UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Sobre Alguns Invariantes de Ramos Planos

Nathália Eliza Alves de Andrade

Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes

Maringá - PR

2023

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Nathália Eliza Alves de Andrade

Sobre Alguns Invariantes de Ramos Planos

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá-UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes

Maringá - PR

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Andrade, Nathália Eliza Alves de
A553s Sobre alguns invariantes de ramos planos / Nathália Eliza Alves de Andrade. -- Maringá, 2023.
viii, 77 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Marcelo Escudeiro Hernandes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2023.

1. Curvas planas. 2. Equivalência analítica. 3. Equivalência topológica. 4. Invariantes. 5. Plane curves. 6. Analytical equivalence. 7. Topological equivalence. 8. Invariants. I. Hernandes, Marcelo Escudeiro, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 512.5

Edilson Damasio CRB9-1.123

NATHÁLIA ELIZA ALVES DE ANDRADE

SOBRE ALGUNS INVARIANTES DE RAMOS PLANOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Mauro Fernando Hernández Iglesias - UNMSM / Peru
Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli - UEM

Aprovada em: 05 de maio de 2023.
Local de defesa: Bloco F67 – Auditório do Departamento de Matemática.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me guiar e não desistir da minha caminhada mesmo quando nem eu sabia quais caminhos seguir.

Agradeço profundamente ao meu orientador Marcelo Escudeiro Hernandes pela excelente orientação, suporte e paciência desde o meu segundo ano de curso, em 2017. Foi uma trajetória de parceria muito importante para a minha evolução, pois pude aprender e amadurecer todos os dias na matemática e na vida pessoal.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Edilaine e João Carlos, pelo suporte emocional e financeiro que poucas pessoas tem o privilégio de ter. Vocês são essenciais em todas as etapas da minha vida.

Agradeço ao meu namorado Leonardo pelo apoio de sempre, por estar sempre presente, por dar suporte à todas às minhas ansiedade e me acalmar sempre que fosse necessário. Além de me acompanhar diversas vezes nos estudos.

Ao meu irmão que apesar de ser oito anos mais novo, ser um exemplo para mim de responsabilidade, foco e paciência. À minha irmã do coração Maria Eduarda Payá, que com apenas 16 anos me ensina sobre força e determinação e é um alicerce muito importante para nossa família.

Aos meus amigos e familiares pelos momentos de companheirismo e compreensão, por muitas vezes entenderem a minha ausência e estarem presentes nos momentos bons e ruins. Em especial: Izabela, Letícia Ohashi, Leticia Alves e Ricardo, meus amigos mais íntimos que tanto me apoiam. Aos meus colegas de trabalho que me deram apoio nesse final e foram muito especiais. E à minha priminha Thaila que com apenas 2 anos de vida nos trouxe alegria e esperança, poderia dizer que ela foi a minha verdadeira terapia.
Agradeço imensamente aos meus padrinhos Marlene e Jorge pelo suporte e ensinamentos que me proporcionaram e por estarem sempre presentes em todas as minhas etapas.

Em especial, às estrelas que hoje brilham no céu, mas que foram fundamentais no meu processo: professora Luciene, por ter sido um alicerce quando eu nem esperava e à Nilza Andrade, por ter sido tia, mãe, avó e mais tudo que ela pudesse ser do jeito mais perfeito possível.

À UEM, PET, CAPES e todos os programas e professores envolvidos nesses projetos que diferenciam nossa vida acadêmica, vocês são incríveis e somos gratos pela dedicação.
À Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli e ao Prof. Dr. Mauro Fernando Hernández Iglesias por terem aceitado fazer parte desta banca examinadora, que será muito importante para o final desse processo.

Preciso ainda, citar aqui pessoas especiais que meu caminho cruzou nesse lindo passeio à matemática e que serão sempre importantes na minha memória. Patrícia, Maria Elenice e Alexandre que além de professores, vocês foram cirúrgicos nas palavras, no cuidado e na atenção que me deram, serei eternamente grata. Aos colegas Stefane, Henrique, Felipe, Thiago, Welinton e Lucas, foram muitos momentos maravilhosos irei guardar e outros que ainda viveremos, serão pessoas que faço questão de ter por perto.

Resumo

Seja C_f a curva irredutível definida por $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. O módulo de diferenciais de Kähler Ω_f desempenha um papel importante na classificação analítica de curvas planas.

Neste trabalho, o objetivo principal é mostrar que o conjunto de valores do ideal Jacobiano de f e o conjunto de valores de resíduos de formas logarítmicas determinam e são determinados pelo conjunto de valores de Ω_f.

Palavras-chave: Curvas planas, equivalência analítica, aquivalência topológica, invariantes.

Abstract

Let C_f be the irreducible curve defined by $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. The Kähler differentials module Ω_f plays an important role in the analytical classification of plane curves.

In this work, the main result is to show that the values set of Jacobian ideal of f and the values set of residues of logarithmic forms determine and are determined by the values set of Ω_f.

Key words: Plane curves, analytical equivalence, topological equivalence, invariants.

Sumário

Introdução

A classificação topológica ou analítica de curvas planas não é uma tarefa fácil. No caso da classificação topológica a situação é menos complicada, uma vez que a classe topológica é determinada totalmente pelos expoentes característicos de uma parametrização de Puiseux da curva. Muitos outros invariantes topológicos são determinados e determinam os expoentes característicos. Tais fatos foram provados nas primeiras décadas do século passado. No entanto, a classificação analítica demanda um pouco mais de esforço e só foi obtida recentemente. Uma das principais dificuldades é a de determinar conjuntos de invariantes analíticos numéricos.

O objetivo central deste trabalho é reunir resultados sobre os principais invariantes topológicos e analíticos de uma curva plana irredutível.

Como mencionamos, vários são os invariantes que caracterizam a classe topológica de uma curva plana irredutível. Vamos nos concentrar nos expoentes característicos e no semigrupo de valores Γ_f associado à curva.

No caso dos invariantes analíticos, damos atenção especial ao conjunto de valores Λ_f de diferenciais de Kähler Ω_f, uma vez que tal conjunto desempenha papel central, juntamente com o semigrupo Γ_f, na classificação de curvas planas irredutíveis (veja Teorema 3.8). Do mesmo modo que os expoentes característicos, o conjunto Λ_f também determina e é determinado por outros conjuntos numéricos. A descrição de tais conjuntos se encontra dispersa em vários trabalhos. A principal contribuição desta dissertação é reunir, num mesmo texto, alguns conjuntos que determinam e são determinados por Λ_f.

O trabalho está estruturado como segue: no primeiro capítulo, apresentamos o anel das séries de potências formais em r indeterminadas e coeficientes em um corpo K. O conceito de multiplicidade é explorado e várias propriedades algébricas desse anel são provadas. Além disso, abordamos alguns resultados clássicos e que serão cruciais para o desenvolvimento do nosso trabalho em curvas, por exemplo, o Teorema da Preparação de Weierstrass e o Teorema da Divisão de Weierstrass. Tais resultados permitem considerar curvas planas definidas por meio de um polinômio de Weierstrass. O final do capítulo é reservado para abordar alguns resultados sobre séries de potências analíticas.

No segundo capítulo introduzimos o objeto central do trabalho: as curvas planas.

Vamos nos concentrar no caso das curvas planas analíticas irredutíveis, isto é, aquelas que podem ser definidas por um elemento irredutível $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Nesse caso, a curva definida por f será denotada por C_f. Nesse capítulo abordamos propriedades de uma curva irredutível, introduzimos objetos algébricos e numéricos associados às curvas que permitem definir invariantes, sejam eles topológicos ou analíticos. Um exemplo de um objeto algébrico associado à uma curva plana C_f é o anel local $\mathcal{O}_f := \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{\langle f \rangle}$. Por meio de tal objeto ou da série que define a curva apresentamos o seguinte teorema que nos dará alternativas para a equivalência analítica:

Teorema. *Sejam C_f e C_g curvas planas. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *C_f é analiticamente equivalente à C_g.*

2. *As séries f e g são $\mathcal{K}-$equivalentes, isto é, existem um automorfismo ϕ de $\mathbb{C}\{x,y\}$ e uma unidade u de $\mathbb{C}\{x,y\}$ tais que $u \cdot \phi(f) = g$.*

3. *$\mathcal{O}_f$ é isomorfo a $\mathcal{O}_g$ como $\mathbb{C}-$álgebras.*

Ainda no Capítulo 2, apresentamos a noção de parametrização da curva C_f. Em particular, vamos nos concentrar em uma parametrização especial que chamaremos de Parametrização de Newton-Puiseux e que permite definir os expoentes característicos de uma curva C_f. Por meio de uma parametrização, fazemos uso de uma valoração discreta que permite definir o semigrupo de valores Γ_f associado a uma curva C_f. Isso nos leva a abordar semigrupos numéricos e algumas propriedades, como a noção de condutor c_f, por exemplo. Na última seção do capítulo, mostramos como os expoentes característicos determinam e são determinados pelo semigrupo Γ_f, além de enunciar um resultado que permite identificar duas curvas, sob o ponto de vista da equivalência topológica, se, e somente se, seus semigrupos de valores são iguais.

O Capítulo 3 é o principal deste trabalho, justamente por apresentar conjuntos de invariantes analíticos que determinam e são determinados entre si. Para tanto, abordamos um pouco de teoria de formas diferenciais. Apresentamos o conjunto Ω_1 das 1-formas holomorfas em $\mathbb{C}^2$, o módulo Ω_f de diferenciais de Kähler e o módulo $\Omega^1(log\ C_f)$ das 1-formas logarítmicas.

Considerando uma extensão da valoração discreta, que foi utilizada para definir o semigrupo Γ_f, podemos definir o conjunto Λ_f de valores de elementos de Ω_f que é um invariante analítico para curvas planas irredutíveis. Do fato de que Ω_f é isomorfo ao ideal jacobiano $J(f) = \langle \overline{f_x}, \overline{f_y} \rangle$ como $\mathcal{O}_f$-módulo, podemos concluir que o conjunto Λ_f determina e é determinado pelo conjunto de valores $\nu(J(f))$ de elementos de $J(f)$.

Considerando o $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo das 1-formas logarítmicas $\Omega^1(log\ C_f)$, introduzimos o conceito de resíduo logarítmico de um elemento $\omega \in \Omega^1(log\ C_f)$. O conjunto de todos os resíduos logarítmicos é denotado por $\mathcal{R}_f$ e seu conjunto de valores por Δ_f. Abordando a noção de ideal fracionário, seu dual e propriedades de tais objetos algébricos aplicados ao conjunto $\mathcal{R}_f$, chegamos ao seguinte teorema, que é o resultado principal desse trabalho:

Teorema. *Para toda curva plana C_f com semigrupo Γ_f e condutor c_f, temos que*

$$\gamma \in \Delta_f \;\Leftrightarrow\; c_f - 1 - \gamma \notin \nu(J(f)) \;\Leftrightarrow\; -\gamma \notin \Lambda_f.$$

Em particular, os conjuntos $\Delta_f, \nu(J(f))$ e Λ_f são invariantes analíticos de C_f mutuamente determinados.

Capítulo 1

Preliminares

Nesta seção serão apresentados alguns resultados básicos sobre séries de potências que serão úteis para o estudo de curvas analíticas planas.

1.1 Séries de Potências Formais

Iniciemos nossa apresentação com resultados e propriedades algébricas das séries de potências formais. O leitor poderá encontrar mais detalhes em [H].

Definição 1.1. *Sejam K um corpo e $x_1, \ldots, x_r$ variáveis sobre K. Chamamos a soma*

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + \ldots \tag{1.1}$$

*de **série de potências formal** nas variáveis $x_1, \ldots, x_r$ com coeficientes em K, onde cada P_i é um polinômio homogêneo de grau i nas variáveis $x_1, \ldots, x_r$ com coeficientes em K.*

Definição 1.2. *Sejam $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ e $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$ séries de potências formais em que P_i e Q_i são polinômios homogêneos de grau i. Definimos as operações de soma e produto de f e g por:*

$$f + g = \sum_{k=0}^{\infty} (P_k + Q_k)$$

e

$$f \cdot g := fg = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} P_n Q_{m-n}.$$

Denotaremos por $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ o conjunto das séries de potências formais nas variáveis $x_1, \ldots, x_r$ com coeficientes em K. Além disso, temos que $(K[[x_1, \ldots, x_n]], +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade.

Definição 1.3. *Sejam $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in K[[x_1, \ldots, x_n]] \backslash \{0\}$ como em (1.1) e n o menor inteiro tal que $P_n \neq 0$. Chamamos o polinômio homogêneo P_n de **forma inicial** de f e* *o inteiro n é chamado de* ***multiplicidade*** *de f que denotamos por $mult(f)$. Se $f = 0$ definimos $mult(f) = \infty$.*

Note que se

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1+\ldots+i_r=i} a_{i_1,\ldots,i_r} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} \in K[[x_1, \ldots, x_r]],$$

então $P_0 = f(0, \ldots, 0)$.

Podemos caracterizar os elementos invertíveis de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ por meio de sua forma inicial, como justificamos abaixo.

Proposição 1.4. *Seja*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$$

como em (1.1). Temos que f é invertível se, e somente se, $P_0 \neq 0$.

Demonstração: Seja

$$g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$$

com Q_i um polinômio homogêneo de grau i e considere a equação

$$1 = fg = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} P_j Q_{i-j} = P_0 Q_0 + (P_1 Q_0 + P_0 Q_1) + \ldots .$$

Essa igualdade é equivalente ao sistema de equações (em $Q_i, i \in \mathbb{N}$):

$$\begin{cases} P_0 Q_0 & = & 1 \\ P_1 Q_0 + P_0 Q_1 & = & 0 \\ \vdots & & \\ P_n Q_0 + P_{n-1} Q_1 + \ldots + P_0 Q_n & = & 0 \\ \vdots & & \end{cases}$$

Note que f é invertível se, e somente se, esse sistema tem solução. Logo, se f é invertível, então existe Q_0 tal que $P_0 Q_0 = 1$. Assim $P_0 \neq 0$.

Reciprocamente, suponha que $P_0 \neq 0$. Então

$$\begin{cases} Q_0 & = & P_0^{-1} \\ Q_1 & = & -P_0^{-1} P_1 Q_0 \\ \vdots & & \\ Q_n & = & -P_0^{-1}(P_n Q_0 + \ldots + P_1 Q_{n-1}) \\ \vdots & & \end{cases}$$

é solução do sistema anterior. Além disso, como cada Q_i é homogêneo de grau i, temos que $g := \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$.

■

Exemplo 1.5. Seja $f(x) = 1 + x \in K[[x]]$. Sabemos que f visto como polinômio não é invertível, mas, pela proposição anterior, f é invertível como série de potências, já que $P_0 = 1 \neq 0$. Além disso, pela demonstração da proposição anterior temos que

$$f^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i.$$

De fato, temos que $P_0 = 1, P_1 = x$ e $P_i = 0$, para todo $i > 1$. Assim, $Q_0 = 1, Q_1 = -x, Q_2 = x^2, Q_3 = -x^3, \ldots$. Veja que

$$(x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots + 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = 1,$$

como queríamos.

A multiplicidade de séries de potências desempenha papel similar ao grau de polinômios e, dentre suas propriedades, destacamos algumas na próxima proposição.

Proposição 1.6. *Sejam $f, g \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Temos que:*

1. *$mult(f \cdot g) = mult(f) + mult(g)$;*

2. *$mult(fg) \geq min\{mult(f), mult(g)\}$, com sinal de igualdade sempre que $mult(f) \neq mult(g)$.*

Demonstração:

1. Se $f = 0$ e $g \neq 0$, então

$$mult(fg) = mult(0) = \infty = \infty + mult(g) = mult(f) + mult(g).$$

Os casos, $g = 0$ e $f \neq 0$ ou $f = 0 = g$ são análogos.

Agora suponha $f \neq 0$ e $g \neq 0$. Tome

$$f = \sum_{i=n}^{\infty} P_i \text{ e } g = \sum_{j=m}^{\infty} Q_j,$$

com $P_i, Q_j \in K[x_1, \ldots, x_r]$ homogêneos de grau i e j, respectivamente, com $P_n \neq 0 \neq Q_m$. Temos que

$$fg = \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P_i Q_j = P_n Q_m + \ldots.$$

Como $K[x_1, \dots, x_r]$ é um domínio de integridade, temos que $P_n Q_m \neq 0$, já que $P_n \neq 0$ e $Q_m \neq 0$. Além disso, $P_n Q_m$ é um polinômio homogêneo de grau $n+m$ e é a forma inicial de fg, uma vez que se $P_i Q_j$ é uma parcela da série fg, então $i \geq n$ e $j \geq m$. Portanto,

$$mult(fg) = n + m = mult(f) + mult(g).$$

2. Se $mult(f) \neq mult(g)$, então podemos supor, sem perda de generalidade, $n = mult(f) > mult(g) = m$. Logo, se $f = \sum_{i=n}^{\infty} P_i$ e $g = \sum_{i=m}^{\infty} Q_i$, então

$$f + g = \sum_{i=m}^{\infty} (P_i + Q_i) = (P_m + Q_m) + \dots,$$

com $P_i \equiv 0$, para todo $i = m, \dots, n-1$.

Como $P_m \equiv 0$ e $Q_m \neq 0$ temos que $P_m + Q_m = Q_m \neq 0$. Daí, Q_m é a forma inicial de $f + g$ e, assim,

$$mult(f + g) = m = min\{mult(f), mult(g)\}.$$

Se $mult(f) = mult(g) = n$ temos dois casos:

(a) Se $f = -g$, então $f + g = 0$ e

$$mult(f + g) = \infty \geq n = min\{mult(f), mult(g)\}.$$

(b) Se $f \neq -g$, então existe P_i tal que $P_i \neq -Q_i$ para algum $i \in \{n, n+1, \dots\}$. Assim, $mult(f+g) = k$, onde k é o menor em $\{n, n+1, \dots\}$ tal que $P_k + Q_k \neq 0$, isto é,

$$mult(f + g) \geq n = min\{mult(f), mult(g)\}.$$

Para $mult(f - g)$ basta considerar $h = -g$ e, segue do exposto acima que

$$mult(f-g) = mult(f+h) \geq min\{mult(f), mult(h)\} = min\{mult(f), mult(g)\}.$$

■

As propriedades de multiplicidade dos elementos de $K[[x_1, \dots, x_r]]$ permitem concluir sobre certos aspectos algébricos do anel $K[[x_1, \dots, x_r]]$.

Proposição 1.7. *Com as operações consideradas anteriormente, temos que $K[[x_1, \dots, x_r]]$ é um domínio de integridade.*

Demonstração: Sejam $f, g \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$, ambos diferentes de zero. Suponha que $fg = 0$. Então, por definição, $mult(fg) = \infty$. Por outro lado, $mult(fg) = mult(f) + mult(g) \neq \infty$, já que f e g são não nulos, o que contraria a suposição feita. Logo, $fg \neq 0$ e, portanto, $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é um domínio. ■

Lembremos que um anel local é um anel comutativo com unidade que admite um único ideal maximal. A proposição a seguir garante que $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ possui tal propriedade.

Proposição 1.8. *$K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é local.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que o conjunto M formado por todos os elementos não invertíveis de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é um ideal de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$. De fato, é claro que $M \neq \varnothing$, já que $0 \in M$. Sejam

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i, \;\; g = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j \in M \text{ e } h = \sum_{m=0}^{\infty} S_m \in K[[x_1, \ldots, x_r]],$$

dados como em (1.1). Veja que $P_0 = 0$ e $Q_0 = 0$, daí, $P_0 + Q_0 = 0$. Logo, $f + g \in M$. E ainda, $hf \in M$, já que $P_0 = 0$ implica em $P_0 S_0 = 0$.

Agora, vamos mostrar que M é o único ideal maximal de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$.

É claro que $M \neq K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Considere J um ideal de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ contendo M propriamente. Logo, existe em J um elemento invertível e, assim, $J = K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Isso mostra que M é ideal maximal de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Para justificar que M é o único ideal maximal basta observar que se I é um ideal maximal de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, temos $I \neq K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Então I não contém elemento invertível de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, ou seja, pela definição de M temos que $I \subseteq M \subset K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Mas por hipótese I é ideal maximal, então devemos ter $I = M$.

Assim, provamos que $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é local. ■

Proposição 1.9. *O ideal M definido na proposição anterior é gerado por $x_1, \ldots, x_r$, isto é, $M = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$.*

Demonstração: Veja que $x_i \in M$, para todo $i = 1, \ldots, r$, uma vez que x_i não é invertível em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Logo, como M é ideal temos que $\langle x_i \rangle \subset M$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Daí, $\langle x_1 \rangle + \ldots + \langle x_r \rangle \subset M$ e, assim, $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle \subset M$.

Por outro lado, se

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in M,$$

então $P_0 = 0$. Logo,

$$f \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$$

e, portanto, $M \subset \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$.

Tendo em vista o que foi feito, temos que $M = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. ∎

No que segue vamos considerar K um corpo algebricamente fechado de característica zero e vamos apresentar o teorema da divisão de Weierstrass. Esse resultado faz-se necessário para a demonstração do teorema de Preparação de Weierstrass que será crucial no trabalho.

Dado um polinômio p na indeterminada z indicaremos por $deg_z p$ seu grau.

Teorema 1.10. *(Teorema da Divisão de Weierstrass) Sejam $f, h \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Suponhamos que $mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) = k > 0$. Então existem únicos A e B tais que*

$$h = Af + B$$

com $A \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$, $B \in K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ e $deg_{x_r} B < k$.

Demonstração: Vamos provar o resultado por indução sobre r.

Para o caso $r = 1$, tomemos $f, h \in K[[x_1]]$ com

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x_1^i \text{ e } h = \sum_{j=0}^{\infty} h_j x_1^j.$$

Observe que mostrar a existência de

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_1^i \text{ e } B = \sum_{i=0}^{k-1} B_i x_1^i$$

satisfazendo as condições do enunciado é equivalente a encontrar uma única solução para o sistema:

$$\begin{cases} h_0 &= A_0 f_0 + B_0 \\ h_1 &= A_0 f_1 + A_1 f_0 + B_1 \\ \vdots & \\ h_i &= A_0 f_i + \ldots + A_{i-1} f_1 + A_i f_0 + B_i \\ \vdots & \end{cases} \tag{1.2}$$

com $B_i = 0$ se $i \geqslant k$. Como $mult(f) = k > 0$, então $f_i = 0$, para todo $i = 0, \ldots, k-1$. Assim, defina

$$B = \sum_{i=0}^{k-1} h_i x_1^i.$$

Para $j \geqslant k$ temos que

$$h_j = A_0 f_j + \ldots + A_{j-k} f_k + \ldots + A_j f_0 + B_j = A_0 f_j + \ldots + A_{j-k} f_k.$$

Logo, como $f_k \neq 0$ temos $A_0 = \frac{h_k}{f_k}$ e

$$A_{j-k} = \frac{h_j - (A_0 f_j + \ldots + A_{j-(k-1)} f_{k-1})}{f_k},$$

para $j > k$. Isso permite obter recursivamente a série A.

Para mostrar que A e B são únicos vamos supor que existam C e D satisfazendo as mesmas condições, tais que $h = Cf + D$. Então

$$Af + B = Cf + D$$

o que implica em

$$f(A - C) = D - B.$$

Se $D \neq B$, teríamos que

$$mult(f(A - C)) = mult(f) + mult(A - C) = mult(D - B) = min\{mult(D), mult(B)\},$$

mas veja que de um lado da igualdade temos $mult(f(A - C)) \geqslant k$ e do outro lado temos $mult(B - D) < k$, o que é um absurdo. Logo, $B = D$ e, portanto, $A = C$.

Agora, suponha que $r > 1$ e o resultado seja válido para $K[[x_2, \ldots, x_r]]$. Vamos mostrar que o mesmo vale para $K[[x_1, \ldots, x_r]]$.

Vamos reagrupar os termos de f e h da seguinte maneira:

$$f(x_1, \ldots, x_r) = f_0(x_2, \ldots, x_r) + f_1(x_2, \ldots, x_r)x_1 + f_2(x_2, \ldots, x_r)x_1^2 + \ldots$$

$$h(x_1, \ldots, x_r) = h_0(x_2, \ldots, x_r) + h_1(x_2, \ldots, x_r)x_1 + h_2(x_2, \ldots, x_r)x_1^2 + \ldots.$$

Logo, precisamos encontrar

$$A = A_0(x_2, \ldots, x_r) + A_1(x_2, \ldots, x_r)x_1 + A_2(x_2, \ldots, x_r)x_1^2 + \ldots$$

em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e

$$B = B_0(x_2, \ldots, x_r) + B_1(x_2, \ldots, x_r)x_1 + B_2(x_2, \ldots, x_r)x_1^2 + \ldots$$

em $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ tais que $h = Af + B$. Note que a igualdade anterior é equivalente ao sistema de equações como em (1.2).

Como $mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) = k > 0$ e $f(0, \ldots, 0, x_r) = f_0(0, \ldots, 0, x_r)$ segue que $f_0(0, \ldots, 0, x_r) \neq 0$ e $mult(f_0(0, \ldots, 0, x_r)) = k \neq 0$. Logo, por hipótese de indução, existem únicos $A_0 \in K[[x_2, \ldots, x_r]]$ e $B_0 \in K[[x_2, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$, com $deg_{x_r} B_0 < k$, tais que

$$h_0 = f_0 A_0 + B_0.$$

Além disso, $h_i - (A_0 f_i + \ldots + A_{i-1} f_1), f_0 \in K[[x_2, \ldots, x_r]]$ e $mult(f_0(0, \ldots, 0, x_r)) = k > 0$. Logo, por hipótese de indução, existem únicos $A_i \in K[[x_2, \ldots, x_r]]$ e $B_i \in K[[x_2, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ com $deg_{x_r} B_i < k$, tais que

$$h_i - (A_0 f_i + \ldots + A_{i-1} f_1) = f_0 A_i + B_i.$$

Note que $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_1^i \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e $B = \sum_{i=0}^{\infty} B_i x_1^i \in K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ e como $deg_{x_r} B_i < k$, para todos $i \in \mathbb{N}$ segue que $deg_{x_r} B < k$. Como, por construção, A_i e B_i são únicos para todo i, segue o resultado.

