

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Doutorado)

TAIS SAITO TAVARES

**Sobre a estabilidade exponencial de soluções de sistemas  
Timoshenko-Boltzmann-Fourier<sup>1</sup>**

Maringá

2022

---

<sup>1</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

TAIS SAITO TAVARES

**Sobre a estabilidade exponencial de soluções de sistemas  
Timoshenko-Boltzmann-Fourier**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

T231s      Tavares, Tais Saito  
            Sobre a estabilidade exponencial de soluções de  
            sistemas Timoshenko-Boltzmann-Fourier / Tais Saito  
Tavares. -- Maringá, 2022.  
            77 f. : il.

            Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano  
            Palomino.  
            Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
Análise, 2022.

            1. Elasticidade. 2. Sistemas de Timoshenko. 3.  
Sistema termoelástico. 4. Termoviscoelasticidade. 5.  
Viscoelasticidade. 6. Elasticity. 7.  
Thermoviscoelasticity. 8. Timoshenko systems. 9.  
Viscoelasticity. I. Palomino, Juan Amadeo Soriano,  
orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática - Área de Concentração: Análise. III.  
Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

# TAIS SAITO TAVARES

## SOBRE A ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS TIMOSHENKO- BOLTZMANN-FOURIER

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutora em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

### COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM (Presidente)

Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara - Unicamp

Prof. Dr. Higídio Portillo Oquendo - UFPR

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria - UEM

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo - UEM

Aprovada em: 16 de setembro de 2022.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (<https://meet.google.com/pjx-kfqs-zrg>)

*Aos meus pais Sueli e Lauro, ao meu esposo Eduardo e ao meu filho Kenji.*

*“Every brilliant experiment, like every great work  
of art, starts with an act of imagination.”*

*Jonah Lehrer*

---

## Agradecimentos

---

Para chegar até aqui a caminhada foi longa e muitas pessoas participaram dela, afinal, sozinho não se vai muito longe.

Agradeço à minha mãe Sueli e ao meu pai Lauro por estarem sempre ao meu lado, acreditando no meu sonho, mesmo nos momentos em que até eu mesma deixei de acreditar nele.

Toda a minha gratidão ao meu esposo Eduardo Tavares, por ter transformado minha vida com seu amor e carinho. Além de esposo e amigo também é meu companheiro na jornada mais desafiadora e maravilhosa de nossas vidas: ser mãe e pai. Ao nosso filho, Eduardo Kenji, sou grata pelo privilégio de tê-lo em minha vida. Mesmo tão pequeno, com seu sorriso contagiante ensina lições valiosas.

Sou grata aos meus amigos por me acompanharem nos momentos de dificuldade e também nas alegrias. Em particular, agradeço à Stéfany, ao Rubéns, ao Eiji, à Patrícia, ao Leonel e à Daiane pela parceria, paciência, compreensão, bondade e companheirismo.

Agradeço ao professor Juan por me orientar e ensinar com muita paciência e atenção. Muito obrigada por ter acreditado em mim e por ter me dado uma chance. É um verdadeiro privilégio ter um orientador tão imensamente sábio e acolhedor.

Sou grata a professora Luci por me orientar na graduação e mestrado e me ajudar a trilhar uma grande parte do caminho.

Agradeço ao professor João Luís por ter falado a frase que mudou minha vida e a professora Teresa que foi responsável por grande parte da base do meu aprendizado.

Não poderia deixar de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro, pois foi essencial para a produção deste trabalho.

Muito obrigado!

---

---

## Resumo

---

O principal propósito desta tese é estudar a estabilidade exponencial dos semigrupos solução para uma classe de modelos de Timoshenko termoviscoelásticos. Após este estudo, faremos uma análise comparativa entre os modelos estudados e os modelos considerados na literatura. Em particular, será discutido a influência da igualdade de propagação de ondas sobre a estabilidade exponencial dos semigrupos solução.

**Palavras-Chave:** Elasticidade, sistemas de Timoshenko, termoelasticidade, termoviscoelasticidade, viscoelasticidade.



---

---

## Abstract

---

The main purpose of this thesis is to study the exponential stability of solution semigroups for a class of thermoviscoelastic Timoshenko models. After this study, we will make a comparative analysis between the studied models and the models considered in the literature. In particular, the influence of wave propagation equality on the exponential stability of solution semigroups will be discussed.

**Key-words:** Elasticity, thermoelasticity, thermoviscoelasticity, Timoshenko systems, viscoelasticity.

---

# Sumário

---

Resumo . . . . .	vi
Abstract . . . . .	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
1.1 O modelo de Timoshenko . . . . .	2
1.2 Leis constitutivas . . . . .	2
1.2.1 Elasticidade . . . . .	2
1.2.2 Viscoelasticidade . . . . .	3
1.2.3 Efeito térmico - Lei de Fourier . . . . .	3
1.3 Estado da arte: Termoelasticidade e viscoelasticidade <i>versus</i> Termoviscoelasticidade	4
1.3.1 Termoelasticidade e viscoelasticidade . . . . .	5
1.3.2 Termoviscoelasticidade . . . . .	10
1.4 Objetivo principal e organização do trabalho . . . . .	11
1.5 Um aviso para o leitor . . . . .	12
<b>2 Resultados utilizados</b>	<b>13</b>
2.1 Análise funcional . . . . .	13
2.2 Medida e integração . . . . .	13
2.3 Semigrupos de operadores lineares . . . . .	16
2.4 Desigualdades . . . . .	17
<b>3 Modelo TBF com viscoelasticidade agindo na força de cisalhamento e termoelasticidade agindo no momento fletor</b>	<b>18</b>
3.1 O problema original . . . . .	18
3.2 O problema autônomo equivalente . . . . .	19
3.2.1 Problema de Cauchy abstrato . . . . .	21
3.2.2 O semigrupo solução . . . . .	22
3.3 Caracterização da estabilidade exponencial . . . . .	32
3.3.1 Prova do Teorema 3.9 (Necessidade) . . . . .	33
3.3.2 Prova do Teorema 3.9 (Suficiência) . . . . .	34

---

<b>4</b>	<b>Modelo TBF com dissipação termoviscoelásticas agindo na força de cisalhamento</b>	<b>43</b>
4.1	O problema original . . . . .	43
4.2	O problema autônomo equivalente . . . . .	44
4.2.1	Problema de Cauchy abstrato . . . . .	46
4.2.2	O semigrupo solução . . . . .	47
4.3	Caracterização da estabilidade exponencial . . . . .	58
4.3.1	Prova do Teorema 4.7 (Necessidade) . . . . .	58
4.3.2	Prova do Teorema 4.7 (Suficiência) . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Análise comparativa</b>	<b>70</b>
5.1	Análise local: modelos (3.1) e (4.1) . . . . .	70
5.2	Análise global . . . . .	71
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>74</b>
1.1	Motivações . . . . .	74
1.1.1	Normas . . . . .	74
1.1.2	Formas sequilíneas e funcionais antilíneas . . . . .	74
	<b>Bibliografia</b>	<b>76</b>

## Introdução

### 1.1 O modelo de Timoshenko

Diversos fenômenos relacionados a vibrações de vigas podem ser descritos matematicamente por meio de equações diferenciais parciais. Dentre os modelos que descrevem tais fenômenos, consideramos o sistema de Timoshenko. Tal sistema consiste de equações diferenciais parciais acopladas que descrevem a vibração de uma viga, digamos de comprimento  $L > 0$ , levando em conta o deslocamento transversal  $\phi(x, t)$  e o ângulo de rotação  $\psi(x, t)$  de uma seção transversal com relação a seção normal no ponto  $x \in [0, L]$  e tempo  $t \geq 0$ . [30, 31].

De acordo a teoria desenvolvida por Timoshenko [30, 31], as equações governantes para as variáveis  $\phi$  e  $\psi$  são

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} = S_x, \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que  $S$  é a força de cisalhamento,  $M$  é o momento fletor e  $\rho_1, \rho_2 > 0$  são constantes relacionadas a densidade de massa, a área e ao momento de inércia de uma seção transversal da viga.

