  ímpar,  $g = 2$  e  $3$ .

$g$	Tesselação	$s$	$[[n, k, r, d]]$
4	{6, 14, 4}	239	[[1008, 49, 720, $d$ ]]
4	{14, 6, 4}	239	[[864, 25, 600, $d$ ]]
4	{6, 16, 4}	131	[[576, 31, 414, $d$ ]]
4	{6, 18, 4}	95	[[432, 25, 312, $d$ ]]
4	{10, 8, 4}	107	[[432, 19, 306, $d$ ]]
4	{6, 20, 4}	77	[[360, 22, 261, $d$ ]]
4	{18, 6, 4}	95	[[360, 13, 252, $d$ ]]
4	{6, 24, 4}	59	[[288, 19, 210, $d$ ]]
4	{6, 30, 4}	47	[[240, 17, 176, $d$ ]]
4	{6, 36, 4}	41	[[216, 16, 159, $d$ ]]
4	{10, 10, 4}	47	[[216, 13, 156, $d$ ]]
4	{6, 48, 4}	35	[[192, 15, 142, $d$ ]]
4	{14, 8, 4}	43	[[192, 11, 138, $d$ ]]
4	{30, 6, 4}	47	[[192, 9, 136, $d$ ]]
4	{6, 84, 4}	29	[[168, 14, 125, $d$ ]]
4	{10, 20, 4}	17	[[108, 10, 81, $d$ ]]
4	{14, 14, 4}	15	[[96, 9, 72, $d$ ]]
4	{18, 36, 4}	5	[[60, 8, 47, $d$ ]]
5	{6, 14, 4}	319	[[1344, 65, 960, $d$ ]]
5	{14, 6, 4}	319	[[1152, 33, 800, $d$ ]]

$g$	Tesselação	$s$	$[[n, k, r, d]]$
5	{6, 16, 4}	175	[[768, 41, 552, $d$ ]]
5	{6, 18, 4}	127	[[576, 33, 416, $d$ ]]
5	{10, 8, 4}	143	[[576, 25, 408, $d$ ]]
5	{6, 20, 4}	103	[[480, 29, 348, $d$ ]]
5	{18, 6, 4}	127	[[480, 17, 336, $d$ ]]
5	{6, 24, 4}	79	[[384, 25, 280, $d$ ]]
5	{6, 28, 4}	67	[[336, 23, 246, $d$ ]]
5	{6, 36, 4}	55	[[288, 21, 212, $d$ ]]
5	{10, 10, 4}	63	[[288, 17, 208, $d$ ]]
5	{6, 44, 4}	49	[[264, 20, 195, $d$ ]]
5	{6, 60, 4}	43	[[240, 19, 178, $d$ ]]
5	{6, 108, 4}	37	[[216, 18, 161, $d$ ]]
5	{10, 12, 4}	43	[[216, 15, 158, $d$ ]]
5	{10, 20, 4}	23	[[144, 13, 108, $d$ ]]
5	{14, 12, 4}	25	[[144, 12, 107, $d$ ]]
5	{18, 12, 4}	19	[[120, 11, 90, $d$ ]]
5	{10, 60, 4}	13	[[108, 12, 83, $d$ ]]
5	{14, 28, 4}	11	[[96, 11, 74, $d$ ]]
5	{30, 12, 4}	13	[[96, 10, 73, $d$ ]]
5	{22, 44, 4}	5	[[72, 10, 57, $d$ ]]

Tabela 6.2: Tesselações e parâmetros dos códigos de subsistema topológicos provenientes de  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$  com  $p_1 > 2$  ímpar,  $g = 4$  e  $5$ .

### Códigos de Subsistema Topológicos Provenientes da Construção do Hipergrafo $\Gamma_h$ Sobre a Tesselação $\{2p_1, 4, 6\}$

Considere a tesselação trivalente e 3-colorível  $\{2p_1, 4, 6\}$  sobre uma superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$ . Construiremos duas famílias de códigos de subsistema topológicos. A primeira

delas para  $p_1 > 4$  par. Essa família não é trabalhada em [59] de maneira particular, como nos Teoremas 5.20 e 5.22. Desse modo, forneceremos a família de códigos proveniente de  $\{2p_1, 4, 6\}$  para  $p_1 > 4$  par seguindo a construção dada em [59], e que vimos na seção 5.2. A segunda família será para  $p_1 > 6$  ímpar, onde realizamos a nossa construção de  $\Gamma_h$  vista na seção 6.1. Para ambos os casos, continuamos fixando os  $2p_1$ -gons como sendo as faces vermelhas, os 4-gons como sendo as faces verdes e os 6-gons como sendo as faces azuis.

### Família de Códigos de Subsistema Topológicos Proveniente da Tesselção $\{2p_1, 4, 6\}$ com $p_1 > 4$ par

Utilizando  $F = F_R$ , construa o hipergrafo  $\Gamma_h$  como visto na seção 5.2, de modo que, os triângulos façam fronteira com os 6-gons como na Figura 6.11. Observe que o único exemplo euclidiano desse caso é o  $\{12, 4, 6\}$ .

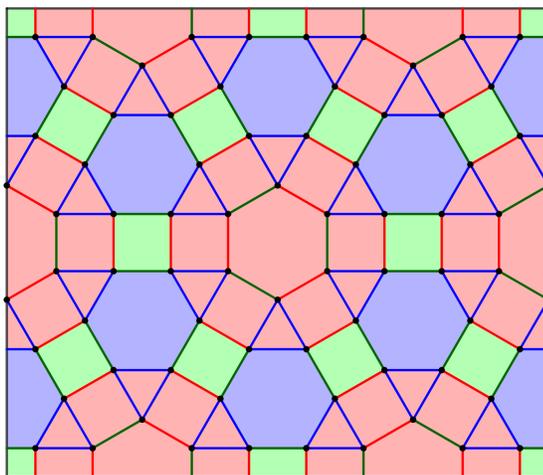


Figura 6.11: Hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente da tesselação  $\{12, 4, 6\}$ .

Como vimos na seção 5.2, cada  $f \in F_R$  fornece 3 geradores estabilizadores (2 independentes) e, assim como no Lema 6.4, teremos um estabilizador para cada face  $f \in F_G$ , o qual é dado por

$$W(f_{\sigma_1}) = \prod_{e' \in \partial(f) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(f) \cap \bar{E}_G} \bar{K}_{e'}. \quad (6.16)$$

Porém, nesse caso, mesmo com  $F = F_R$ , não existe outro estabilizador para  $f \in F_G$ . Mas vai existir um terceiro gerador estabilizador independente para cada face  $f \in F_R$ , o qual é proveniente de um hiperciclo, denotado por  $\bar{f}_\sigma$ , como na Figura 6.12-(a), onde  $\bar{f}$  é a “face” dada na Figura 6.12-(b). Veja que o estabilizador proveniente do hiperciclo  $\bar{f}_\sigma$  satisfaz o Teorema 5.17, pois pode ser escrito como

$$W(\bar{f}_\sigma) = \prod_{e' \in \partial(\bar{f}) \cap \bar{E}_B} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(\bar{f}) \cap \bar{E}_G} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(\bar{f}) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'} \prod_{\substack{e' \in \partial(f_i) \cap \bar{E}_G \\ f_i \in F_G; f_i \subset \bar{f}}} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(f) \cap \bar{E}_B} \bar{K}_{e'} \prod_{e' \in \partial(f) \cap \bar{E}_R} \bar{K}_{e'} \quad (6.17)$$

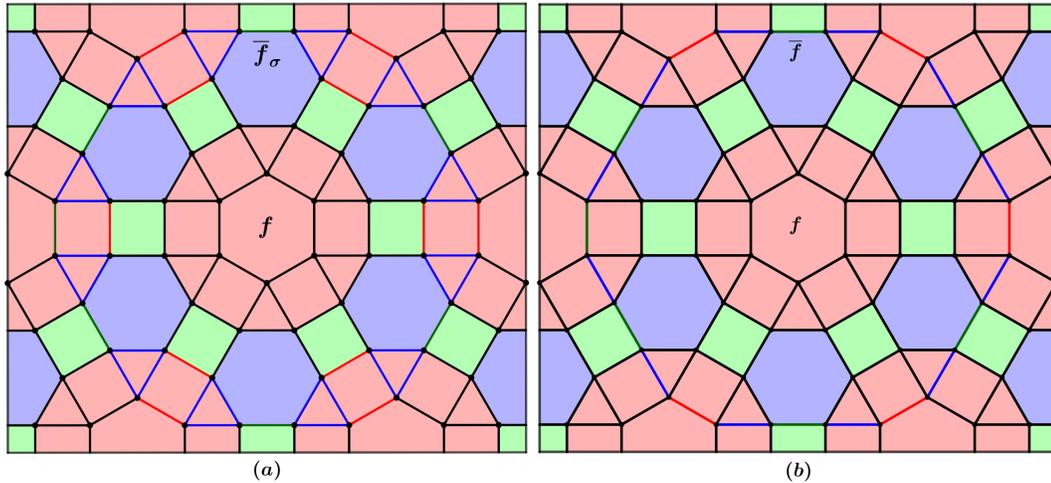


Figura 6.12: (a) Hiperciclo  $\bar{f}_\sigma$  com as arestas coloridas, o qual corresponde a face  $f \in F_R$ . (b) Arestas coloridas destacando a “face”  $\bar{f}$ .