■

Definição 1.11. *Chamamos $f \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ de x_r-**regular** de ordem $k > 0$ se $mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) = k$.*

Com o conceito anterior podemos apresentar o seguinte resultado.

Teorema 1.12. *(Teorema de Preparação de Weierstrass) Seja $f \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ uma série de potências formal com $mult(f) > 0$ e x_r-regular de ordem k. Então, existem únicos elementos $u(x_1, \ldots, x_r) \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e $c_i(x_1, \ldots, x_{r-1}) \in K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]$, $i = 1, \ldots, k$, tais que*

$$u(x_1, \ldots, x_r) \cdot f(x_1, \ldots, x_r) = x_r^k + c_1(x_1, \ldots, x_{r-1}) x_r^{k-1} + \ldots + c_k(x_1, \ldots, x_{r-1})$$

com $u(x_1, \ldots, x_r)$ unidade de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e $mult(c_i(x_1, \ldots, x_r)) \geqslant 1$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Mais ainda, se $mult(f) = k$, então $mult(c_i) \geq k$.

Demonstração: Tome $h = x_r^k$. Como $mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) = k > 0$ temos, pelo teorema anterior, que existem únicos $A \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e $B = -\sum_{i=0}^{k-1} c_{k-i}(x_1, \ldots, x_{r-1}) x_r^i \in K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ tais que $h = Af + B$, ou seja,

$$Af = h - B = x_r^k + c_1(x_1, \ldots, x_{r-1}) x_r^{k-1} + \ldots + c_k(x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

com $c_1(x_1, \ldots, x_{r-1}), \ldots, c_k(x_1, \ldots, x_{r-1}) \in K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]$.

Veja que $mult(Af(0, \ldots, 0, x_r)) = mult(A(0, \ldots, 0, x_r)) + mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) \geq k$, já que $mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) = k$ e como

$$Af(0, \ldots, 0, x_r) = x_r^k + c_1(0, \ldots, 0) x_r^{k-1} + \ldots + c_k(0, \ldots, 0)$$

segue que $c_i(0,\ldots,0)=0$, para todo $i=1,\ldots,k$. Assim, $mult(c_i)\geq 1$ e

$$Af(0,\ldots,0,x_r)=x_r^k.$$

Além disso, como $mult(f(0,\ldots,0,x_r))=k$ então

$$f(0,\ldots,0,x_r)=x_r^k(a_0+a_1x_r^{i_1}+\ldots),$$

com $a_0\neq 0$. Logo, $C=a_0+a_1x_r^{i_1}+\ldots$ é invertível. Assim,

$$Af(0,\ldots,0,x_r)=x_r^k=C^{-1}f(0,\ldots,0,x_r)$$

e, como $K[[x_1,\ldots,x_r]]$ é um domínio de integridade, $A=C^{-1}$ é invertível e $mult(A)=0$. Então, basta tomar $u(x_1,\ldots,x_r)=A^{-1}$.

Em particular, se $mult(f)=k$, como $mult(Af)=k$ e

$$Af=x_r^k+c_1(x_1,\ldots,x_{r-1})x_r^{k-1}+\ldots+c_k(x_1,\ldots,x_{r-1}),$$

temos que as potências de x_r em Af são diferentes e, assim, tais parcelas em Af não se cancelam, o que implica que as multiplicidades das parcelas são distintas. Portanto,

$$\begin{aligned} k=mult(Af) &= min_i\{mult(x_r^k), mult(c_i(x_1,\ldots,x_{r-1}))+mult(x_r^{k-i}))\} \\ &= min_i\{k, mult(c_i(x_1,\ldots,x_{r-1}))+k-i\}. \end{aligned}$$

Logo, $mult(c_i(x_1,\ldots,x_{r-1}))+k-i\geq k$, ou seja, $mult(c_i(x_1,\ldots,x_{r-1}))\geq i$, como queríamos. ■

Definição 1.13. *Chamamos de* ***pseudo-polinômio*** *associado a* $f(x_1,\ldots,x_r)$ *o polinômio* $x_r^k+c_1(x_1,\ldots,x_{r-1})x_r^{k-1}+\ldots+c_k(x_1,\ldots,x_{r-1})\in K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]][x_r]$ *com* $mult(c_i)\geq 1$ *cuja existência foi provada no teorema anterior. Além disso, se* $mult(c_i)\geq i$*, para todo* $1\leq i\leq k$*, dizemos que* $x_r^k+c_1(x_1,\ldots,x_{r-1})x_r^{k-1}+\ldots+c_k(x_1,\ldots,x_{r-1})$ *é um* ***polinômio de Weierstrass.***

Observação 1.14. Toda série $f\in K[[x_1,\ldots,x_r]]$ com $mult(f)=k>0$ é x_r-regular de ordem k quando considerada em coordenadas adequadas, isto é, existe um K-automorfismo linear T de $K[[x_1,\ldots,x_r]]$ tal que $T(f)$ é x_r-regular de ordem k.

De fato, seja

$$f=\sum_{j=k}^{\infty}P_j\in K[[x_1,\ldots,x_r]]$$

como em (1.1), $P_k\neq 0$ e

$$P_k(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{k_1+\ldots+k_r=k}a_{k_1,\ldots,k_r}x_1^{k_1}\ldots x_r^{k_r}.$$

Se $a_{k_1,\ldots,k_r} = 0$ sempre que $k_i \neq 0$, para $i = 1, \ldots, r-1$, então temos que

$$P_k(x_1, \ldots, x_r) = a_k x_r^k = P_k(0, \ldots, 0, x_r).$$

Daí, $mult(f) = k = mult(f(0, \ldots, 0, x_r))$ e, portanto, f é x_r-regular.

Caso contrário, ou seja, se existir $a_{k_1,\ldots,k_r} \neq 0$ para algum $k_i \neq 0$, com $i = 1, \ldots, r-1$, vamos considerar as coordenadas $T(x_r) := x_r, T(x_i) := x_i - \varepsilon_i x_r$, com $\varepsilon_i \in K$.

Veja que

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{k_1+\ldots+k_r=j} a_{k_1,\ldots,k_r} T(x_1)^{k_1} \ldots T(x_r)^{k_r} \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{k_1+\ldots+k_r=j} a_{k_1,\ldots,k_r} (x_1 - \varepsilon_1 x_r)^{k_1} \ldots (x_{r-1} - \varepsilon_{r-1} x_r)^{k_{r-1}} x_r^{k_r}, \end{aligned}$$

já que T é um $K-$ automorfismo. Desenvolvendo os Binômios de Newton, temos que

$$(x_i - \varepsilon_i x_r)^{k_i} = H(x_i, x_r) + (-1)^{k_i} \varepsilon_i^{k_i} x_r^{k_i},$$

onde $H(x_i, x_r)$ é a soma das parcelas restantes do binômio. Note que $H(x_i, x_r)$ é múltiplo de x_i. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} T(f) &= Q(x_1, \ldots, x_r) + \textstyle\sum_{k_1+\ldots+k_r=k} a_{k_1,\ldots,k_r} (-1)^{k_1+\ldots+k_{r-1}} \varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}} x_r^{k_1+\ldots+k_{r-1}} x_r^{k_r} \\ &= Q(x_1, \ldots, x_r) + \textstyle\sum_{k_1+\ldots+k_r=k} a_{k_1,\ldots,k_r} (-1)^{k_1+\ldots+k_{r-1}} \varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}} x_r^{k}, \end{aligned}$$

com $Q(x_1, \ldots, x_r) \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$.

Como as potências de x_r em $Q(x_1, \ldots, x_r)$ são diferentes de k, temos que o coeficiente de x_r^k em $T(P_k(x_1, \ldots, x_r))$ é dado por

$$c = \sum_{k_1+\ldots+k_r=k} (-1)^{k-k_r} a_{k_1\ldots k_r} \varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_{r-1}^{k_{r-1}}.$$

Deste modo, como c também é o coeficiente de x_r^k em $T(f)$, escolhendo valores para ε_i de forma conveniente, isto é, valores de ε_i tal que $c \neq 0$, $T(f)$ torna-se x_r-regular de ordem k. Portanto, a hipótese do Teorema de Preparação de Weierstrass sobre a x_r-regularidade não é restritiva.

Pela Observação 1.14 e pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, temos que para todo $f \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ com $mult(f) = k$ existem um K-automorfismo linear T e uma unidade u de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ tais que $u \cdot T(f) \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é um polinômio de Weierstrass.

Os próximos resultados exploram os conceitos de pseudo-polinômio e x_r-regular.

Lema 1.15. *Sejam $f_1, \ldots, f_s$ polinômios mônicos em $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$. Temos que $f_1 \cdots f_s$ é um pseudo-polinômio se, e somente se, cada f_i, com $i = 1, \ldots, s$ for um pseudo-polinômio.*

Demonstração: Tome $s = 2$ e considere

$$f_1 = x_r^m + a_1 x_r^{m-1} \ldots + a_m \text{ e } f_2 = x_r^n + b_1 x_r^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Logo,

$$f_1 \cdot f_2 = x_r^{m+n} + (a_1 + b_1) x_r^{m+n-1} + \ldots + (a_i + a_{i-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{i-1} + b_i) x_r^{m+n-i} + \ldots + a_m b_n.$$

Se f_1 e f_2 são pseudo-polinômios, então

$$mult(a_i + a_{i-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{i-1} + b_i) \geqslant min\{mult(a_i), \ldots, mult(a_{i-k} b_k), \ldots, mult(b_i)\} \geq 1.$$

Logo, $f_1 \cdot f_2$ é um pseudo-polinômio.

Por outro lado, suponha que $f_1 \cdot f_2$ seja um pseudo-polinômio. Temos que

$$mult(f_1) + mult(f_2) = mult(f_1 \cdot f_2) = mult(f_1 \cdot f_2(0, \ldots, 0, x_r)) = m + n.$$

Além disso, como $mult(f_1) \leq m$ e $mult(f_2) \leq n$, então segue da equação anterior que $mult(f_1) = m$ e $mult(f_2) = n$. Logo, f_1 e f_2 são pseudo-polinômios, já que, caso contrário, $mult(f_1) < m$ e $mult(f_2) < n$.

O caso em que $s > 2$ decorre analogamente. ■

Lema 1.16. *Tome $f, g \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Temos que $f \cdot g$ é regular de uma certa ordem com respeito à x_r se, e somente se, f e g são regulares de uma certa ordem, não necessariamente a mesma, com respeito à x_r.*

Demonstração: Suponha que f e g são x_r-regulares de ordem m e n, respectivamente. Assim,

$$mult(f \cdot g) = mult(f) + mult(g) = mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) + mult(g(0, \ldots, 0, x_r)) = m + n.$$

Além disso,

$$mult(f(0, \ldots, 0, x_r)) + mult(g(0, \ldots, 0, x_r)) = mult(f \cdot g(0, \ldots, 0, x_r)),$$

ou seja, $f \cdot g$ é x_r-regular de ordem $m + n$.

Reciprocamente, se $f \cdot g$ é x_r-regular de ordem m, então $f \cdot g(0, \ldots, 0, x_r) \neq 0$. Suponha que f não seja x_r-regular, assim

$$(f \cdot g)(0, \ldots, 0, x_r) = f(0, \ldots, 0, x_r) g(0, \ldots, 0, x_r) = 0 g(0, \ldots, 0, x_r) = 0,$$

o que é um absurdo. Analogamente, se g não fosse x_r-regular teríamos $f \cdot g(0, \ldots, 0, x_r) = 0$, o que é um absurdo. Logo, f e g são x_r-regulares de alguma ordem. ■

A seguir vamos mostrar um resultado relacionado à irredutibilidade.

Teorema 1.17. *Um pseudo-polinômio $f \in K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ é redutível como elemento do anel $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ se, e somente se, f é redutível em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$.*

Demonstração: Suponha que f é redutível em $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ e de grau k. Então existem f_1 e f_2 em $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$, mônicos e não invertíveis cujo graus são m e n respectivamente, tais que

$$f = f_1 f_2.$$

Assim, $m + n = k$. Como f_1 e f_2 são não invertíveis, ambos têm graus maiores ou iguais a 1. Logo, pelo Lema 1.15, temos que f_1 e f_2 são pseudo-polinômios de graus maiores ou iguais a 1, já que f é um pseudo-polinômio. Assim, f_1 e f_2 são não invertíveis em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, pois os termos constantes são nulos e, portanto, f é redutível sobre $K[[x_1, \ldots, x_r]]$.

Reciprocamente, suponha que f é redutível em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Então existem f_1 e f_2 em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, não invertíveis em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, tais que

$$f = f_1 f_2.$$

Uma vez que f é um pseudo-polinômio temos que f é regular de uma certa ordem com respeito à x_r. Logo, pelo Lema 1.16, temos que f_1 e f_2 são regulares de uma certa ordem maior ou igual a 1. Pelo Teorema de Preparação de Weiertrass, existem únicos U_1 e U_2 unidades de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e únicos pseudo-polinômios $H_1, H_2 \in K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ de graus maiores ou iguais a 1 tais que

$$H_1 = f_1 U_1 \text{ e } H_2 = f_2 U_2.$$

Tome $U = U_1 U_2$. Logo, U é invertível e

$$f \cdot U = (f_1 f_2)(U_1 U_2) = (f_1 U_1)(f_2 U_2) = H_1 H_2.$$

Uma vez que H_1 e H_2 são pseudo-polinômios temos, pelo Lema 1.15, que $f \cdot U$ é pseudo-polinômio. Além disto,

$$f \cdot 1 = f \tag{1.3}$$

e

$$f \cdot U = H_1 H_2. \tag{1.4}$$

Como f é um pseudo-polinômio, temos que a equação (1.3) é a preparação de Weierstrass para f, assim como a equação (1.4). Pela unicidade garantida no Teorema de Preparação de Weierstrass, temos que $U = 1$ e, portanto,

$$f = H_1H_2.$$

Assim, como H_1 e H_2 são pseudo-polinômios temos que não são invertíveis no anel $K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Logo, f é redutível sobre $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, como queríamos. ■

Vejamos outras propriedades algébricas do anel $K[[x_1, \ldots, x_r]]$.

Lema 1.18. *O anel $K[[x_1]]$ é um DIP, isto é, um domínio de ideais principais.*

Demonstração:
Seja $I \subset K[[x_1]]$ um ideal. Se $I = \{0\}$, então $I = \langle 0 \rangle$. Se $I = K[[x_1]]$, então $I = \langle 1 \rangle$.

Tomemos agora um ideal $I \subset K[[x_1]]$ não trivial e considere $k = min\{mult(f); 0 \neq f \in I\}$. Seja $f \in I$ tal que $mult(f) = k$, ou seja,

$$f = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x_1^i = x_1^k(a_k + a_{k+1}x_1 + \ldots),$$

com $a_k \neq 0$. Uma vez que $u = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i}x_1^i \in K[[x_1]]$ é unidade e $f \in I$ temos que $x_1^k = u^{-1}f \in I$, ou seja, $\langle x_1^k \rangle \subset I$.

Dado $g \in I$, temos que $m = mult(g) \geqslant k$ e

$$g = \sum_{i=m}^{\infty} b_i x_1^i = x_1^m(b_m + b_{m+1}x_1 + \ldots) = x_1^k x_1^{m-k}(b_m + b_{m+1}x_1 + \ldots),$$

ou seja, $g \in \langle x_1^k \rangle$. Assim, $I \subset \langle x_1^k \rangle$. Portanto, $I = \langle x_1^k \rangle$ e $K[[x_1]]$ é um DIP. ■

Como todo DIP é um DFU (Domínio de Fatoração Única), temos que $K[[x_1]]$ é um DFU. Mais ainda, o anel $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é um DFU.

Teorema 1.19. *$K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é um domínio de fatoração única (DFU).*

Demonstração: Vamos mostrar por indução sobre r.

Se $r = 1$, então $K[[x_1, \ldots, x_r]] = K[[x_1]]$. Logo, pelo lema anterior, temos o desejado.

Suponha que $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]$ é um DFU e vamos mostrar que $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é um DFU. Primeiro, vamos mostrar que todo elemento não invertível de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ pode ser escrito como produto de uma quantidade finita de irredutíveis.

Seja $f \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ não nulo e não invertível. Se f for irredutível, então a afirmação está provada. Caso contrário, existem $h_1, h_2 \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ não nulos e não invertíveis tais que $f = h_1 h_2$.

Se h_1 e h_2 forem irredutíveis nada há para provar. Se h_1 ou h_2 forem redutíveis, então poderão ser fatorados por elementos não nulos e não unidades de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Note que esse processo pode ser repetido por um número finito de passos. De fato, temos que $mult(f) = k > 0$ e, assim, f não pode ter mais do que k fatores não unidades, pois caso contrário, pela Proposição 1.6, teríamos que a multiplicidade superaria k. Portanto, temos que o processo deve ser finito, isto é, f é escrito como produto de uma quantidade finita de irredutíveis. Como f é arbitrário em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, temos a afirmação.

Agora, tome $f, g, h \in K[[x_1, \ldots, x_r]]$ com f irredutível em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e $f \mid g \cdot h$. Se g for invertível em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ então $f \mid h$ e se h for invertível então $f \mid g$. Em ambos os casos temos que f é primo.

Suponha que h e g não são invertíveis em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$. Então, pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, mudando as coordenadas se necessário, temos que f, g e h são associados em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ a um polinômio de Weierstrass. Podemos então assumir que f, g e h são polinômios de Weierstrass e pelo Teorema 1.17 temos que f é irredutível em $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$. Como, por hipótese indutiva, $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]$ é um DFU, temos que, pelo Lema de Gauss, $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ é um DFU e, assim, f é primo no anel $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$. Logo, $f \mid g$ ou $f \mid h$ em $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ e, portanto, em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, ou seja, f é primo em $K[[x_1, \ldots, x_r]]$, como queríamos.

Provamos que todo elemento de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é escrito como produto de finitos elementos irredutíveis e que todo elemento irredutível é primo. Logo, $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ é DFU. ■

Lembremos que um anel A é chamado de anel Noetheriano se todo ideal de A é finitamente gerado. Um resultado clássico da Álgebra Comutativa é o Teorema da Base de Hilbert que assegura que se A é um anel Noetheriano, então $A[x]$ é um anel Noetheriano. Vamos usar tal resultado para concluir o mesmo para $K[[x_1, \ldots, x_r]]$.

Teorema 1.20. *Temos que* $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ *é um anel Noetheriano.*

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre r. Para $r = 1$, segue diretamente do Lema 1.18, já que $K[[x_1]]$ é um DIP, ou seja, todo ideal é principal e, portanto, finitamente gerado.

Suponha que o resultado seja válido para $r - 1$ indeterminadas, isto é, que o anel $K[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]$ é um Noetheriano. Vamos mostrar que o resultado é válido para r.

Tome $0 \neq I \subset K[[x_1, \ldots, x_r]]$ um ideal de $K[[x_1, \ldots, x_r]]$ e $g \in I$. Veja que mudando as coordenadas, se necessário, podemos supor que g é regular com respeito à x_r, já que a propriedade que vamos provar é invariante via K-automorfismos de $K[[x_1,\ldots,x_r]]$. Como $K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]]$ é um anel Noetheriano então, pelo Teorema da Base de Hilbert, $K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]][x_r]$ é um anel Noetheriano. Claramente $I \cap K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]][x_r]$ é um ideal de $K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]][x_r]$. Assim, existem $g_1,\ldots,g_s \in K[[x_1,\ldots,x_r]]$ tais que

$$I \cap K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]][x_r] = \langle g_1,\ldots,g_s\rangle.$$

Seja $f \in I$ qualquer. Do Teorema da Divisão de Weierstrass, temos que existem $A \in K[[x_1,\ldots,x_r]]$ e $B \in K[[x_1,\ldots,x_{r-1}][x_r]$ tais que

$$f = gA + B. \tag{1.5}$$

Como $f, g \in I$ e I é um ideal, então $B \in I \cap K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]][x_r]$. Portanto, existem $a_1,\ldots,a_s \in K[[x_1,\ldots,x_{r-1}]][x_r] \subset K[[x_1,\ldots,x_{r-1},x_r]]$ tais que

$$B = a_1g_1 + \ldots + a_sg_s.$$

Logo, por (1.5) segue que

$$f = gA + a_1g_1 + \ldots + a_sg_s.$$

Assim, temos que $f \in \langle g, g_1,\ldots,g_s\rangle$ e como $f \in I$ é qualquer temos que $I \subset \langle g, g_1,\ldots,g_s\rangle$. Além disso, $g, g_1,\ldots,g_s \in I$ e, portanto,

$$I = \langle g, g_1,\ldots,g_s\rangle.$$

■

Dos resultados anteriores temos que $K[[x_1,\ldots,x_r]]$ é um domínio Noetheriano local e de fatoração única.

1.1.1 Séries de Potências Analíticas

Na seção anterior apresentamos resultados e propriedades algébricas do anel de séries de potências formais $K[[x_1,\ldots,x_r]]$ com coeficientes em um corpo K. Nesta seção, vamos assumir que $K = \mathbb{C}$ e abordaremos sucintamente resultados sobre séries de potências analíticas. O leitor pode encontrar detalhes e justificativas dos resultados que mencionamos em [S].

Definição 1.21. *Uma aplicação $f : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ é* analítica *ou* holomorfa *em $p \in \mathbb{C}^r$ se ela coincide com sua série de potências (de Taylor) em $p \in \mathbb{C}^r$.*

Dizemos que duas aplicações $f, g : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ definem o mesmo *germe de aplicação* em $p \in \mathbb{C}^r$ se elas coincidem em alguma vizinhança de $p \in \mathbb{C}^r$. Consequentemente duas aplicações analíticas definem o mesmo germe se, e somente se, suas séries de potências em $p \in \mathbb{C}^r$ coincidem. Note que o germe (em $p \in \mathbb{C}^r$) de uma aplicação de $\mathbb{C}^r$ em $\mathbb{C}$ é a classe de equivalência de aplicações módulo a relação que identifica duas aplicações que coincidem em alguma vizinhança de $p \in \mathbb{C}^r$.

Como as aplicações analíticas, séries de potências e germes serão considerados na origem, salvo menção em contrário, fica implícito que estamos nos referindo à origem ao não mencionar o ponto de $\mathbb{C}^r$.

O conjunto $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ de todas as séries de potências analíticas é um subanel de $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_r]]$. Todas as propriedades algébricas que mostramos na seção anterior e que são válidas para $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_r]]$ permanecem válidas para o anel das séries de potências analíticas $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$. As ideias para as justificativas são análogas acrescidas do fato de que se deve garantir a convergência das séries, o que exige um esforço extra. Para uma indicação ao leitor, relacionamos algumas propriedades e resultados com uma respectiva referência:

- $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ é um anel local com ideal maximal $M = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ (veja Seção I.5 de [S]).
- $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ é um domínio de fatoração única (veja Teorema III.3.2 de [S]).
- $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ é um anel Noetheriano (veja Teorema III.3.3 de [S]).
- O Teorema de Divisão de Weierstrass é válido em $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ (Veja Teorema III.3.5 de [S]).
- O Teorema de Preparação de Weierstrass é válido em $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$ (Veja Teorema III.2.4 de [S]).

De forma similar ao conceito de germe de aplicações analíticas, podemos introduzir o conceito de conjunto analítico e germe de conjunto analítico.

Definição 1.22. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^r$ um aberto e $X \subseteq U$. Dado $p \in U$, dizemos que X é analítico em p se existem uma vizinhança V de p em U e aplicações analíticas $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ em p tais que*

$$X \cap V = \{z \in V;\ f_1(z) = \ldots = f_s(z) = 0\} \neq \emptyset.$$

Dizemos que X é um subconjunto analítico de U quando X é analítico em todo ponto de $x \in U$.

Com a definição anterior, a noção de germe de conjunto analítico se torna natural.

Definição 1.23. *Sejam U e U' abertos em $\mathbb{C}^r$, $X \subset U$ e $X' \subset U'$ subconjuntos analíticos tais que $X \cap X' \neq \emptyset$. Dizemos que X e X' definem o mesmo* germe de conjunto *em $p \in X \cap X'$ se existe uma vizinhança $V \subset X \cap X'$ de p tal que $X \cap V = X' \cap V$.*

Note que o germe de um conjunto em p é a classe de equivalência de conjuntos analíticos módulo a relação que identifica tais conjuntos, se a interseção deles com alguma vizinhança de p coincide.

Escreveremos (X, p) para o germe de conjunto de X em p. Neste caso, X é chamado de representante do germe (X, p). No caso em que p for a origem de $\mathbb{C}^r$, denotaremos o germe (X, p) simplesmente por (X), ou ainda por X se o contexto não deixar dúvida.

Há vários resultados que relacionam funções analíticas e conjuntos analíticos, bem como garantem a extensão de funções analíticas. Como utilizaremos alguns desses resultados, mas a demonstração exige a apresentação de lemas auxiliares que nos desviariam de nosso objetivo, vamos nos limitar a citá-los e indicar uma referência para consulta do leitor interessado.

Um germe de um conjunto analítico X é *irredutível* se da igualdade $X = X_1 \cup X_2$, com X_1 e X_2 germes analíticos, decorre que $X = X_1$ ou $X = X_2$. Caso contrário, dizemos que X é *redutível*.

Podemos mostrar (veja Proposição IV.1.1 de [S]) que um germe de conjunto analítico $X = \{z \in \mathbb{C}^r;\ f_1(z) = \ldots = f_s(z) = 0\}$ é irredutível se, e somente se, o ideal $\langle f_1, \ldots, f_z \rangle$ é um ideal primo de $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_r\}$.

Além disso, se X é um germe irredutível, então X contém uma variedade V complexa, conexa, aberta e densa (veja Teorema III.5.2.c de [S]). A *dimensão* de X é, por definição, a maior dimensão de uma tal variedade contida nas componentes irredutíveis de X. Por exemplo, se $X = \{z \in \mathbb{C}^r;\ f(z) = 0\}$, então temos que X é um germe de dimensão $r - 1$.