Como é bem conhecido, ao considerarmos as hipóteses de Timoshenko, as forças  $S$  e  $M$  são dadas em função das variáveis  $\phi$  e  $\psi$ . No entanto, a configuração do sistema de Timoshenko é sensível às leis constitutivas que regem o comportamento dessas forças, como veremos a seguir.

### 1.2 Leis constitutivas

#### 1.2.1 Elasticidade

Em sua versão elástica ou conservativa, as leis constitutivas para a força de cisalhamento e momento fletor são [30, 31]

$$\begin{aligned} S &= \kappa(\phi_x + \psi), \\ M &= b\psi_x, \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde  $\kappa > 0$  e  $b > 0$  são constantes que dependem do cisalhamento e do módulo de elasticidade de Young, respectivamente. Ao substituir as leis (1.2) em (1.1), nasce o modelo elástico de Timoshenko:

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\phi_x + \psi) = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.3)$$

O sistema (1.3) é conservativo, isto é, não existem forças ou mecanismos que dissipam energia e desta forma, a soma da energia cinética com a energia potencial é igual a uma constante.

### 1.2.2 Viscoelasticidade

Materiais viscoelásticos, como o próprio nome sugere, são materiais que tem um comportamento híbrido: uma hora agem como materiais viscosos, outra hora, como elásticos. Devido a sua alta resiliência, são ótimos absorvedores de impactos e por isso são utilizados frequentemente como amortecedores.

De acordo com Boltzmann [4, 5], ao estudar materiais com essa natureza, é relevante conhecer a história de deformação do material, isto é, as informações que o material carrega sobre as deformações sofridas até o momento que será analisado. Fisicamente, isto pode ser observado através da relação tensão-deformação do material e das suposições feitas por Boltzmann [4, 5].

Adaptando a dedução feita em [3] para o caso com história infinita, temos as seguintes leis: constitutivas:

$$\begin{aligned} S &= \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right], \\ M &= b \left[ \psi_x - \int_0^\infty g_2(\cdot - s)\psi_x(s) ds \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

Os termos de convolução são chamados de memória e as funções  $g_1$  e  $g_2$  são chamadas núcleos de memória.

### 1.2.3 Efeito térmico - Lei de Fourier

#### Termoelasticidade

Quando o modelo estudado está sujeito a uma distribuição de temperatura desconhecida sob um material elástico, a tensão depende não apenas da deformação elástica, mas também da tensão térmica. Levando em conta esta configuração e ainda assumindo as hipóteses da teoria de Timoshenko para vigas, temos as leis constitutivas.

$$\begin{aligned} S &= \kappa(\phi_x + \psi) - \nu\vartheta; \\ M &= b\psi_x - \sigma\theta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $\nu, \sigma > 0$  são coeficientes relacionados à expansão térmica e  $\vartheta = \vartheta(x, t)$ ,  $\theta = \theta(x, t)$  são componentes de temperatura que representam os desvios de temperatura de um estado de referência ao longo das direções da viga.

#### Termoviscoelasticidade

Quando o modelo estudado está sujeito a uma distribuição de temperatura desconhecida sob um material viscoelástico, a tensão depende não apenas da deformação viscoelástica, mas também da tensão térmica. Levando em conta esta configuração e ainda assumindo as hipóteses

da teoria de Timoshenko para vigas, temos as leis constitutivas.

$$\begin{aligned} S &= \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right] - \nu \vartheta; \\ M &= b \left[ \psi_x - \int_0^\infty g_2(\cdot - s)\psi(s) ds \right] - \sigma \theta, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde  $\nu, \sigma > 0$  são coeficientes relacionados à expansão térmica e  $\vartheta = \vartheta(x, t)$ ,  $\theta = \theta(x, t)$  são componentes de temperatura que representam os desvios de temperatura de um estado de referência ao longo das direções da viga.

### Equações do calor - acoplamentos

Além disso, considerando o fluxo de calor modelado pela Lei térmica de Fourier, temos as seguintes equações de acoplamento:

- $\vartheta_t - \alpha \vartheta_{xx} + \nu(\phi_x + \psi)_t = 0;$  (acoplamento em  $S$ )
- $\theta_t - \beta \theta_{xx} + \sigma \psi_{xt} = 0.$  (acoplamento em  $M$ )

A dedução precisa das leis térmicas para vigas de Timoshenko e das equações de fluxo de calor via lei de Fourier podem ser encontradas em [2].

## 1.3 Estado da arte: Termoelasticidade e viscoelasticidade *versus* Termoviscoelasticidade

No ponto de vista de equações diferenciais, a terminologia "termoviscoelasticidade" é utilizada na literatura quando estudamos equações que modelam fenômenos relacionados a viscoelasticidade e termoelasticidade. No entanto, a grosso modo, matematicamente e fisicamente, termoviscoelasticidade não é o mesmo que viscoelasticidade e termoelasticidade agindo simultaneamente, como será visto posteriormente.

Para compreender tal diferença, vamos explorar uma famosa relação entre os coeficientes  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\kappa$  e  $b$  e considerar a constante

$$\chi_0 = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}. \quad (1.7)$$

A igualdade  $\chi_0 = 0$  determina o que chamamos de igualdade de velocidade de propagação de ondas.

O objetivo desta seção é elencar os possíveis cenários para sistemas de Timoshenko já estudados na literatura, destacando a influência de  $\chi_0$  sobre a estabilidade exponencial das soluções. Aqui, serão considerados acoplamentos elásticos, termoelásticos, viscoelásticos ou termoviscoelásticos atuando em forças distintas. Além disso, excluiremos o caso puramente elástico (modelo (1.3)), o qual é conservativo quando se trata de estabilidade de soluções.

### 1.3.1 Termoelasticidade e viscoelasticidade

Para nortear o desenvolvimento desta seção e com base nas leis constitutivas vistas anteriormente, considere o seguinte diagrama:

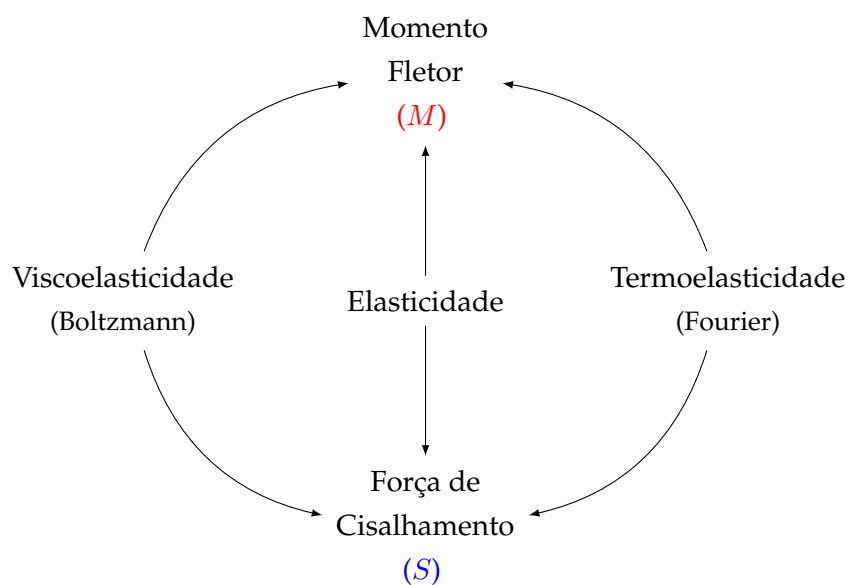


Figura 1.1: Diagrama de combinações entre acoplamentos elásticos, viscoelásticos e termoelásticos e forças governantes.

Na sequência, apresentamos os cenários que podem ser obtidos do diagrama representado na Figura 1.1.