Assim, os geradores estabilizadores serão dados como vimos na seção 5.2, ou seja, serão dados por  $W(f_{\sigma_1})$ ,  $W(f_{\sigma_2})$  e  $W(f_{\sigma_3})$ , onde  $W(f_{\sigma_3}) = W(f_{\sigma_1})W(f_{\sigma_2})$ . Também serão dados por (6.16) e (6.17). Logo, esse código de subsistema satisfaz a condição  $(C_2)$ .

Com isso, vamos determinar a quantidade de geradores estabilizadores independentes. Segue do que acabamos de ver que cada  $f \in F_R$  determina 3 geradores estabilizadores independentes e cada  $f \in F_G$  determina 1 único gerador estabilizador independente. Porém, ao juntarmos todos esses estabilizadores, nem todos serão independentes, pois temos a seguinte

relação de independência válida

$$\prod_{f \in F_R} W(\bar{f}_\sigma) = \prod_{f \in F_R} W(f_{\sigma_1}) \prod_{f \in F_G} W(f_{\sigma_1}). \quad (6.18)$$

Agora, considerando a tesselação reduzida vermelha, denotada por  $\Gamma_R$ , referente a tesselação  $\{2p_1, 4, 6\}$ , isto é, reduzimos as faces vermelhas a um ponto e ligamos esses pontos, de modo que, obtemos triângulos como na Figura 6.13. Se  $\Gamma_R$  for tripartida, ou seja, se o conjunto dos vértices admite uma partição em três conjuntos, tais que, toda aresta tenha seus pontos finais em diferentes conjuntos, então dividimos as faces de  $F_R$  em três conjuntos, de acordo com a tripartição, os quais denotamos por  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ . Defina  $F_G^{F_i}$  como sendo o conjunto das faces verdes que são adjacentes aos hiperciclos  $\bar{f}_\sigma$  com  $f \in F_i$  e  $i = 1, 2, 3$ . Logo, existem três relações de independência

$$\prod_{f \in F_1} W(\bar{f}_\sigma) \prod_{f \in F_G^{F_1}} W(f_{\sigma_1}) = \prod_{f \in F_2} W(f_{\sigma_2}) \prod_{f \in F_3} W(f_{\sigma_2}), \quad (6.19)$$

$$\prod_{f \in F_2} W(\bar{f}_\sigma) \prod_{f \in F_G^{F_2}} W(f_{\sigma_1}) = \prod_{f \in F_1} W(f_{\sigma_2}) \prod_{f \in F_3} W(f_{\sigma_2}), \quad (6.20)$$

$$\prod_{f \in F_3} W(\bar{f}_\sigma) \prod_{f \in F_G^{F_3}} W(f_{\sigma_1}) = \prod_{f \in F_1} W(f_{\sigma_2}) \prod_{f \in F_2} W(f_{\sigma_2}), \quad (6.21)$$

das quais somente duas são independentes. Juntando com (6.18), teremos três relações de independência e, desse modo, a quantidade de geradores estabilizadores independentes será

$$s = 3F_R + F_G - 1 - 2\delta_{\Gamma_R}, \quad (6.22)$$

onde  $\delta_{\Gamma_R} = 1$  se  $\Gamma_R$  for tripartida e 0, caso contrário.

Vamos agora determinar os parâmetros  $n$ ,  $k$ ,  $r$  e  $d$  do nosso código de subsistema.

Como temos somente um caso euclidiano, o qual é dado por  $\{12, 4, 6\}$ , a determinação dos parâmetros é feita em relação as tesselações mergulhadas em superfícies compactas orientáveis de gênero  $g \geq 2$ . Porém, vale a mesma construção para o caso  $\{12, 4, 6\}$ , com a diferença de que teremos que contar a quantidade de faces de maneira manual.

Como sabemos os valores de  $N_v$  e  $F_R$ , podemos determinar a quantidade  $n$  de qubits físicos, a qual é dada pela quantidade de vértices do hipergrafo  $\Gamma_h$ , ou seja,

$$n = N_v + p_1 F_R = \frac{36p_1(g-1)}{p_1-6} = N_e. \quad (6.23)$$

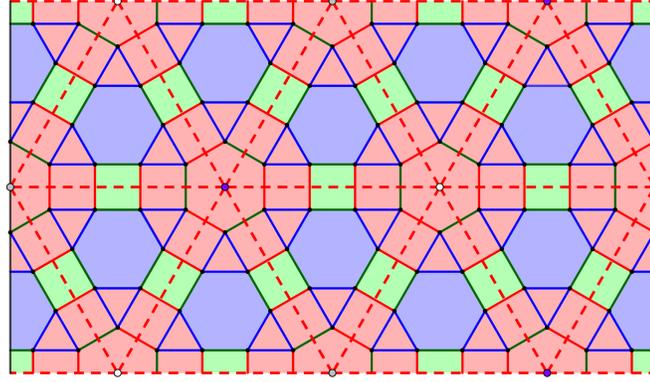


Figura 6.13: Arestas tracejadas vermelhas correspondem a tesselação reduzida  $\Gamma_R$  do hipergrafo  $\Gamma_h$ . Veja que  $\Gamma_R$  é tripartida.

Sabemos também que a quantidade de geradores estabilizadores independentes  $s$  é dado em (6.22) e que  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ . Mas, como vimos, para determinarmos a  $\dim \mathcal{G}$ , precisamos determinar a quantidade de geradores independentes de  $\mathcal{G}$ , ou seja, precisamos determinar a quantidade de operadores link independentes.

Temos que a quantidade de arestas de rank-2 e de rank-3 para o hipergrafo  $\Gamma_h$  são dadas por

$$E_2 = 4F_G + p_1F_R \quad \text{e} \quad E_3 = p_1F_R. \quad (6.24)$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{G} &= 4F_G + p_1F_R + 2p_1F_R - 1 - 2\delta_{\Gamma_R} \\ &= N_v + N_e - 1 - 2\delta_{\Gamma_R}, \end{aligned}$$

pois  $4F_G = N_v$  e  $3p_1F_R = N_e$ .

Como  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$  e  $s = 3F_R + F_G - 1 - 2\delta_{\Gamma_R}$ , fazendo as substituições adequadas determinamos que a quantidade  $r$  de qubits gauge é dada por

$$r = -\chi + 2N_v - \frac{N_f + N_e}{2}, \quad (6.25)$$

o que só faz sentido se  $r$  for um inteiro positivo.

Como já sabemos os valores de  $n$ ,  $r$  e  $s$  fica fácil determinarmos o valor de  $k$ , pois o mesmo é dado por  $k = n - r - s$ . Assim, fazendo as substituições adequadas temos que a

quantidade  $k$  de qubits lógicos é dada por

$$k = \chi - 3F_R + \frac{F}{2} + 1 + 2\delta_{\Gamma_R}, \quad (6.26)$$

o que também só faz sentido se  $k$  for um inteiro positivo.

Por fim, a distância  $d$  será a mesma que para a família construída anteriormente, ou seja, limitaremos superiormente a distância do código pelo menor número de triângulos em um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial, isto é, será o menor peso entre os operadores de  $C(\mathcal{G}) \setminus \mathbf{S}$ .

Os Lemas 6.8 e 6.9 também são válidos aqui e suas demonstrações são feitas de maneira semelhante. Disso, segue que esse código satisfaz as condições  $(C_1)$  e  $(C_3)$ . Já vimos que esse código satisfaz  $(C_2)$  e foi mostrado em [59] que o grafo  $\Gamma_h$  construído sobre esse tipo de tesselação satisfaz  $(H_1), \dots, (H_5)$ . Portanto, isso demonstra o seguinte teorema.

**Teorema 6.13.** *Considere uma tesselação trivalente e 3-colorível  $\{2p_1, 4, 6\}$  com  $p_1 > 4$  par. Aplicando a construção de  $\Gamma_h$  dada em [59] com  $F = F_R$  tal que as arestas de rank-3 são fronteira dos 6-gons, obtemos códigos de subsistema topológicos com parâmetros*

$$[[N_e, \chi - 3F_R + \frac{F}{2} + 1 + 2\delta_{\Gamma_R}, -\chi + 2N_v - \frac{N_f + N_e}{2}, d \leq l]], \quad (6.27)$$

onde  $l$  é a quantidade de triângulos em um hiperciclo homologicamente não-trivial.

**Exemplo 6.14.** *Considere o hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente da tesselação  $\{6, 12, 4\}$  ilustrado na Figura 6.11. Pelo Teorema 6.13, obtemos um código de subsistema topológico através de  $\Gamma_h$ .*

*Vamos determinar os parâmetros desse código.*

*Esse hipergrafo possui 72 vértices, ou seja, 72 qubits. Logo, segue que  $n = 72$ . Para determinarmos  $r$ , precisamos determinar  $s$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  e  $\dim \mathcal{G}$ . Lembrando que a quantidade de geradores estabilizadores independentes é dado por  $s = 3F_R + F_G - 1 - 2\delta_{\Gamma_R}$  e, nesse caso,  $F_R = 4$  e  $F_G = 12$ . Como a tesselação reduzida  $\Gamma_R$  não é tripartida, segue que  $\delta_{\Gamma_R} = 0$ , logo,  $s = 23$ . Já  $E_2$  e  $E_3$  são dados por  $E_2 = 4F_G + p_1F_R$  e  $E_3 = p_1F_R$ . Logo, nesse caso,  $E_2 = 72$  e  $E_3 = 24$ . Como  $\dim \mathcal{G} = E_2 + 2E_3 - 1$ , segue que  $\dim \mathcal{G} = 119$ . Mas  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ , assim, segue que  $119 = 2r + 23 \iff r = 48$ . Agora, como  $k = n - r - s$ , segue que  $k = 1$ .*

*Por fim, fazendo uma busca pelos hiperciclos homologicamente não-triviais, o que possui a menor quantidade de triângulos encontrado, possui  $l = 4$  triângulos. Logo,  $d \leq 4$ .*

*Portanto, obtemos um código de subsistema topológico com parâmetros  $[[72, 1, 48, 4]]$ .*

Para finalizar o estudo sobre essa família de códigos, apresentamos na Tabela 6.3 os parâmetros obtidos do hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente das tesselações  $\{2p_1, 4, 6\}$  sobre uma superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$  com gênero  $g = 2, 3, 4$  e  $5$ . Como não conseguimos determinar se o grafo será ou não tripartido, determinaremos os dois valores possíveis para os qubits codificados, os quais chamamos de  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente. Também apresentamos em cada caso as tesselações  $\{2p_1, 4, 6\}$  utilizadas para construir  $\Gamma_h$ , juntamente com a quantidade  $s_1$  e  $s_2$  de geradores estabilizadores independentes, caso o grafo seja tripartido e caso não seja, respectivamente.