Teorema 1.24 (da extensão de Riemann)**.** *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^r$ um aberto e $X \subset U$ um conjunto analítico de dimensão no máximo $r - 2$. Para toda função holomorfa f definida em $U \setminus X$, existe uma (única) função holomorfa $\tilde{f}$ definida em U tal que $\tilde{f}_{|U \setminus X} = f$.*

Demonstração: Veja Theorem 4, capítulo D de [G]. ■

A função $\tilde{f}$ dada no teorema anterior é chamada *extensão* de f à U. Tal teorema permite obter como consequência o seguinte resultado.

Teorema 1.25. *Seja $X \subset U$ um conjunto analítico de dimensão $n - 1$ em um aberto $U \subseteq \mathbb{C}^n$. Se f é holomorfa em $U \setminus X$ e f pode ser extendida a uma função holomorfa* *em ao menos um ponto de X, então f pode ser extendida a uma função holomorfa para todo U.*

Demonstração: Veja Corollary 7, capítulo D de [G]. ■

Capítulo 2

Curvas Planas

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados relacionados às curvas planas analíticas irredutíveis. Os resultados que demandariam mais pré-requisitos e nos desviariam de nosso objetivo serão apenas citados, mas remetendo o leitor a uma referência precisa em que uma justificativa pode ser encontrada.

No restante deste trabalho, assumimos $K = \mathbb{C}$, isto é, o corpo dos números complexos. Além disto, vamos considerar o subanel das séries analíticas $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ de $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]$, ou seja, vamos aplicar os resultados do capítulo anterior para $r = 2$. Para facilitar a notação iremos adotar $\mathbb{C}\{x, y\}$ em vez de $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$.

Definição 2.1. *Seja $f \in \langle x, y \rangle$ não nulo. O germe de conjunto dado por*

$$C_f = \{z \in U : f(z) = 0\},$$

onde U é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, é chamado de ***(germe de) curva analítica plana*** *definida por f.*

Observe que

$$C_{f \cdot g} = C_f \cup C_g.$$

De fato, se $z \in C_{f \cdot g}$, então

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = 0.$$

Como $\mathbb{C}\{x, y\}$ é um domínio de integridade, então $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$, isto é, $z \in C_f \cup C_g$. Reciprocamente, se $z \in C_f \cup C_g$, então $f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$ e, daí, $(f \cdot g)(z) = 0$, e a afirmação segue.

Definição 2.2. *Dizemos que C_f é irredutível se $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ é irredutível. Nesse caso, dizemos que a curva analítica plana C_f é um* ***ramo plano****.*

Para os próximos estudos, vamos nos ater somente ao caso de ramos planos.

Observação 2.3. Sejam $f, h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irredutíveis e não associados, isto é, não existe uma unidade $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $f = uh$. Então podemos garantir a existência de uma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^2$ tal que $C_f \cap C_h \cap U = \{(0,0)\}$ (Veja Proposição 3.2 de [H]).

Como vimos, a irredutibilidade de f é equivalente a irredutibilidade de C_f. Muitas outras propriedades de C_f se traduzem de propriedades de f. Abaixo apresentaremos algumas.

Lema 2.4. *Sejam dois ramos planos C_f e C_h. Temos que $C_f = C_h$ se, e somente se, $\langle f \rangle = \langle h \rangle$.*

Demonstração: Observe que mostrar o lema é equivalente a mostrar que $C_f = C_h$ se, e somente se, $f = u \cdot h$, com $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ uma unidade, já que $f = u \cdot h$ se, e somente se, $\langle f \rangle = \langle h \rangle$.

Suponha $C_f = C_h$. Se f e h não fossem associados então, pela observação anterior, teríamos que existe uma vizinhança U de $(0,0)$ tal que em U as curvas C_f e C_h só se interceptam em $(0,0)$, isto é, $C_f \neq C_h$, o que é um absurdo. Logo, existe u unidade em $\mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $f = u \cdot h$.

Reciprocamente, se $\langle f \rangle = \langle h \rangle$, então $f = h \cdot u$ para alguma unidade $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Assim, se $z \in C_f$, então $f(z) = 0$ e, portanto,

$$h(z) = f(z)u^{-1}(z) = 0 \cdot u^{-1}(z) = 0,$$

isto é, $z \in C_h$. De maneira análoga, se $z' \in C_h$, então $h(z') = 0$. Logo,

$$f(z') = h(z')u(z') = 0 \cdot u(z') = 0,$$

isto é, $z' \in C_f$. ∎

Pelo lema anterior, temos que se $C_f = C_h$, então $mult(f) = mult(h)$ e podemos assim definir a multiplicidade de uma curva C_f por $mult(C_f) = mult(f)$.

Neste trabalho estaremos interessados em objetos que são invariantes segundo duas relações de equivalência: a topológica e a analítica.

Definição 2.5. *Sejam C_f e C_g duas curvas planas. Dizemos que C_f é **analiticamente equivalente** a C_g quando existem vizinhanças da origem $U, V \subset \mathbb{C}^2$ e um isomorfismo analítico*

$$\phi : U \to V$$

*tais que $C_f \cap U \neq \varnothing \neq C_g \cap V$ e $\phi(C_f \cap U) = C_g \cap V$. Quando a aplicação ϕ é apenas um homeomorfismo, dizemos que C_f é **topologicamente equivalente** a C_g.*

Proposição 2.6. *Seja C_f uma curva definida em uma vizinhança U da origem de $\mathbb{C}^2$ com $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Se $\tilde{\phi} : U \to V$, em que V é uma vizinhança da origem de $\mathbb{C}^2$, é um isomorfismo analítico, então existe um $\mathbb{C}$-automorfismo $\phi : \mathbb{C}\{x,y\} \to \mathbb{C}\{x,y\}$ satistazendo*

$$\phi(f) = f \circ \tilde{\phi}^{-1}.$$

Demonstração: Inicialmente, lembremos que todo elemento $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$ pode ser identificado, via sua série de Taylor, com uma função analítica $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$.

Assim, dado um isomorfismo analítico $\tilde{\phi} : U \to V$ com U e V vizinhanças da origem em $\mathbb{C}^2$, uma vez que $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ define C_f em U, temos que f pode ser considerada como uma função $f : U \to \mathbb{C}$. Daí, podemos tomar

$$f \circ \tilde{\phi}^{-1} : V \to \mathbb{C}$$

que pode ser identificada com $f \circ \tilde{\phi}^{-1} \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C}\{x,y\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x,y\} \\ & f & \longmapsto & f \circ \tilde{\phi}^{-1} \end{array},$$

que é um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

É fácil ver que $\psi : \mathbb{C}\{x,y\} \to \mathbb{C}\{x,y\}$ definida por $\psi(h) = h \circ \tilde{\phi}$ é a inversa de ϕ, isto é, $\psi = \phi^{-1}$. Assim, encontramos ϕ um $\mathbb{C}$-automorfismo de $\mathbb{C}\{x,y\}$, definido a partir de $\tilde{\phi}$, que satisfaz

$$\phi(f) = f \circ \tilde{\phi}^{-1}.$$

■

A recíproca do resultado acima é verdadeira, ou seja, dado um $\mathbb{C}$-automorfismo $\phi : \mathbb{C}\{x,y\} \to \mathbb{C}\{x,y\}$, existe um isomorfismo analítico $\tilde{\phi} : U \to V$ satisfazendo

$$\phi(f) = f \circ \tilde{\phi}^{-1}.$$

Mostrar essa afirmação envolve resultados mais profundos sobre funções analíticas que podem ser encontrados em [S] (veja Proposição V.1.1).

Veja ainda que

$$\tilde{\phi}(C_f) = C_{\phi(f)}. \tag{2.1}$$

De fato, se $(a,b) \in C_{\phi(f)}$, então

$$0 = \phi(f)(a,b) = f(\tilde{\phi}^{-1}(a,b))$$

ou seja, $\tilde{\phi}^{-1}(a,b) \in C_f$, o que implica que $(a,b) \in \tilde{\phi}(C_f)$.

Reciprocamente, temos que se $(a, b) \in \tilde{\phi}(C_f)$, então existe $(c, d) \in C_f$ tal que $\tilde{\phi}(c, d) = (a, b)$. Logo, como $f(c, d) = 0$, então

$$\phi(f)(a, b) = f(\tilde{\phi}^{-1}(a, b)) = f(c, d) = 0,$$

isto é, $(a, b) \in C_{\phi(f)}$.

A equivalência analítica pode ser expressa de várias formas. Veremos uma destas maneiras e para isso vamos introduzir o objeto a seguir.

Definição 2.7. *Seja C_f uma curva plana. O **anel local** de C_f é o anel quociente*

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f \rangle}.$$

Veja que o anel local de uma curva está realmente bem definido, pois se $C_f = C_g$ então, pelo Lema 2.4, $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_g$.

Teorema 2.8. *Sejam C_f e C_g curvas planas. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *C_f é analiticamente equivalente a C_g.*

2. *As séries f e g são $\mathcal{K}$-equivalentes, isto é, existem um automorfismo ϕ de $\mathbb{C}\{x, y\}$ e uma unidade u de $\mathbb{C}\{x, y\}$ tais que $u \cdot \phi(f) = g$.*

3. *$\mathcal{O}_f$ é isomorfo a $\mathcal{O}_g$ como $\mathbb{C}$-álgebras.*

Demonstração:

Primeiro, vamos mostrar $1 \Leftrightarrow 2$. Suponha que C_f seja analiticamente equivalente a C_g. Então existem vizinhanças da origem $U, V \subset \mathbb{C}^2$, onde C_f é definida em U e C_g é definida em V, e $\tilde{\phi} : U \to V$ um isomorfismo analítico satisfazendo $\tilde{\phi}(C_f) = C_g$. Tome ϕ o automorfismo definido a partir de $\tilde{\phi}$ como descrito na Proposição 2.6. Sabemos por (2.1) que

$$\tilde{\phi}(C_f) = C_{\phi(f)},$$

então

$$C_g = C_{\phi(f)}.$$

Logo, pelo Lema 2.4, existe uma unidade $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que

$$g = u \cdot \phi(f),$$

como queríamos.

Reciprocamente, suponha que f e g sejam $\mathcal{K}$-equivalentes, ou seja, que existam um automorfismo ϕ e uma unidade u de $\mathbb{C}\{x, y\}$ tais que $g = u \cdot \phi(f)$. Considerando o isomorfismo analítico $\tilde{\phi}$ definido a partir de ϕ, temos que

$$\tilde{\phi}(C_f) = C_{\phi(f)} = C_{u^{-1} \cdot g}.$$

Novamente pelo Lema 2.4, temos que

$$\tilde{\phi}(C_f) = C_g$$

e o resultado segue.

Vamos agora mostrar 2 $\Leftrightarrow$ 3. Inicialmente, mostremos a implicação 2 $\Rightarrow$ 3. Suponha novamente que existam um automorfismo ϕ de $\mathbb{C}\{x, y\}$ e u unidade de $\mathbb{C}\{x, y\}$ tais que $u \cdot \phi(f) = g$. Desse modo, temos que

$$\phi(\langle f \rangle) = \langle g \rangle. \tag{2.2}$$

De fato, dado $f \cdot h_1 \in \langle f \rangle$ temos

$$\phi(f \cdot h_1) = \phi(f) \cdot \phi(h_1) = u^{-1} \cdot g \cdot \phi(h_1) = g \cdot u^{-1} \cdot \phi(h_1) \in \langle g \rangle.$$

Portanto, $\phi(\langle f \rangle) \subset \langle g \rangle$.

Por outro lado, se $g \cdot h_2 = g \cdot u^{-1} \cdot u \cdot h_2 \in \langle g \rangle$, basta tomar $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $\phi(h) = u \cdot h_2$, que existe pois ϕ é sobrejetora. Daí, $\phi(f \cdot h) = g \cdot h_2$, ou seja, $\langle g \rangle \subset \phi(\langle f \rangle)$.

Considere agora

$$\psi : \mathbb{C}\{x, y\} \to \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle g \rangle}$$

definida por $\psi(h) = \phi(h) + \langle g \rangle$. Claramente, ψ é um homomorfismo sobrejetor de $\mathbb{C}$-álgebras. Note que

$$h \in ker(\psi) \Leftrightarrow \psi(h) = 0 + \langle g \rangle \Leftrightarrow \phi(h) + \langle g \rangle = 0 + \langle g \rangle \Leftrightarrow \phi(h) \in \langle g \rangle \Leftrightarrow h \in \langle f \rangle,$$

em que a última equivalência segue do fato de que ϕ é injetora e de (2.2). Logo, $ker(\psi) = \langle f \rangle$. Pelo teorema do isomorfismo temos que

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f \rangle} \approx \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle g \rangle} = \mathcal{O}_g,$$

como queríamos.

Agora, vamos mostrar 3 $\Rightarrow$ 2. Considere inicialmente o caso em que $mult(g) \geqslant 2$. Suponha que $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$ por meio de um isomorfismo $\tilde{\phi}$. Denote $h' := h + \langle f \rangle$ e $h'' := h + \langle g \rangle$ para todo $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

Sejam $T_1, T_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tais que

$$\tilde{\phi}(x') = T_1'' \text{ e } \tilde{\phi}(y') = T_2''.$$

Note que $T_1, T_2 \in \langle x, y \rangle$, ou seja, não podem ser unidades de $\mathbb{C}\{x, y\}$, pois caso contrário x e y seriam unidades de $\mathbb{C}\{x, y\}$, o que não ocorre.

Defina o homomorfismo

$$\phi : \mathbb{C}\{x,y\} \to \mathbb{C}\{x,y\}$$
$$x \mapsto T_1$$
$$y \mapsto T_2.$$

Uma vez que $\tilde{\phi}$ é sobrejetora, existem $R(x,y), S(x,y) \in \langle x,y \rangle \subset \mathbb{C}\{x,y\}$ tais que $x'' = \tilde{\phi}(R(x',y'))$ e $y'' = \tilde{\phi}(S(x',y'))$. Além disso, como $\tilde{\phi}$ é um $\mathbb{C}$-homomorfismo, temos que

$$x'' = R(T_1'', T_2'') = (R(T_1,T_2))'' \text{ e}$$

$$y'' = S(T_1'', T_2'') = (S(T_1,T_2))''.$$

Temos assim que

$$x - R(T_1,T_2) \in \langle g \rangle \text{ e } y - S(T_1,T_2) \in \langle g \rangle.$$

Como $T_1, T_2, R, S \in \langle x,y \rangle$, então $T_1 = ax + by + \ldots$, $T_2 = cx + dy + \ldots$, $R = mx + ny + \ldots$ e $S = px + qy + \ldots$ com $a,b,c,d,m,n,p,q \in \mathbb{C}$. Além disso, como $mult(g) > 1$, devemos ter

$$x - R(T_1,T_2) = (1 - am - cn)x - (bm + dn)y + \ldots \in \langle x,y \rangle^2 \text{ e}$$

$$y - S(T_1,T_2) = -(ap + cq)x + (1 - bp - dq)y + \ldots \in \langle x,y \rangle^2,$$

ou seja, devemos ter $am + cn = 1, bm + dn = 0, ap + cq = 0$ e $bp + dq = 1$, isto é, $ad - bc \neq 0$. Segue assim que ϕ é invertível e, portanto, um $\mathbb{C}$-automorfismo.

Temos que

$$\tilde{\phi}(f') = \tilde{\phi}(0') = 0''.$$

Logo, $\phi(f) \in \langle g \rangle$ o que implica que existe $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$ tal que $\phi(f) = h \cdot g$. A partir disso, temos que

$$mult(\phi(f)) = mult(h) + mult(g) \geq 2$$

e como ϕ é um $\mathbb{C}$-automorfismo, então $mult(f) = mult(\phi(f)) \geq 2$.

Note que analogamente ao que foi feito acima temos que ϕ^{-1} induz $\tilde{\phi}^{-1}$. Usando isso e trocando f por g nesse processo obtemos

$$\phi^{-1}(g) = h_1 \cdot f \Leftrightarrow g = \phi(h_1) \cdot \phi(f),$$

para algum $h_1 \in \mathbb{C}\{x,y\}$.

Com isso, temos que

$$\phi(f) = h \cdot \phi(h_1) \cdot \phi(f) \Leftrightarrow 1 = h \cdot \phi(h_1),$$

o que implica que h é uma unidade de $\mathbb{C}\{x, y\}$ e, portanto, temos o desejado.

Acima mostramos que se $mult(g) \geq 2$, então $mult(f) \geq 2$. Assim, se repetirmos o mesmo argumento quando $mult(f) \geq 2$, colocando f no papel de g e ϕ^{-1} no papel de ϕ, teremos o desejado. Assim, só nos resta o caso em que $mult(f) = mult(g) = 1$.

Veja que se $mult(f) = mult(g) = 1$, então

$$f = ax + by + \dots$$

com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a \neq 0$ e defina

$$\phi : \mathbb{C}\{x, y\} \to \mathbb{C}\{x, y\}$$

por $\phi(x) = f$ e $\phi(y) = y$, que é um $\mathbb{C}$-automorfismo. Assim, considerando ϕ, temos que x e f são $\mathcal{K}$-equivalentes. De maneira análoga, temos que g é $\mathcal{K}$-equivalente a x ou a y. Além disso, pelo $\mathbb{C}$-automorfismo $\phi_1 : \mathbb{C}\{x, y\} \to \mathbb{C}\{x, y\}$ definido por $\phi_1(x) = y$ e $\phi_1(y) = x$ temos que x é $\mathcal{K}$-equivalente a y. Assim, por transitividade, concluímos que f e g são $\mathcal{K}$-equivalentes. ■

Veja que, pela Observação 1.14, toda série $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ com $mult(f) = n > 0$ é y-regular de ordem n, fazendo mudanças de coordenadas se necessário. Assim, pelo teorema anterior, dada uma curva C_f podemos supor, a menos de equivalência analítica, que f é um polinômio de Weierstrass. Portanto, deste ponto em diante, vamos considerar que um ramo plano C_f seja definido por um polinômio de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$.

Dado $C_f = \{(\alpha, \beta) \in U; f(\alpha, \beta) = 0\}$, é natural estudar métodos para encontrar soluções para

$$f(x, y) = 0,$$

ou seja, raízes do polinômio $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$. Existem métodos que permitem descrever as raízes de $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, um deles consiste em um algoritmo, utilizando o polígono de Newton de f, que nos dá uma solução para $f(x, y) = 0$ até uma ordem desejada (veja Seção 8.3 de [BK]). Temos ainda que tais soluções são da forma $(x, \varphi(x^{1/n}))$ com

$$\varphi(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geqslant n} a_i x^{\frac{i}{n}},$$

em que $n = mult(f)$ e $a_i \in \mathbb{C}$. Tomando $t = x^{\frac{1}{n}}$, temos que

$$f(t^n, \varphi(t)) = 0.$$

Definição 2.9. *O par*

$$(t^n, \varphi(t)) = (t^n, \sum_{i \geq n} a_i t^i) \in \mathbb{C}\{t\} \times \mathbb{C}\{t\}$$

*descrito acima é chamado de **Parametrização de Newton-Puiseux** de C_f, ou simplesmente parametrização de f.*

Exemplo 2.10. Considere

$$f(x,y) = y^n - x^m$$

com $n < m$, ou seja, $mult(f) = n$. Veja que se

$$(t^n, \varphi(t)) = (t^n, \sum_{i \geq n} a_i t^i)$$

é uma parametrização de f, então

$$0 = f(t^n, \varphi(t)),$$

isto é,

$$0 = (\varphi(t))^n - (t^n)^m \Leftrightarrow t^{mn} = (\varphi(t))^n.$$

Logo, tomando $\varphi(t) = t^m$ temos que (t^n, t^m) é uma parametrização de f.

Se $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com $mult(f) = n$ admite uma parametrização $(t^n, \varphi(t))$, então para todo ς tal que $\varsigma^n = 1$ temos que $((\varsigma t)^n, \varphi(\varsigma t))$ é também uma parametrização de f, ou seja, se

$$\varphi(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geqslant n} a_i x^{\frac{i}{n}}$$

é uma das raízes de $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, então

$$\{\varphi(\varsigma x^{\frac{1}{n}}); \varsigma \in G_0\}$$

é o conjunto de todas as raízes de f, onde $G_0 = \{\varsigma \in \mathbb{C}; \varsigma^n = 1\}$ (veja [BK]). Consequentemente,

$$f(x,y) = \Pi_{\varsigma \in G_0}(y - \varphi(\varsigma x^{\frac{1}{n}})).$$

2.1 Classificação topológica de ramos planos

Na seção anterior, abordamos alguns resultados relacionados à equivalência analítica de ramos planos. Nesta seção, vamos considerar a equivalência topológica, que no caso de curvas planas irredutíveis pode ser caracterizada por meio de invariantes numéricos, dentre eles os expoentes característicos e o semigrupo de valores.

Considere f uma série de potências irredutível de multiplicidade n com parametrização de Newton-Puiseux dada por:

$$\left(t^n, \varphi(t) = \sum_{i \geq m} a_i t^i\right)$$

com $m \geq n$. Agora, tome (ε_i) e (β_i) duas sequências de números naturais associadas a C_f da seguinte maneira:

$$\varepsilon_0 = \beta_0 = n;$$
$$\beta_j = min\{i; i \not\equiv 0 \ (\text{mod } \varepsilon_{j-1}) \text{ e } a_i \neq 0\}, \text{ se } \varepsilon_{j-1} \neq 1; \tag{2.3}$$
$$\varepsilon_j = mdc(\varepsilon_{j-1}, \beta_j) = mdc(\beta_0, \ldots, \beta_j).$$

Uma vez que ε_j divide ε_{j-1}, ε_{j-1} divide $\varepsilon_{j-2}, \ldots, \varepsilon_{j-k}$ divide $\varepsilon_{j-(k+1)}$, para todo $j \geq 1$ e $k < j$, então ε_j divide ε_{j-k}, para todo $k < j$. Além disso, pelo algoritmo referenciado na seção anterior (veja Seção 8.3 de [BK]), temos que n e os expoentes de $\varphi(t)$ são coprimos. Assim, em algum momento vão existir ε_{g-1} e ε_{g-2} primos relativos para algum $g \in \mathbb{N}$. Logo, $\varepsilon_g = 1$, isto é, a sequência (β_j) estaciona em $j = g$ e, portanto, (ε_j) também estaciona em $j = g$, isto é, ambas são finitas.

Como ε_j divide ε_{j-1}, então $\varepsilon_j \leqslant \varepsilon_{j-1}$. Veja ainda que $\varepsilon_j \neq \varepsilon_{j-1}$, já que caso contrário teríamos que ε_{j-1} dividiria β_j, o que não ocorre. Logo, $\varepsilon_j < \varepsilon_{j-1}$, isto é, (ε_i) é decrescente.

Agora, como ε_j divide ε_{j-1} e $\varepsilon_{j-1} \neq \varepsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então

$$\{i; i \not\equiv 0 \ (\text{mod } \varepsilon_j) \text{ e } a_i \neq 0\} \subsetneq \{i; i \not\equiv 0 \ (\text{mod } \varepsilon_{j-1}) \text{ e } a_i \neq 0\}.$$

Assim, $\beta_{j-1} < \beta_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Consequentemente a sequência (β_j) é crescente.

Definição 2.11. *Definimos os* ***expoentes característicos*** *de f (ou de C_f) como os $g+1$ números naturais $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g)$ e chamamos o número g de* ***gênero*** *da curva.*

Como β_1 é o menor expoente de $\varphi(t)$ que n não divide, faz sentido definir

$$p(t) = a_m t^{\frac{m}{n}} + \ldots + a_{\beta_1 - 1} t^{\frac{\beta_1 - 1}{n}} \in \mathbb{C}[t].$$

Assim, podemos reescrever a parametrização de f por:

$$(t^n, p(t^n) + \sum_{i=\beta_1}^{\beta_2 - 1} a_i t^i + \ldots + \sum_{\beta_{g-1}}^{\beta_g - 1} a_i t^i + \sum_{i \geq \beta_g} a_i t^i$$

com $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ e $a_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot a_{\beta_g} \neq 0$. Observe que se k e j são inteiros tais que $\beta_{j-1} < k < \beta_j$ e ε_{j-1} não divide k, então $a_k = 0$. De fato, se $a_k \neq 0$ teríamos que

$$k \in \{i; i \not\equiv 0(\text{ mod } \varepsilon_{j-1}) \text{ e } a_i \neq 0\},$$

mas como $k < \beta_j$ teríamos um absurdo.

Observe ainda que como os expoentes característicos dependem exclusivamente do não anulamento dos coeficientes a_{β_j} em uma parametrização de Newton-Puiseux de f e não se altera com a escolha de outra parametrização de f, então os expoentes característicos de f estão bem definidos.

Exemplo 2.12. Seja $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ com parametrização

$$(t^4, 2t^8 + 3t^{10} - 5t^{12} + t^{13} + \ldots).$$

Temos que $\varepsilon_0 = \beta_0 = 4$, $\beta_1 = min\{10, 13, \ldots\} = 10$, $\varepsilon_1 = mdc(4, 10) = 2$, $\beta_2 = 13$, $\varepsilon_2 = mdc(2, 13) = 1$. Como $\varepsilon_2 = 1$, temos que $g = 2$ e os expoentes característicos de f são $(4, 10, 13)$.

Pelo Teorema de Newton-Puiseux (veja Seção 8.3 de [BK]), temos que toda curva plana irredutível definida por f, assumindo que seja um polinômio de Weierstrass em y, pode ser parametrizada por $(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i)$ com $n = mult(f)(= deg_y(f))$, ou seja, $f(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i) = 0$.

Assim, podemos definir o homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{C}\{x, y\} & \to & \mathbb{C}\{t\} \\ & h(x, y) & \mapsto & h(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i). \end{array} \tag{2.4}$$

Como f é irredutível segue que $\ker(\Psi) = \langle f \rangle$. De fato, se $h \in \ker(\Psi)$, então pelo teorema de divisão de Weierstrass $h = qf + r$, onde $q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e $r \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com $deg_y r < deg(f) = n$. Como $h(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i) = 0 = f(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i)$, então $r(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i) = 0$. Logo, todas as raízes de f são raízes de r, já que f é irredutível. Com isso, se $r \neq 0$ então r teria n raízes com $deg_y r < n$, o que é um absurdo. Portanto, $r = 0$, de modo que $h \in \langle f \rangle$.