#### Cenários termoelásticos

Nestes cenários, a viscoelasticidade não será considerada, sendo apenas analisados os casos do diagrama abaixo

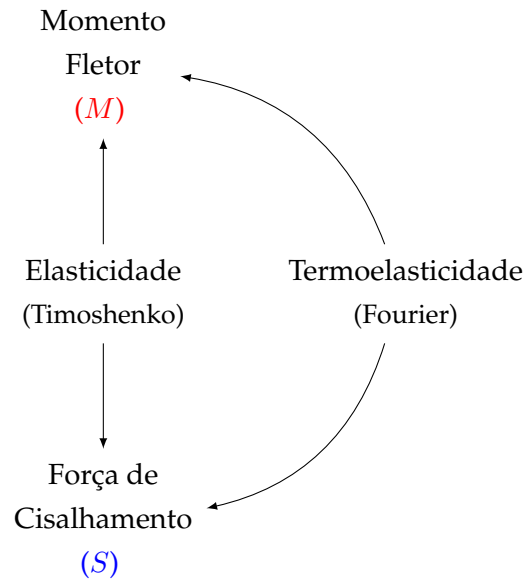


Figura 1.2: Diagrama de combinações dos cenários termoelásticos

Existem três sistemas provenientes do diagrama representado na Figura 1.2, os quais são chamados de sistemas de Timoshenko-Fourier [11, 29].

#### Elasticidade (S) e termoelasticidade (M)

Substituindo as leis (1.2)<sub>1</sub> e (1.5)<sub>2</sub> no sistema (1.1) e considerando a equação adicional advinda da Lei térmica de Fourier, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\phi_x + \psi) + \sigma\theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_t - \beta\theta_{xx} + \sigma\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.8)$$

O sistema (1.8) foi estudado por Muñoz Rivera e Racke no trabalho [26]. Nele, os autores mostraram que se  $\chi_0 = 0$ , então o semigrupo solução associado a (1.8) é exponencialmente estável [26, Teorema 2.3].

#### Termoelasticidade (S) e elasticidade (M)

Substituindo as leis (1.2)<sub>2</sub> e (1.5)<sub>1</sub> no sistema (1.1) e considerando a equação adicional advinda da Lei térmica de Fourier, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \nu\vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\phi_x + \psi) - \nu\vartheta = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \vartheta_t - \alpha\vartheta_{xx} + \nu(\phi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.9)$$



O sistema (1.9) foi estudado por Almeida Júnior, Santos e Muñoz Rivera no trabalho [1]. Nele, os autores mostraram que se  $\chi_0 = 0$ , então o semigrupo solução associado a (1.9) é exponencialmente estável [1, Teorema 4.4].

### Termoelasticidade (S) e termoelasticidade (M)

Substituindo as leis (1.5) no sistema (1.1) e considerando as equações adicionais provenientes da Lei térmica de Fourier, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \nu \vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\phi_x + \psi) - \nu \vartheta + \sigma \theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \vartheta_t - \alpha \vartheta_{xx} + \nu(\phi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_4 \theta_t - \beta \theta_{xx} + \sigma \psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.10)$$

O sistema (1.10) foi estudado por Alves et. al. no trabalho [2]. Nele, os autores mostraram que o semigrupo solução associado a (1.10) é exponencialmente estável mesmo quando a igualdade  $\chi_0 = 0$  não é válida [2, Teorema 4.8].

### Cenários viscoelásticos

Nestes cenários, não há dissipatividade proveniente de fluxo de temperatura. O diagrama associado neste caso é o seguinte:

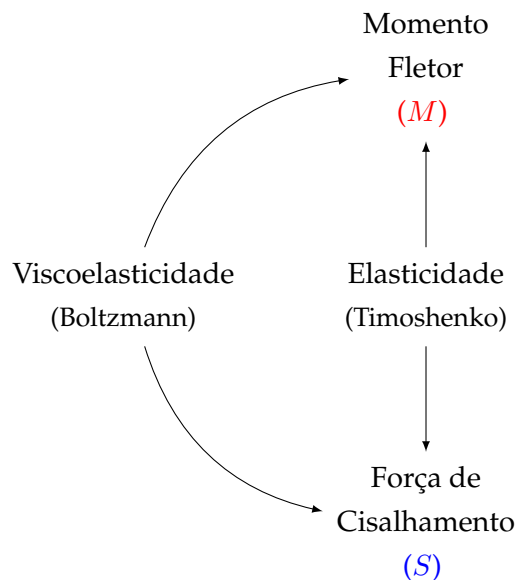


Figura 1.3: Diagrama de combinações dos cenários viscoelásticos

Assim como na Subseção 1.3.1, existem três sistemas provenientes do diagrama representado na Figura 1.3, os quais são chamados de sistemas de Timoshenko-Boltzmann [19].

**Elasticidade (S) e viscoelasticidade (M)**

Substituindo as leis (1.2)<sub>1</sub> e (1.4)<sub>2</sub> no sistema (1.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \left[ \psi_x - \int_0^\infty g_2(\cdot - s) \psi_x(s) ds \right]_x + \kappa(\phi_x + \psi) = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.11)$$

Inicialmente, a estabilidade exponencial do semigrupo solução associado ao sistema (1.11) foi estudada por Fernández Sare e Muñoz Rivera no trabalho [15] e por Messaoudi e Said-Houari no trabalho [25]. Em ambos trabalhos, os autores mostram a estabilidade exponencial assumindo que vale a igualdade  $\chi_0 = 0$  e que existe  $c_0 > 0$  tal que

$$g_2'(s) \leq -c_0 g_2(s), \quad \forall s > 0. \quad (1.12)$$

Para mais detalhes, veja [15, Teorema 3.7], [25, Teorema 2.1].

Visando estudar núcleos de memória mais gerais, Conti, Dell’Oro e Pata consideraram núcleos de memória satisfazendo o que seria chamado futuramente de  $\delta$ -condição [9]. Esta condição se exprime da seguinte maneira: existem  $\delta > 0$  e  $c_1 \geq 1$  tais que

$$g_2(t + s) \leq c_1 e^{-\delta t} g_2(s), \quad (1.13)$$

para todo  $t > 0$  e para quase todo  $s > 0$ . Observe que a igualdade (1.13) não é do tipo diferencial e também que (1.12) implica em (1.13), sendo que a recíproca vale apenas quando  $c_1 = 1$ . Desta forma, assumindo que  $\chi_0 = 0$ , Conti, Dell’Oro e Pata caracterizaram a estabilidade exponencial do semigrupo solução associado a (1.11) via igualdade (1.13). Para mais detalhes, veja [10, Teorema 1].

**Viscoelasticidade (S) e elasticidade (M)**

Substituindo as leis (1.2)<sub>2</sub> e (1.4)<sub>1</sub> no sistema (1.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s) (\phi_x + \psi)(s) ds \right]_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s) (\phi_x + \psi)(s) ds \right] = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.14)$$

O sistema (1.14) foi estudado recentemente por Gomes Tavares, Jorge Silva e Oquendo no preprint [19]. Nele, os autores deram uma caracterização completa da estabilidade exponencial do semigrupo solução associado a (1.14) por meio da igualdade  $\chi_0 = 0$  e da desigualdade (1.13).

Vale ressaltar que este cenário foi abordado apenas em 2019 na versão com história nula, em que a teoria de Volterra [32, 33] foi utilizada no lugar da vertente proposta por Boltzmann. Para mais detalhes, veja [3].

**Viscoelasticidade (S) e viscoelasticidade (M)**

Substituindo as leis (1.4) no sistema (1.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right]_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \left[ \psi_x - \int_0^\infty g_2(\cdot - s)\psi_x(s) ds \right]_x \\ \quad + \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right] = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.15)$$

O sistema (1.15) foi estudado por Liu e Peng no trabalho [23] e posteriormente por Grasseli, Pata e Prouse no trabalho [21]. Neste último, assumindo que os núcleos de memória  $g_1$  e  $g_2$  satisfazem (1.12), os autores mostraram que o semigrupo solução associado a (1.15) é exponencialmente estável independentemente se a igualdade  $\chi_0 = 0$  é válida [21, Corolário 3.2].