### **Família de Códigos de Subsistema Topológicos Proveniente da Tesselação $\{2p_1, 4, 6\}$ com $p_1 > 6$ ímpar**

Utilizando  $F = F_R$ , construa o hipergrafo  $\Gamma_h$  como vimos na seção 6.1. O Lema 6.4 nos diz que cada  $f \in F_R$  fornece 3 geradores estabilizadores (2 independentes) e cada  $f \in F_G$  fornece 1 gerador estabilizador independente. Queremos que os geradores estabilizadores  $W(\bar{f}_\sigma)$  com  $f \in F_R$ , vistos para o caso  $p_1 > 4$  par, continuem sendo estabilizadores. Mas quando acrescentamos os triângulos dentro de  $f'$ , estamos criando um vértice a mais em alguns dos hiperciclos  $\bar{f}_\sigma$ , assim como ocorria para os hiperciclos  $\bar{f}_{\sigma_2}$  com  $f \in F_G$  da primeira família de códigos que construímos. Isso será um problema, pois, dessa forma, o estabilizador proveniente do hiperciclo  $\bar{f}_\sigma$  não irá satisfazer o Teorema 5.17, logo, não satisfaz  $(C_2)$  e, conseqüentemente, não poderemos obter códigos de subsistema topológicos.

Novamente para resolvermos isso, impomos a restrição de que esses triângulos sejam construídos em  $f'$ , de modo que não aumente novos vértices ou aumente uma quantidade par de vértices em cada hiperciclo de  $\bar{f}_\sigma$ .

Se não aumentar nenhum vértice no hiperciclo  $\bar{f}_\sigma$ , temos que o operador loop será dado por (6.17). Caso aumente uma quantidade par de vértices não conseguiremos escrever o operador loop como na equação (6.17), separando pelas cores das arestas, mas isso não impedirá que o operador loop satisfaça o Teorema 5.17.

$g$	Tesselação	$s_1$	$[[n, k_1, r, d]]$	$s_2$	$[[n, k_2, r, d]]$
2	$\{16, 4, 6\}$	39	$[[144, 6, 99, d]]$	41	$[[144, 4, 99, d]]$
2	$\{20, 4, 6\}$	21	$[[90, 6, 63, d]]$	23	$[[90, 4, 63, d]]$
2	$\{24, 4, 6\}$	15	$[[72, 6, 51, d]]$	17	$[[72, 4, 51, d]]$
2	$\{36, 4, 6\}$	9	$[[54, 6, 39, d]]$	11	$[[54, 4, 39, d]]$
3	$\{16, 4, 6\}$	81	$[[288, 9, 198, d]]$	83	$[[288, 7, 198, d]]$
3	$\{20, 4, 6\}$	45	$[[180, 9, 126, d]]$	47	$[[180, 7, 126, d]]$
3	$\{24, 4, 6\}$	33	$[[144, 9, 102, d]]$	35	$[[144, 7, 102, d]]$
3	$\{28, 4, 6\}$	27	$[[126, 9, 90, d]]$	29	$[[126, 7, 90, d]]$
3	$\{36, 4, 6\}$	21	$[[108, 9, 78, d]]$	23	$[[108, 7, 78, d]]$
3	$\{60, 4, 6\}$	15	$[[90, 9, 66, d]]$	17	$[[90, 7, 66, d]]$
4	$\{16, 4, 6\}$	123	$[[432, 12, 297, d]]$	125	$[[432, 10, 297, d]]$
4	$\{20, 4, 6\}$	69	$[[270, 12, 189, d]]$	71	$[[270, 10, 189, d]]$
4	$\{24, 4, 6\}$	51	$[[216, 12, 153, d]]$	53	$[[216, 10, 153, d]]$
4	$\{36, 4, 6\}$	33	$[[162, 12, 117, d]]$	35	$[[162, 10, 117, d]]$
4	$\{48, 4, 6\}$	27	$[[144, 12, 105, d]]$	29	$[[144, 10, 105, d]]$
4	$\{84, 4, 6\}$	21	$[[126, 12, 93, d]]$	23	$[[126, 10, 93, d]]$
5	$\{16, 4, 6\}$	165	$[[576, 15, 396, d]]$	167	$[[576, 13, 396, d]]$
5	$\{20, 4, 6\}$	93	$[[360, 15, 252, d]]$	95	$[[360, 13, 252, d]]$
5	$\{24, 4, 6\}$	69	$[[288, 15, 204, d]]$	71	$[[288, 13, 204, d]]$
5	$\{28, 4, 6\}$	57	$[[252, 15, 180, d]]$	59	$[[252, 13, 180, d]]$
5	$\{36, 4, 6\}$	45	$[[216, 15, 156, d]]$	47	$[[216, 13, 156, d]]$
5	$\{44, 4, 6\}$	39	$[[198, 15, 144, d]]$	41	$[[198, 13, 144, d]]$
5	$\{60, 4, 6\}$	33	$[[180, 15, 132, d]]$	35	$[[180, 13, 132, d]]$

Tabela 6.3: Tesselações e parâmetros dos códigos de subsistema topológicos provenientes de  $\{2p_1, 4, 6\}$  com  $p_1 > 4$  par,  $g = 2, 3, 4$  e  $5$ , onde  $s_1$  e  $k_1$  são os valores de quando  $\Gamma_R$  é tripartida e  $s_2$  e  $k_2$  são os valores quando  $\Gamma_R$  não for tripartida.

O que novamente nos garante que podemos fazer essa restrição quanto a maneira que fixamos os triângulos dentro de  $f'$ , de modo que os hiperciclos de  $\bar{f}_\sigma$  forneçam estabiliza-

dores satisfazendo o Teorema 5.17, é o fato de termos um quantidade finita de  $2p_1$ -gons. Desse modo, segue que cada  $f \in F_R$  irá nos fornecer quatro geradores estabilizadores (3 independentes) e cada  $f \in F_G$  irá fornecer um gerador estabilizador independente.

Assim, os geradores estabilizadores desse código serão dados pelo Lema 6.4 e pelos operadores loop  $W(\bar{f}_\sigma)$ . Logo, esse código de subsistema satisfaz a condição  $(C_2)$ .

Com isso, vamos determinar a quantidade de geradores estabilizadores independentes. Para  $p_1 > 6$  ímpar, temos que  $\Gamma_R$  nunca será tripartida. Assim, a única relação de independência que será válida é (6.18). Logo, a quantidade de geradores estabilizadores independentes será

$$s = 3F_R + F_G - 1. \quad (6.28)$$

Vamos agora determinar os parâmetros  $n$ ,  $k$ ,  $r$  e  $d$  do nosso código de subsistema.

Observe que não existem tesselações euclidianas para esse caso. Logo, a determinação dos parâmetros será feita em relação as tesselações mergulhadas em superfícies compactas orientáveis de gênero  $g \geq 2$ .

Temos que a quantidade  $n$  de qubits físicos, a qual é dada pela quantidade de vértices do hipergrafo  $\Gamma_h$ , será

$$n = N_v + p_1 F_R + 3F_R = N_e + 3F_R. \quad (6.29)$$

Já a quantidade  $r$  de qubits gauge é determinado de maneira análoga aos demais casos. Aqui, as arestas de rank-2 e de rank-3 são dados por

$$E_2 = 4F_G + p_1 F_R + 3F_R \quad \text{e} \quad E_3 = p_1 F_R + F_R. \quad (6.30)$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{G} &= 4F_G + p_1 F_R + 3F_R + 2p_1 F_R + 2F_R - 1 \\ &= N_v + N_e + 5F_R - 1. \end{aligned}$$

Como  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$  e  $s = 3F_R + F_G - 1$ , fazendo as substituições adequadas temos que

$$r = -\chi + 2N_v - \frac{N_f + N_e}{2} + \frac{5F_R}{2}, \quad (6.31)$$

o que só faz sentido se  $r$  for um inteiro positivo.

Agora, para o parâmetro  $k$ , sabemos que  $k = n - r - s$ . Logo, fazendo as substituições adequadas temos que

$$k = \chi + \frac{N_f}{2} - \frac{5F_R}{2} + 1, \quad (6.32)$$

o que também só faz sentido se  $k$  for um inteiro positivo.