Denotando $\mathbb{C}\{t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i\} = Im(\Psi) \subseteq \mathbb{C}\{t\}$, temos que

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f \rangle} \approx \mathbb{C}\{t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i\}. \tag{2.5}$$

Observe que todo elemento de $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ pode, pelo Teorema da divisão de Weierstrass, ser expresso como $h = qf + r$ com $r = a_0(x) + \ldots + a_{n-1}(x) y^{n-1} \in \mathbb{C}\{x\}[y]$. Deste modo, todo elemento de $\mathbb{C}\{t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i\}$ se expressa como $\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t^n).(\sum_{i\geq n} a_i t^i)^i$.

Como f é irredutível, temos que $\mathcal{O}_f \approx \mathbb{C}\{t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i\}$ é um domínio e seu corpo de frações $\mathcal{K}_f = \{\frac{g}{h};\ g, h \in \mathcal{O}_f$ com $h \neq 0\}$ é o menor corpo, com respeito à inclusão, que contém $\mathcal{O}_f$. Deste modo, por meio da identificação (2.5) temos que $\mathcal{K}_f$ é o menor corpo que contém $\mathbb{C}$, t^n e $\sum_{i\geq n} a_i t^i$, ou seja, deve ser $\mathbb{C}(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i)$. Além disso, temos (veja item i do Teorema 2, Capítulo 3, de [H]) que

$$\mathcal{K}_f \simeq \mathbb{C}(t^n, \sum_{i \geq n} a_i t^i) = \mathbb{C}(t). \tag{2.6}$$

Note ainda que $\mathbb{C}(t)$ é o corpo de frações de $\mathbb{C}\{t\}$. Enfatizando, temos que $\mathcal{O}_f \subseteq \mathbb{C}\{t\}$ e estes dois anéis têm o mesmo corpo de frações $\mathbb{C}(t)$.

Antes de seguir, lembremos de alguns conceitos algébricos.

Definição 2.13. *Seja A um domínio com corpo de frações F. Dizemos que um elemento $\alpha \in F$ é* ***integral*** *(ou inteiro) se α é raiz de um polinômio mônico de $A[x]$, ou seja, se há uma relação da forma*

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

com $a_i \in A$. O ***fecho integral*** *(ou fecho inteiro) $\overline{A}$ de A é o conjunto de todos os elementos integrais (ou inteiros) de F.*

Note que $A \subseteq \overline{A}$. Além disto, podemos mostrar que o fecho integral $\overline{A}$ é um subanel de F.

Proposição 2.14. *O fecho integral de $\mathcal{O}_f$ é $\overline{\mathcal{O}_f} \approx \mathbb{C}\{t\}$.*

Demonstração: No caso do anel $\mathcal{O}_f$, identificado como um subanel de $\mathbb{C}\{t\}$, temos que seu corpo de frações pode ser identificado com $\mathcal{K}_f = \mathbb{C}(t)$. Deste modo, tomando $\alpha = \frac{r(t)}{s(t)} \in \overline{\mathcal{O}_f} \subset \mathcal{K}_f$ com $r(t), s(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ e $s(t) \neq 0$, que podemos supor sem fatores comuns, temos que existem $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{C}, i = 0, \ldots, n-1$ tais que

$$0 = \left(\frac{r(t)}{s(t)}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r(t)}{s(t)}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{r(t)}{s(t)} + a_0,$$

ou seja,

$$0 = \frac{r^n(t) + a_{n-1}r^{n-1}(t)s(t) + \ldots + a_1 r(t)s^{n-1}(t) + a_0 s^n(t)}{s^n(t)},$$

equivalentemente

$$0 = r^n(t) + a_{n-1}r^{n-1}(t)s(t) + \ldots + a_1 r(t)s^{n-1}(t) + a_0 s^n(t).$$

A última igualdade indica que $s(t)$ deve dividir $r^n(t)$. Como $r(t)$ e $s(t)$ não têm fatores comuns, tal igualdade é possível apenas se $s(t)$ é invertível em $\mathbb{C}\{t\}$, ou seja, existe $s^{-1}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ e deste modo, $\frac{r(t)}{s(t)} = r(t)s^{-1}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. Portanto, $\overline{\mathcal{O}_f} \subseteq \mathbb{C}\{t\}$.

Uma vez que $t^n \in \mathcal{O}_f$, temos que $t \in \overline{\mathcal{O}_f}$, pois satisfaz o polinômio mônico $x^n - t^n = 0$. Como $\overline{\mathcal{O}_f}$ é um anel, segue que $\mathbb{C}\{t\} \subseteq \overline{\mathcal{O}_f}$. Portanto, $\overline{\mathcal{O}_f} = \mathbb{C}\{t\}$. ∎

Um outro conceito algébrico que faremos uso é o que introduzimos a seguir.

Definição 2.15. *Dado um corpo F qualquer, uma* ***valoração discreta*** *de F é uma aplicação*

$$\nu : F \to \overline{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

que satisfaz

1. $\nu(\alpha\beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$;
2. $\nu(\alpha + \beta) \geq \min\{\nu(\alpha), \nu(\beta)\}$;
3. $\nu(\alpha) = \infty \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0$;

para todo $\alpha, \beta \in F$.

É fácil ver que o conjunto $R = \{\alpha \in F;\ \nu(\alpha) \geq 0\}$ é um subanel de F. De fato, temos que $R \neq \varnothing$, já que $0 \in R$. Temos que $\nu(1) = 0$, pois

$$\nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1) \Rightarrow \nu(1) = 0.$$

Além disso, $\nu(-1) = \nu(1) = 0$, uma vez que

$$0 = \nu(1) = \nu(-1 \cdot -1) = \nu(-1) + \nu(-1) \Rightarrow \nu(-1) = -\nu(-1) \Leftrightarrow \nu(-1) = 0.$$

Deste modo, se $a, b \in R$ então

$$\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b) \geqslant 0$$

e

$$\nu(a - b) \geqslant min\{\nu(a), \nu(-b)\} = min\{\nu(a), \nu(-1) + \nu(b)\} = min\{\nu(a), \nu(b)\} \geqslant 0,$$

já que $\nu(a) \geqslant 0$ e $\nu(b) \geqslant 0$. Assim, $ab, a - b \in R$ e R é, portanto, subanel de F.

Chamamos R de **anel de valoração discreta** de F.

Vimos que o anel $\mathbb{C}\{t\}$ é um DIP local com ideal maximal $\langle t \rangle$ e, assim, todo elemento de $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ pode ser escrito como $h(t) = t^m u(t)$ com $m = mult(h)$ e $u(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ uma unidade. Em particular, como o corpo de frações de $\overline{\mathcal{O}}_f = \mathbb{C}\{t\}$ é $\mathcal{K}_f = \mathbb{C}(t)$, todo elemento $\alpha \in \mathcal{K}_f \setminus \{0\}$ pode ser expresso como

$$\alpha = \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \frac{t^{m_1}.u_1(t)}{t^{m_2}.u_2(t)} = t^{m_1 - m_2}.v(t) = t^m.v(t)$$

com $m = m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$, $h_i(t), u_i(t), v(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, tais que $u_i(t)$ e $v(t)$ são unidades.

Considerando a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \nu_f : & \mathcal{K}_f & \to & \overline{\mathbb{Z}} \\ & 0 & \mapsto & \infty \\ & t^m v(t) & \mapsto & m, \end{array}$$

temos que ν_f é uma valoração discreta. A justificativa segue de forma análoga à demonstração do Lema 1.6. Neste caso, temos que o anel de valoração discreta de $\mathcal{K}_f$ é $\overline{\mathcal{O}_f} = \mathbb{C}\{t\}$.

Note que dado $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$ e considerando o homomorfismo Ψ definido em (2.4) temos que $\Psi(h) = h(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i) \in \mathcal{O}_f$ e, como $\mathcal{O}_f \subseteq \overline{\mathcal{O}_f} = \mathbb{C}\{t\}$, definimos $\nu_f(h) := \nu_f(\Psi(h)) = mult(h(t^n, \sum_{i\geq n} a_i t^i)) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sendo igual a ∞ se, e somente se, $h \in \langle f \rangle$.

O conjunto

$$\Gamma_f = \{\nu_f(h);\ h \in \mathbb{C}\{x,y\} \setminus \langle f \rangle\} \subseteq \mathbb{N}$$

desempenhará um papel importante para o que segue.

Note que o conjunto Γ_f contém o 0 e é fechado com respeito à soma. De fato, como f é irredutível, então $\langle f \rangle$ não contém elementos invertíveis de $\mathbb{C}\{x,y\}$ e, portanto, $0 \in \Gamma_f$. Além disso, se $a, b \in \Gamma_f$, então existem $g, h \in \mathbb{C}\{x,y\} \setminus \langle f \rangle$, tais $a = mult(g(t^n, \phi(t))) = \nu_f(\Psi(g))$ e $b = mult(h(t^n, \phi(t))) = \nu_f(\Psi(h))$. Veja que $gh \notin \langle f \rangle$, uma vez que f é irredutível em um DFU e

$$\nu_f(\Psi(gh)) = \nu_f(\Psi(g)\Psi(h)) = \nu_f(\Psi(g)) + \nu_f(\Psi(h)) = a + b.$$

Logo, $a+b \in \Gamma_f$. O conjunto Γ_f é um exemplo do que chamamos de semigrupo numérico.

2.2 Semigrupos Numéricos

O conjunto Γ_f que introduzimos anteriormente é um caso particular do que chamamos de semigrupo numérico. Mais precisamente, um subconjunto $G \subset \mathbb{N}$ é chamado **semigrupo** se:

1. $0 \in G$;

2. G é fechado com respeito à soma.

Note que Γ_f é um semigrupo, chamado de **semigrupo de valores** associado à curva definida por f.

Nesta seção, estudaremos semigrupos de números naturais de um ponto de vista puramente aritmético. Diremos que um semigrupo G admite um **condutor** c se $c + \mathbb{N} \subset G$ e $c - 1 \notin G$.

Exemplo 2.16. Dados $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$G = \{\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_r v_r,\ \text{com } \lambda_i \in \mathbb{N}\}$$

é um semigrupo que denotaremos por $G = \langle v_0, \ldots, v_r \rangle$ e chamaremos de semigrupo gerado por $v_0, \ldots, v_r$.

Lema 2.17. *Todo semigrupo $G \subset \mathbb{N}$ é finitamente gerado.*

Demonstração: Se $G = \{0\}$, então $G = \langle 0 \rangle$. Se não, considere $v_0 = min\{g \in G; g \neq 0\}$. Se $G = \langle v_0 \rangle$, então o resultado está provado. Caso contrário, tome

$$v_1 = min\{g \in G; g \not\equiv v_0 \text{ mod } v_0\}.$$

Se $G = \langle v_0, v_1 \rangle$, então nada há que provar. Caso contrário, tome

$$v_2 = min\{g \in G; g \not\equiv v_j \text{ mod } v_0, j = 0, 1\}.$$

Se $G = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$, então o resultado está provado. Caso contrário, repetindo esse processo, temos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $G = \langle v_0, \ldots, v_r \rangle$. De fato, se v_j e v_k são elementos de G como acima tais que $j \neq k$, então

$$v_j \not\equiv v_k \text{ mod } v_0,$$

isto é, v_j e v_k pertencem à classes diferentes módulo v_0 e, como o conjunto das classes de resto módulo v_0 tem v_0 elementos, temos que $r \leq v_0 - 1$ e o processo é finito, como queríamos. ■

Exemplo 2.18. Considere $G = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, \ldots\}$, que é um semigrupo. Temos que $v_0 = min\{g \in G \backslash \{0\}\} = 4$ e como existem elementos em G que não são múltiplos de 4, então 4 não gera G. Assim, tomamos $v_1 = min\{g \in G; g \not\equiv 4 \text{ mod } 4\} = 6$.

Veja que $13 \in G$ e $13 \notin \langle 4, 6 \rangle$, já que 13 é ímpar e os elementos em $\langle 4, 6 \rangle$ são pares. Daí, $v_2 = min\{g \in G; g \not\equiv v_i \text{ mod } 4, i = 0, 1\} = 13$. Vamos mostrar que

$$G = \langle 4, 6, 13 \rangle.$$

É claro que $\langle 4, 6, 13 \rangle \subset G$. Por outro lado, pela demonstração do lema anterior, temos que G tem no máximo 4 geradores. Basta então provar que não existe $v_3 \neq 4, 6, 13$ tal que $G = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$. De fato, como

$$4 \equiv 0 \text{ mod } 4, 6 \equiv 2 \text{ mod } 4 \text{ e } 13 \equiv 1 \text{ mod } 4,$$

se existisse tal v_3, teríamos que

$$v_3 \equiv 3 \text{ mod } 4.$$

Como 19 é o menor elemento de G congruente a 3 módulo 4, deveríamos ter que $v_3 = 19 = v_1 + v_2$ e, neste caso, v_3 seria obtido pelos geradores anteriores. Portanto, mostramos que $G \subset \langle 4, 6, 13 \rangle$ e, assim, $G = \langle 4, 6, 13 \rangle$.

Seja $G = \langle v_0, \ldots, v_r \rangle \subset \mathbb{N}$. Então existem $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}$ tais que todo elemento de G pode ser escrito da forma

$$\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_r v_r.$$

Iremos mostrar que quando G é um semigrupo com um condutor, seus elementos são escritos unicamente como uma combinação particular dos elementos $v_0, \ldots, v_r$.

Tome n_i e e_i com $i = 0, \ldots, r$ inteiros associados a $v_0, \ldots, v_r$ da seguinte forma:

$$e_0 = v_0 \text{ e } n_0 = 1, \tag{2.7}$$

$$e_i = mdc\{v_0, \ldots, v_i\} \text{ e } n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}, \text{ para todo } i = 1, \ldots, r. \tag{2.8}$$

O lema a seguir será fundamental para o que estudaremos adiante.

Lema 2.19. *Sejam $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$ com $mdc\{v_0, \ldots, v_r\} = 1$, n_i e e_i, com $i = 0, \ldots, r$ seus inteiros associados. Temos que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe uma solução única para a congruência*

$$m \equiv \sum_{i=1}^{r} s_i v_i \ mod\ v_0,$$

com $0 \leq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Demonstração: Para a existência da solução vamos fazer a prova por indução sobre r. Para $r = 1$ temos que, por hipótese, $e_1 = mdc\{v_0, v_1\} = 1$. Então

$$n_1 = \frac{e_0}{e_1} = v_0$$

e existem $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 = 1.$$

Logo,

$$m = m\lambda_0 v_0 + m\lambda_1 v_1.$$

Dividindo $m\lambda_1$ por v_0, existem $q, s_1 \in \mathbb{N}$, com $0 \leq s_1 < v_0 = n_1$, tais que

$$m\lambda_1 = qv_0 + s_1.$$

Desse modo, temos que

$$m \equiv s_1 v_1 \text{ mod } v_0,$$

com $0 \leq s_1 < n_1$.

Agora suponha que o resultado seja válido para r e vamos provar que vale para $r + 1$. Tome $v_0, \ldots, v_{r+1}$ naturais satisfazendo as hipóteses do lema em questão. Considere a sequência $v_i' = \frac{v_i}{e_r}$, $i = 0, \ldots, r$. Temos que $mdc\{v_0', \ldots, v_r'\} = 1$.

A sequência $(v'_i)_{i=0}^r$ satisfaz a suposição indutiva, isto é, para todo natural m' existem $s_i, \lambda \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq s_i < n'_i$ e $i = 1, \ldots, r$ tais que

$$m' = \sum_{i=1}^{r} s_i v'_i + \lambda v'_0, \tag{2.9}$$

onde

$$n'_i = \frac{e'_{i-1}}{e'_i} = \frac{mdc\{v'_0, \ldots, v'_{i-1}\}}{mdc\{v'_0, \ldots, v'_i\}} = \frac{\frac{mdc\{v_0,\ldots,v_{i-1}\}}{e_r}}{\frac{mdc\{v_0,\ldots,v_i\}}{e_r}} = \frac{mdc\{v_0, \ldots, v_{i-1}\}}{mdc\{v_0, \ldots, v_i\}} = \frac{e_{i-1}}{e_i} = n_i.$$

Por hipótese, existem inteiros $\lambda_0, \ldots, \lambda_{r+1}$ tais que $\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_{r+1} v_{r+1} = 1$. Logo,

$$m = \lambda'_0 v_0 + \ldots + \lambda'_{r+1} v_{r+1},$$

onde $\lambda'_i = m\lambda_i$. Dividindo λ'_{r+1} por e_r, temos que existem $q, s_{r+1} \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq s_{r+1} < e_r = n_{r+1}$ tais que $\lambda'_{r+1} = qe_r + s_{r+1}$. Assim,

$$m = \lambda'_0 v_0 + \ldots + (qe_r + s_{r+1})v_{r+1}.$$

Como e_r divide $v_0, \ldots, v_r$, então existe um inteiro m' tal que

$$m = m'e_r + s_{r+1}v_{r+1}.$$

Pela igualdade em (2.9), temos que m' é escrito em termos de v'_i e como $v_i = v'_i e_r$, $i = 0, \ldots, r$, então temos a existência da expressão do enunciado para $r + 1$.

Agora, veja que

$$\sharp\{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, 0 \leq \alpha_i < n_i\} = n_1 \ldots n_r = \frac{e_0}{e_1} \ldots \frac{e_{r-1}}{e_r} = e_0 = v_0.$$

Como a classe de todo $m \in \mathbb{N}$ módulo v_0 é representada por um único elemento de $\{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, 0 \leq \alpha_i < n_i\}$ temos a unicidade. De fato, suponha que para algum $m \in \mathbb{N}$ existam s_i e s'_i, $i = 1, \ldots, r$, com $s_i \neq s'_i$ para algum i, satisfazendo as condições do lema, isto é,

$$m \equiv \sum_{i=1}^{r} s_i v_i \bmod v_0 \text{ e } m \equiv \sum_{i=1}^{r} s'_i v_i \bmod v_0.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{r} s_i v_i \equiv \sum_{i=1}^{r} s'_i v_i \bmod v_0,$$

o que é um absurdo.

■

Como consequência do resultado anterior, destacamos:

Corolário 2.20. *Sejam $v_0, \ldots, v_r$ primos relativos. Então:*

1. *Todo número natural $m \in \mathbb{N}$ pode ser escrito unicamente da forma*
$$m = \sum_{i=0}^{r} s_i v_i,$$
com $0 \leq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$ e $s_0 \in \mathbb{Z}$.

2. *Se*
$$m > \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0,$$
então s_0 definido anteriormente é tal que $s_0 \geq 0$.

3. *Seja G o semigrupo em $\mathbb{N}$ gerado por $v_0, \ldots, v_r$. Então G tem condutor c e*
$$c \leq \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

Demonstração: O item 1 segue diretamente do lema anterior.

Para o item 2 basta ver que
$$\sum_{i=0}^{r} s_i v_i = m > \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 \geq \sum_{i=1}^{r} s_i v_i - v_0,$$
uma vez que $s_i \leq n_i - 1$. Logo, $s_0 v_0 > -v_0$, o que nos garante que $s_0 > -1$, ou seja, $s_0 \geq 0$.

Para o item 3 veja que, pelo item 1, se $m \in \mathbb{N}$, então
$$m = \sum_{i=0}^{r} s_i v_i,$$
com $0 \leq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$ e $s_0 \in \mathbb{Z}$. Além disso, pelo item 2 temos que se
$$m \geq \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1$$
então $s_0 \geq 0$, ou seja, $m \in G$. Assim, se $\sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 \notin G$, então
$$c = \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$
Caso contrário, se $\sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 \in G$ e $\sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 - 1 \notin G$, então
$$c = \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0.$$

Podemos continuar a repetir esse processo, mas de qualquer forma

$$c \leq \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

■

Note que pelo corolário anterior, temos que se $s_0 \geqslant 0$, então $m \in G$, mas a recíproca não é verdadeira, ou seja, se $m \in G$ não é verdade que $s_0 \geqslant 0$. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.21. Tome

$$G = \langle 8, 10, 11 \rangle = \{0, 8, 10, 11, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, \ldots\}.$$

Veja que $e_0 = 8$ $e_1 = 2$, $e_2 = 1$, $n_0 = 1$, $n_1 = 4$ e $n_2 = 2$. Além disso,

$$22 = -v_0 + 3v_1 + 0v_2 \in G,$$

mas $s_0 < 0$. Temos que G tem condutor igual a $26 \neq \sum_{i=1}^{2} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1 = 32$.

Mais adiante iremos considerar uma classe de semigrupos de $\mathbb{N}$ tal que a recíproca mencionada acima é verdadeira. Para isso, definiremos algumas noções e resultados a seguir.

Definição 2.22. *Sejam $v_0, \ldots, v_r$ uma sequência de números naturais relativamente primos e sejam $n_0, \ldots, n_r$ seus inteiros associados. Dizemos que a sequência é **ótima** se para todo $i = 1, \ldots, r$ tivermos que*

$$n_i v_i \in \langle v_0, \ldots, v_{i-1} \rangle.$$

Exemplo 2.23. Considere $G = \langle 4, 6, 13 \rangle$ como no Exemplo 2.18. Veja que $e_0 = 4$, $e_1 = 2$, $e_2 = 1$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$ e $n_2 = 2$. Além disso, temos que

$$c = 16 = \sum_{i=1}^{2} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1$$

e

$$n_1 v_1 = 12 \in \langle 4 \rangle,$$

$$n_2 v_2 = 26 \in \langle 4, 6 \rangle,$$

ou seja, G é gerado por uma sequência ótima.

Proposição 2.24. *Sejam $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$ uma sequência ótima. Se $G = \langle v_0, \ldots, v_r \rangle$ então:*

1. *Todo elemento $m \in G$ é unicamente representado na forma:*

$$m = \sum_{i=0}^{r} s_i v_i,$$

com $0 \leq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$ e $s_0 \in \mathbb{N}$.

2. *O condutor c de G é dado por*

$$c = \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

Demonstração:

1. Seja $m = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_r v_r \in G$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, r$. Sabemos que existem únicos $q_r, s_r \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_r < n_r$ tais que

$$\lambda_r = q_r n_r + s_r.$$

Temos assim que

$$m = s_r v_r + q_r n_r v_r + \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_{r-1} v_{r-1},$$

com $0 \leq s_r < n_r$. Como $v_0, \ldots, v_r$ é uma sequência ótima, temos que

$$q_r n_r v_r + \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_{r-1} v_{r-1} \in \langle v_0, \ldots, v_{r-1} \rangle.$$

Então existem $\lambda_i^r \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, r-1$ tais que

$$m = s_r v_r + \lambda_0^r v_0 + \ldots + \lambda_{r-1}^r v_{r-1}.$$

Repetindo esse processo para $\lambda_{r-1}^r, \ldots, \lambda_0^r$ temos que

$$m = \lambda_0' v_0 + s_1 v_1 + \ldots + s_r v_r,$$

com $\lambda_0', s_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_i < n_i$. Tomando $s_0 = \lambda_0'$ temos o desejado.

2. Sabemos, pelo Corolário 2.20, que

$$c \leq \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

Pelo item 1 desta proposição, temos que

$$\sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 \notin G.$$

E, pelo item 2 do Corolário 2.20, temos que todos os sucessores de

$$\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)v_i - v_0 + 1$$

estão em G. Então

$$c = \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

■

Uma outra propriedade de semigrupos numéricos que faremos uso é a que introduzimos a seguir.

Definição 2.25. *Seja G um semigrupo de $\mathbb{N}$ com um condutor c. Dizemos que G é simétrico, se*

$$\forall z \in \mathbb{Z}, z \in G \Leftrightarrow c - 1 - z \notin G.$$

O resultado abaixo nos dá condições equivalentes para que um semigrupo com condutor seja simétrico.

Proposição 2.26. *Seja G um semigrupo de $\mathbb{N}$ com um condutor c. Então os itens abaixo são equivalentes:*

1. *G é simétrico.*
2. $2|G \cap [0, c)| = c$.
3. $2|\mathbb{N} \backslash G| = c$.
4. $|\mathbb{N} \backslash G| = |G \cap [0, c)|$.

Demonstração: Observe que

$$(\mathbb{N} \backslash G) \cup (G \cap [0, c)) = [0, c) \cap \mathbb{N},$$

uma vez que

$$G = ([0, c) \cap G) \cup \{c, c + 1, c + 2 \ldots\}.$$

Além disso, claramente

$$\mathbb{N} \backslash G \cap (G \cap [0, c)) = \varnothing.$$

Logo,

$$|\mathbb{N} \backslash G| + |G \cap [0, c)| = |[0, c) \cap \mathbb{N}| = c.$$

Assim, é fácil ver que os itens $2, 3$ e 4 são equivalentes.

Agora considere a aplicação $\phi : [0, c) \cap \mathbb{N} \to [0, c) \cap \mathbb{N}$ definida por $\phi(x) = c - 1 - x$. Claramente temos que ϕ é bijetora. Temos que

$$\phi(G \cap [0, c)) \subset \mathbb{N} \backslash G \subset [0, c) \cap \mathbb{N},$$

já que G é semigrupo e $c - 1 \notin G$. Assim, temos que G é simétrico se, e somente se,

$$\phi(G \cap [0, c)) = \mathbb{N} \backslash G.$$

De fato, se G é simétrico e $c - 1 - x \in \mathbb{N} \backslash G$, então $x \in G$. Além disso, se a igualdade ocorre, então todo elemento $c - 1 - x \notin G$ tem como imagem x, isto é, $x \in G$. Portanto, os itens 1 e 4 são equivalentes. ■

Exemplo 2.27. Pela proposição anterior, temos que o semigrupo do Exemplo 2.18 e retomado no Exemplo 2.23 é um semigrupo simétrico e o semigrupo do Exemplo 2.21 não é um exemplo simétrico.