**Cenários termoelásticos e viscoelásticos simultâneos**

Aqui, a presença de dissipatividade proveniente de fluxo de temperatura e da viscoelasticidade do material são consideradas simultaneamente. O diagrama associado a este caso é o seguinte:

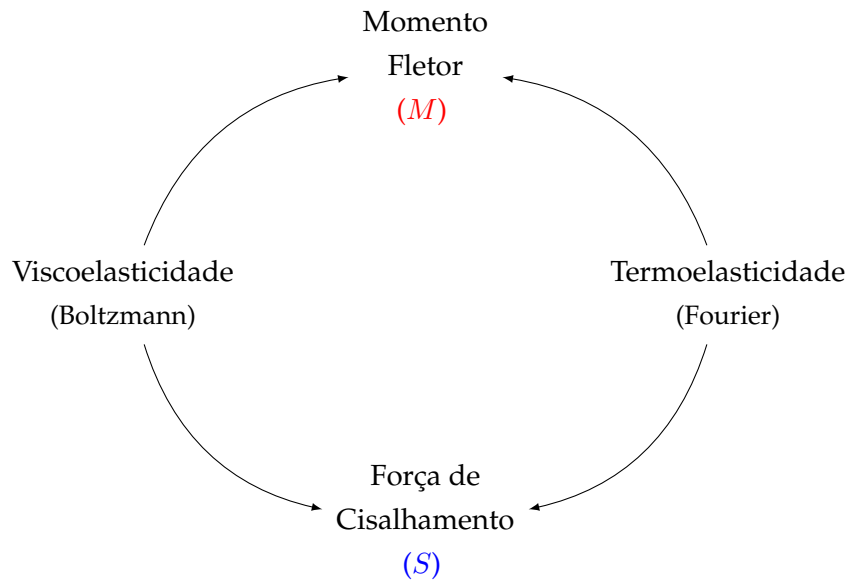


Figura 1.4: Diagrama de combinações dos cenários termoelásticos e viscoelásticos agindo simultaneamente

Analisando o diagrama representado na Figura 1.4 e considerando as leis (1.4) e (1.5), observamos que existem dois sistemas possíveis de serem estudados, os quais chamaremos de sistemas de Timoshenko-Boltzmann-Fourier, ou abreviadamente, sistemas TBF. No entanto, dos dois sistemas, apenas um deles foi estudado na literatura.

**Termoelasticidade (S) e viscoelasticidade (M)**

Substituindo as leis (1.4)<sub>2</sub> e (1.5)<sub>1</sub> no sistema (1.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \nu \vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \left[ \psi_x - \int_0^\infty g_2(\cdot - s) \psi_x(s) ds \right]_x + \kappa(\phi_x + \psi) - \nu \vartheta = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \vartheta_t - \alpha \vartheta_{xx} + \nu(\phi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.16)$$

Inicialmente, a estabilidade exponencial do semigrupo solução associado ao sistema (1.16) foi estudada por Feng no trabalho [14]. Nele, o autor mostra a estabilidade exponencial assumindo que vale a igualdade  $\chi_0 = 0$  e que  $g_2$  satisfaz (1.12). Para mais detalhes, veja [14, Teorema 2.2].

Em 2021, ainda assumindo que  $g_2$  satisfaz (1.12), Jorge Silva e Racke retiraram a necessidade da igualdade  $\chi_0 = 0$  para obter a estabilidade exponencial do semigrupo solução associado a (1.16). Para mais detalhes, veja [22, Teorema 2.2].

Por fim, em 2022, Calsavara, Gomes Tavares e Jorge Silva caracterizaram a estabilidade de soluções assumindo que  $g_2$  satisfaz a hipótese (1.13). Os detalhes podem ser encontrados em [7, Teorema 3.1].

**1.3.2 Termoviscoelasticidade**

Diferentemente dos modelos de Timoshenko em que os acoplamentos viscoelásticos e termoelásticos agem simultaneamente, porém em forças distintas, consideramos aqui os sistemas que tem uma única fonte de dissipação de natureza termoviscoelastica, as quais são regidas pelas leis (1.6). Ressaltamos aqui que dentre os dois sistemas possíveis, apenas um deles foi estudado na literatura.

**Termoviscoelasticidade (M) e elasticidade (S)**

Substituindo as leis (1.2)<sub>1</sub> e (1.6)<sub>2</sub> no sistema (1.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \left[ \psi_x - \int_0^\infty g_2(\cdot - s) \psi_x(s) ds \right]_x + \kappa(\phi_x + \psi) + \sigma \theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_t - \beta \theta_{xx} + \sigma \psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.17)$$

A estabilidade exponencial do semigrupo solução associado ao sistema (1.17) foi estudada por Fernández Sare e Racke no trabalho [16]. Assumindo que  $g_2$  satisfaz (1.12), os autores mostraram que a igualdade  $\chi_0 = 0$  é uma condição necessária e suficiente para obter a estabilidade exponencial. Para mais detalhes, veja [16, Teorema 4.6 e Teorema 4.7].

## 1.4 Objetivo principal e organização do trabalho

Mediante a exposição realizada na Seção 1.3, estamos aptos a apresentar os objetivos desta tese.

O primeiro objetivo é estudar o cenário em que o acoplamento termoelástico age no momento fletor enquanto o acoplamento viscoelástico age na força de cisalhamento, a saber:

### Termoelasticidade (M) e viscoelasticidade (S)

Substituindo as leis (1.4)<sub>1</sub> e (1.5)<sub>2</sub> no sistema (1.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right]_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right] + \sigma\theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_t - \beta\theta_{xx} + \sigma\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.18)$$

Especificamente, vamos mostrar a existência do semigrupo solução associado ao modelo (1.18) e caracterizar a estabilidade exponencial desse semigrupo via desigualdade (1.13). As provas detalhadas de cada resultado proveniente do modelo (1.18) serão feitas no Capítulo 3.

O segundo objetivo é estudar o cenário em que o acoplamento termoviscoelástico age na força de cisalhamento enquanto o acoplamento elástico age no momento fletor. Abaixo, a representação matemática deste modelo.

### Termoviscoelasticidade (S) e elasticidade (M)

Substituindo as leis (1.2)<sub>2</sub> e (1.6)<sub>1</sub> no sistema (1.1), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right]_x + \nu\vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g_1(\cdot - s)(\phi_x + \psi)(s) ds \right] - \nu\vartheta = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \vartheta_t - \alpha\vartheta_{xx} + \nu(\phi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.19)$$

Analogamente ao estudo que será realizado no Capítulo 3, no Capítulo 4 estudamos rigorosamente a existência do semigrupo solução associado ao modelo (1.19) e a caracterização da estabilidade exponencial desse semigrupo via desigualdade (1.13).

Como terceiro objetivo, vamos realizar uma análise comparativa local sobre a influência da igualdade  $\chi_0 = 0$  em relação a estabilidade exponencial dos semigrupos solução associados aos modelos (1.18) e (1.19).

Por fim, o quarto e último objetivo é realizar uma análise comparativa global sobre a influência da igualdade  $\chi_0 = 0$  em relação a estabilidade exponencial dos semigrupos solução associados aos dez possíveis modelos (1.8)-(1.19). Ao final desta análise, será possível dividir

os dez modelos apresentados em duas classes e concluir em qual delas a igualdade  $\chi_0 = 0$  é necessária para obter a estabilidade exponencial dos semigrupos solução. Em particular, ficará evidente, em termos de estabilidade de soluções, a diferença entre considerar acoplamentos termoelásticos e viscoelásticos agindo simultaneamente (em forças diferentes) e acoplamentos termoviscoelásticos.

As discussões e resultados referentes ao terceiro e quarto objetivo serão realizadas no Capítulo 5.

## 1.5 Um aviso para o leitor

Como pré-requisitos para a confecção da parte teórica da presente tese, foram utilizados livros clássicos de Análise Matemática e artigos que abordam temas relacionados a pesquisa. Para cada tópico listamos algumas referências complementares.

- Análise funcional e espaços de Sobolev unidimensionais: [6, 27].
- Medida e integração: [17].
- Semigrupos de operadores lineares: [24, 28].

## Resultados utilizados

Este capítulo é dedicado a exibição dos resultados clássicos utilizados nesta tese.