Por fim, a distância  $d$  segue como nos demais casos estudados, ou seja, será limitada superiormente pelo menor número de triângulos em um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial, isto é, será o menor peso entre os operadores de  $C(\mathcal{G}) \setminus \mathbf{S}$ .

Os Lemas 6.8 e 6.9 também são válidos aqui e suas demonstrações são feitas de maneira semelhante. Disso, segue que esse código satisfaz as condições  $(C_1)$  e  $(C_3)$ . Já vimos que esse código satisfaz  $(C_2)$  e foi mostrado no Teorema 6.2 que grafo  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_1), \dots, (H_5)$ . Portanto, isso demonstra o seguinte teorema.

**Teorema 6.15.** *Considere uma tesselação trivalente e 3-colorível  $\{2p_1, 4, 6\}$  com  $p_1 > 6$  ímpar. Aplicando a construção de  $\Gamma_h$  com  $F = F_R$  vista na seção 6.1, obtemos códigos de subsistema topológicos com parâmetros*

$$\left[ \left[ N_e + 3F_R, \chi + \frac{N_f}{2} - \frac{5F_R}{2} + 1, -\chi + 2N_v - \frac{N_f + N_e}{2} + \frac{5F_R}{2}, d \leq l \right] \right], \quad (6.33)$$

onde  $l$  é a quantidade de triângulos em um hiperciclo homologicamente não-trivial.

Para finalizar o estudo sobre essa família de códigos, apresentamos na Tabela 6.4 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $r$ , obtidos do hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente das tesselações  $\{2p_1, 4, 6\}$  sobre uma superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$  com gênero  $g = 2, 3, 4$  e  $5$ . Também apresentamos em cada caso a quantidade  $s$  de geradores estabilizadores independentes juntamente com as tesselações  $\{2p_1, 4, 6\}$  utilizada para construir  $\Gamma_h$ .

## Códigos de Subsistema Topológicos Provenientes da Construção do hipergrafo $\Gamma_h$ Sobre a Tesselação $\{p, 4, 3, 4\}$

Faremos a construção de códigos de subsistemas topológicos sobre a tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  para  $p \geq 7$  ímpar, a qual é obtida a partir da tesselação  $\{p, 3\}$  da seguinte forma: Dada uma tesselação  $\{p, 3\}$  tesselando uma superfície compacta  $\mathbb{M}$  de gênero  $g \geq 2$ . Tome o dual

$g$	Tesselação	$s$	$[[n, k, r, d]]$
2	$\{14, 4, 6\}$	77	$[[288, 10, 201, d]]$
2	$\{18, 4, 6\}$	29	$[[120, 6, 85, d]]$
3	$\{14, 4, 6\}$	155	$[[576, 19, 402, d]]$
3	$\{18, 4, 6\}$	59	$[[240, 11, 170, d]]$
4	$\{14, 4, 6\}$	233	$[[864, 28, 603, d]]$
4	$\{18, 4, 6\}$	89	$[[360, 16, 255, d]]$
4	$\{30, 4, 6\}$	41	$[[192, 12, 139, d]]$
5	$\{14, 4, 6\}$	311	$[[1152, 37, 804, d]]$
5	$\{18, 4, 6\}$	119	$[[480, 21, 340, d]]$

Tabela 6.4: Tesselações e parâmetros dos códigos de subsistema topológicos provenientes de  $\{2p_1, 4, 6\}$  com  $p_1 > 6$  ímpar para  $g = 2, 3, 4$  e  $5$ .

$\{3, p\}$  e mantenha as duas tesselações  $\{p, 3\}$  e  $\{3, p\}$  sobrepostas. Desse modo, formamos quadriláteros com ângulos  $\frac{2\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{2}$ . Como cada quadrilátero possui incentro, tomamos o incentro de cada um desses quadriláteros. Ligando esses incentros, obtemos a tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$ , como pode ser visto na Figura 5.3-(a).

Como vimos na construção dos códigos de subsistema topológicos realizado por Bombín (seção 5.2), ele parte de uma tesselação trivalente e 3-colorível  $\{2p_1, 2p_2, 2p_3\}$ . Quando essa tesselação é regular, isto é, quando é da forma  $\{p, 3\}$ , após realizar as construções dos triângulos e quadrados obtém-se a tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  com  $p$  par, ou seja, é o mesmo que realizar o processo descrito acima, partindo da tesselação  $\{p, 3\}$  com  $p$  par.

Se  $p$  for ímpar, a tesselação  $\{p, 3\}$  não é 3-colorível, logo, a construção dada em [13] não se aplica nesse caso. Por isso, iremos trabalhar com o caso  $p$  ímpar.

O processo de construção dessa família de códigos de subsistemas topológicos é bem simples e semelhante ao que fizemos na seção 6.1. Primeiramente, tomamos uma tesselação  $\{p, 3\}$  com  $p$  ímpar e realizamos o processo descrito anteriormente, obtendo assim a tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$ . Como  $p$  é ímpar, considerando  $\{p, 4, 3, 4\}$  sendo o hipergrafo resultante, ele não satisfaz a restrição  $(H_5)$ , logo, não satisfaz a regra de comutação e, assim, não admite a

construção de códigos de subsistema. Para corrigir isso, colocamos um triângulo dentro de cada  $p$ -gon. Esses triângulos não podem ser colocados de modo aleatório, mais a frente explicamos como colocá-los. Por fim, colorimos os triângulos de azuis e alternamos as demais arestas entre vermelho e verde.

Denotamos o hipergrafo resultante por  $\Gamma_h$  e usamos ele para construir o código de subsistema topológico.

Para comprovar que a nossa construção de  $\Gamma_h$  pode ser usado para a construção de códigos de subsistema utilizando a construção de [67], vamos provar que  $\Gamma_h$  satisfaz as restrições  $(H_1), \dots, (H_5)$ .

**Teorema 6.16.** *O hipergrafo  $\Gamma_h$  obtido a partir da tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  com  $p \geq 7$  ímpar, satisfaz as restrições  $(H_1), \dots, (H_5)$  e, portanto, da origem a códigos de subsistema cujo grupo formado pelos operadores loop é dado por*

$$\mathcal{G}_{loop} = \{W(M); M \subseteq E \text{ é um hiperciclo fechado}\}, \quad (6.34)$$

onde  $E$  é o conjunto formado pelas arestas de rank-2 e de rank-3, e o grupo gauge  $\mathcal{G}$  é dado por  $\mathcal{G} = C(\mathcal{G}_{loop})$ .

*Demonstração.* De fato, considerando os triângulos da tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  como sendo uma aresta de rank-3, teremos somente arestas de rank-2 e de rank-3. Do mesmo modo, ao criarmos o triângulo dentro do  $p$ -gon a partir de pontos tomados em três de suas arestas, estamos produzindo uma aresta de rank-3 e três de rank-2. Logo,  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_1)$ .

Ao considerarmos os triângulos como sendo uma aresta de rank-3, segue que todo vértice de  $\{p, 4, 3, 4\}$  será trivalente. Da mesma forma, os três novos vértices serão trivalentes, pois eles dividem uma aresta em duas e possuem o novo triângulo como sendo a terceira aresta. Assim,  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_2)$ .

Segue da própria construção da tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  que a restrição  $(H_3)$  é satisfeita. Mesmo a introdução do triângulo dentro de cada  $p$ -gon não altera essa condição.

A restrição  $(H_4)$  também é satisfeita, pois as arestas de rank-3 de  $\{p, 4, 3, 4\}$  não se intersectam e quando criamos o triângulo dentro do  $p$ -gon, tomamos os pontos nas arestas

de modo que não exista interseção com os outros triângulos. Logo, as arestas de rank-3 de  $\Gamma_h$  são duas a duas disjuntas.

Por fim, com a introdução do triângulo dentro de cada  $p$ -gon temos que a restrição  $(H_5)$  é satisfeita. Basta colorirmos todos os triângulos de azul e alternarmos cada  $p + 3$  arestas entre vermelho e verde.

Portanto,  $\Gamma_h$  da origem a códigos de subsistema como construído em [67].

■

Os operadores  $\overline{K}_{e'}$  serão dados do mesmo modo que nos casos anteriores, isto é, ao transformarmos  $\Gamma_h$  no grafo ordinário  $\overline{\Gamma}_h$  teremos para  $e' = (u, v) \in \overline{E}$ , que  $\overline{K}_{e'} = Z_u Z_v$  se  $e' \in \overline{E}_B$ ,  $\overline{K}_{e'} = X_u X_v$  se  $e' \in \overline{E}_R$  e  $\overline{K}_{e'} = Y_u Y_v$  se  $e' \in \overline{E}_G$ , onde  $\overline{E}_B$ ,  $\overline{E}_R$  e  $\overline{E}_G$  são os conjuntos com todas as arestas azuis, vermelhas e verdes, respectivamente, do grafo  $\overline{\Gamma}_h$ .

No caso da tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  com  $p$  par, existem três estabilizadores para cada  $p$ -gon, onde somente dois são independentes. Um formado pela fronteira do  $p$ -gon e outro pelos triângulos envolvendo o  $p$ -gon e as arestas necessárias para fechar o hiperciclo. Como no nosso caso  $p$  é ímpar, ao introduzirmos o triângulo dentro do  $p$ -gon criamos mais três arestas, fazendo com que o  $p$ -gon, agora com mais três arestas seja um estabilizador satisfazendo o Teorema 5.17. Porém, ao introduzirmos o triângulo isso fará com que aumente um vértice nos hiperciclos envolvendo os triângulos dos  $p$ -gons “adjacentes” a aquele onde foi introduzido o triângulo. Para que esses hiperciclos forneçam estabilizadores fazemos a exigência de que esses triângulos sejam fixados dentro dos  $p$ -gons de modo que aumente uma quantidade par de vértices para cada hiperciclo  $f_{\sigma_2}$  ou não aumente nenhum novo vértice. Desse modo, obtemos três geradores estabilizadores (dois independentes) por  $p$ -gon.