Os elementos de $\mathbb{N} \backslash G$ são chamados de **lacunas** do semigrupo G. Observe, pela proposição anterior, que se G é simétrico, então c é par e há a mesma quantidades de lacunas e não lacunas de G em $[0, c)$.

Proposição 2.28. *Todo semigrupo G gerado por uma sequência ótima é simétrico.*

Demonstração: Considere $G = \langle v_0, \ldots, v_r \rangle$ com condutor c, em que $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$ é uma sequência ótima. Perceba que se $z \in G$, então $c - 1 - z \notin G$, pois caso contrário $c - 1 \in G$, o que não ocorre. Suponha que $c - 1 - x \notin G$, com $x \in \mathbb{N}$. Pelo item 2 da Proposição 2.24, temos que

$$c = \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

Segue do item 1 da Corolário 2.20 que todo $x \in \mathbb{N}$ é escrito unicamente da forma

$$x = \sum_{i=0}^{r} s_i v_i,$$

com $0 \leq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$ e $s_0 \in \mathbb{Z}$. Então

$$c - 1 - x = \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1 - s_i)v_i - (s_0 + 1)v_0.$$

Como $0 \leq n_i - 1 - s_i < n_i$, então $-(s_0 + 1) < 0$, já que $c - 1 - x \notin G$. Daí, $s_0 > -1$, isto é, $s_0 \geq 0$. Logo, pela Proposição 2.24, temos que $x \in G$ e G é simétrico. ■

No exemplo a seguir, vamos mostrar que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira, isto é, nem todo semigrupo simétrico é gerado por uma sequência ótima.

Exemplo 2.29. Considere

$$G = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle = \{0, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$$

Temos que $c = 10$ e

$$|\mathbb{N} \setminus G| = 5 = |G \cap [0, c)|,$$

logo G é simétrico. Por outro lado, veja que $e_0 = 5$, $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_3 = 1$, $n_0 = 1$, $n_1 = 5$, $n_2 = 1$ e $n_3 = 1$. Daí,

$$n_2 v_2 = 7 \notin \langle 5, 6 \rangle,$$

isto é, G não é gerado por uma sequência ótima.

O conceito a seguir é central nestas notas e se conectará com o estudo de curvas planas.

Definição 2.30. *Sejam $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$ uma sequência de números relativamente primos, e_i e n_i, $i = 0, \ldots, r$ os inteiros associados. Dizemos que $v_0, \ldots, v_r$ é uma **sequência fortemente crescente** se*

$$v_i > v_{i-1} n_{i-1},$$

para todo $i = 1, \ldots, r$.

Exemplo 2.31. Temos que

$$G = \langle 4, 6, 13 \rangle$$

dado no Exemplo 2.23 é gerado por um sequência fortemente crescente, mas os Exemplos 2.21 e 2.29 não são gerados por uma sequência fortemente crescente.

Observe que se $v_0, \ldots, v_r$ é uma sequência fortemente crescente, então tal sequência é uma sequência crescente. De fato, se $i > j$, então $j = i - k$, para algum $k \in \{1, \ldots, i\}$. Daí

$$v_i > v_{i-1} n_{i-1} > v_{i-2} n_{i-2} n_{i-1} > \ldots > v_{i-k} n_{i-k} \ldots n_{i-1} \geq v_{i-k} = v_j.$$

Lema 2.32. *Sejam $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$ uma sequência fortemente crescente. Então*

$$v_{i+1} > \sum_{j=0}^{i} (n_j - 1) v_j,$$

para todo $i = 0, \ldots, r - 1$.

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por indução em i. Veja que para $i = 0$, temos que

$$v_1 > n_0 v_0 > n_0 v_0 - v_0 = (n_0 - 1)v_0,$$

como desejado.

Suponha que o resultado seja válido para i e vamos mostrar para $i + 1$. Temos que

$$v_{i+1} > n_i v_i = (n_i - 1)v_i + v_i > (n_i - 1)v_i + \sum_{j=0}^{i-1}(n_j - 1)v_j = \sum_{j=0}^{i}(n_j - 1)v_j.$$

Logo, temos o resultado. ■

Proposição 2.33. *Toda sequência de números naturais fortemente crescente é uma sequência ótima. Em particular, o semigrupo gerado pela sequência fortemente crescente é simétrico.*

Demonstração: Seja $v_0, \ldots, v_r \in \mathbb{N}$ uma sequência fortemente crescente e considere a sequência

$$v_0' = \frac{v_0}{e_i}, \ldots, v_i' = \frac{v_i}{e_i}.$$

Já vimos que

$$n_i' = \frac{mdc\{v_0', \ldots, v_{i-1}'\}}{mdc\{v_0', \ldots, v_i'\}} = \frac{mdc\{v_0, \ldots, v_{i-1}\}}{mdc\{v_0, \ldots, v_i\}} = n_i.$$

Pelo lema anterior, temos que

$$n_i v_i \geqslant v_i > \sum_{j=1}^{i-1}(n_j - 1)v_j - v_0.$$

Logo,

$$n_i' v_i' > \sum_{j=1}^{i-1}(n_j' - 1)v_j' - v_0'.$$

Pelo item 2 do Corolário 2.20, temos que

$$n_i' v_i' = \sum_{j=0}^{i-1} s_j' v_j',$$

com $s_0' \geqslant 0$. Logo,

$$n_i' v_i' \in \langle v_0', \ldots, v_{i-1}' \rangle.$$

Assim,

$$n_i v_i \in \langle v_0, \ldots, v_{i-1} \rangle,$$

ou seja, $v_0, \ldots, v_r$ é uma sequência ótima. Além disso, pela Proposição 2.28, temos, em particular, que G é simétrico.

■

Exemplo 2.34. Seja $G = \langle 4, 6, 7 \rangle$. Veja que $e_0 = 4$, $e_1 = 2$, $e_2 = 1$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$ e $n_2 = 2$. Assim, G é gerado por uma sequência ótima, mas que não é fortemente crescente, já que $n_1 v_1 = 12 \in \langle 4 \rangle$, $n_2 v_2 = 14 \in \langle 4, 6 \rangle$, mas $v_2 = 7 < 12 = n_1 v_1$.

2.3 Semigrupo de valores de uma curva plana

Nesta seção abordaremos algumas propriedades do semigrupo de valores de uma curva C_f irredutível, onde $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

O semigrupo Γ_f associado a C_f tem um condutor, que denotaremos por c_f e, pela Proposição 7.18 de [H], temos que

$$c_f = I(f_x, f_y) := dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f_x, f_y \rangle} = \mu_f,$$

onde μ_f é chamado **número de Milnor** de C_f.

Proposição 2.35. *Seja Γ_f o semigrupo de uma curva plana irredutível C_f e c_f o condutor de Γ_f. Se $h \in \mathbb{C}\{t\}$ é tal que $\nu_f(h) \geq c_f$, então $h \in \mathcal{O}_f$.*

Demonstração: Uma vez que $\nu_f(h) \geq c_f$, existem $h_1 \in \mathcal{O}_f$ com $\nu_f(h_1) = \nu_f(h)$ e $a_1 \in \mathbb{C}$ tais que $\nu_f(h - a_1 h_1) > \nu_f(h) \geq c_f$.

Repetindo o argumento, encontramos $h_2 \in \mathcal{O}_f$ com $\nu_f(h_2) = \nu_f(h - a_1 h_1)$ e $a_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\nu_f(h - a_1 h_1 - a_2 h_2) > \nu_f(h - a_1 h_1) > \nu_f(h) \geq c_f$.

Procedendo deste modo, obtemos $h_i \in \mathcal{O}_f$ e $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}^*$ tais que

$$\nu_f(h - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i h_i) = \infty,$$

implicando que $h - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i h_i = 0$, ou seja, $h = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i h_i \in \mathcal{O}_f$. ■

Observe que o menor elemento não nulo de Γ_f é $mult(f) = n$. De fato, seja $(t^n, \phi(t))$ uma parametrização de C_f e tome $h \in \mathbb{C}\{x, y\} \setminus \langle f \rangle$ não invertível. Então $h \in \langle x, y \rangle$, isto é,

$$h = h_1 x + h_2 y,$$

para alguns $h_1, h_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Uma vez que

$$\nu_f(y) = mult(\phi(t)) \geq n = mult(t^n) = \nu_f(x)$$

temos que

$$\nu_f(h) = mult(h(t^n, \phi(t))) \geq n$$

para todo $h \in \mathbb{C}\{x, y\} \setminus \langle f \rangle$ não invertível. Perceba ainda que $x \notin \langle f \rangle$, já que f é um polinômio de Weierstrass em y. Logo, temos que x é um elemento de $\mathcal{O}_f$ com $\nu_f(x) = n$, como queríamos.

Observação 2.36. Para os estudos a seguir observe que toda curva parametrizada por $(t^n, \phi(t))$, com

$$\phi(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i$$

pode ser reparametrizada por $(t^n, \tilde{\phi}(t))$, com

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i$$

por meio de uma mudança de coordenadas. De fato, sejam $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e C_f uma curva parametrizada por $(t^n, \phi(t))$. Note que para todo $n \leq i < \beta_1$ temos que n divide i, ou seja, $i/n \in \mathbb{N}$. Agora considere a mudança de coordenadas

$$\Phi(x, y) = (x, y + \sum_{n \leq i < \beta_1} a_i x^{i/n}).$$

e veja que

$$f(\Phi(x, y)) = f(x, y + \sum_{n \leq i < \beta_1} a_i x^{i/n}) := \tilde{f}(x, y).$$

Temos que $(t^n, \tilde{\phi}(t))$, onde

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i,$$

é uma parametrização de $C_{\tilde{f}}$, já que

$$\tilde{f}(t^n, \tilde{\phi}(t)) = \tilde{f}(t^n, \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i) = f(t^n, \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i + \sum_{n \leq i < \beta_1} a_i t^i) = f(t^n, \phi(t)) = 0.$$

Pela observação anterior, podemos considerar $(t^n, \phi(t))$, com $\phi(t) = \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i$, uma parametrização de f e $(\beta_0, \ldots, \beta_g)$ os expoentes característicos de C_f. Para nossos estudos defina $P_1 = 0$,

$$P_j = \sum_{\beta_1 \leq i < \beta_j} a_i t^i,$$

para $j = 2, \ldots, g$ e tome

$$G_j = \{\varsigma \in \mathbb{C}; \varsigma^{\varepsilon_j} = 1\}$$

o grupo das ε_j-ésimas raízes da unidade. Temos que

$$G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_g = \{1\},$$

uma vez que ε_j divide ε_{j-1}.

Para cada $j = 2, \ldots, g$, se $\overline{\varsigma} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}$, então definimos

$$P_j(\overline{\varsigma}t) := P_j(\varsigma t).$$

Considere $m_0 := 1$ e

$$m_j = \frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j}$$

a ordem do grupo quociente $\frac{G_{j-1}}{G_j}$, para todo $j = 1, \ldots, g$. A partir disso, temos o resultado a seguir:

Proposição 2.37. *Com as notações anteriores temos:*

1. $m_j > 1$ *para* $1 \leqslant j \leqslant g$;
2. $m_0 m_1 \ldots m_i \varepsilon_i = \varepsilon_0 = n$. *Em particular,* $m_0 \ldots m_g = n$;
3. $m_{i+1} \ldots m_g = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_g} = \varepsilon_i$.

Demonstração:

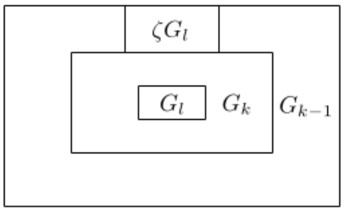
1. Como a sequência ε_j, com $j = 1, \ldots, g$, é decrescente, temos que $m_j > 1$.
2. Veja que
$$m_0 m_1 m_2 \ldots m_i \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ldots \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i}\varepsilon_i = \varepsilon_0 = n.$$
Em particular, como $m_g = \varepsilon_{g-1}$, então tomando $i = g - 1$ temos que $m_0 \ldots m_g = n$.
3. Segue de forma análoga ao item 2.

■

Lema 2.38. *Seja* $\varsigma \in G_{k-1} \backslash G_k$. *Se* $l \geq k \geq 1$, *então* $\varsigma G_l \subset G_{k-1} \backslash G_k$. *Em particular,* $G_{k-1} \backslash G_k$ *é particionado por*

$$\frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_l}$$

classes laterais disjuntas de G_l.



Demonstração: Por hipótese, temos que $\varsigma^{\varepsilon_{k-1}} = 1$ e $\varsigma^{\varepsilon_k} \neq 1$. Se $l \geq k > k-1$ e $\delta \in G_l$, então $G_l \subset G_{k-1}$ e $(\varsigma\delta)^{\varepsilon_{k-1}} = 1$. Além disso, $G_l \subset G_k$ e, daí,

$$(\varsigma\delta)^{\varepsilon_k} = \varsigma^{\varepsilon_k}\delta^{\varepsilon_k} = \varsigma^{\varepsilon_k} \neq 1,$$

ou seja, $\varsigma\delta \in G_{k-1} \setminus G_k$, como queríamos.

Em particular, para todo $\varsigma \in G_{k-1} \backslash G_k$ temos claramente que

$$\sharp\{\varsigma G_l\} = \sharp\{G_l\} = \varepsilon_l.$$

Além disso, $\sharp\{G_{k-1} \backslash G_k\} = \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$. Logo, $G_{k-1} \backslash G_k$ é particionado por

$$\frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_l}$$

classes laterais de G_l. ■

Para o próximo resultado, a seguinte notação se faz necessária.

Definição 2.39. *Para cada $j = 1, \ldots, g$ definamos*

$$f_j(x, y) = \prod_{\overline{\varsigma} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} (y - P_j(\overline{\varsigma} x^{\frac{1}{n}})) \in \mathbb{C}\{x\}[y].$$

Observe que

$$deg_y f_j = \mid \frac{G_0}{G_{j-1}} \mid = \frac{|G_0|}{|G_{j-1}|} = \frac{n}{\varepsilon_{j-1}}.$$

Além disso, f_j é irredutível, já que é o polinômio minimal de $P_j(x^{\frac{1}{n}})$ sobre o corpo de frações $\mathbb{C}(x)$ de $\mathbb{C}\{x\}$.

Temos que $v_0 = \beta_0 = n$ e $f_j \notin \langle f \rangle$, já que $deg_y(f_j) < n$. Logo, podemos definir $v_j := \nu_f(f_j)$, $j = 1, \ldots, g$. Mais ainda, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.40. *Seja C_f um ramo plano e $(\beta_0, \ldots, \beta_g)$ seus expoentes característicos. Temos que*

1. *$v_1 = \beta_1$ e*
$$v_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}} \beta_k + \beta_j,$$
para todo $j = 2, \ldots, g$.

2. *$\varepsilon_j = mdc(\varepsilon_{j-1}, v_j)$. Em particular, $\varepsilon_j = e_j$ e $m_i = n_i$, onde n_i e e_j definidos em (2.7) e (2.8).*

3. *Se $h \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ e $deg_y(h) < n_0 \ldots n_j = \frac{n}{\varepsilon_j}$, então $\nu_f(h) \in \langle v_0, \ldots, v_j \rangle$. Em particular, $\Gamma_f = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$.*

Demonstração:

1. Para $j = 1$ temos
$$\frac{G_0}{G_{j-1}} = \frac{G_0}{G_0} = \{\overline{1}\}$$
e $P_1 = 0$. Assim,
$$v_1 = \nu_f(f_1) = \nu_f(y) = \beta_1.$$
Agora, sabemos que
$$v_j = \nu_f(f_j) = \nu_f \left(\prod_{\overline{\varsigma} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} (y - P_j(\overline{\varsigma} x^{\frac{1}{n}})) \right) = \sum_{\overline{\varsigma} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} \nu_f(y - P_j(\overline{\varsigma} t)).$$
Veja que
$$\frac{G_0}{G_{j-1}} = \frac{(G_0 \setminus G_1)\dot{\cup}(G_1 \setminus G_2)\dot{\cup} \ldots \dot{\cup}(G_{j-2} \setminus G_{j-1})\dot{\cup} \ldots \dot{\cup}(G_{g-1} \setminus G_g)\dot{\cup}\{1\}}{G_{j-1}}.$$
Como $G_i \subset G_{j-1}$ para todo $i \geq j-1$ temos
$$\frac{(G_{j-1} \setminus G_j)\dot{\cup} \ldots \dot{\cup}(G_{g-1} \setminus G_g)\dot{\cup}\{1\}}{G_{j-1}} = \{\overline{1}\}.$$
Assim,
$$\frac{G_0}{G_{j-1}} = \frac{(G_0 \setminus G_1)\dot{\cup}(G_1 \setminus G_2)\dot{\cup} \ldots \dot{\cup}(G_{j-2} \setminus G_{j-1})}{G_{j-1}} \dot{\cup}\{\overline{1}\}.$$
Já vimos, pelo Lema 2.38, que para todo $k \leq j-1$ o conjunto $G_{k-1} \setminus G_k$ é particionado por
$$\frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}}$$
classes laterais disjuntas de G_{j-1}.

Se $\varsigma \in G_{k-1} \setminus G_k$, então

$$\nu_f(y - P_j(\overline{\varsigma}t)) = mult\left(\sum_{i=\beta_1}^{\beta_k-1} a_i t^i + \sum_{i=\beta_k}^{\beta_j-1} a_i t^i + \sum_{i=\beta_j}^{\infty} a_i t^i - \sum_{i=\beta_1}^{\beta_k-1} \varsigma^i a_i t^i - \sum_{i=\beta_k}^{\beta_j-1} \varsigma^i a_i t^i\right).$$

Como $\varsigma \in G_{k-1}$, então $\varsigma^i = 1$, para todo $i < \beta_k$, já que $G_i \supset G_{k-1}$, para todo $i < \beta_k$. Além disso, como $\varepsilon_k = mdc(\beta_0, \ldots, \beta_k)$ e $\varsigma \notin G_k$, então $(1 - \varsigma^{\beta_k}) \neq 0$. Logo,

$$\nu_f(y - P_j(\overline{\varsigma}t)) = mult\left(\sum_{i=\beta_k}^{\beta_j-1} (1 - \varsigma^i) a_i t^i + \sum_{i=\beta_j}^{\infty} a_i t^i\right) = \beta_k.$$

Se $\overline{\varsigma} = \overline{1}$, então $P_j(\overline{\varsigma}t) = P_j(\overline{1}t) = P_j(t)$ e, assim,

$$\nu_f(y - P_j(\overline{\varsigma}t)) = \nu_f(y - P_j(t)) = \nu_f\left(\sum_{i=\beta_1}^{\beta_j-1} a_i t^i + \sum_{i=\beta_j}^{\infty} a_i t^i - \sum_{i=\beta_1}^{\beta_j-1} a_i t^i\right) = \beta_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} v_j = \nu_f(f_j) &= \textstyle\sum_{\overline{\varsigma} \in \frac{G_0}{G_{j-1}}} \nu_f(y - P_j(\overline{\varsigma}t)) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{\overline{\varsigma} \in \frac{G_{k-1}}{G_k}} \nu_f(y - P_j(\overline{\varsigma}t)) + \nu_f(y - P_j(t)) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}}\right) \beta_k + \beta_j, \end{aligned}$$

como queríamos.

2. Temos que $\varepsilon_j = mdc(\varepsilon_{j-1}, \beta_j) = mdc(\beta_0, \ldots, \beta_j)$, ou seja, pelo item 1, ε_j divide v_j e, portanto,

$$\varepsilon_j \leq mdc(\varepsilon_{j-1}, v_j).$$

Por outro lado, temos que $d := mdc(\varepsilon_{j-1}, v_j)$ divide v_j e ε_{j-1}, o que implica que d divide v_j e β_i, para todo $i = 0, \ldots, j-1$. Logo d, pelo item 1, divide β_j e, assim, divide β_i, $i = 0, \ldots, j$. Logo,

$$d \leq \varepsilon_j$$

e, portanto, são iguais.

A segunda afirmação segue diretamente de $\varepsilon_j = mdc(\varepsilon_{j-1}, v_j)$.

3. Seja $h \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ tal que $deg_y < \dfrac{n}{\epsilon_j}$. Demonstraremos por indução em j. Veja que para $j = 0$, temos que $deg_y(h) < 1$, ou seja, $deg_y(h) = 0$, o que implica que podemos escrever h da forma

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

Assim,

$$h(t^n, \phi(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{ni}$$

e daí $\nu_f(h) = nj$, para algum $j \in \mathbb{N}$, ou seja, $\nu_f(h) \in \langle v_0 \rangle$, como desejado.

Para $j = 1$, tome

$$h = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) y^i$$

com $k < n_0 n_1$. Veja que

$$\nu_f(a_i(x)y^i) = i\beta_1 + mult(a_i(x))n \equiv i\beta_1 \bmod n.$$

Agora, tome $i, l < n_0 n_1$ com $i \neq l$. Temos que

$$\nu_f(a_i(x)y^i) \neq \nu_f(a_l(x)y^l).$$

De fato, se ocorresse a igualdade teríamos que

$$\nu_f(a_i(x)y^i) \equiv \nu_f(a_l(x)y^l) \bmod n.$$

Daí,

$$(i - l)\beta_1 \equiv 0 \bmod n,$$

logo

$$(i - l)\frac{\beta_1}{\varepsilon_1} = \lambda \frac{n}{\varepsilon_1} = \lambda n_1 = \lambda n_0 n_1$$

e como $\varepsilon_1 = mdc(n, \beta_1)$ temos que $\frac{\beta_1}{\varepsilon_1}$ e $\frac{n}{\varepsilon_1}$ são primos relativos, ou seja, $n_0 n_1 = n_1$ deveria dividir $i - l$, o que é um absurdo já que $0 \neq i - l < n_0 n_1 = n_1$.

Temos que

$$\nu_f(h) = min\{\nu_f(a_0(x)), \ldots, \nu_f(a_k(x)y^k)\} = \nu_f(a_i(x)y^i),$$

para algum $i \in \{0, \ldots, k\}$. Logo,

$$\nu_f(h) \in \beta_1 \mathbb{N} + n\mathbb{N} = \langle v_0, v_1 \rangle,$$

como queríamos.

Agora, suponha que o resultado seja válido para $j - 1$ e vamos mostrar que o mesmo vale para j. Tome

$$h = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) y^i \in \mathbb{C}\{x\}[y]$$

com $k < n_0 \dots n_j = n_1 \dots n_j$. Pelo Teorema da divisão de Weierstrass temos que existem $q_0 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e $A_0 \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, com $deg_y(A_0) < deg_y(f_j)$ tais que

$$h = f_j q_0 + A_0.$$

Analogamente, temos que existem $q_1 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e $A_1 \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, com $deg_y(A_1) < deg_y(f_j)$ tais que

$$q_0 = f_j q_1 + A_1.$$

Assim,

$$h = A_0 + f_j A_1 + f_j^2 q_1.$$

Repetindo esse processo para todo q_i e expandindo h em potências de f_j, temos

$$h = \sum_{i=0}^{s} A_i(x, y) f_j^i,$$

para algum $s < n_j$ e $deg_y(A_i(x, y)) < n_j$, para todo $i = 0, \dots, s$.
Por hipótese de indução temos que

$$\nu_f(A_i(x, y)) \in \langle v_0, \dots, v_{j-1} \rangle,$$

para todo $i = 0, \dots, s$. Além disso, pelo item 2, $\varepsilon_{j-1} = mdc\{v_0, \dots, v_{j-1}\}$. Então segue que

$$\nu_f(A_i(x, y)) \equiv 0 \bmod \varepsilon_{j-1}.$$

Veja que

$$\nu_f(A_i(x, y) f_j^i) \equiv i v_j \equiv i \beta_j \bmod \varepsilon_{j-1}.$$

Tome $i, l < n_j$, com $i \neq l$. Então

$$\nu_f(A_i(x, y) f_j^i) \neq \nu_f(A_l(x, y) f_j^l).$$

De fato, se a igualdade ocorresse teríamos que

$$(i - l)\beta_j \equiv 0 \bmod \varepsilon_{j-1}$$

e, daí

$$(i - l)\frac{\beta_j}{\varepsilon_j} = \lambda \frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j} = \lambda n_j,$$

mas como $\varepsilon_j = mdc(\beta_j, \varepsilon_{j-1})$, então $\frac{\beta_j}{\varepsilon_j}$ e n_j são primos relativos, ou seja, n_j deveria dividir $i - l$, o que é um absurdo já que $0 \neq i - l < n_j$.

Logo, existe $i \in \{0, \dots, s\}$ tal que

$$\nu_f(h) = \nu_f(A_i(x, y) f_j^i) \in \langle v_0, \dots, v_j \rangle.$$

Em particular, seja $\nu_f(h) \in \Gamma_f$, com $h \in \mathbb{C}\{x,y\}\backslash\langle f\rangle$. Então, pelo Teorema da divisão de Weierstrass, existem $q \in \mathbb{C}\{x,y\}$ e $h_1 \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, com $deg_y(h_1) < n$ tais que

$$h = fq + h_1.$$

Assim, substituindo a parametrização $(t^n, \phi(t))$ temos que

$$h(t^n, \phi(t)) = h_1(t^n, \phi(t)).$$

Logo, $\nu_f(h) = \nu_f(h_1)$. Tomando $j = g$ e como $deg_y(h_1) < n = n_0 n_1 \ldots n_g$ temos, pelo provado acima, que

$$\nu_f(h) = \nu_f(h_1) \in \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$$

e, portanto, $\Gamma_f \subset \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$. Além disso, uma vez que $v_j \in \Gamma_f$, para todo $0 \leq j \leq g$ e como Γ_f é um semigrupo, então $\langle v_0, \ldots, v_g\rangle \subset \Gamma_f$. Logo, $\Gamma_f = \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$.

■

Veja que

$$v_{j+1} = n_j v_j - \beta_j + \beta_{j+1}, \tag{2.10}$$

para todo $j = 0, \ldots, g$.