### 2.1 Análise funcional

**Teorema 2.1.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert sob o corpo  $\mathbb{C}$  e seja  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Então para todo funcional antilinear  $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ , existe  $u \in H$  tal que*

$$b(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

*Demonstração.* Veja [27, Corolário 6.6.2]. □

### 2.2 Medida e integração

**Teorema 2.2** (Convergência Dominada de Lebesgue). *Se uma sequência  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de funções integráveis a Lebesgue num conjunto  $\Omega$  converge quase sempre em  $\Omega$  para uma função  $f$ , e se existe  $\phi \in L^1(\Omega)$  tal que*

$$|f_k| \leq \psi, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

*quase sempre em  $\Omega$ , então a integral  $\int_{\Omega} f \, dx$  existe e*

$$\int_{\Omega} f \, dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_k \, dx.$$

*Demonstração.* Veja [17, Theorem 2.24]. □

**Teorema 2.3.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Se  $u, v \in L^1(0, T; X)$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe  $w \in X$  tal que*

$$u(t) = w + \int_0^t v(s) \, ds.$$

(ii) *Para cada  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$  temos*

$$\int_0^T u(s) \phi'(s) \, ds = - \int_0^T v(s) \phi(s) \, ds.$$

*Em outras palavras,  $u_t = v$  no sentido das distribuições a valores em  $X$ .*

*Demonstração.* Veja [17, Teorema 3.35] □

**Proposição 2.4.** *Seja  $h \in L^1(\mathbb{R}^+)$  uma função não-crescente. Se  $\eta \in \mathcal{M}_h$ , então a função*

$$\widehat{\eta}(s) := \int_0^s e^{-(s-y)} \eta(y) dy,$$

*pertence a  $\mathcal{M}_h$  e*

$$\|\widehat{\eta}\|_{\mathcal{M}_h} \leq \|\eta\|_{\mathcal{M}_h}.$$

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s) \|\widehat{\eta}(s)\|^2 ds &\leq \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-y)} \|\eta(y)\| dy \right)^2 ds \\ &\leq \int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-(s-y)} [g(y)]^{1/2} \|\eta(y)\| dy \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$e^{-(\cdot)} \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad [g(\cdot)]^{1/2} \|\eta(\cdot)\| \in L^2(\mathbb{R}^+),$$

podemos aplicar a desigualdade de Young para convoluções [17, Teorema 8.7] para obter

$$\int_0^\infty g(s) \|\widehat{\eta}(s)\|^2 ds \leq \int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-(s-y)} [g(y)]^{1/2} \|\eta(y)\| dy \right)^2 ds \leq \|\eta\|_{\mathcal{M}_g}^2.$$

Portanto,  $\widehat{\eta} \in \mathcal{M}_g$ , como queríamos. □

**Proposição 2.5.** *Seja  $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função não-negativa tal que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} G(s)$  existe. Se*

$$G_\infty := \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) > 0$$

*então  $G \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ .*

*Demonstração.* Seja  $0 < \varepsilon < G_\infty$ . Da definição de limite, existe  $a_1 > 0$  tal que se  $s > a_1$ , então

$$G_\infty - \varepsilon < G(s) < G_\infty + \varepsilon. \tag{2.1}$$

Assim, integrando (2.1) no intervalo  $(a_1, a_2)$  com  $a_2 > a_1$ , temos

$$(G_\infty - \varepsilon)(a_2 - a_1) \leq \int_{a_1}^{a_2} G(s) ds \leq (G_\infty + \varepsilon)(a_2 - a_1).$$

Fazendo  $a_2 \rightarrow +\infty$ , segue

$$\int_{a_1}^{+\infty} G(s) ds = +\infty.$$

Portanto,  $G \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ . □

**Corolário 2.6.** *Sejam  $G_1, G_2, G_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tais que  $G_2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$  e*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} [G_2(s) + G_3(s)].$$



Vale as seguintes afirmações:

(a) Se  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_3(s) = +\infty$ , então  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s) = +\infty$ .

(b) Se  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_3(s) < +\infty$  e  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s) < +\infty$ , então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_3(s).$$

Como consequência,  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_2(s) = 0$ .

*Demonstração.*

(a) Suponha que  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_3(s) = +\infty$ . Por definição, dado  $A > 0$  qualquer, existe  $B > 0$  tal que se  $s > B$  então  $G_3(s) > A$ . Tendo em conta que  $G_2$  é positiva, segue que

$$s > B \implies G_2(s) + G_3(s) > G_2(s) + A > A.$$

Portanto,  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} [G_2(s) + G_3(s)] = +\infty$ , como desejado.

(b) Suponha agora que  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_3(s) < +\infty$  e  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s) < +\infty$ . Se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_3(s) \neq \lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s)$$

então  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} [G_1(s) - G_3(s)] > 0$ . Assim, pela Proposição 2.5, segue que  $G_2 \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ , o que contradiz a hipótese. Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_3(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s).$$

Desta forma, o resultado fica provado. □

**Lema 2.7.** *Seja  $G \in L^1(\mathbb{R}^+)$  e  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} G(s) \cos(\lambda_n s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} G(s) \sin(\lambda_n s) ds = 0.$$

*Demonstração.* Primeiramente, considere  $G_0$  a extensão zero-fora de  $G$  em todo  $\mathbb{R}$ . Assim,  $G_0 \in L^1(\mathbb{R})$  e, pelo Lema de Riemann-Lebesgue [17, Teorema 8.22] segue que a transformada de Fourier de  $G_0$ , a qual denotaremos por  $\mathcal{F}(G_0)$ , é uma função contínua com suporte compacto em  $\mathbb{R}$ . Daí,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(G_0)(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi s} G_0(s) ds = 0.$$

Considerando a sequência  $\xi_n = \frac{\lambda_n}{2\pi}$ , observamos que  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  implica que  $|\xi_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(G_0)(\xi_n) = 0$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-i\lambda_n s} G(s) ds = 0.$$

Portanto, lembrando que  $e^{-i\lambda_n s} = \cos(\lambda_n s) + i \sin(\lambda_n s)$ , chegamos ao resultado desejado. □

## 2.3 Semigrupos de operadores lineares

**Teorema 2.8.** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador com  $\overline{D(A)} = X$ . Então  $A$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$  se, e somente se,  $A$  é dissipativo e o operador  $\lambda_0 I - A$  é sobrejetor para algum  $\lambda_0 > 0$ .*

*Demonstração.* Veja [28, Theorem 4.3]. □

**Teorema 2.9.** *Seja  $X$  um espaço reflexivo e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador dissipativo tal que o operador  $I - A$  é sobrejetor. Então  $\overline{D(A)} = X$ .*

*Demonstração.* Veja [28, Theorem 4.6] □

Agora, vamos utilizar o seguinte resultado.

**Lema 2.10** ([18], Lema 1.6). *Seja  $T(t)$  um  $C_0$ -semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert  $H$  e  $B$  seu gerador infinitesimal. Se existe  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda - B)z\|_H \geq \varepsilon \|z\|_H, \quad \forall z \in D(B), \quad (2.2)$$

então  $T(t)$  é exponencialmente estável.

**Corolário 2.11.** *Seja  $T(t)$  um  $C_0$ -semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert  $H$  e  $B$  seu gerador infinitesimal. Se  $T(t)$  não é exponencialmente estável, então existem sequências  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  e  $z_n \in D(B)$  tais que:*

- A.  $\lambda_n \rightarrow \lambda_* \in [-\infty, +\infty]$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,
- B.  $\|z_n\|_H = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- C.  $i\lambda_n z_n - Bz_n \rightarrow 0$  em  $H$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Se  $T(t)$  não é exponencialmente estável, segue de (2.2) que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $z_n \in D(B)$  com  $\|z_n\|_H = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda - B)z_n\|_H < \frac{1}{n}. \quad (2.3)$$

De (2.3) e da definição de ínfimo, dado  $n, m \in \mathbb{N}$ , existe  $\lambda_{n,m} \in \mathbb{R}$  tal que

$$\|(i\lambda_{n,m} - B)z_n\|_H < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Utilizando o método da diagonal e lembrando do fato que toda sequência de números reais possui uma subsequência monótona, deduzimos que

$$i\lambda_n z_n - Bz_n \rightarrow 0$$

em  $H$ , para alguma sequência monotona  $\lambda_n = \lambda_{n,n}$ .