**Lema 6.17.** *Cada  $p$ -gon da nossa construção sobre a tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  fornece três hiperciclos (dois independentes) e, conseqüentemente, três geradores estabilizadores (dois independentes).*

*Demonstração.* A demonstração desse resultado segue de maneira semelhante ao visto na seção 6.1. O primeiro hiperciclo  $f_{\sigma_1}$  é dado pelas  $p + 3$  arestas de rank-2 criadas no  $p$ -gon e o operador loop  $W(f_{\sigma_1})$  é dado por (6.2). Já o segundo hiperciclo  $f_{\sigma_2}$  é dado pelas arestas

de rank-3 ao redor do  $p$ -gon, juntamente com a aresta de rank-3 criada dentro do  $p$ -gon e as arestas necessárias para fechar o hiperciclo. Caso não tenha aumentado nenhuma nova aresta nesse hiperciclo, o operador loop  $W(f_{\sigma_2})$  será dado como em (6.3). Caso tenha aumentado uma quantidade par de novas arestas nesse hiperciclo, não conseguiremos escrever o operador loop como em (6.3), separando pelas cores, mas seguirá como vimos no caso  $\{2p_1, 2p_2, 4\}$ , que  $W(f_{\sigma_2})$  será um estabilizador. O terceiro e último hiperciclo é dado pela soma módulo 2 de  $f_{\sigma_1}$  e  $f_{\sigma_2}$ . Já o estabilizador será dado pelo produto de  $W(f_{\sigma_1})$  por  $W(f_{\sigma_2})$ . ■

Segue do que acabamos de ver, que esses operadores loop satisfazem o Teorema 5.17. Portanto, satisfazem a condição  $(C_2)$  da definição de código de subsistema topológico.

Assim, teremos três geradores estabilizadores, onde dois são independentes para cada  $p$ -gon. No caso de  $p$  par, tínhamos duas relações de independência, as quais são dadas em (5.9). Já para o caso de  $p$  ímpar, como não estamos partindo de uma tesselação 3-colorível e pela introdução do triângulo dentro de cada  $p$ -gon, não existirá nenhuma relação de independência. Logo, a quantidade  $s$  de geradores estabilizadores independentes será o dobro da quantidade de  $p$ -gons.

Para determinarmos o valor de  $s$  e dos demais parâmetros do código, precisamos da quantidade de faces, vértices e arestas da tesselação  $\{p, 3\}$ , as quais são dadas em (3.1), ou seja,

$$n_f = \frac{12(g-1)}{p-6}, \quad n_e = \frac{6p(g-1)}{p-6} \quad \text{e} \quad n_v = \frac{4p(g-1)}{p-6}.$$

Considere  $F_{\mathbb{P}}$ ,  $F_{\mathbb{T}}$  e  $F_{\mathbb{Q}}$  a quantidade de  $p$ -gons, triângulos e quadrados de  $\{p, 4, 3, 4\}$ , respectivamente. Segue do processo de construção de  $\{p, 4, 3, 4\}$  que a quantidade de  $p$ -gons será igual a quantidade de faces da tesselação  $\{p, 3\}$ , a quantidade de triângulos será igual a quantidade de vértices da tesselação  $\{p, 3\}$  e a quantidade de quadrados será igual a quantidade de arestas da tesselação  $\{p, 3\}$ , ou seja,

$$F_{\mathbb{P}} = \frac{12(g-1)}{p-6}, \quad F_{\mathbb{T}} = \frac{4p(g-1)}{p-6} \quad \text{e} \quad F_{\mathbb{Q}} = \frac{6p(g-1)}{p-6}.$$

Logo, temos que

$$s = 2F_{\mathbb{P}} = \frac{24(g-1)}{p-6}. \quad (6.35)$$

Introduzindo o triângulo dentro de cada  $p$ -gon, obtemos mais 3 vértices para cada  $p$ -gon. Assim, a quantidade  $n$  de qubits físicos será

$$n = (p + 3)F_{\mathbb{P}}. \quad (6.36)$$

Para determinarmos a quantidade  $r$  de qubits gauge, vamos proceder como nos casos anteriores. Para isso, precisamos das quantidades de arestas de rank-2 e rank-3 de  $\Gamma_h$ , as quais são dadas por  $E_2 = (p+3)F_{\mathbb{P}}$  e  $E_3 = F_{\mathbb{T}} + F_{\mathbb{P}}$ . Logo,  $\dim \mathcal{G} = E_2 + 2E_3 = (p+3)F_{\mathbb{P}} + 2F_{\mathbb{T}} + 2F_{\mathbb{P}}$ . Como  $s = 2F_{\mathbb{P}}$  e  $\dim \mathcal{G} = 2r + s$ , segue que

$$\begin{aligned} 2r + 2F_{\mathbb{P}} &= (p + 3)F_{\mathbb{P}} + 2F_{\mathbb{T}} + 2F_{\mathbb{P}} \iff \\ 2r &= (p + 3)F_{\mathbb{P}} + 2F_{\mathbb{T}} \\ &= 5F_{\mathbb{T}} + 3F_{\mathbb{P}}, \end{aligned}$$

pois  $pF_{\mathbb{P}} = 3F_{\mathbb{T}}$ . Portanto,

$$r = \frac{5F_{\mathbb{T}} + 3F_{\mathbb{P}}}{2}, \quad (6.37)$$

o que só faz sentido se  $r$  for um inteiro positivo.

Como já sabemos os valores de  $n$ ,  $r$  e  $s$  fica fácil determinarmos o valor de  $k$ , pois o mesmo é dado por  $k = n - r - s$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} k &= (p + 3)F_{\mathbb{P}} - \frac{5F_{\mathbb{T}} + 3F_{\mathbb{P}}}{2} - 2F_{\mathbb{P}} \\ &= \frac{F_{\mathbb{T}} - F_{\mathbb{P}}}{2}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

o que também só faz sentido se  $k$  for um inteiro positivo.

Por fim, a distância  $d$  segue como nos demais casos estudados, ou seja, será limitada superiormente pelo menor número de triângulos em um hiperciclo fechado homologicamente não-trivial, isto é, será o menor peso entre os operadores de  $C(\mathcal{G}) \setminus \mathbf{S}$ .

Os Lemas 6.8 e 6.9 também são válidos aqui e suas demonstrações são feitas de maneira semelhante. Disso, segue que esse código satisfaz as condições  $(C_1)$  e  $(C_3)$ . Já vimos que esse código satisfaz  $(C_2)$  e foi mostrado no Teorema 6.16 que grafo  $\Gamma_h$  satisfaz  $(H_1), \dots, (H_5)$ . Portanto, isso demonstra o seguinte teorema.

**Teorema 6.18.** *Considere uma tesselação  $\{p, 3\}$  com  $p$  ímpar, mergulhada em uma superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$  de gênero  $g \geq 2$ . Fazendo o processo para obter a tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$  e realizando a construção descrita anteriormente, obtemos um código de subsistema topológico com parâmetros*

$$[[ (p+3)F_{\mathbb{P}}, \frac{F_{\mathbb{T}} - F_{\mathbb{P}}}{2}, \frac{5F_{\mathbb{T}} + 3F_{\mathbb{P}}}{2}, d \leq l ]], \quad (6.39)$$

onde  $F_{\mathbb{P}}$  e  $F_{\mathbb{T}}$  são as quantidades de  $p$ -gons e triângulos da tesselação  $\{p, 4, 3, 4\}$ , respectivamente, e  $l$  é a quantidade de triângulos em um hiperciclo homologicamente não-trivial.

Para finalizar o estudo sobre essa família de códigos, apresentamos na Tabela 6.5 os parâmetros  $n$ ,  $k$  e  $r$ , obtidos do hipergrafo  $\Gamma_h$  proveniente das tesselações  $\{p, 4, 3, 4\}$  sobre uma superfície compacta orientável  $\mathbb{M}$  com gênero  $g = 2$  até  $g = 7$ . Também apresentamos em cada caso a quantidade  $s$  de geradores estabilizadores independentes juntamente com as tesselações  $\{p, 4, 3, 4\}$  utilizada para construir  $\Gamma_h$ .

$g$	Tesselação	$s$	$[[n, k, r, d]]$
2	$\{7, 4, 3, 4\}$	24	$[[120, 8, 88, d]]$
2	$\{9, 4, 3, 4\}$	8	$[[48, 4, 36, d]]$
3	$\{7, 4, 3, 4\}$	48	$[[240, 16, 176, d]]$
3	$\{9, 4, 3, 4\}$	16	$[[96, 8, 72, d]]$
4	$\{7, 4, 3, 4\}$	72	$[[360, 24, 264, d]]$
4	$\{9, 4, 3, 4\}$	24	$[[144, 12, 108, d]]$
4	$\{15, 4, 3, 4\}$	8	$[[72, 8, 56, d]]$
5	$\{7, 4, 3, 4\}$	96	$[[480, 32, 352, d]]$

$g$	Tesselação	$s$	$[[n, k, r, d]]$
5	$\{9, 4, 3, 4\}$	32	$[[192, 16, 144, d]]$
6	$\{7, 4, 3, 4\}$	120	$[[600, 40, 440, d]]$
6	$\{9, 4, 3, 4\}$	40	$[[240, 20, 180, d]]$
6	$\{11, 4, 3, 4\}$	24	$[[168, 16, 128, d]]$
6	$\{21, 4, 3, 4\}$	8	$[[96, 12, 76, d]]$
7	$\{7, 4, 3, 4\}$	144	$[[720, 48, 528, d]]$
7	$\{9, 4, 3, 4\}$	48	$[[288, 24, 216, d]]$
7	$\{15, 4, 3, 4\}$	16	$[[144, 16, 112, d]]$

Tabela 6.5: Tesselações e parâmetros dos códigos de subsistema topológicos provenientes de  $\{p, 4, 3, 4\}$  com  $p \geq 7$  ímpar para  $g = 2$  até  $g = 7$ .