De fato,

$$\begin{aligned} n_j v_j - \beta_j + \beta_{j+1} &= \tfrac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{j-1}\left(\tfrac{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}}\right)\beta_k + \beta_j\right) - \beta_j + \beta_{j+1} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{j-1}\left(\tfrac{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)\beta_k + (\tfrac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j} - 1)\beta_j + \beta_{j+1} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{j}\left(\tfrac{\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)\beta_k + \beta_{j+1} \\ &= v_{j+1}. \end{aligned}$$

Podemos ainda observar que v_j é o menor elemento não nulo de Γ_f e não divisível por ε_{j-1}. De fato, suponha que exista $k \in \Gamma_f$ tal que $k < v_j$ e ε_{j-1} não divida k. Como $k \in \Gamma_f$, então

$$k = b_0 v_0 + \ldots + b_g v_g,$$

com $b_i \in \mathbb{N}$. Além disso, $v_i < v_l$ sempre que $i < l$, uma vez que $\beta_i < \beta_l$. Logo,

$$k = b_0 v_0 + \ldots + b_{j-1} v_{j-1},$$

mas, nesse caso, ε_{j-1} dividiria k, o que é um absurdo.

As relações apresentadas anteriormente permitem obter o seguinte resultado.

Teorema 2.41. *Seja C_f um ramo plano. Então Γ_f e seus expoentes característicos se determinam mutuamente.*

Demonstração: Lembremos que $\beta_0 = v_0$ e $\beta_1 = v_1$. Uma vez que temos os expoentes característicos de C_f conseguimos obter Γ_f, já que $\Gamma_f = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$ e, pelo teorema anterior, $v_0, \ldots, v_g$ são determinados pelos expoentes característicos.

Por outro lado, temos que

$$v_{j+1} = n_j v_j - \beta_j + \beta_{j+1}$$

de onde segue, a partir de Γ_f e seus geradores, que conseguimos determinar os expoentes característicos de C_f. ■

Como vale (2.10) e $\beta_{j+1} - \beta_j > 0$, então $v_{j+1} > n_j v_j$, para todo $j \in \{0, \ldots, g\}$, ou seja, os geradores de Γ_f formam uma sequência fortemente crescente e, portanto, Γ_f é um semigrupo simétrico. Além disso, v_i não pode ser escrito como combinação com coeficientes naturais de $v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_g$.

De fato, como $v_i < v_l$ quando $i < l$, se

$$v_i = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1},$$

teríamos que ε_{i-1} dividiria v_i, o que é um absurdo.

O teorema a seguir é um dos resultados centrais no que se refere à equivalência topológica e afirma que o semigrupo de uma curva, assim como os expoentes característicos, são invariantes topológicos completos. A demonstração envolve o uso de nós tóricos e sua apresentação nos desviaria de nosso objetivo principal.

Teorema 2.42. *Dois ramos planos são topologicamente equivalentes se, e somente se, eles possuem os mesmos expoentes característicos ou, equivalentemente, possuem o mesmo semigrupo de valores.*

Demonstração: Veja [BK]. ■

Capítulo 3

Equivalência Analítica

Anteriormente abordamos invariantes topológicos para curvas planas. No que segue, vamos apresentar invariantes com respeito à equivalência analítica. Os invariantes que apresentaremos se destacam por serem ferramenta central na classificação analítica de ramos planos. Para tanto, vamos introduzir alguns conceitos.

Definição 3.1. *Chamamos de álgebra de Tjurina associada a* $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ *o quociente*

$$\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{\langle f, f_x, f_y\rangle}.$$

Mather e Yau, veja [MY], mostraram que a álgebra de Tjurina determina a classe analítica da curva C_f, no sentido de que duas curvas são analiticamente equivalentes se, e somente se, suas álgebras de Tjurina são isomorfas (como $\mathbb{C}$-álgebras).

Dizemos que um conjunto A_f é invariante analítico de C_f sempre que C_f analiticamente equivalente a C_g implicar que $A_f = A_g$.

Definição 3.2. *Definimos o número de Tjurina de* f *ou de* C_f *como*

$$\tau_f = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle f_x, f_y\rangle} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{\langle f, f_x, f_y\rangle}.$$

Como álgebras isomorfas têm a mesma dimensão, segue que o número de Tjurina é um invariante analítico. Além disso, o invariante τ_f pode ser recuperado por meio do semigrupo de valores e de um outro invariante analítico que passaremos a descrever.

Vamos denotar por

$$\Omega^1 = \mathbb{C}\{x,y\}dx + \mathbb{C}\{x,y\}dy$$

o conjunto das 1-formas holomorfas em $\mathbb{C}^2$. Temos que Ω^1 é um $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo. De fato, sejam $\omega_1 = h_1dx + g_1dy, \omega_2 = h_2dx + g_2dy \in \Omega^1$ e $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Temos que

$$\omega_1 + \omega_2 = (h_1 + h_2)dx + (g_1 + g_2)dy \in \Omega^1$$

e

$$h\omega_1 = h(h_1dx + g_1dy) = hh_1dx + hg_1dy \in \Omega^1,$$

como queríamos.

Para todo $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ definimos a diferencial de f por $df = f_x dx + f_y dy \in \Omega^1$ e denotamos

$$F(f) = f\Omega^1 + \mathbb{C}\{x,y\}df.$$

Veja que $F(f) \subset \Omega^1$. Também temos que se

$$z_1 = f \cdot (h_1 dx + g_1 dy) + h \cdot df, z_2 = f \cdot (h_2 dx + g_2 dy) + g \cdot df \in F(f)$$

e $p \in \mathbb{C}\{x,y\}$, então

$$z_1 + z_2 = f \cdot ((h_1 + h_2)dx + (g_1 + g_2)dy) + (h + g) \cdot df \in F(f)$$

e

$$pz_1 = f \cdot (ph_1 dx + pg_1 dy) + ph \cdot df.$$

Logo, $F(f)$ é um $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo, ou ainda, como $F(f) \subset \Omega^1$, então $F(f)$ é um $\mathbb{C}\{x,y\}$-submódulo de Ω^1.

Definição 3.3. *Definimos o módulo de diferenciais de Kähler de C_f como o conjunto*

$$\Omega_f := \Omega_{\mathcal{O}_f/\mathbb{C}} = \frac{\Omega^1}{F(f)} = \{\overline{\omega} := \omega + F(f),\ \omega \in \Omega^1\}.$$

Observe que Ω_f é um $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo. De fato, sejam $\overline{\omega_1} = \omega_1 + F(f)$, $\overline{\omega_2} = \omega + F(f) \in \Omega_f$ e $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Temos que

$$\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} = (\omega_1 + \omega_2) + F(f) \in \Omega_f$$

e

$$h\overline{\omega_1} = h\omega_1 + F(f) \in \Omega_f,$$

como queríamos.

Além disso, Ω_f também é um $\mathcal{O}_f$-módulo, já que se $\overline{\omega} = \omega + f\omega_1 + h_1 df \in \Omega_f$ e $\overline{g} = g + hf \in \mathcal{O}_f$, então $\overline{g\omega}$ se expressa por

$$(g+hf)(\omega+f\omega_1+h_1df) = g\omega+fg\omega_1+gh_1df+fh\omega+f^2h\omega_1+hh_1fdf = g\omega+F(f) \in \Omega_f.$$

Definição 3.4. *O submódulo de torção de Ω_f é o conjunto*

$$T_f = \{\overline{\omega} \in \Omega_f; \overline{h}\overline{\omega} = \overline{0} \text{ em } \Omega_f, \text{ para algum } \overline{h} \in \mathcal{O}_f \backslash \{\overline{0}\}\}.$$

Temos que T_f é um $\mathcal{O}_f$-módulo. De fato, sejam $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2} \in T_f$ e $\overline{h} \in \mathcal{O}_f$. Então existem $\overline{h_1}, \overline{h_2} \in \mathcal{O}_f \backslash \{\overline{0}\}$ tais que $\overline{h_1}\overline{\omega_1} = \overline{0} = \overline{h_2}\overline{\omega_2}$. Temos que $\overline{h_1}\ \overline{h_2} \neq \overline{0}$, uma vez que $\mathcal{O}_f$ é um domínio. Logo,

$$\overline{h_1}\ \overline{h_2}(\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}) = (\overline{h_1}\overline{\omega_1})\overline{h_2} + (\overline{h_2}\overline{\omega_2})\overline{h_1} = \overline{0}$$

e, assim, $\overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} \in T_f$. Além disso, $\overline{h_1}(\overline{h}\overline{\omega_1}) = \overline{h}(\overline{h_1}\overline{\omega_1}) = \overline{0}$, ou seja, $\overline{h}\overline{\omega_1} \in T_f$.

Exemplo 3.5. É fácil ver que para todo f temos que $\overline{df} \in \Omega_f$ está em T_f, já que $df \in F(f)$ e, assim, $\overline{h}\,\overline{df} = \overline{h0} = \overline{0}$, para todo $\overline{h} \in \mathcal{O}_f$.

Exemplo 3.6. Sejam $f = y^n - x^m \in \mathbb{C}\{x,y\}$, com $1 < n < m$ e $\omega = nxdy - mydx \in \Omega^1$. Temos que $\overline{0} \neq \overline{\omega} \in \Omega_f$, pois caso contrário $\omega \in F(f)$, isto é, existiriam $h \in \mathbb{C}\{x,y\}$ e $g_1dx + g_2dy \in \Omega^1$ tais que

$$\omega = f \cdot (g_1dx + g_2dy) + h \cdot (ny^{n-1}dy - mx^{m-1}dx).$$

Logo, $nx = nhy^{n-1} + fg_2$ e $-my = -mhx^{m-1} + fg_1$, o que é um absurdo.

Além disso, como $mult(y^{n-1}) = n - 1 < n = mult(f)$, então $\overline{y}^{n-1} \in \mathcal{O}_f \backslash \{\overline{0}\}$. Assim,

$$\overline{y}^{n-1}\overline{\omega} = \overline{y}^{n-1}(\overline{nxdy - mydx}) = \overline{ny^{n-1}xdy - my^n dx}.$$

Veja ainda que $\overline{f} = \overline{0}$ em $\mathcal{O}_f$, ou seja, $\overline{y}^n = \overline{x}^m$ em $\mathcal{O}_f$ e, portanto,

$$\overline{y}^{n-1}\overline{\omega} = \overline{ny^{n-1}xdy - mx^m dx} = \overline{x(ny^{n-1}dy - mx^{m-1}dx)} = \overline{xdf} = \overline{0}.$$

Logo, $\overline{\omega} \in T_f$.

Considere $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ irredutível e $\varphi := \varphi(x(t), y(t)) = (t^n, y(t))$ uma parametrização para C_f. Defina a aplicação

$$\psi_f := \psi : \Omega_f \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_f} \approx \mathbb{C}\{t\} \tag{3.1}$$

onde $\psi(\overline{a}dx + \overline{b}dy) = t[a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)] = t[a(\varphi)x'(t) + b(\varphi)y'(t)]$.

Temos que ψ é um homomorfismo de $\mathcal{O}_f$-módulos, em que identificamos o anel $\mathcal{O}_f$ com $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\} \subset \mathbb{C}\{t\} \approx \overline{\mathcal{O}_f}$. De fato, dados $v_1 = \overline{a_1}dx + \overline{b_1}dy, v_2 = \overline{a_2}dx + \overline{b_2}dy \in \Omega_f$ e $\overline{h} \in \mathcal{O}_f$ temos que

$$\psi(v_1 + v_2) = t[(a_1(\varphi) + a_2(\varphi))x'(t) + (b_1(\varphi) + b_2(\varphi))y'(t)] = \psi(v_1) + \psi(v_2)$$

e

$$\psi(\overline{h}v_1) = t[ha_1(\varphi)x'(t) + hb_1(\varphi)y'(t)] = \overline{h}\psi(v_1).$$

De agora em diante, iremos denotar $\omega := \overline{\omega}$, para todo $\overline{\omega} \in \Omega_f$ para simplificar a notação. O resultado abaixo nos dá uma caracterização para T_f.

Lema 3.7. *Com as notações anteriores, temos que $Ker(\psi) = T_f$.*

Demonstração: Seja $\omega \in T_f$. Então existe $0 \neq h \in \mathcal{O}_f$ tal que

$$h\omega = 0.$$

Assim, $0 = \psi(h\omega) = h\psi(\omega) \in \overline{\mathcal{O}}_f$. Como $0 \neq h$ e $\overline{\mathcal{O}_f}$ é um domínio, então $\psi(\omega) = 0$, como desejado.

Por outro lado, seja $gdx+hdy \in \Omega_f$ tal que $\psi(gdx+hdy) = t[g(\varphi)x'(t)+h(\varphi)y'(t)] = 0$. Como $df = f_x dx + f_y dy = 0$ em Ω_f, temos que

$$0 = \psi(df) = t[f_x(\varphi)x'(t) + f_y(\varphi)y'(t)].$$

A partir disso, e pelo fato de $x'(t) = nt^{n-1} \neq 0$, temos que o seguinte sistema linear nas indeterminadas z e w sobre $\mathbb{C}(t)$ tem uma solução não trivial:

$$\begin{cases} g(\varphi)z + h(\varphi)w & = & 0 \\ f_x(\varphi)z + f_y(\varphi)w & = & 0. \end{cases}$$

Assim,

$$0 = \begin{vmatrix} g(\varphi) & h(\varphi) \\ f_x(\varphi) & f_y(\varphi) \end{vmatrix} = g(\varphi)f_y(\varphi) - h(\varphi)f_x(\varphi).$$

Dessa forma, temos que $f_y g - hf_x = 0$ em $\mathcal{O}_f$. Logo,

$$f_y\omega = f_y(gdx + hdy) = f_y gdx - hf_x dx = (f_y g - hf_x)dx = 0,$$

em que a segunda igualdade decorre do fato que $f_x dx + f_y dy = 0$ em Ω_f. Além disso, $f_y \neq 0$ em $\mathcal{O}_f$. De fato, como f é um polinômio de Weierstrass, temos que $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$. Então $f_y = ny^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)$. Daí, $f_y \notin \langle f \rangle$, já que $deg(f_y) < deg(f)$. Portanto, $\omega \in T_f$. ■

Considere o conjunto

$$\Lambda_f = \{\nu_f(w) := mult(\psi_f(w)); w \in \Omega_f \backslash T_f\} \subset \mathbb{N}$$

o qual chamaremos de **conjunto de valores** de Ω_f.

Observe que Λ_f é um Γ_f-monomódulo ou um ideal relativo de Γ_f, ou seja, $\alpha + \xi \in \Lambda_f$ para todo $\alpha \in \Gamma_f$ e todo $\xi \in \Lambda_f$. De fato, existem $h \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}$ e $\omega \in \Omega_f \backslash T_f$ tais que $\alpha = \nu_f(h)$ e $\xi = \nu_f(\omega)$. Logo,

$$\alpha + \xi = \nu_f(h \cdot \omega).$$

Temos que $h \cdot \omega \in \Omega_f \backslash T_f$, pois caso contrário existiria $h_1 \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}$ tal que $h_1 h\omega = 0$, o que não ocorre, pois $h_1 h_2 \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}$, já que $\mathcal{O}_f$ é domínio e $\omega \notin T_f$. Assim, temos o desejado.

Note que

$$\nu_f(h) = mult(h(\varphi)) = mult(h'(\varphi)) + 1 = mult(t[h_x(\varphi)x'(t) + h_y(\varphi)y'(t)]) = \nu_f(dh),$$

para todo $h \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}$ não unidade. Assim, $\Gamma_f \backslash \{0\} \subseteq \Lambda_f$.

O conjunto Λ_f se relaciona com o número de Tjurina τ_f por

$$\tau_f = c_f - \sharp(\Lambda_f \backslash \Gamma_f)$$

em que c_f é o condutor de Γ_f (Veja Proposition 1.2.19 de [H]).

O conjunto Λ_f pode ser obtido por meio do algoritmo 4.10 descrito em [HH1] e é um ingrediente crucial para a equivalência analítica de ramos planos, como evidenciamos no resultado abaixo.

Teorema 3.8. *Seja C_f um ramo plano com semigrupo dado por $\Gamma_f = \langle v_0, \ldots, v_g \rangle$ e Λ_f seu conjunto de valores de diferenciais. Então C_f é analiticamente equivalente a um ramo plano com parametrização*

$$(t^{v_0}, t^{v_1}) \ \textit{se} \ \Lambda_f \backslash \Gamma_f = \varnothing$$

ou

$$\left(t^{v_0}, t^{v_1} + t^{\lambda} + \sum_{i \notin (\Lambda_f - v_0)} a_i t^i \right) \ \textit{se} \ \Lambda_f \backslash \Gamma_f \neq \varnothing, \ \textit{em que} \ \lambda + v_0 = min\{\Lambda_f \backslash \Gamma_f\}.$$

Mais ainda, um ramo plano com parametrização

$$\left(t^{v_0}, t^{v_1} + t^{\lambda} + \sum_{i \notin (\Lambda_f - v_0)} b_i t^i \right)$$

é analiticamente equivalente a C_f se, e somente se, existe $r \in \mathbb{C}$ com $r^{\lambda - v_1} = 1$ tal que $a_i = r^{i-\lambda} b_i$ para todo $i \notin (\Lambda_f - v_0)$.

Demonstração: Veja [HH2]. ■

Por sua relevância na classificação analítica é importante apresentar outros modos de se obter o conjunto Λ_f. Este é o objetivo principal deste trabalho. No que segue vamos explorar outros conjuntos que determinam e são determinadas pelo conjunto Λ.

O $\mathcal{O}_f$-módulo de diferenciais de Kähler Ω_f está intimamente ligado ao ideal Jacobiano $J(f) = \langle \overline{f_x}, \overline{f_y} \rangle$ de $\mathcal{O}_f$. De fato, temos:

Proposição 3.9. *Os $\mathcal{O}_f$-módulos Ω_f e $J(f)$ são isomorfos.*

Demonstração: Considere a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \Theta: & \Omega_f & \to & J(f) \\ & \overline{A}dx + \overline{B}dy & \mapsto & \overline{Af_y} - \overline{Bf_x}. \end{array}$$

Temos que Θ é um isomorfismo de $\mathcal{O}_f$-módulos e, portanto, Ω_f e $J(f)$ são isomorfos. ■

O isomorfismo acima permite mostrar que o conjunto Λ_f determina e é determinado pelo conjunto de valores do ideal Jacobiano. Mais precisamente, dado um ideal $I \subseteq \mathcal{O}_f$ definimos

$$\nu_f(I) = \{\nu_f(g);\ g \in I\}.$$

O conjunto $\nu_f(I)$ é chamado de conjunto de valores de I.

Dada uma diferencial $\omega = \overline{A}dx + \overline{B}dy \in \Omega_f$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{f_y}.\omega &= \overline{Af_y}dx + \overline{Bf_y}dy \\ &= \overline{Af_y}dx + \overline{B}(df - \overline{f_x}dx) \\ &= (\overline{Af_y} - \overline{Bf_x})dx + \overline{B}df. \end{aligned}$$

Uma vez que $df(t^n, \varphi(t)) = 0$, em que $(t^n, \varphi(t))$ é uma parametrização para C_f, temos que

$$\begin{gathered} \nu_f(\overline{f_y}.\omega) = \nu_f((\overline{Af_y} - \overline{Bf_x})dx) \\ \nu_f(\overline{f_y}) + \nu_f(\omega) = \nu_f(\overline{Af_y} - \overline{Bf_x}) + \nu_f(dx) \\ \nu_f(\omega) = \nu_f(\overline{Af_y} - \overline{Bf_x}) - \nu_f(\overline{f_y}) + \nu_f(dx). \end{gathered}$$

Temos que $\nu_f(dx) = \nu_f(x) = v_0$ e assim $\Lambda_f = \nu_f(\Omega_f) = \nu_f(J(f)) - \nu_f(\overline{f_y}) + v_0$.

Veja que o valor $\nu_f(\overline{f_y}) \in \Gamma_f$ tem uma importância destacada em nosso estudo. No entanto, para chegar a tal valor teríamos que desenvolver a teoria de resolução de singularidades, o que estenderia este trabalho. Optamos por remeter o leitor a uma referência de tal resultado.

Proposição 3.10. *Seja $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ um polinômio de Weierstrass irredutível que define uma curva C_f com parametrização $(t^n, \varphi(T))$. Se c_f denota o condutor do semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, v_1, \ldots, v_g\rangle$, então*

$$\nu_f(\overline{f_y}) = c_f - 1 + v_0 \ e \ \nu_f(\overline{f_x}) = c_f - 1 + v_1.$$

Demonstração: Veja Corolário 7.16 de [H]. ■

Reunindo os resultados anteriores temos:

Teorema 3.11. *Seja C_f uma curva plana irredutível dada por um polinômio de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ com semigrupo Γ_f e condutor c_f. Temos que*

$$\Lambda_f = \nu_f(J(f)) - c_f + 1.$$

Demonstração: Segue do que apresentamos anteriormente. ■

3.1 Resíduos Logarítmicos

Nesta seção vamos apresentar um outro objeto algébrico cujas ordens permitem determinar o conjunto Λ_f descrito na seção anterior. Como antes denotaremos por C_f uma curva analítica plana irredutível definida por um polinômio de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$.

Uma 1-forma diferencial $\omega = Adx + Bdy$ é holomorfa se A e B são funções holomorfas, bem como uma 2-forma diferencial $\eta = Cdx \wedge dy$ é holomorfa se C é uma função holomorfa.

O conceito de germe de função pode ser estendido para formas diferenciais de modo similar às funções. Recordemos que duas funções f e g definem o mesmo *germe* num ponto $p \in \mathbb{C}^2$ se existe um aberto U contendo p tal que $f_{|U} = g_{|U}$. Dito de outro modo, as séries de potências de f e g numa vizinhança conveniente de p coincidem. Para 1-formas, dizemos que $\omega = A_1dx + A_2dy$ e $\eta = B_1dx + B_2dy$ definem o mesmo *germe* se A_i e B_i definem o mesmo germe de função.

No que segue, faremos uso de algumas propriedades do produto exterior e da derivada exterior de 1-formas diferenciais. Para maior comodidade do leitor, vamos apresentar sucintamente as principais propriedades desses conceitos, uma justificativa para tais propriedades pode ser encontrada em [L].

Sejam $\omega_i = A_idx + B_idy$ com $i = 1, 2$ duas 1-formas diferenciais em $\mathbb{C}^2$. O *produto exterior* de ω_1 e ω_2 é a 2-forma definida por

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (A_1B_2 - A_2B_1)dx \wedge dy.$$

Segue da expressão acima que

$$\begin{array}{ll} 1) & \omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1; \\ 2) & \omega_1 \wedge \omega_1 = 0; \end{array} \tag{3.2}$$

para quaisquer 1-formas ω_1 e ω_2.

Se $\omega = Adx + Bdy$ é uma 1-forma em $\mathbb{C}^2$, então a *derivada exterior* de ω é a 2-forma dada por

$$d\omega = (B_x - A_y)dx \wedge dy.$$

Temos:

$$\begin{array}{ll} 1) & d^2f = d(df) = 0; \\ 2) & d(f\omega_1) = df \wedge \omega_1 + fd\omega_1; \end{array} \tag{3.3}$$

para qualquer função $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ e qualquer 1-forma ω_1.

Observação 3.12. Sejam $\eta_i = R_idx + S_idy \neq 0,\ i = 1, 2$, de modo que R_2 e S_2 não admitam fator comum e tais que $\eta_1 \wedge \eta_2 = 0$. Então $Q\eta_2 = \eta_1$, para algum $Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

De fato, se $0 = \eta_1 \wedge \eta_2 = (R_1S_2 - S_1R_2)dx \wedge dy$, então $R_1S_2 = S_1R_2$. Como R_2 e S_2 não admitem fator comum e assumindo, sem perda de generalidade, que $R_2 \neq 0$ devemos ter que R_2 divide R_1, digamos $R_1 = QR_2$. Substituindo em $R_1S_2 = S_1R_2$, obtemos $S_1 = QS_2$. Assim, $Q\eta_2 = \eta_1$, para algum $Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

O seguinte resultado provado inicialmente por Saito em [S] é essencial para o conceito que iremos explorar.

Teorema 3.13. *Sejam U um aberto de $\mathbb{C}^2$ e $C_f \cap U \neq \varnothing$ uma curva de U definida pela equação $f(z) = 0$, onde f é holomorfa em U. Seja $\omega = \frac{p}{f}dx + \frac{q}{f}dy$ uma 1-forma meromorfa em U com pólos somente em C_f. Então as afirmações a seguir são equivalentes:*

1. *$f\omega$ e $fd\omega$ são holomorfas em U.*
2. *$f\omega$ e $df \wedge \omega$ são holomorfas em U.*
3. *Existem $g, h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ holomorfas e uma 1- forma $\eta \in \Omega^1$ holomorfa em U tais que*
   (a) $g \notin \langle f \rangle$;
   (b) $g\omega = h\frac{df}{f} + \eta$.

Demonstração: 1. $\Leftrightarrow$ 2. Tome $A = \frac{p}{f}$ e $B = \frac{q}{f}$. Temos que

$$d\omega = dA \wedge dx + dB \wedge dy = (A_x dx + A_y dy) \wedge dx + (B_x dx + B_y dy) \wedge dy = (B_x - A_y) dx \wedge dy.$$

Além disso,

$$df \wedge \omega = (f_x dx + f_y dy) \wedge (Adx + Bdy) = (f_x B - f_y A) dx \wedge dy.$$

Como $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$, temos que $df \wedge \omega = d(f\omega) - fd\omega$, ou seja, se $f\omega$ e $fd\omega$ são holomorfas, então $df \wedge \omega$ é holomorfa, provando 1. $\Rightarrow$ 2.
De maneira análoga, temos $fd\omega = d(f\omega) - df \wedge \omega$. Assim, se $f\omega$ e $df \wedge \omega$ são holomorfas, então $fd\omega$ é holomorfa, isto é, 2. $\Rightarrow$ 1. Portanto, temos 1. $\Leftrightarrow$ 2.