Por fim, se  $\lambda_n$  é limitada, então existe  $\lambda_* \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . E, se  $\lambda_n$  é ilimitada, então  $\lambda_n \rightarrow -\infty$  ou  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . A prova está completa.  $\square$

## 2.4 Desigualdades

**Lema 2.12** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja  $X$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Então,*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in X$$

onde  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

*Demonstração.* Veja [13, Apêndice B.2.i].  $\square$

**Lema 2.13** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $I$  um intervalo aberto e  $1 \leq p, q \leq \infty$  satisfazendo  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $u \in L^p(I)$  e  $v \in L^q(I)$ , então  $uv \in L^1(I)$  e*

$$\int_I |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(I)} \|v\|_{L^q(I)}.$$

*Demonstração.* Veja [6, Teorema 4.6].  $\square$

**Lema 2.14** (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $I$  um intervalo limitado. Então existe  $c = c(\text{med}I) > 0$  tal que*

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq c \|u_x\|_{L^2(I)},$$

para toda função  $u \in H_0^1(I)$  ou  $u \in H_*^1(I)$ .

*Demonstração.* Veja [6, Proposição 8.13 e Problema 47 (8), 6].  $\square$

**Proposição 2.15** (Desigualdade de Young para convoluções). *Sejam  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$  com  $1 \leq p \leq +\infty$ . Então para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , a função*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto F(y) = f(x - y)h(y) \end{aligned}$$

é integrável sobre  $\mathbb{R}^n$ . Definimos a convolução de  $f$  com  $h$  por

$$(f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) h(y) dy.$$

Então,  $f * h \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e

$$\|f * h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demonstração.* Veja [17, Teorema 8.7].  $\square$

## Modelo TBF com viscoelasticidade agindo na força de cisalhamento e termoelasticidade agindo no momento fletor

No presente capítulo, vamos estudar um sistema de Timoshenko-Boltzmann-Fourier em que a viscoelasticidade age apenas na força de cisalhamento e o fluxo de calor é acoplado no momento fletor. Neste caso, vamos provar que a igualdade  $\chi_0 = 0$  não é necessária para a obtenção da estabilidade exponencial do semigrupo solução.

### 3.1 O problema original

Dado  $L > 0$ , consideremos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g(s)(\phi_x + \psi)(t-s) ds \right]_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g(s)(\phi_x + \psi)(t-s) ds \right] + \sigma \theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_t - \beta \theta_{xx} + \sigma \psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

com as seguintes condições de fronteira

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, L), \\ \phi(x, t) + \int_0^x \psi(y, t) dy = p_0(x, t), \quad (x, t) \in (0, L) \times (-\infty, 0). \end{cases} \quad (3.3)$$

Aqui, as constantes  $\rho_1, \rho_2, \kappa$  e  $b$  são assumidas positivas e tanto o *núcleo de memória*  $g$ , quanto a *história passada*  $p_0$  são funções dadas.

**Observação 3.1.** A condição (3.3)<sub>4</sub> não é usual. Em geral, o termo integral de equações/sistemas integro-diferenciais é uma convolução entre duas funções. No entanto, devido a ação da viscoelasticidade na força de cisalhamento, o termo de convolução é composto por dois termos, mas um deles é a soma  $\phi_x + \psi$ , o que justifica a condição (3.3)<sub>4</sub>.

Para estudar a existência e o comportamento das soluções de (3.1)-(3.3), vamos introduzir um sistema equivalente com propriedades mais ricas.

### 3.2 O problema autônomo equivalente

Como usualmente é feito para problemas com história infinita, vamos considerar a *variável deslocamento de história* [12]:

$$\eta^t(x, s) = (\phi + \tilde{\psi})(x, t) - (\phi + \tilde{\psi})(x, t - s), \quad (3.4)$$

em que

$$\tilde{\psi}(x, t) = \int_0^x \psi(y, t) dy.$$

A variável acima definida satisfaz (formalmente) as condições

$$\begin{cases} \eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = (\phi + \tilde{\psi})_t(t), & (x, t, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s) := (\phi + \tilde{\psi})(x, 0) - (\phi + \tilde{\psi})(x, -s), & (x, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \eta^t(x, s) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Desta forma, reescrevemos o problema (3.1)-(3.3) no seguinte sistema autônomo equivalente

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty \eta_x(s) ds \right]_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty \eta_x(s) ds \right] + \sigma \theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_t - \beta \theta_{xx} + \sigma \psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s - (\phi + \tilde{\psi})_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.5)$$

com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} \phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, \\ \eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, & (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta^t(x, 0) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.6)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), & x \in (0, L), \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), & (x, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.7)$$

A fim de realizar um estudo rigoroso do sistema (3.5)-(3.7), vamos introduzir os espaços funcionais e algumas notações básicas.

Começamos considerando o espaço de Hilbert (complexo)  $L^2(0, L)$  munido do seguinte produto interno e norma:

$$(u, v) = \int_0^L u(x) \overline{v(x)} dx, \quad \|u\| = \left( \int_0^L |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Para contemplar as condições de fronteira do sistema (3.5)-(3.7), consideramos também os seguintes espaços de Hilbert com seus respectivos produtos internos e normas:

$$\begin{aligned} L_*^2(0, L) &= \left\{ u \in L^2(0, L), \frac{1}{L} \int_0^L u(x) dx = 0 \right\}, & (u, v)_{L_*^2} &= (u, v), & \|u\|_{L_*^2} &= \|u\|, \\ H_0^1(0, L) &= \{ u \in H^1(0, L), u(0) = u(L) = 0 \}, & (u, v)_{H_0^1} &= (u_x, v_x), & \|u\|_{H_0^1} &= \|u_x\|, \\ H_*^1(0, L) &= \left\{ u \in H^1(0, L), \frac{1}{L} \int_0^L u(x) dx = 0 \right\}, & (u, v)_{H_*^1} &= (u_x, v_x), & \|u\|_{H_*^1} &= \|u_x\|. \end{aligned}$$

Além disso, para lidar com a variável de deslocamento da história, consideramos o seguinte espaço com peso  $h$ :

$$\mathcal{M}_h := \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_0^1(0, L); \int_0^\infty h(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds < \infty \right\},$$

em que  $h \in L^1(\mathbb{R}^+)$ . O espaço  $\mathcal{M}_h$  é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno e norma

$$(\eta, \xi)_{\mathcal{M}_h} = \int_0^\infty h(s) (\eta_x(s), \xi_x(s)) ds, \quad \|\eta\|_{\mathcal{M}_h}^2 := \int_0^\infty h(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds.$$

Para estudar a existência de soluções, vamos definir a classe de núcleos de memória  $g$  que serão utilizadas ao longo deste capítulo.

**Definição 3.2.** Dizemos que uma função  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é um núcleo admissível se  $g$  é absolutamente contínua, não-crescente e integrável com

$$\ell := \int_0^\infty g(s) ds \in (0, 1).$$

**Observação 3.3.** Se  $g$  é um núcleo admissível, então  $g'$  existe quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  com  $g'(s) \leq 0$ , para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . De fato, como  $g$  é absolutamente contínua, segue do Teorema , que  $g'$  existe quase sempre em  $\mathbb{R}^+$ . Além disso, da monotonicidade e continuidade de  $g$ , temos

$$g'(s) = \lim_{\tau \rightarrow s} \frac{g(s) - g(\tau)}{s - \tau} \leq 0,$$

para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ , como queríamos.