---

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Realizar este trabalho foi bastante desafiador, pois o mesmo envolve várias áreas do conhecimento, como mecânica quântica, computação e, é claro, a principal delas, a matemática.

Felizmente, obtivemos êxito em boa parte dos problemas que foram propostos ao nosso estudo, o que tornou a nossa pesquisa bastante gratificante. Os resultados obtidos foram muito importantes, pois fornecemos várias famílias novas de códigos quânticos, tanto códigos de superfície e coloridos em superfícies compactas não-orientáveis, quanto códigos de subsistema topológicos. Conseguimos também obter, um limitante superior para a distância dos códigos coloridos, para tesselações regulares e semirregulares em superfícies compactas orientáveis e não-orientáveis. Assim como, uma condição suficiente para quando a distância dos códigos coloridos será exatamente  $d = 2$ . Esse fato de obter um valor exato para a distância do código colorido merece um grande destaque, pois é muito difícil de garantir algo nesse sentido.

Embora todos os resultados e códigos obtidos façam parte dos códigos quânticos, mais precisamente dos códigos estabilizadores, a maneira de construir e trabalhar em cada caso é distinta.

Apesar de tudo o que conseguimos fazer, existem ainda muitas questões a serem trabalhadas futuramente, como por exemplo: buscar condições para que a distância dos códigos coloridos seja exatamente  $d = 4$ ; realizar comparações entre os códigos em superfícies orientáveis e não-orientáveis afim de obtermos algum família em destaque; fazer a construção dos códigos de subsistema em superfícies não-orientáveis; abordar a correção de erro e a decodificação nos códigos construídos por nós; entre outros.

---

---

# REFERÊNCIAS

---

- [1] ALBUQUERQUE, Clarice D. **Análise e construção de códigos quânticos topológicos sobre variedades bidimensionais**. Orientador: Reginaldo Palazzo Júnior e Eduardo Brandani da Silva. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação., Campinas, SP, 2009.
- [2] ALBUQUERQUE, Clarice. D.; PALAZZO JR, R.; SILVA, E. B. **Topological quantum codes on compact surfaces with genus  $g \geq 2$** . Journal of Mathematical Physics, v. 50, n. 2, p. 023513, 2009.
- [3] ALY, Salah A.; KLAPPENECKER, Andreas. **Subsystem code constructions**. In: 2008 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE, 2008. p. 369-373.
- [4] ANDERSON, James W.. **Hyperbolic Geometry**. 2th. ed., Springer Undergraduate Mathematics Series, London: Springer-Verlag, 2005. 276 p.
- [5] BACON, Dave. **Operator quantum error-correcting subsystems for self-correcting quantum memories**. Physical Review A, v. 73, n. 1, p. 012340, 2006.
- [6] BACON, Dave. **Stabilizer quantum error correcting codes**. Lecture Notes for course CSE 599d (Quantum Computing), University of Washington. 2006. Disponível em <<https://courses.cs.washington.edu/courses/cse599d/06wi/lecturenotes18.pdf>>.
- [7] BEARDON, Alan F.. **The Geometry of Discrete Groups**. New York: Springer-verlag, 1983. 337 p.

- 
- [8] BENIOFF P. A.. **Quantum mechanical hamiltonian models of discrete processes that erase their own histories: Application to turing machines.** International Journal of Theoretical Physics, vol. 21, n. 3, p. 177-201, 1982.
- [9] BHATTACHARYA, P.B.; JAIN, S.K.; NAGPAUL, S.R.. **Basic Abstract Algebra.** 2th. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 1995. 487 p.
- [10] BHOWMIK, D.; MAITY, D.; SILVA, E. B.. **Surface Codes and Color Codes Associated with Non-Orientable Surfaces.** Quantum Information e Computation, v. 21, n. 13-14, p. 1135-1153, 2021.
- [11] BOLLOBÁS, Béla. **Modern graph theory.** Springer Science e Business Media, 1998. 394 p.
- [12] BOMBÍN, Hector. **Topological codes.** In: LIDAR, Daniel A; BRUN, Todd A. Quantum Error Correction. 1°. ed. New York: Cambridge University Press, 2013. cap. 19, p. 455-481. ISBN 9780521897877.
- [13] BOMBÍN, Héctor. **Topological subsystem codes.** Physical Review A, v. 81, n. 3, p. 032301, 2010.
- [14] BOMBÍN, Hector; MARTIN-DELGADO, M. A.. **Computacion cuántica topológica y sistemas fuertemente correlacionados.** Revista Española de Física, v. 21, n. 2, p.31-45, 2007.
- [15] BOMBÍN, H.; MARTIN-DELGADO, M. A. **Exact topological quantum order in  $D = 3$  and beyond: Branyons and brane-net condensates.** Physical Review B, v. 75, n. 7, p. 075103, 2007.
- [16] BOMBÍN, Hector; MARTIN-DELGADO, M. A.. **Topological Quantum Distillation.** Physical Review Letters, v. 97, n. 18, p.180501, 2006.
- [17] BRAVYI, Sergey. **Subsystem codes with spatially local generators.** Physical Review A, v. 83, n. 1, p. 012320, 2011.

- [18] BRAVYI, Sergey; HASTINGS, Matthew B.; MICHALAKIS, Spyridon. **Topological quantum order: stability under local perturbations**. Journal of mathematical physics, v. 51, n. 9, p. 093512, 2010.
- [19] BREDON, Glen E. **Topology and Geometry**. New York: Springer-verlag, 1993. 557 p.
- [20] BREUCKMANN, Nikolas P. **Quantum Subsystem Codes**. Orientadora: Dr. B. M. Terhal. 2011. 40 f. Bachelor thesis (Física) - IQI - Institute for Quantum Information, 2011.
- [21] BRIZOLA, Evandro M.. **Códigos Quânticos Coloridos em Superfícies Compactas com Gênero  $g \geq 2$** . Orientador: Eduardo Brandani da Silva. 2019. 83 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2019.
- [22] CALDERBANK, Robert A.; SHOR, Peter W.. **Good quantum error-correcting codes exist**. Physical Review A, v. 54, n. 2, p.1098, 1996.
- [23] CLEVE, Richard. **Quantum stabilizer codes and classical linear codes**. Physical Review A, Washington, v. 55, n. 6, p.4054, 1997.
- [24] COPATTI, Douglas F.. **Códigos Quânticos Topológicos Sobre Tesselações Hiperbólicas Semirregulares**. Orientador: Eduardo Brandani da Silva. 2023. Tese (Doutorado - Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR, 2022.
- [25] D'AZEVEDO, Antonio B.. **Mapification of n-dimensional abstract polytopes and hypertopes**. ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA, v. 18, n. 1, p. 73-86, 2020.
- [26] DENNIS, Eric et al. Topological quantum memory. **Journal Of Mathematical Physics**, p. 4452-4505. 2002.
- [27] DEUTSCH, David. **Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer**. Proc. R. Soc. Lond. A, London, v. 400, n. 1818, p.97-117, 1985.

- [28] DEVITT, Simon J.; MUNRO, William J.; NEMOTO, Kae. **Quantum error correction for beginners**. Reports on Progress in Physics, v. 76, n. 7, p. 076001, 2013.
- [29] DIESTEL, Reinhard. **Graph Theory**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2017. 428 p.
- [30] DJORDJEVIC, Ivan. **Quantum information processing and quantum error correction: an engineering approach**. Academic press, 2012.
- [31] DUMMIT, David S.; FOOTE, Richard M.. **Abstract Algebra**. 3rd. ed. Hoboken: Wiley, 2004. 932 p.
- [32] EDMONDS, Allan L.; EWING, John H.; KULKARNI, Ravi S. **Regular tessellations of surfaces and  $(p, q, 2)$ -triangle groups**. Annals of Mathematics, p. 113-132, 1982.
- [33] EDMONDS, A. L.; EWING, J. H.; KULKARNI, R. S. **Torsion free subgroups of fuchsian groups and tessellations of surfaces**. Invent Math 69, 331?346 (1982). <https://doi.org/10.1007/BF01389358>.
- [34] EDMONDS, A. L.; EWING, J. H.; KULKARNI, R. S. **Torsion free subgroups of Fuchsian groups and tessellations of surfaces**. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, v. 6, n. 3, p. 456-458, 1982.
- [35] FEYNMAN, Richard P.. **Simulating physics with computers**. International Journal Of Theoretical Physics, v. 21, n. 6-7, p.467-488, 1982.
- [36] GIBLIN, Peter. **Graphs, Surfaces and Homology**. New York: Cambridge University Press, 2010. 251 p.
- [37] GOTTESMAN, Daniel. **An introduction to quantum error correction and fault-tolerant quantum computation**. In: Quantum information science and its contributions to mathematics, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. 2009. p. 13-58.
- [38] GOTTESMAN, Daniel. **Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound**. Physical Review A, v. 3, n. 54, p.1862, 1996.