2. $\Rightarrow$ 3. Temos que

$$df \wedge \omega = \frac{1}{f}(f_x q - f_y p) dx \wedge dy.$$

Logo, como $df \wedge \omega$ é holomorfa temos que f divide $f_x q - f_y p$ em $\mathbb{C}\{x, y\}$. Assim, existe $b \in \mathbb{C}\{x, y\}$ holomorfa em U tal que

$$f_x q - f_y p = fb. \tag{3.4}$$

Então temos que

$$f_x \omega = \frac{1}{f}(pf_x dx + qf_x dy) = \frac{1}{f}(pf_x dx + bf dy + pf_y dy) = bdy + p\frac{df}{f},$$

onde a segunda igualdade segue de (3.4). Além disso,

$$f_y\omega = \frac{1}{f}(pf_y dx + qf_y dy) = \frac{1}{f}(-bf dx + qf_x dx + qf_y dy) = -bdx + q\frac{df}{f},$$

onde a segunda igualdade se deve a (3.4).

Como $f = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_0(x) \in \mathbb{C}\{x\}[y]$, então $deg(f_y) = n-1$ e $deg(f_x) \leq n-1$. Logo, $f_x, f_y \notin \langle f \rangle$. Assim, tomando $g = f_x$, $h = p$ e $\eta = bdy$, ou $g = f_y$, $h = q$ e $\eta = -bdx$ temos 3.

Para 3. $\Rightarrow$ 2, observe inicialmente que o fato de $g \in \mathbb{C}\{x,y\} \setminus \langle f \rangle$ nos dá que $C = C_f \cap C_g = \{p \in U;\ f(p) = g(p) = 0\}$ é um número finito de pontos. Assim, temos que $C \cap U$ é um conjunto analítico de dimensão 0.

Veja que em $C_f \setminus C$ a função g não se anula, ou seja, $\frac{1}{g}$ é uma função holomorfa em $C_f \setminus C$. Desta forma, como $g\omega = h\frac{df}{f} + \eta$, segue que

$$\omega = \frac{h}{g}\frac{df}{f} + \frac{1}{g}\eta = h_1\frac{df}{f} + \eta_1$$

com h_1 e η_1 holomorfas em $C_f \setminus C$. Note ainda que ω é holomorfa em $U \backslash C_{fg}$. Assim,

$$f\omega = h_1 df + f\eta_1 \quad \text{e} \quad df \wedge \omega = df \wedge \eta_1$$

são holomorfas em $C_f \setminus C \subset C_f \cup C_g = C_{fg}$.

Uma vez que C_{fg} é uma curva e consequentemente é uma variedade conexa complexa de dimensão 1, e como $f\omega$ e $df \wedge \omega$ são holomorfas em $C_f \setminus C \subset C_{fg}$, ou seja, em pelo menos um ponto de C_{fg}, segue do Teorema 1.25 que $f\omega$ e $df \wedge \omega$ podem ser estendidas e são holomorfas em U. ■

Definição 3.14. *Uma 1-forma $\omega \in \frac{1}{f}\Omega^1$ definida em uma vizinhança U da origem é chamada **logarítmica** (com pólo ao longo de C_f) se satisfaz uma e, portanto todas, das condições do teorema anterior. Denotamos*

$$\Omega^1(log\ C_f) = \{\omega \in \frac{1}{f}\Omega^1;\ \omega \text{ é } logarítmica\}.$$

Temos as inclusões: $\Omega^1 \subset \Omega^1(log\ C_f) \subset \frac{1}{f}\Omega^1$. Veja ainda que, pela Definição 3.14, se $\omega \in f.\Omega^1(log\ C_f)$, então existem $P, Q \in \mathbb{C}\{x,y\}$ com $Q \notin \langle f \rangle$ e $\omega' \in \Omega^1$ tais que

$$Q\omega = Pdf + f\omega' \in F(f).$$

Assim, $\overline{\omega} \in T_f$, uma vez que $Q \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}$.

Lema 3.15. *Temos que $\Omega^1(log\ C_f)$ é um $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo.*

Demonstração: De fato, sejam $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(log\ C_f)$ e $g \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Então existem $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}\{x,y\}$ com $Q_1, Q_2 \notin \langle f \rangle$ e $\omega_1', \omega_2' \in \Omega^1$ tais que

$$Q_1\omega_1 = \frac{P_1 df}{f} + \omega_1' \text{ e } Q_2\omega_2 = \frac{P_2 df}{f} + \omega_2'.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Q_1Q_2(\omega_1 + \omega_2) &= (Q_1\omega_1)Q_2 + (Q_2\omega_2)Q_1 \\ &= (\tfrac{P_1 df}{f} + \omega_1')Q_2 + (\tfrac{P_2 df}{f} + \omega_2')Q_1 \\ &= \tfrac{(P_1Q_2 + P_2Q_1)df}{f} + (\omega_1'Q_2 + \omega_2'Q_1) \in \Omega^1(log\ C_f). \end{aligned}$$

Além disso,

$$Q_1(g\omega_1) = g\frac{P_1 df}{f} + g\omega_1' = \frac{(gP_1)df}{f} + g\omega_1' \in \Omega^1(log\ C_f),$$

como queríamos. ■

Observação 3.16. Note que se a 1-forma $\omega = \frac{p}{f}dx + \frac{q}{f}dy \in \frac{1}{f}\Omega^1$ é logarítmica, então por definição (veja item 2 do Teorema 3.13)

$$df \wedge \omega = \frac{(pf_y - qf_x)}{f} dx \wedge dy = \omega \wedge df$$

deve ser holomorfa. Logo,

$$pf_y - qf_x = Hf$$

para algum $H \in \mathbb{C}\{x,y\}$.

Observação 3.17. Sejam $\omega_1 = \frac{A_1}{f}dx + \frac{B_1}{f}dy, \omega_2 = \frac{A_2}{f}dx + \frac{B_2}{f}dy \in \Omega^1(log\ C_f)$. Temos que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{f^2} dx \wedge dy.$$

Pela observação anterior, existem $H_1, H_2 \in \mathbb{C}\{x,y\}$ tais que

$$A_1f_y - B_1f_x = H_1f \text{ e } A_2f_y - B_2f_x = H_2f.$$

Multiplicando a primeria igualdade por B_2, a segunda por $-B_1$ e somando, obtemos

$$(A_1B_2 - A_2B_1)f_y = (H_1B_2 - H_2B_1)f.$$

Como f divide $(A_1B_2 - A_2B_1)f_y$, f não divide f_y e f é irredutível segue que

$$A_1B_2 - A_2B_1 = Hf$$

para algum $H \in \mathbb{C}\{x,y\}$.

O próximo resultado, devido a Saito (veja [S]), nos dá uma caracterização para uma base de $\Omega^1(log\ C_f)$ como $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo.

Teorema 3.18. *O $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo $\Omega^1(log\ C_f)$ admite uma base $\{\omega_1,\omega_2\}$ se, e somente se, $\omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{u}{f}dx \wedge dy$ para alguma unidade $u \in \mathbb{C}\{x,y\}$.*

Demonstração: Suponha que o $\mathbb{C}\{x,y\}$-módulo $\Omega^1(log\ C_f)$ admita uma base $\{\omega_1,\omega_2\}$ com $\omega_1 = \frac{A_1}{f}dx + \frac{B_1}{f}dy, \omega_2 = \frac{A_2}{f}dx + \frac{B_2}{f}dy \in \Omega^1(log\ C_f)$ e seja $U \subset \mathbb{C}^2$ uma vizinhança da origem em que ω_1 e ω_2 são holomorfas. Segue da Observação 3.17 que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{f^2}dx \wedge dy = \frac{Hf}{f^2}dx \wedge dy = \frac{H}{f}dx \wedge dy$$

com $H \in \mathbb{C}\{x,y\}$ holomorfa em uma vizinhança da origem de $\mathbb{C}^2$.

Em $U \setminus C_f$ temos que f é uma unidade, pois a expansão da série f fora dos pontos que a anulam, i.e. C_f, nos dá uma série com termos constantes não nulos. Deste modo, como $\{dx, dy\}$ também é uma base sobre $\mathbb{C}\{x,y\}$ para $\Omega^1(log\ C_f)$ em $U \setminus C_f$, segue que $\{\omega_1 \wedge \omega_2\}$ e $\{dx \wedge dy\}$ são bases para 2-formas definidas em $U \setminus C_f$ e consequentemente

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = v dx \wedge dy$$

para alguma unidade v definida em $U \setminus C_f$. Mas, $\omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{H}{f}dx \wedge dy$ implica que H deve ser unidade em $U \setminus C_f$, ou equivalentemente, H não pode se anular em $U \setminus C_f$.

Agora tome um ponto $p \in C_f \setminus \{(0,0)\}$. Lembremos que $(0,0)$ é a única possível singularidade de f. Deste modo, $f_x(p) \neq 0$ ou $f_y(p) \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $f_y(p) \neq 0$, ou seja, f_y é unidade em $C_f \setminus \{(0,0)\}$. Na demonstração da implicação $2 \Rightarrow 3$ do Teorema 3.13 mostramos que $f_y\omega = P\frac{df}{f} + Qdx$ com $P, Q \in \mathbb{C}\{x,y\}$ para qualquer $\omega \in \Omega^1(log\ C_f)$. Em particular, temos que em $p \in C_f \setminus \{(0,0)\}$ qualquer $\omega \in \Omega^1(log\ C_f)$ se expressa como

$$\omega = \frac{P}{f_y}\frac{df}{f} + \frac{Q}{f_y}dx,$$

em que $\frac{P}{f_y}\ \frac{Q}{f_y}$ são séries em torno de $p \in C_f \setminus \{(0,0)\}$, uma vez que f_y é unidade em torno de $p \in C_f \setminus \{(0,0)\}$. Deste modo, $\{\frac{df}{f}, dx\}$ é uma base para $\Omega^1(log\ C_f)$ em $C_f \setminus \{(0,0)\}$. Segue que $\{\omega_1 \wedge \omega_2\}$ e $\{\frac{df}{f} \wedge dx\} = \{-\frac{f_y}{f}dx \wedge dy\}$, são bases para 2-formas definidas em $C_f \setminus \{(0,0)\}$ e consequentemente

$$\frac{H}{f}dx \wedge dy = \omega_1 \wedge \omega_2 = w\frac{f_y}{f}dx \wedge dy,$$

para alguma unidade w definida em $C_f \setminus \{(0,0)\}$. Como f_y também é unidade em $C_f \setminus \{(0,0)\}$, segue que H deve ser unidade em $C_f \setminus \{(0,0)\}$, isto é, não pode se anular em $C_f \setminus \{(0,0)\}$.

Reunindo o que mostramos, temos que H não se anula em $U\setminus\{(0,0)\}$. Em particular, temos que $\frac{1}{H}$ é holomorfa em $U\setminus\{(0,0)\}$ e pelo Teorema 1.25, segue que $\frac{1}{H}$ (se estende a uma função que) é holomorfa em U, ou equivalentemente H não se anula em U. Portanto, H é unidade em U, como queríamos mostrar.

Agora vamos supor que $\omega_1\wedge\omega_2=\frac{u}{f}dx\wedge dy$, com u uma unidade definida em alguma vizinhança U da origem, em que $\omega_1=\frac{A_1}{f}dx+\frac{B_1}{f}dy$ e $\omega_2=\frac{A_2}{f}dx+\frac{B_2}{f}dy$.

Note que $\{\omega_1,\omega_2\}$ é um conjunto L.I., caso contrário teríamos que $R\omega_1+S\omega_2=0$, com $R,S\in\mathbb{C}\{x,y\}$ não nulos simultaneamente. Assim,

$$R\omega_1=-S\omega_2.$$

Deste modo, teríamos que $\omega_1\wedge\omega_2=0$, uma contradição.

Vamos mostrar que qualquer $\omega\in\Omega^1(log\ C_f)$ se expressa como $\omega=P\omega_1+Q\omega_2$ com $P,Q\in\mathbb{C}\{x,y\}$. Note inicialmente que, pela Observação 3.17,

$$\omega\wedge\omega_1=\frac{H_1}{f}dx\wedge dy \text{ e } \omega\wedge\omega_2=\frac{H_2}{f}dx\wedge dy,$$

com $H_1,H_2\in\mathbb{C}\{x,y\}$. Como u é unidade, considere $\eta=\omega-\frac{H_2}{u}\omega_1+\frac{H_1}{u}\omega_2\in\Omega^1(log\ C_f)$. Temos que

$$\begin{aligned}\eta\wedge\omega_1 &=\omega\wedge\omega_1+\tfrac{H_1}{u}\omega_2\wedge\omega_1\\ &=\tfrac{H_1}{f}dx\wedge dy-\tfrac{H_1}{u}\omega_1\wedge\omega_2\\ &=\tfrac{H_1}{f}dx\wedge dy-\tfrac{H_1}{u}\tfrac{u}{f}dx\wedge dy=0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\eta\wedge\omega_2 &=\omega\wedge\omega_2-\tfrac{H_2}{u}\omega_1\wedge\omega_2\\ &=\tfrac{H_2}{f}dx\wedge dy-\tfrac{H_2}{u}\tfrac{u}{f}dx\wedge dy=0.\end{aligned}$$

Se $\eta\neq 0$, então pela Observação 3.12, temos que $\eta=M\omega_1$ e $\eta=N\omega_2$ para algum $M,N\in\mathbb{C}\{x,y\}\setminus\{0\}$. Assim, $0=\eta\wedge\omega_2=M\omega_1\wedge\omega_2=M\frac{u}{f}dx\wedge dy$, o que é um absurdo. Segue que $\eta=0$ e, consequentemente, $\omega-\frac{H_2}{u}\omega_1+\frac{H_1}{u}\omega_2=0$, ou seja,

$$\omega=\frac{H_2}{u}\omega_1-\frac{H_1}{u}\omega_2.$$

Como $\frac{H_1}{u},\frac{H_2}{u}\in\mathbb{C}\{x,y\}$, uma vez que u é unidade, temos o desejado. ■

Exemplo 3.19. Considere $f=y^2-x^3$ e $\omega=\frac{3ydx-2xdy}{f}$. Temos que $\frac{df}{f}=\frac{1}{f}df+0$ e

$$y\omega=\frac{3y^2dx-2xydy}{f}=\frac{1}{f}(3(f+x^3)dx-2xydy)=3dx-\frac{1}{f}xdf.$$

Como $\omega\wedge\frac{df}{f}=\frac{1}{f^2}(3ydx-2xdy)\wedge(2ydy-3x^2dx)=\frac{1}{f^2}6(y^2-x^3)dx\wedge dy=\frac{6}{f}dx\wedge dy$ temos que $\{\frac{df}{f},\omega\}$ é uma base para $\Omega^1(log\ C_f)$.

Agora introduziremos um conceito associado a uma forma logarítmica.

Definição 3.20. *Seja* $\omega \in \Omega^1(log\ C_f)$. *O* ***resíduo logaritmico*** *de* ω *é a classe de* $\frac{h}{g}$ *no corpo de frações* $\mathcal{K}_f$ *de* $\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{\langle f\rangle}$, *em que* $g\omega = \frac{hdf}{f} + \eta$ *com* $\eta \in \Omega^1$. *Denotamos o resíduo logarítmico de* ω *por* $res(\omega)$.

Exemplo 3.21. Seja $f = y^2 - x^3$ e $\omega = \frac{3ydx-2xdy}{f}$. Como vimos no exemplo anterior, temos $y\omega = 3dx - \frac{1}{f}xdf$. Tome $g = y$, $h = -x$ e $\eta = 3dx$. Logo, $res(\omega) = -\frac{\overline{x}}{\overline{y}}$.

Além disso, como $\frac{df}{f} = \frac{1}{f}df + 0$ temos que $res(\frac{df}{f}) = \overline{1}$.

O lema a seguir nos dá uma propriedade que usaremos em várias situações.

Lema 3.22. *Sejam* $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ *e* $\omega \in \Omega^1$ *tal que*

$$\omega \wedge df = 0.$$

Então $f_y\omega, f_x\omega \in \mathbb{C}\{x,y\}df$.

Demonstração: Seja $\omega = Adx + Bdy \in \Omega^1$. Temos que

$$0 = \omega \wedge df = (Af_y - Bf_x)dx \wedge dy \Rightarrow Af_y = Bf_x.$$

Como $df = f_xdx + f_ydy$, temos

$$\begin{aligned} f_y\omega &= Af_ydx + Bf_ydy \\ &= (Af_y - Bf_x)dx + Bdf \\ &= Bdf \in \mathbb{C}\{x,y\}df \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_x\omega &= Af_xdx + Bf_xdy \\ &= Adf - (Af_y - Bf_x)dy \\ &= Adf \in \mathbb{C}\{x,y\}df \end{aligned}$$

como queríamos. ∎

Uma vez que o resíduo logarítmico é apresentado como classe de um elemento no corpo de frações $\mathcal{K}_f$ de $\mathcal{O}_f$, devemos mostrar que tal conceito independe do representante da classe considerada.

Lema 3.23. *O resídulo logarítmico de* $\omega \in \Omega^1(log\ C_f)$ *está bem definido.*

Demonstração: Seja $\omega \in \Omega^1(logC_f)$. Suponha que

$$g_1\omega = \frac{h_1df}{f} + \eta_1, \quad g_2\omega = \frac{h_2df}{f} + \eta_2$$

com $g_i, h_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $g_1, g_2 \notin \langle f \rangle$ e $\eta_i \in \Omega^1$ para $i = 1, 2$. Veja que

$$g_2(g_1\omega) = g_2h_1\frac{df}{f} + g_2\eta_1 \text{ e } g_1(g_2\omega) = g_1h_2\frac{df}{f} + g_1\eta_2,$$

ou seja,

$$g_2h_1\frac{df}{f} + g_2\eta_1 = g_1h_2\frac{df}{f} + g_1\eta_2.$$

Logo,

$$(g_2h_1 - g_1h_2)\frac{df}{f} = g_1\eta_2 - g_2\eta_1 \in \Omega^1.$$

Assim,

$$(g_1\eta_2 - g_2\eta_1) \wedge df = (g_2h_1 - g_1h_2)\frac{df}{f} \wedge df = 0.$$

Pelo lema anterior, temos que $f_y(g_2h_1 - g_1h_2)\frac{df}{f} = Qdf$, com $Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Então

$$Qdf = f_y(g_2h_1 - g_1h_2)\frac{df}{f} \Rightarrow fQ = f_y(g_2h_1 - g_1h_2).$$

Como f não divide f_y e f é irredutível, então f divide $g_2h_1 - g_1h_2$. Logo, $\overline{g_2h_1 - g_1h_2} = \overline{0}$ em ′ em $\overline{O}_f$, ou seja,

$$\overline{\frac{h_1}{g_1}} = \overline{\frac{h_2}{g_2}}$$

em $\mathcal{K}_f$. ■

O conjunto de resíduos de todos os elementos de $\Omega^1(log\ C_f)$ será denotado por $\mathcal{R}_f$, ou seja, $\mathcal{R}_f = \{res(\omega); \omega \in \Omega^1(log\ C_f)\}$.

Proposição 3.24. *O conjunto $\mathcal{R}_f$ é um $\mathcal{O}_f$-módulo. Além disso, se $\{\omega_1, \omega_2\}$ é uma base para $\Omega^1(log\ C_f)$, então $\{res(\omega_1), res(\omega_2)\}$ gera $\mathcal{R}_f$.*

Demonstração: Sejam $res(\omega_i) = \frac{h_i}{g_i} \in \mathcal{R}_f$, ou seja, existem $\eta_i \in \Omega^1$, para $i = 1, 2$, tais que

$$g_1\omega_1 = \frac{h_1 df}{f} + \eta_1 \text{ e } g_2\omega_2 = \frac{h_2 df}{f} + \eta_2.$$

Note que

$$(g_1g_2)(\omega_1+\omega_2) = (g_1g_2)\omega_1+(g_1g_2)\omega_2 = g_2(h_1\frac{df}{f}+\eta_1)+g_1(h_2\frac{df}{f}+\eta_2) = (g_2h_1+g_1h_2)\frac{df}{f}+\eta,$$

em que $\eta = g_2\eta_1 + g_1\eta_2$. Logo,

$$\overline{\frac{h_1}{g_1}} + \overline{\frac{h_2}{g_2}} = \overline{\frac{h_1}{g_1} + \frac{h_2}{g_2}} \in \mathcal{R}_f,$$

ou seja, $res(\omega_1) + res(\omega_2) \in \mathcal{R}_f$.

Além disso, para todo representante g de $\overline{g} \in \mathcal{O}_f$ temos

$$\overline{g}\frac{\overline{h_1}}{g_1} = res(g\omega_1)$$

isto é, $res(g\omega_1) = g.res(\omega_1) \in \mathcal{R}_f$.

Para a segunda afirmação, considere $\{\omega_1, \omega_2\}$ uma base de $\Omega^1(log\ C_f)$ e sejam $res(\omega_i) = \frac{\overline{h_i}}{\overline{g_i}}$, ou seja, $g_i\omega_i = h_i\frac{df}{f} + \eta_i$ para algum $\eta_i \in \Omega^1$ e $i = 1, 2$.

Dado $\frac{\overline{h}}{\overline{g}} \in \mathcal{R}_f$, existe $\omega \in \Omega^1(log\ C_f)$ tal que $res(\omega) = \frac{\overline{h}}{\overline{g}}$. Uma vez que $\{\omega_1, \omega_2\}$ é uma base para $\Omega^1(log\ C_f)$, existem $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tais que $\omega = P\omega_1 + Q\omega_2$. Mas,

$$\begin{aligned}(g_1g_2)\omega &= (g_1g_2)P\omega_1 + (g_1g_2)Q\omega_2 \\ &= Pg_2(h_1\tfrac{df}{f} + \eta_1) + g_1Q(h_2\tfrac{df}{f} + \eta_2) \\ &= \tfrac{df}{f}(Pg_2h_1 + Qg_1h_2) + Pg_2\eta_1 + Qg_1\eta_2,\end{aligned}$$

ou seja, $\frac{\overline{h}}{\overline{g}} = res(\omega) = \overline{P}\frac{\overline{h_1}}{\overline{g_1}} + \overline{Q}\frac{\overline{h_2}}{\overline{g_2}}$. Portanto, $\{res(\omega_1), res(\omega_2)\}$ gera $\mathcal{R}_f$. ■

Observação 3.25. Se $\{\omega_1, \omega_2\}$ é uma base para $\Omega^1(log\ C_f)$, não podemos afirmar que o conjunto $\{res(\omega_1), res(\omega_2)\}$ seja uma base de $\mathcal{R}_f$. De fato, considere $f = y^2 - x^3$. No Exemplo 3.19, vimos que

$$\{\omega_1 = \frac{df}{f}, \omega_2 = \frac{3ydx - 2xdy}{f}\}$$

é uma base de $\Omega^1(log\ C_f)$. No Exemplo 3.21, vimos que $\{res(\omega_1) = \overline{1}, res(\omega_2) = -\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\}$ e tal conjunto não é uma base, pois não é $L.I.$, uma vez que $\overline{x}\overline{1} + \overline{y}(-\frac{\overline{x}}{\overline{y}}) = \overline{0}$, mas $\overline{x} \neq \overline{0} \neq \overline{y}$.

Abaixo apresentamos uma propriedade de $\mathcal{R}_f$.

Proposição 3.26. *Temos que* $\overline{\mathcal{O}_f} \subseteq \mathcal{R}_f$.

Demonstração: Seja $\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{O}}_f$. Pela Proposição 3.10, temos $\nu_f(\overline{f_x}) = c_f - 1 + v_1 > c_f$ e $\nu_f(\overline{f_y}) = c_f - 1 + v_0 > c_f$, em que c_f é o condutor do semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, v_1, \ldots, v_g\rangle$ associado a C_f. Deste modo, pela Proposição 2.35

$$\overline{f_x}\overline{\alpha}, \overline{f_y}\overline{\alpha} \in \mathcal{O}_f.$$

Denote $\overline{a} = \overline{f_x}\overline{\alpha}$ e $\overline{b} = \overline{f_y}\overline{\alpha}$ com $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Logo,

$$\frac{\overline{a}}{\overline{f_x}} = \overline{\alpha} = \frac{\overline{b}}{\overline{f_y}} \Rightarrow \overline{a}\overline{f_y} - \overline{b}\overline{f_x} = \overline{0}.$$

Assim, $af_y - bf_x = pf$ para algum $p \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Agora, tome $\omega = \frac{a}{f}dx + \frac{b}{f}dy \in \frac{1}{f}\Omega^1$. Usando que $df = f_x dx + f_y dy$, temos que

$$f_x\omega = \frac{a}{f}f_x dx + \frac{b}{f}f_x dy = \frac{b}{f}f_x dy - \frac{a}{f}f_y dy + \frac{a}{f}df = \frac{a}{f}df - (\frac{af_y - bf_x}{f})dy = a\frac{df}{f} - pdy.$$

Logo, $\omega \in \Omega^1(log\ C_f)$ e $res(\omega) = \frac{\overline{a}}{\overline{f_x}} = \overline{\alpha}$, isto é, $\overline{\alpha} \in \mathcal{R}_f$. ■

O $\mathcal{O}_f$-módulo $\mathcal{R}_f$ é um caso particular de um objeto importante em Álgebra Comutativa que descrevemos abaixo:

Definição 3.27. *Sejam D um domínio e $\mathcal{K}$ seu corpo de frações. Dizemos que $F \subseteq \mathcal{K}$ é um **ideal fracionário** de D se F é um D-módulo e existe $d \in D \setminus \{0\}$ tal que $d.F \subseteq D$.*

Da definição acima temos que $F \subseteq \frac{1}{d}.D$, ou seja, os elementos de F admitem um denominador comum.

Considerando C_f uma curva com parametrização $(t^n, \varphi(t))$, com semigrupo $\Gamma_f = \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$ e condutor c_f, como podemos identificar $\mathcal{O}_f$ com $\mathbb{C}\{t^n, \varphi(t)\}$, temos que $\overline{\mathcal{O}_f} = \mathbb{C}\{t\}$ e $\mathcal{K}_f = \mathbb{C}(t)$. Como c_f é o condutor do semigrupo Γ_f, então uma vez que $t^{c_f}\overline{\mathcal{O}_f} \subseteq \mathcal{O}_f$, temos que $\overline{\mathcal{O}_f}$, que obviamente é um $\mathcal{O}_f$-módulo, é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$. Além disto, $t^{c_f}I \subseteq t^{c_f}\mathcal{O}_f \subseteq t^{c_f}\overline{\mathcal{O}_f} \subseteq \mathcal{O}_f$ para todo ideal I de $\mathcal{O}_f$. Uma vez que todo ideal de $\mathcal{O}_f$ é um $\mathcal{O}_f$-módulo, segue do argumento acima, que todo ideal de $\mathcal{O}_f$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$.