- 
- [39] GOTTESMAN, Daniel. **Stabilizer Codes and Quantum Error Correction**. 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/quant-ph/9705052>>. Acesso em: 24 novembro 2018.
- [40] GRIFFITHS, Robert B.. **Consistent Quantum Theory**. New York: Cambridge University Press, 2003. 391 p.
- [41] GROSS, Jonathan L.; YELLEN, Jay; ZHANG, Ping. **Handbook of graph theory**. 2. ed. CRC press, 2013. 1630 p.
- [42] HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002. 550 p.
- [43] HUFFMAN, W. Cary; PLESS, Vera. **Fundamentals of error-correcting codes**. Cambridge university press, 2010.
- [44] JØRGENSEN, Troels; NÄÄTÄNEN, Marjatta. **Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons**. The Quarterly Journal of Mathematics, v. 33, n. 4, p. 451-461, 1982.
- [45] KATOK, Svetlana. **Fuchsian Groups**. The University Of Chicago Press, 1992. 175 p.
- [46] KITAEV, Alexei. **Anyons in an exactly solved model and beyond**. Annals of Physics, v. 321, n. 1, p. 2-111, 2006.
- [47] KITAEV, A. Yu. **Fault-tolerant quantum computation by anyons**. Annals of Physics, v. 303, n. 1, p. 2-30, 2003.
- [48] KRIBS, David W. et al. **Operator quantum error correction**. arXiv preprint quant-ph/0504189, 2005.
- [49] KRIBS, David; LAFLAMME, Raymond; POULIN, David. **Unified and generalized approach to quantum error correction**. Physical review letters, v. 94, n. 18, p. 180501, 2005.
- [50] LEEMHUIS, Bernhard. **Geometrical Quantum Codes**. Orientadora: B. M. Terhal. 2010. 114 f. Master thesis (Institute for Theoretical Physics Amsterdam) - University of Amsterdam, 2010.

- 
- [51] LIBOFF, Richard L.. **Introductory Quantum Mechanics**. New York: Addison Wesley Publishing Company, 1993. 653 p.
- [52] LIDAR, Daniel A.; BRUN, Todd A.. **Quantum Error Correction**. New York: Cambridge University Press, 2013. 690 p.
- [53] MITCHELL, Kevin. Hyperbolic Results. In: MITCHELL, Kevin. **Constructing Semi-Regular Tilings**. [S. l.], 13 fev. 1996. Disponível em: < <http://people.hws.edu/mitchell/tilings/Part1.html> >. Acesso em: 23 jan. 2023.
- [54] NAKAMURA, Gou. **Generic fundamental polygons for surfaces of genus three**. Kodai Mathematical Journal, v. 27, n. 1, p. 88-104, 2004.
- [55] NAKAMURA, Gou. **Trace fields of genus 3 surfaces with regular fundamental polygons**. Aichi Institute of Technology, 1387 pp. 170?178, 2004.
- [56] NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L.. **Quantum Computation and Quantum Information**. 10th ed. New York: Cambridge University Press, 2010. 698 p.
- [57] POULIN, David. **Stabilizer formalism for operator quantum error correction**. Physical review letters, v. 95, n. 23, p. 230504, 2005.
- [58] SAKURAI, Jun. J.. **Modern Quantum Mechanics**. New York: Addison Wesley Publishing Company, 1994. 500 p.
- [59] SARVEPALLI, Pradeep; BROWN, Kenneth R. **Topological subsystem codes from graphs and hypergraphs**. Physical Review A, v. 86, n. 4, p. 042336, 2012.
- [60] SHANNON, Claude E.. **A mathematical theory of communication**. Bell System Technical Journal, v. 27, n. 3, p.379-423, 1948.
- [61] SHOR, Peter W.. **Scheme for Reducing Decoherence in Quantum Computer Memory**. Physical Review A, v. 52, n. 4, p.R2493, 1995.
- [62] SOARES, Waldir S.. **Novos métodos de construção de códigos quânticos coloridos sobre superfícies bidimensionais**. Orientador: Eduardo Brandani da Silva.

2017. Tese (Doutorado - Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR, 2017.
- [63] SOARES, Waldir S.; SILVA, Eduardo B. **Hyperbolic quantum color codes**. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1804.06382>>. Acesso em: 24 nov. 2018.
- [64] SOUZA, Giovana H.. **Classificação e contagem em tesselações uniformes do plano hiperbólico**. Orientador: Eduardo Brandani da Silva. 2019. 131 f. Tese (Doutorado - Matemática) - Universidade Estadual de Maringá - UEM, Maringá-PR, 2019.
- [65] STEANE, Andrew M.. **Simple quantum error-correcting codes**. Physical Review A, v. 54, n. 6, p.4741, 1996.
- [66] STILLWELL, John. **Geometry of Surfaces**. New York: Springer-verlag, 1992. 217 p.
- [67] SUCHARA, Martin; BRAVYI, Sergey; TERHAL, Barbara. **Constructions and noise threshold of topological subsystem codes**. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, v. 44, n. 15, p. 155301, 2011.
- [68] UNRUH, William G.. **Maintaining Coherence in Quantum Computers**. Physical Review A, v. 51, n. 2, p.992, 1995.
- [69] ZANARDI, Paolo; LIDAR, Daniel A.; LLOYD, Seth. **Quantum tensor product structures are observable induced**. Physical review letters, v. 92, n. 6, p. 060402, 2004
- [70] WALKDEN, Charles. **Hyperbolic geometry**. Lecture Notes for course MATH32051, Manchester University. 2019. Disponível em <[https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/charles.walkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic\\_geometry\\_1920.pdf](https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/charles.walkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic_geometry_1920.pdf)>.
- [71] YOSHIDA, Beni; CHUANG, Isaac L. **Framework for classifying logical operators in stabilizer codes**. Physical Review A, v. 81, n. 5, p. 052302, 2010.

---

# APÊNDICE A

---

Descreveremos agora a rotina utilizada para garantirmos a existência de uma tesselação formada por triângulos hiperbólicos  $\mathbb{T}$  com ângulos internos  $\frac{\pi}{p}$ ,  $\frac{\pi}{q}$  e  $\frac{\pi}{r}$ , onde a dual será a tesselação  $\{2p, 2q, 2r\}$ .

```
Print("Possible triples:", "\n");
triples:=[];
N:=1;      #N=g-2.
for D in [1..42*N] do
  rightEq:=D-N; dD:=DivisorsInt(D); dD:=Filtered(dD, n->n>1); ldD:=Length(dD);
  for i in [1..ldD] do for ii in [i..ldD] do for iii in [ii..ldD] do
    p:=dD[i]; q:=dD[ii]; r:=dD[iii]; leftEq:=D/p+D/q+D/r;
    if leftEq=rightEq then Add(triples, [2*D, p, q, r]); Print("X=", 2*D, " ->
    (", 2*p, ", ", 2*q, ", ", 2*r, ") ", "\n"); fi;
  od; od; od; od;
  Print("\n", "triples:=", triples, ";", "\n");
  InitialRegularPermutation:=function(n,d)
    local k, perm, j, Lj, LLj;
    if n mod d <> 0 then Print("In InitialRegularPermutation(n,d) d must be a divisor
    of n.", "\n"); return (); fi;
    k:=n/d; perm:=();
    for j in [1..k] do Lj:=[(j-1)*d+1..j*d]; LLj:=ShallowCopy(Lj);
    Add(LLj, (j-1)*d+1); Remove(LLj, 1);
    perm:=perm*MappingPermListList(Lj, LLj); od; return perm;
  end;
  IsRegularPermutation:=function(sF, perm)
    local LCL, sLCL, L; LCL:=List(Cycles(perm, MovedPoints(perm)), c1->Length(c1));
    sLCL:=Length(LCL); if LCL[1]*sLCL <> sF then return false; fi;
    L:=AsSet(LCL); if Length(L)=1 then return true; else return false; fi;
  end;
  for d in triples do
    yes:=0; x:=d[1]; p:=d[2]; q:=d[3]; r:=d[4]; Print("|F|=", x, "\n");
    r1:=InitialRegularPermutation(x, 2);
    for r2 in ConjugacyClass(SymmetricGroup(x), r1) do
      R:=r1*r2;
      if Order(R)=p and IsRegularPermutation(x, R)=true then
        for r0 in ConjugacyClass(SymmetricGroup(x), r1) do
          L:=r2*r0; RL:=R*L;
          if Order(L)=q and Order(RL)=r and IsRegularPermutation(x, L)=true and
          IsRegularPermutation(x, RL)=true then
            H:=Group(R, L);
            if IsTransitive(H, [1..x]) then
              Print(x, ", ", p, ", ", q, ", ", r, ":", "\n", "r0=", r0, "\n", "r1=", r1, "\n", "r2=", r2, "\n", "R=",
              R, "\n", "L=", L, "\n", "RL=", RL, "\n\n"); yes:=1; break;
            fi; fi; od; fi; if yes=1 then break; fi; od; od;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;
```