Exemplo 3.28.
1. O ideal $J(f) = \langle\overline{f_x}, \overline{f_y}\rangle \subset \mathcal{O}_f$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$.
2. O ideal $\mathcal{C} = \langle t^{c_f}\rangle$ de $\overline{\mathcal{O}_f} = \mathbb{C}\{t\}$ é também um ideal de $\mathcal{O}_f$, portanto é um ideal fracionário que é denominado de **ideal condutor**.
3. Para qualquer $\delta \in \mathbb{Z}$ temos que $t^\delta\overline{\mathcal{O}}_f := \{t^\delta.h(t);\ h(t) \in \mathbb{C}\{t\}\}$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$. De fato, como $\overline{\mathcal{O}}_f$ é um $\mathcal{O}_f$-módulo, temos que o mesmo ocorre com $t^\delta\overline{\mathcal{O}}_f$. Além disto, como $t^{c_f-\delta}.(t^\delta\overline{\mathcal{O}}_f) = t^{c_f}\overline{\mathcal{O}}_f \subseteq \mathcal{O}_f$, temos o desejado.

Definição 3.29. *O conjunto de valores de resíduos logarítmicos é definido por*

$$\Delta_f = \nu_f(\mathcal{R}_f) = \{\nu_f(\overline{h}) - \nu_f(\overline{g}); \frac{\overline{h}}{\overline{g}} \in \mathcal{R}_f\}.$$

Como vimos na Observação 3.16, dado $\omega = \frac{A}{f}dx + \frac{B}{f}dy \in \Omega^1(log\ C_f)$, temos que $Af_y - Bf_x = Mf$ para algum $M \in \mathbb{C}\{x,y\}$ e assim, usando que $df = f_x dx + f_y dy$, temos

$$f_y\omega = B\frac{df}{f} + Mdx.$$

Similarmente,

$$f_x\omega = A\frac{df}{f} - Mdy.$$

Deste modo, temos que $res(\omega) = \frac{\overline{B}}{\overline{f_y}} = \frac{\overline{A}}{\overline{f_x}}$, isto é, temos que

$$\mathcal{R}_f = \left\{\frac{\overline{B}}{\overline{f_y}}; \frac{A}{f}dx + \frac{B}{f}dy \in \Omega^1(log\ C_f)\right\} = \left\{\frac{\overline{A}}{\overline{f_x}}; \frac{A}{f}dx + \frac{B}{f}dy \in \Omega^1(log\ C_f)\right\}. \tag{3.5}$$

Em particular, como $\overline{f_y}, \overline{f_x} \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}$ e

$$\begin{aligned} \overline{f_y}.\mathcal{R}_f &= \left\{\overline{B}; \tfrac{A}{f}dx + \tfrac{B}{f}dy \in \Omega^1(log\ C_f)\right\} \subseteq \mathcal{O}_f \\ \overline{f_x}.\mathcal{R}_f &= \left\{\overline{A}; \tfrac{A}{f}dx + \tfrac{B}{f}dy \in \Omega^1(log\ C_f)\right\} \subseteq \mathcal{O}_f \end{aligned} \tag{3.6}$$

temos que $\mathcal{R}_f$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$.

Nosso objetivo é relacionar os conjuntos Λ_f, Δ_f e $\nu_f(J(f))$, uma vez que o Teorema 3.11 relaciona Λ_f com $\nu_f(J(f))$, é suficiente relacionar Δ_f com $\nu_f(J(f))$. Para alcançar tal objetivo, vamos estudar propriedades de um ideal fracionário arbitrário F de $\mathcal{O}_f$.

No que segue, continuaremos com a identificação $\mathcal{O}_f = \mathbb{C}\{t^n, \varphi(t)\} \subseteq \overline{\mathcal{O}_f} = \mathbb{C}\{t\}$, em que $(t^n, \varphi(t))$ é uma parametrização da curva C_f.

Observação 3.30. Seja F um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$. Então existe

$$\delta = \min\{\nu_f(p) - \nu_f(q); \frac{\overline{p}}{\overline{q}} \in F\}.$$

De fato, como existe $d \in \mathcal{O}_f$ tal que $d.F \subseteq \mathcal{O}_f$, denotando $d = t^s u(t)$ com $s \in \mathbb{Z}$ e $u(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ unidade, para todo $\frac{\overline{p}}{\overline{q}} \in F$ temos que $t^s u(t).\frac{\overline{p}}{\overline{q}} \in \mathcal{O}_f$. Assim, $s + \nu_f(p) - \nu_f(q) \geq 0$, ou equivalentemente, $\nu_f(p) - \nu_f(q) \geq -s$ para todo $\frac{\overline{p}}{\overline{q}} \in F$.

Lema 3.31. *Seja F um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $t^\alpha\mathbb{C}\{t\} \subseteq F \subseteq t^\beta\mathbb{C}\{t\}$.*

Demonstração: Seja $d \in \mathcal{O}_f$ tal que $d.F \subseteq \mathcal{O}_f$. Uma vez que $d = t^s u(t)$ com $s \in \mathbb{Z}$ e $u(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ unidade, podemos escrever $F \subseteq t^{-s}u^{-1}(t)\mathcal{O}_f \subseteq t^{-s}\mathbb{C}\{t\}$. Tomando $\beta = -s \in \mathbb{Z}$ temos que $F \subseteq t^\beta\mathbb{C}\{t\}$.

Agora seja $\delta = \min\{\nu_f(p) - \nu_f(q); \frac{\overline{p}}{\overline{q}} \in F\}$, como na Observação 3.30, e tome um elemento $g \in F$ tal que $g = t^\delta v(t)$ com $\delta \in \mathbb{Z}$ e $v(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ uma unidade. Tomando o condutor c_f de semigrupo Γ_f, como $t^{c_f}\mathbb{C}\{t\} = t^{c_f}\overline{\mathcal{O}_f} \subseteq \mathcal{O}_f$ e F é um $\mathcal{O}_f$-módulo, temos que $t^{c_f}\mathbb{C}\{t\}.t^\delta v(t) \subseteq F$. Tomando $\alpha = c_f + \delta$, segue que $t^\alpha\mathbb{C}\{t\} \subseteq F$. ■

De (3.5), temos que todo elemento de Δ_f é da forma $\nu_f(\overline{B}) - \nu_f(\overline{f_y})$. Uma vez que $\nu_f(\overline{B}) \geq 0$ segue $\nu_f(\overline{B}) - \nu_f(\overline{f_y}) \geq -\nu_f(\overline{f_y})$. Deste modo, pela Proposição 3.10, temos que $\delta = \min\Delta_f \geq -\nu_f(\overline{f_y}) = -c_f + 1 - v_0$.

Corolário 3.32. *Considerando o ideal fracionário $\mathcal{R}_f$, temos que existe $\alpha \geq 1 - v_0$ tal que $t^\alpha\mathbb{C}\{t\} \subseteq \mathcal{R}_f \subseteq t^{-c_f+1-v_0}\mathbb{C}\{t\}$.*

Demonstração: De (3.6) temos que $\overline{f_y}.\mathcal{R}_f \subseteq \mathcal{O}_f$ e assim $\mathcal{R}_f \subseteq \frac{1}{f_y}\mathcal{O}_f \subseteq \frac{1}{f_y}\overline{\mathcal{O}_f}$. Como em $\overline{\mathcal{O}_f}$ temos $\overline{f_y} = t^{c_f-1+v_0}v(t)$, com $v(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ unidade, segue que $\mathcal{R}_f \subseteq t^{-c_f+1-v_0}\mathbb{C}\{t\}$.

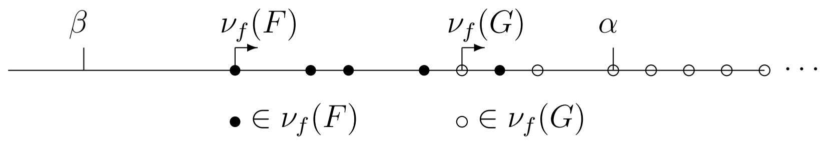
Por outro lado, pelo acima exposto e do lema anterior temos que $\min \Delta_f \geq -\nu_f(\overline{f_y}) = -c_f + 1 - v_0$. Pelo desenvolvido na demonstração do lema anterior, temos que existe $\alpha = c_f + \min \Delta_f \geq c_f - c_f + 1 - v_0 = 1 - v_0$ tal que $t^\alpha\mathbb{C}\{t\} \subseteq \mathcal{R}_f$. ■

Uma vez que $\mathbb{C} \subset \mathcal{O}_f$ e todo ideal fracionário $F \subseteq \mathcal{K}_f$ de $\mathcal{O}_f$ é um $\mathcal{O}_f$-módulo, segue que F tem estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial.

O resultado abaixo leva em consideração a estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial de ideais fracionários de $\mathcal{O}_f$ e será utilizado mais adiante. Para tanto, se F é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$ vamos adotar a notação $\nu_f(F)$ para o conjunto de valores de F, ou seja, $\nu_f(F) = \{\nu_f(h) - \nu_f(g), \frac{h}{g} \in F\}$.

Teorema 3.33. *Sejam $G \subseteq F$ ideais fracionários de $\mathcal{O}_f$, $\nu_f(G)$ e $\nu_f(F)$ seus conjuntos de valores associados. Temos que $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{F}{G}\right) = \sharp(\nu_f(F) - \nu_f(G))$.*

Demonstração: Inicialmente note que o lema anterior garante a existência de $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $t^\alpha\mathbb{C}\{t\} \subseteq G \subseteq F \subseteq t^\beta\mathbb{C}\{t\}$, ou seja, $\alpha + \mathbb{N} \subseteq \nu_f(G) \subseteq \nu_f(F) \subseteq \beta + \mathbb{N}$.



Deste modo, temos que $\nu_f(F) - \nu_f(G)$ é um conjunto finito, digamos que $\nu_f(F) - \nu_f(G) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ tome $w_i \in F$ tal que $\nu_f(w_i) = \gamma_i$. Vamos mostrar que $B = \{[w_i],\ i = 1, \ldots, r\}$ é uma base para $\frac{F}{G}$, em que $[w_i] = w_i + G$ representa a classe de w_i no $\mathbb{C}$-espaço quociente.

Seja $[w] \in \frac{F}{G}$ com $w \in F$ um representante da classe. Se $\nu_f(w) \in \nu_f(G)$, existe $w' \in G$ tal que $\nu_f(w) = \nu_f(w')$. Tomando $a' \in \mathbb{C}$ conveniente, temos que $\nu_f(w - a'w') > \nu_f(w)$. Se $\nu_f(w) \in \nu_f(F) - \nu_f(G)$, então $\nu_f(w) = \nu_f(w_i)$ para algum $1 \leq i \leq r$. Tomando $a_i \in \mathbb{C}$ adequado, temos que $\nu_f(w - a_iw_i) > \nu_f(w)$.

Repetindo o argumento acima obtemos $a_0, a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$ e $w_0 \in G$ tais que $\nu_f(w - \sum_{i=0}^r a_iw_i) \geq \alpha$.

Uma vez que $t^\alpha\mathbb{C}\{t\} \subseteq G$, segue que $w - \sum_{i=0}^r a_iw_i \in G$, ou ainda, $w - \sum_{i=1}^r a_iw_i \in G$. Isto implica que

$$[0] = [w - \sum_{i=1}^r a_iw_i] = [w] - \sum_{i=1}^r a_i[w_i],$$

ou seja, B gera $\frac{F}{G}$.

Agora suponha que $\sum_{i=1}^{r} a_i[w_i] = [0]$, ou seja, $\sum_{i=1}^{r} a_i w_i \in G$. Caso algum $a_i \neq 0$, então como $\nu_f(w_i) \neq \nu_f(w_j)$ para $i \neq j$, teríamos que $\nu_f\left(\sum_{i=1}^{r} a_i w_i\right) = \min\{\nu_f(w_k);\ a_k \neq 0 \text{ e } 1 \leq k \leq r\} \in \nu_f(F) - \nu_f(G)$, o que nos dá uma contradição. Portanto, B é um conjunto linearmente independente. Sendo B uma base para $\frac{F}{G}$, segue que

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{F}{G}\right) = \sharp B = \sharp(\nu_f(F) - \nu_f(G)).$$

■

Um outro conceito que necessitaremos é o de dual de um ideal fracionário.

Definição 3.34. *Se F é um ideal fracionário de um domínio D com corpo de frações $\mathcal{K}$, então o **dual** de F, que denotamos por $F^{\vee}$, é o D-módulo dado por*

$$F^{\vee} = \{g \in \mathcal{K};\ gF \subseteq D\}.$$

Note que se F é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$, então $F^{\vee}$ também é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$. De fato, suponha que F é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$. Inicialmente, mostraremos que $F^{\vee}$ é um $\mathcal{O}_f$-módulo. Sejam, $g_1, g_2 \in F^{\vee}$ e $h \in \mathcal{O}_f$. Então

$$g_1 F \subseteq \mathcal{O}_f \text{ e } g_2 F \subseteq \mathcal{O}_f.$$

Logo,

$$(g_1 + g_2)F = g_1 F + g_2 F \subseteq \mathcal{O}_f \text{ e } h(g_1 F) \subseteq h\mathcal{O}_f \subseteq \mathcal{O}_f,$$

como queríamos.

Como F é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$, pela Observação 3.30 existe $d' \in F \subseteq \mathcal{K}_f$ tal que $d' = t^{\delta} u(t)$, com $\delta \in \mathbb{Z}$, $u(t) \in \mathbb{C}\{t\} = \overline{\mathcal{O}_f}$ unidade e $\delta \in \mathbb{Z}$ mínimo. Assim, dado $g \in F^{\vee} \subseteq \mathcal{K}_f$ qualquer, como $d' \in F$, temos pela definição de $F^{\vee}$ que

$$d'g = gd' \in \mathcal{O}_f.$$

Uma vez que $d' \in F \subseteq \mathcal{K}_f$, existem $h_1, h_2 \in \mathcal{O}_f$ com $h_2 \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}$ tais que $d' = \frac{h_1}{h_2}$. Logo, $h_2 d' = h_1 \in \mathcal{O}_f \backslash \{0\}$ e

$$h_1 g = (h_2 d')g = h_2(d'g) \subseteq h_2 \mathcal{O}_f \subseteq \mathcal{O}_f,$$

para todo $g \in F^{\vee}$. Portanto, $F^{\vee}$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$.

Além disto, se $G \subseteq F$ são ideais fracionários de $\mathcal{O}_f$, então

$$F^{\vee} \subseteq G^{\vee}. \tag{3.7}$$

De fato, se $g \in F^{\vee}$, então $gG \subseteq gF \subseteq \mathcal{O}_f$. Logo, $g \in G^{v}$ e, portanto,

$$F^{\vee} \subseteq G^{\vee}.$$

Exemplo 3.35. Considere o ideal fracionário $t^\delta\overline{\mathcal{O}_f} := t^\delta\mathbb{C}\{t\}$ (veja item 3 do Exemplo 3.28). Temos que $(t^\delta\overline{\mathcal{O}_f})^\vee = t^{c_f-\delta}\overline{\mathcal{O}_f}$.

De fato, como

$$t^{c_f-\delta}.h(t).(t^\delta\overline{\mathcal{O}_f}) = t^{c_f}\overline{\mathcal{O}_f} \subseteq \mathcal{O}_f$$

segue que $t^{c_f-\delta}\overline{\mathcal{O}_f} \subset (t^\delta\overline{\mathcal{O}_f})^\vee$.

Por outro lado, seja $t^\epsilon.u(t) \in \mathcal{K}_f$ com $\epsilon \in \mathbb{Z}$ e $u(0) \neq 0$, tal que $t^\epsilon.u(t) \in (t^\delta\overline{\mathcal{O}_f})^\vee$. Se $\epsilon < c_f - \delta$, existe $\kappa \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon + \delta + \kappa = c_f - 1$. Tomando $t^\kappa \in \mathbb{C}\{t\}$, deveríamos ter que

$$t^\epsilon.u(t).t^\delta.t^\kappa = t^{c_f-1}.u(t) \in \mathcal{O}_f.$$

Mas isto nos daria que $\nu_f(t^{c_f-1}.u(t)) = c_f - 1 \in \Gamma_f$, o que é um absurdo. Segue que $\epsilon \geq c_f - \delta$ e, portanto, $(t^\delta\overline{\mathcal{O}_f})^\vee \subseteq t^{c_f-\delta}\overline{\mathcal{O}_f}$.

O exemplo anterior nos dá, em particular, que se $\mathcal{C} = t^{c_f}\mathbb{C}\{t\}$ é o ideal condutor de $\mathcal{O}_f$, então $\mathcal{C}^\vee = \overline{\mathcal{O}_f} = \mathbb{C}\{t\}$.

Observação 3.36. Segue do exemplo anterior e de (3.7) que, se F é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$ tal que $t^\alpha\mathbb{C}\{t\} \subseteq F \subseteq t^\beta\mathbb{C}\{t\}$, então $t^{c_f-\beta}\mathbb{C}\{t\} \subseteq F^\vee \subseteq t^{c_f-\alpha}\mathbb{C}\{t\}$.

De (3.6), temos que $\overline{f_x}, \overline{f_y} \in \mathcal{R}_f^\vee$, ou seja, $J(f) \subseteq \mathcal{R}_f^\vee$. A inclusão anterior é na verdade uma igualdade. A justificativa deste fato faz uso de resultados de Álgebra Homológica e que fogem do objeto principal deste trabalho.

Proposição 3.37. *Para toda curva plana C_f temos que $\mathcal{R}_f^\vee = J(f)$.*

Demonstração: Veja Proposição 3.4 de [GS]. ■

Como mencionamos, nosso objetivo é relacionar $\Delta_f = \nu_f(\mathcal{R}_f)$ e $\nu_f(J(f))$. Mais geralmente, vamos mostrar que podemos relacionar $\nu_f(F)$ e $\nu_f(F^\vee)$ para qualquer ideal fracionário F de $\mathcal{O}_f$.

Dado um ideal fracionário F de um domínio D, temos que se $q \in F$, então $q.p \in D$ para todo $p \in F^\vee$ e, deste modo, $q \in F^{\vee\vee}$, ou seja, $F \subseteq F^{\vee\vee}$.

É natural indagar sobre a igualdade $F^{\vee\vee} = F$, o que não é verdade em geral. No entanto, ideais fracionários de $\mathcal{O}_f$ possuem boas propriedades como citamos abaixo.

Proposição 3.38. *Seja F um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$. Temos:*

1. *$F^{\vee\vee} = F$.*

2. *Se G é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$ tal que $G \subseteq F$, então $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{F}{G}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{G^\vee}{F^\vee}\right)$.*

Demonstração: A justificativa utiliza noções como a de anel Gorenstein e *socle* de ideal, cuja apresentação nos desviaria do assunto. Para uma prova, indicamos Lema 5.2.7, Corolário 5.2.8 e Observação 5.2.9 de [GS]. ■

Agora estamos aptos a relacionar os conjuntos de valores de um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$ e de seu dual.

Proposição 3.39. *Para toda curva plana C_f com semigrupo Γ_f e condutor c_f, dado $F \subseteq \mathcal{K}_f$ um ideal fracionário de $\mathcal{O}_f$, temos que $\gamma \in \nu_f(F^\vee)$ se, e somente se, $c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(F)$.*

Demonstração: Se $\gamma \in \nu_f(F^\vee)$, então existe $g \in F^\vee$ tal que $\nu_f(g) = \gamma$. Se $c_f - 1 - \gamma \in \nu_f(F)$, existiria $h \in F$ tal que $\nu_f(h) = c_f - 1 - \gamma$. Segue da definição do dual de um ideal fracionário que $gh \in \mathcal{O}_f$ e, deste modo, teríamos que, $c_f - 1 = \gamma + c_f - 1 - \gamma = \nu_f(gh) \in \Gamma_f$, o que é um absurdo. Assim, $c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(F)$ e

$$\nu_f(F^\vee) \subseteq \{\gamma;\ c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(F)\} \subseteq \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Seja $\beta \in \mathbb{Z}$ tal que $F \subseteq t^\beta \mathbb{C}\{t\}$ como garantido no Lema 3.31. Dado $\gamma \geq c_f - \beta$ temos, da Observação 3.36 e do Lema 3.31, que $\gamma \in \nu_f(F^\vee)$ e $c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(F)$, ou seja,

$$\{\gamma \geq c_f - \beta; \gamma \in \nu_f(F^\vee)\} = \{\gamma \geq c_f - \beta; c_f - \gamma - 1 \notin \nu_f(F)\}.$$

Assim, é suficiente mostrarmos que

$$\{\gamma < c_f - \beta; \gamma \in \nu_f(F^\vee)\} = \{\gamma < c_f - \beta; c_f - \gamma - 1 \notin \nu_f(F)\}.$$

Mas, como temos a inclusão (3.8), basta mostrarmos que

$$\sharp\{\gamma < c_f - \beta; \gamma \in \nu_f(F^\vee)\} = \sharp\{\gamma < c_f - \beta; c_f - \gamma - 1 \notin \nu_f(F)\}. \tag{3.9}$$

Como $F^\vee \supseteq t^{c_f - \beta}\mathbb{C}\{t\}$, temos que

$$\sharp\{\gamma < c_f - \beta; \gamma \in \nu_f(F^\vee)\} = \sharp\{\nu_f(F^\vee) - \{c_f - \beta + \mathbb{N}\}\}. \tag{3.10}$$

Agora, da Observação 3.36 e do Teorema 3.33, temos

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{t^\beta \mathbb{C}\{t\}}{F}\right) = \sharp\{\{\beta + \mathbb{N}\} - \nu_f(F)\}$$

e

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{F^\vee}{t^{c_f - \beta}\mathbb{C}\{t\}}\right) = \sharp\{\nu_f(F^\vee) - \{c_f - \beta + \mathbb{N}\}\}.$$

Do Exemplo 3.35, temos que $(t^\beta\mathbb{C}\{t\})^\vee = t^{c_f-\beta}\mathbb{C}\{t\}$. Assim, da Proposição 3.38 temos que

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{t^\beta\mathbb{C}\{t\}}{F}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{F^\vee}{t^{c_f-\beta}\mathbb{C}\{t\}}\right),$$

ou seja,

$$\sharp\{\nu_f(F^\vee) - \{c_f - \beta + \mathbb{N}\}\} = \sharp\{\{\beta + \mathbb{N}\} - \nu_f(F)\}. \tag{3.11}$$

Note que

$$\begin{aligned}\sharp\{\{\beta + \mathbb{N}\} - \nu_f(F)\} &= \sharp\{\epsilon \geq \beta;\ \epsilon \notin \nu_f(F)\}\\ &= \sharp\{c_f - 1 - \gamma \geq \beta;\ c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(F)\}\\ &= \sharp\{\gamma < c_f - \beta;\ c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(F)\}.\end{aligned}$$

Da igualdade acima, de (3.11) e de (3.10), obtemos (3.9), que mostra a proposição. ■

Em particular, o resultado acima e a Proposição 3.37 nos dá o seguinte teorema:

Teorema 3.40. *Para toda curva plana C_f com semigrupo Γ_f e condutor c_f, temos que*

$$\gamma \in \Delta_f \ \Leftrightarrow\ c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(J(f)) \ \Leftrightarrow\ -\gamma \notin \Lambda_f.$$

Em particular, os conjuntos $\Delta_f, \nu_f(J(f))$ e Λ_f são invariantes analíticos de C_f mutuamente determinados.

Demonstração: Aplicando a proposição anterior ao ideal fracionário $\mathcal{R}_f$ e usando que $\mathcal{R}_f = (\mathcal{R}_f)^{\vee\vee} = J(f)^\vee$ (veja Proposição 3.37 e Proposição 3.38), temos que

$$\gamma \in \Delta_f \ \Leftrightarrow\ c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(J(f)).$$

Agora, pelo Teorema 3.11, temos

$$c_f - 1 - \gamma \notin \nu_f(J(f)) \ \Leftrightarrow\ (c_f - 1 - \gamma) - c_f + 1 = -\gamma \notin \Lambda_f.$$

■

O resultado acima foi obtido de modo mais geral para curvas planas com várias componentes irredutíveis por Delphine Pol em [P].

Referências

[L] LIMA, E. L., *Álgebra Exterior*. 2a. Edição, IMPA, (2007).

[S] SEBASTIANI, M.; *Introdução à Geometria Analítica Complexa*. Projeto Euclides, IMPA (2004).

[G] GUNNING, R. C., *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Vol 1. Wadsworth & Brooks (1990).

[MY] MATHER, J. N. and YAU, S. S. T.; *Classification of isolated hypersurface by their moduli algebras*. Invent. Math. 69(2), 243-251 (1982).

[HH1] EFEZ, A. and HERNANDES, M.E., *Standard basis for local rings of branches and their module of differentials*. J. of Symbolie computation 42, 178-191, (2007).

[HH2] HEFEZ, A. and HERNANDES, M. E.; *The analytic classification of Irreducible Plane Curve Singularities*. Handbook of geometry and Topology of Singularities II. Springer, 1-65 (2021).

[H] HEFEZ, A. *Irreducible plane curve singularities: in Real and Complex Singularities*. Edição: D. Mond e M. J. Saia. Lecture notes in pure and applied mathematics, New York; Marcel Dekker, 1-120, (2003).

[BK] BRIESKORN, E; KNÖRRER, H. *Plane Algebraic Curves*. Tradução: John Stillwell. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, (1986).

[S] SAITO, K. *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, 265-291, (1980).

[GS] GREUEL, G. M. and SCHULZE, M.; *Normal crossing properties of complex hypersufaces via logarithmic residues*. Compos. Math., 150(9), 1607-1622, (2014).

[P] POL, D. *On the values of logarithmic residues along curves*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 725-766, (2018).