A rotina utilizada para garantirmos a existência da tesselação  $\{2p, q, 2p, r\}$  é dada da seguinte forma:

```

Print("Possible triples:", "\n");
triples:=[];
N:=1;      #N=g-2
for D in [1..42*N] do
rightEq:=D-N; dD:=DivisorsInt(D); dD:=Filtered(dD, n->n>1); ldD:=Length(dD);
for i in [1..ldD] do for ii in [1..ldD] do for iii in [1..ldD] do
p:=dD[i]; q:=dD[ii]; s:=dD[iii]; if 1/p+1/q+1/s < 1 then
leftEq:=D/p+D/q+D/s; a:=2*N/(1 - 1/p - 1/q - 1/s); b:=N/(p*(1 - 1/p - 1/q -
1/s));
c:=N/(q*(1 - 1/p - 1/q - 1/s)); d:=N/(s*(1 - 1/p - 1/q - 1/s));
if leftEq=rightEq and IsInt(a)=true and IsInt(b)=true and IsInt(c)=true and
IsInt(d)=true
and IsOddInt(q)=true and IsEvenInt(a)=true and (q<>s)=true then
Add(triples, [2*D, p, q, p, s]); Print("X=", D, " ->
(", 2*p, ", ", q, ", ", 2*p, ", ", s, ")", "\n"); fi;
fi; od; od; od; od;
Print("\n", "triples=", triples, ";", "\n");
InitialRegularPermutation:=function(n,d)
local k, perm, j, Lj, LLj;
if n mod d<>0 then Print("In InitialRegularPermutation(n,d) d must be a divisor
of n.", "\n"); return (); fi;
k:=n/d; perm:=();
for j in [1..k] do Lj:=(j-1)*d+1..j*d; LLj:=ShallowCopy(Lj);
Add(LLj, (j-1)*d+1); Remove(LLj, 1);
perm:=perm*MappingPermListList(Lj, LLj); od; return perm;
end;
IsRegularPermutation:=function(sF, perm)
local LCL, sLCL, L; LCL:=List(Cycles(perm, MovedPoints(perm)), c1->Length(c1));
sLCL:=Length(LCL); if LCL[1]*sLCL<>sF then return false; fi;
L:=AsSet(LCL); if Length(L)=1 then return true; else return false; fi;
end;
for d in triples do
yes:=0; x:=d[1]; p:=d[2]; q:=d[3]; s:=d[4]; Print("|F|=", x, "\n");
r1:=InitialRegularPermutation(x, 2);
for r2 in ConjugacyClass(SymmetricGroup(x), r1) do
R:=r1*r2;
if Order(R)=p and IsRegularPermutation(x, R)=true then
for r0 in ConjugacyClass(SymmetricGroup(x), r1) do
L:=r2*r0; RL:=R*L;
if Order(L)=q and Order(RL)=s and IsRegularPermutation(x, L)=true and
IsRegularPermutation(x, RL)=true then
H:=Group(R, L);
if IsTransitive(H, [1..x]) then
Print(x, ", ", p, ", ", q, ", ", s, ":", "\n", "r0=", r0, "\n", "r1=", r1, "\n", "r2=", r2, "\n", "R=
", R, "\n", "L=", L, "\n", "RL=", RL, "\n\n"); yes:=1; break;
fi; fi; od; fi; if yes=1 then break; fi; od; od;

```

Já a rotina utilizada para garantirmos a existência da tesselação  $\{p, q, p, q, \dots, p, q\}$  é dada por:

```

Print("Possible triples:", "\n");
triples:=[];
N:=1;      #N=g-2.
for D in [1..42*N] do
rightEq:=D-N; dD:=DivisorsInt(D); dD:=Filtered(dD, n->n>1); ldD:=Length(dD);
for i in [1..ldD] do for ii in [i..ldD] do for iii in [1..ldD] do
p:=dD[i]; q:=dD[ii]; r:=dD[iii]; leftEq:=D/p+D/q+D/r;
if leftEq=rightEq and p>2 and q>2 then Add(triples, [2*D, p, q, r]);
Print("X=", 2*D, " -> (", p, ",", q, ",", r, ")", "\n"); fi;
od; od; od; od;
Print("\n", "triples:=", triples, ";", "\n");
InitialRegularPermutation:=function(n, d)
local k, perm, j, Lj, LLj;
if n mod d<>0 then Print("In InitialRegularPermutation(n, d) d must be a divisor
of n.", "\n"); return (); fi;
k:=n/d; perm:=();
for j in [1..k] do Lj:=[(j-1)*d+1..j*d]; LLj:=ShallowCopy(Lj);
Add(LLj, (j-1)*d+1); Remove(LLj, 1);
perm:=perm*MappingPermListList(Lj, LLj); od; return perm;
end;
IsRegularPermutation:=function(sF, perm)
local LCL, sLCL, L; LCL:=List(Cycles(perm), MovedPoints(perm), c1->Length(c1));
sLCL:=Length(LCL); if LCL[1]*sLCL<>sF then return false; fi;
L:=AsSet(LCL); if Length(L)=1 then return true; else return false; fi;
end;
for d in triples do
  yes:=0; x:=d[1]; p:=d[2]; q:=d[3]; r:=d[4]; Print("|F|=", x, "\n");
  r1:=InitialRegularPermutation(x, 2);
  for r2 in ConjugacyClass(SymmetricGroup(x), r1) do
    R:=r1*r2;
    if Order(R)=p and IsRegularPermutation(x, R)=true then
      for r0 in ConjugacyClass(SymmetricGroup(x), r1) do
        L:=r2*r0; RL:=R*L;
        if Order(L)=q and Order(RL)=r and IsRegularPermutation(x, L)=true and
IsRegularPermutation(x, RL)=true then
          H:=Group(R, L);
          if IsTransitive(H, [1..x]) then

Print(x, ",", p, ",", q, ",", r, ":", "\n", "r0=", r0, "\n", "r1=", r1, "\n", "r2=", r2, "\n", "R=
", R, "\n", "L=", L, "\n", "RL=", RL, "\n\n"); yes:=1; break;
fi; fi; od; fi; if yes=1 then break; fi; od; od;

```

Por fim, a rotina utilizada para garantirmos a existência da tesselação  $\{2p, 2q, 2r, 2t\}$  é dada por:

```

Print("Possible 4tuples:", "\n");
4tuples:=[];
N:=2; #N=g-2.
for D in [1..12*N] do
rightEq:=2*D-2*N; dD:=DivisorsInt(D); dD:=Filtered(dD, n->n>1);
ldD:=Length(dD);
for i in [1..ldD] do for ii in [i..ldD] do for iii in [1..ldD] do for iv in
[1..ldD] do
p:=dD[i]; q:=dD[ii]; r:=dD[iii]; s:=dD[iv];
if 1/p+1/q+1/r+1/s < 2 then leftEq:=D/p+D/q+D/r+D/s; a:=N/(p*(2 - 1/p - 1/q -
1/r - 1/s));
b:=N/(q*(2 - 1/p - 1/q - 1/r - 1/s)); c:=N/(r*(2 - 1/p - 1/q - 1/r - 1/s));
d:=N/(s*(2 - 1/p - 1/q - 1/r - 1/s)); if leftEq=rightEq and p<=q
and IsInt(a)=true and IsInt(b)=true and IsInt(c)=true and IsInt(d)=true then
Add(4tuples, [D,p,q,r,s]);
Print("X=", D, " -> (", 2*p, ", ", 2*q, ", ", 2*r, ", ", 2*s, ")", "\n"); fi;
fi; od; od; od; od; od; od;
Print("\n", "4tuples:=", 4tuples, ";", "\n");
InitialRegularPermutation:=function(n,d)
local k, perm, j, Lj, LLj;
if n mod d<>0 then Print("In InitialRegularPermutation(n,d) d must be a divisor
of n.", "\n"); return (); fi;
k:=n/d; perm:=(); for j in [1..k] do
Lj:=(j-1)*d+1..j*d; LLj:=ShallowCopy(Lj); Add(LLj, (j-1)*d+1);
Remove(LLj, 1);
perm:=perm*MappingPermListList(Lj, LLj);
od; return perm; end;
IsRegularPermutation:=function(sF, perm)
local LCL, sLCL, L; LCL:=List(Cycles(perm, MovedPoints(perm)), c1->Length(c1));
sLCL:=Length(LCL); if LCL[1]*sLCL<>sF then return false; fi;
L:=AsSet(LCL); if Length(L)=1 then return true; else return false; fi;
end;
Print("\n", "Verificando os quadruplos da lista anterior:", "\n\n"); oldD:=0;
for d in 4tuples do
yes:=0; D:=d[1]; m1:=d[2]; m2:=d[3]; m3:=d[4]; m4:=d[5]; if D <> oldD
then Print("|Faces|=", D, "\n\n"); oldD:=D; fi;
b1:=InitialRegularPermutation(D, m1);
b2s:=InitialRegularPermutation(D, m2);
b3s:=InitialRegularPermutation(D, m3);
b4s:=InitialRegularPermutation(D, m4);
Lb2:=ConjugacyClass(SymmetricGroup(D), b2s);
Lb3:=ConjugacyClass(SymmetricGroup(D), b3s);
Lb4:=ConjugacyClass(SymmetricGroup(D), b4s);
for b2 in Lb2 do for b3 in Lb3 do for b4 in Lb4 do
H:=Group(b1, b2, b3, b4);
if b1*b2*b3*b4=() then
Print("D=", D, " type:
", m1, ", ", m2, ", ", m3, ", ", m4, "\n", "b1=", b1, "\n", "b2=", b2, "\n", "b3=", b3, "\n", "b4=", b
4, "\n\n\n");
yes:=1; break; fi; od; if yes=1 then break; fi; od; if yes=1 then break; fi; od;
od;

```