Seja  $g$  um núcleo admissível no sentido da Definição 3.2. Sob as notações acima e definindo

$$\omega = 1 - \ell > 0,$$

consideramos o espaço de fase estendido

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M}_g$$

equipado com produto interno

$$\begin{aligned} (z^1, z^2)_{\mathcal{H}} &= \rho_1(\Phi^1, \Phi^2) + \rho_2(\Psi^1, \Psi^2) + \rho_3(\theta^1, \theta^2) + b(\psi_x^1, \psi_x^2) + \kappa(\eta^1, \eta^2)_{\mathcal{M}_g} \\ &\quad + \kappa\omega(\phi_x^1 + \psi^1, \phi_x^2 + \psi^2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

e norma

$$\|z\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|\Phi\|^2 + \rho_2 \|\Psi\|^2 + \rho_3 \|\theta\|^2 + \kappa\omega \|\phi_x + \psi\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \kappa \|\eta\|_{\mathcal{M}_g}^2, \quad (3.9)$$

em que  $z_i = (\phi^i, \Phi^i, \psi^i, \Psi^i, \theta^i, \eta^i)$ ,  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta) \in \mathcal{H}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Observação 3.4.** A norma (3.9) é obtida realizando cálculos formais e trabalhando diretamente com o sistema (3.5)-(3.7). Para o leitor interessado na motivação por trás da obtenção desta norma veja o Apêndice A.

Ainda com respeito a norma (3.9), salientamos que esta é equivalente à norma usual de  $\mathcal{H}$ . Com efeito, aplicando a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré, temos

$$c_1 (\|\phi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2) \leq \|\phi_x + \psi\|^2 + \|\psi_x\|^2 \leq c_2 (\|\phi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2),$$

para algumas constantes  $c_2 > c_1 > 0$ . Dessa forma, o espaço  $\mathcal{H}$  munido da norma (3.9) é um espaço de Banach e, uma vez que a (3.9) é induzida pelo produto interno (3.8), deduzimos que  $\langle \mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}} \rangle$  é um espaço de Hilbert.

Uma vez que o sistema (3.5)-(3.7) é linear e autônomo, podemos utilizar ferramentas da teoria de semigrupos de operadores lineares para estudá-lo. Para que tal teoria seja aplicada vamos, a partir do (3.5)-(3.7), construir um problema de Cauchy abstrato em  $\mathcal{H}$ .

### 3.2.1 Problema de Cauchy abstrato

Para simplificar a escrita do problema que buscamos, consideremos o operador  $\mathbb{L} : D(\mathbb{L}) \subset \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  dado por

$$D(\mathbb{L}) := \{\eta \in \mathcal{M}_g, \mathbb{L}\eta \in \mathcal{M}_g \text{ e } \eta(0) = 0\}, \quad \mathbb{L}\eta := -\partial_s \eta.$$

Seja  $\Phi = \phi_t$ ,  $\Psi = \psi_t$  e  $z_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \eta^0)$ . Podemos reescrever (3.5)-(3.7) como o seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} z_t = \mathbb{A}_1 z, & t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3.10)$$

em que o operador linear  $\mathbb{A}_1 : D(\mathbb{A}_1) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é definido por

$$\mathbb{A}_1 z = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1} \left[ \kappa \omega (\phi_x + \psi)_x + \kappa \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds \right] \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2} \left[ b \psi_{xx} - \kappa \omega (\phi_x + \psi) - \kappa \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds - \sigma \theta_x \right] \\ \frac{1}{\rho_3} [\beta \theta_{xx} - \sigma \Psi_x] \\ \mathbb{L} \eta + (\Phi + \tilde{\Psi}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

e seu domínio  $D(\mathbb{A}_1)$  consiste de todas as funções  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta)$  que pertencem ao espaço

$$H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times [H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)] \times H_*^1(0, L) \times [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)] \times D(\mathbb{L})$$

tais que

$$\psi_x \in H_0^1(0, L), \quad \omega \phi + \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \in H^2(0, L).$$

A partir de agora, focaremos nosso estudo no operador  $\mathbb{A}_1$  e no problema (3.10).

### 3.2.2 O semigrupo solução

Nosso primeiro resultado visa mostrar que o problema (3.10) admite solução em algum sentido. Para isso, é suficiente provar que o operador  $\mathbb{A}_1$  é gerador infinitesimal de  $C_0$ -semigrupo de contrações.

**Teorema 3.5.** *Seja  $g$  um núcleo admissível. Então, o operador  $\mathbb{A}_1$  definido em (3.11) é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $S_1(t) = e^{t\mathbb{A}_1}$ . Consequentemente, para todo  $z_0 \in \mathcal{H}$ , o problema (3.10) possui uma única solução generalizada  $z \in C(0, \infty; \mathcal{H})$  dada por*

$$z(t) = S_1(t)z_0, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Em particular, se  $z_0 \in D(\mathbb{A}_1)$  então  $z$  é a solução clássica de (3.10) e

$$z \in C^1(0, \infty; \mathcal{H}) \cap C(0, \infty; D(\mathbb{A}_1)).$$

*Demonstração.* No que segue, vamos mostrar que:

- (i)  $\mathbb{A}_1$  é um operador dissipativo;
- (ii)  $I - \mathbb{A}_1$  é sobrejetor.

*Prova de (i).* Seja  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta) \in D(\mathbb{A}_1)$ . Aplicando a técnica de integração por partes e



utilizando as condições de fronteira, obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}_1 z, z)_{\mathcal{H}} &= -\kappa\omega(\phi_x + \psi, \Phi_x) - \kappa \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \Phi_x) ds + \kappa\omega(\Phi_x + \Psi, \phi_x + \psi) \\
&\quad + \kappa \int_0^\infty g(s)(\Phi_x + \Psi, \eta_x(s)) ds + \kappa(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} - b(\psi_x, \Psi_x) - \kappa\omega(\phi_x + \psi, \Psi) \\
&\quad - \sigma(\theta_x, \Psi) - \kappa \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \Psi) ds + b(\Psi_x, \psi_x) - \beta\|\theta_x\|^2 - \sigma(\Psi_x, \theta) \\
&= \kappa\omega[(\Phi_x + \Psi, \phi_x + \psi) - (\phi_x + \psi, \Phi_x + \Psi)] \\
&\quad + \kappa \int_0^\infty g(s)[(\Phi_x + \Psi, \eta_x(s)) - (\eta_x(s), \Phi_x + \Psi)] ds \\
&\quad + \sigma[(\theta, \Psi_x) - (\Psi_x, \theta)] + b[(\Psi_x, \psi_x) - (\psi_x, \Psi_x)] \\
&\quad - \beta\|\theta_x\|^2 + \kappa(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g}.
\end{aligned}$$

Tendo em conta que  $w - \bar{w} = 2i \operatorname{Im} w$ , deduzimos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}_1 z, z)_{\mathcal{H}} &= -\beta\|\theta_x\|^2 + \kappa(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} + 2i \operatorname{Im} \kappa\omega(\Phi_x + \Psi, \phi_x + \psi) \\
&\quad + 2i \operatorname{Im} \left[ \kappa \int_0^\infty g(s)(\Phi_x + \Psi, \eta_x(s)) ds + \sigma(\theta, \Psi_x) + b(\Psi_x, \psi_x) \right].
\end{aligned}$$

Extraindo a parte real da igualdade acima, chegamos na seguinte expressão

$$\operatorname{Re}(\mathbb{A}_1 z, z)_{\mathcal{H}} = -\beta\|\theta_x\|^2 + \kappa \operatorname{Re}(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, aplicando integração por partes, inferimos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} &= - \int_0^\infty g(s)(\eta_{sx}(s), \eta_x(s)) ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \frac{d}{ds} \|\eta_x(s)\|^2 ds \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ g(y) \|\eta_x(y)\|^2 - g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \eta_x\left(\frac{1}{y}\right) \right\|^2 - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right]
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds. \quad (3.14)$$

Com efeito, seja  $y > 0$ . Explorando o fato que  $\eta \in D(\mathbb{L})$  e aplicando a desigualdade de Hölder,

temos

$$\begin{aligned}
0 \leq g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \eta_x\left(\frac{1}{y}\right) \right\|^2 &= g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \int_0^{1/y} \eta_{sx}(s) ds \right\|^2 \\
&\leq g\left(\frac{1}{y}\right) \left( \int_0^{1/y} \|\eta_{sx}(s)\| ds \right)^2 \\
&= \left( \int_0^{1/y} \sqrt{g\left(\frac{1}{y}\right)} \|\eta_{sx}(s)\| ds \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{y} \int_0^{1/y} g(s) \|\eta_{sx}(s)\|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{y} \|\eta_s\|_{\mathcal{M}_g}^2.
\end{aligned}$$

Fazendo  $y \rightarrow \infty$  e utilizando o teorema do confronto, obtemos

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \eta_x\left(\frac{1}{y}\right) \right\|^2 = 0$$

e conseqüentemente,

$$(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ g(y) \|\eta_x(y)\|^2 - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right]. \quad (3.15)$$

Analisando os termos de (3.15), concluímos que existem três possibilidades excludentes, a saber:

- a)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left( - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right) = 0;$
- b)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left( - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right) > 0;$
- c)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left( - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right) = +\infty.$

No que segue, vamos provar que nem a) e nem c) podem ocorrer. De fato, suponhamos que a) ocorra. Da arbitrariedade de  $\eta$ , deduzimos que  $g'(s) = 0$  para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Uma vez que  $g$  é contínua, obtemos que  $g$  é constante, o que contradiz  $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ .

Suponha agora que c) ocorra. Por um lado, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $\mathcal{M}_g$ , temos

$$|(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g}| \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{1/y}^y g(s) |(\eta_{sx}(s), \eta_x(s))| ds \leq \|\eta_s\|_{\mathcal{M}_g} \|\eta\|_{\mathcal{M}_g} < +\infty, \quad (3.16)$$

para todo  $\eta \in D(\mathbb{L})$ . Por outro lado, como  $g(\cdot) \|\eta_x(\cdot)\|^2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ , teríamos pelo item (a) do

Corolário 2.6 que

$$(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{1/y}^y g(s) (\eta_{sx}(s), \eta_x(s)) ds = +\infty,$$

contrariando (3.16). Assim, não pode ocorrer c) e conseqüentemente vale b). Logo, de (3.16) e do item (b) do Corolário 2.6 para concluirmos (3.14) e também

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \|\eta_x(y)\|^2 = 0, \quad (3.17)$$

como queríamos.

Combinando (3.13) e (3.14), chegamos a

$$\operatorname{Re}(\mathbb{A}_1 z, z)_{\mathcal{H}} = -\beta \|\theta_x\|^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \leq 0, \quad \forall z \in D(\mathbb{A}_1). \quad (3.18)$$

Portanto,  $\mathbb{A}_1$  é um operador dissipativo.

*Prova de (ii).* Seja  $f = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$ . Para mostrar a sobrejetividade desejada, precisamos encontrar um vetor  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta) \in D(\mathbb{A}_1)$  tal que

$$\begin{cases} \phi - \Phi = f^1, \\ \rho_1 \Phi - \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right]_x = \rho_1 f^2, \\ \psi - \Psi = f^3, \\ \rho_2 \Psi - b\psi_{xx} + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] + \sigma \theta_x = \rho_2 f^4, \\ \rho_3 \theta - \beta \theta_{xx} + \sigma \Psi_x = \rho_3 f^5, \\ \eta + \eta_s - (\Phi + \tilde{\Psi}) = f^6. \end{cases} \quad (3.19)$$

O processo de construção de uma solução de (3.19) com a regularidade desejada é extensa e por isso vamos seguir os passos descritos abaixo:

Passo 1. Construir uma terna  $(\phi, \psi, \theta) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$  utilizando o Teorema de Lax-Milgram.

Passo 2. Construir um par  $(\Phi, \Psi) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$  satisfazendo as equações (3.19)<sub>1</sub> e (3.19)<sub>3</sub>.

Passo 3. Construir uma função  $\eta \in D(\mathbb{L})$  que verifica a equação (3.19)<sub>6</sub>.

Passo 4. Mostrar que  $\theta \in H^2(0, L)$  e que a equação (3.19)<sub>5</sub> é satisfeita.

Passo 5. Mostrar que

$$\omega \phi + \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \in H^2(0, L)$$

e que a equação (3.19)<sub>2</sub> é satisfeita.

Passo 6. Mostrar que

$$\psi \in H^2(0, L), \quad \psi_x \in H_0^1(0, L)$$

e que a equação (3.19)<sub>4</sub> é satisfeita.

No que segue, denotaremos por  $c$  todas as constantes positivas que dependem apenas dos parâmetros do sistema (3.19).

*Passo 1.* Seja

$$W := H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

munido da norma

$$\|(u, v, w)\|_W = \|u_x + v\| + \|v_x\| + \|w_x\|, \quad (u, v, w) \in W$$

e

$$c_g := 1 - \int_0^\infty g(s)e^{-s} ds = \omega + \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds > 0.$$

Considere a forma sesquilinear

$$\Lambda : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\begin{aligned} \Lambda((\phi, \psi, \theta), (u, v, w)) &= \rho_1(\phi, u) + \rho_2(\psi, v) + \rho_3(\theta, w) + b(\psi_x, v_x) + \beta(\theta_x, w_x) \\ &\quad + \kappa c_g(\phi_x + \psi, u_x + v) - \sigma(\theta, v_x) + \sigma(\psi_x, w). \end{aligned}$$

e o funcional antilinear  $F : W \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= \rho_1(f^1 + f^2, u) + \rho_2(f^3 + f^4, v) + \kappa \left[ \ell - \int_0^\infty g(s)e^{-s} ds \right] (f_x^1 + f^3, u_x + v) \\ &\quad - \kappa \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{-(s-\tau)} (f_x^6(\tau), u_x + v) d\tau ds + (\rho_3 f^5 + \sigma f_x^3, w). \end{aligned}$$

Vale ressaltar que a forma  $\Lambda$  e o funcional  $F$  não são definidos de maneira aleatória. As motivações por trás de suas definições podem ser encontradas no Apêndice A.

A fim de utilizar o teorema de Lax-Milgram, provaremos que:

- $\Lambda$  é contínua e coerciva;
- $F$  é contínua.

De fato, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
|\Lambda((\phi, \psi, \theta), (u, v, w))| &\leq \rho_1 \|\phi\| \|u\| + \rho_2 \|\psi\| \|v\| + \rho_3 \|\theta\| \|w\| + b \|\psi_x\| \|v_x\| + \beta \|\theta_x\| \|w_x\| \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| \|u_x + v\| + \sigma \|\theta\| \|v_x\| + \sigma \|\psi_x\| \|w\| \\
&\leq \rho_1 c_p^2 \|\phi_x\| \|u_x\| + \rho_2 c_p^2 \|\psi_x\| \|v_x\| + \rho_3 c_p^2 \|\theta_x\| \|w_x\| + b \|\psi_x\| \|v_x\| + \\
&\quad + \beta \|\theta_x\| \|w_x\| + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| \|u_x + v\| + \sigma c_p \|\theta_x\| \|v_x\| \\
&\quad + \sigma c_p \|\psi_x\| \|w_x\| \\
&\leq c (\|\phi_x\| \|u_x\| + \|\psi_x\| \|v_x\| + \|\theta_x\| \|w_x\|) \\
&\quad + c (\|\phi_x + \psi\| \|u_x + v\| + \|\theta_x\| \|v_x\| + \|\psi_x\| \|w_x\|) \\
&\leq c \|(\phi, \psi, \theta)\|_W \|(u, v, w)\|_W,
\end{aligned}$$

para todo  $(\phi, \psi, \theta), (u, v, w) \in W$ . Logo,  $\Lambda$  é contínua.

Além disso, para todo  $(\phi, \psi, \theta) \in W$  temos

$$\begin{aligned}
\Lambda((\phi, \psi, \theta), (\phi, \psi, \theta)) &= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + \rho_3 \|\theta\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \beta \|\theta_x\|^2 \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| - \sigma(\theta, \psi_x) + \sigma(\psi_x, \theta) \\
&= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + \rho_3 \|\theta\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \beta \|\theta_x\|^2 \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| + 2i\sigma \operatorname{Im}\{(\psi_x, \theta)\}.
\end{aligned}$$

Considerando apenas a parte real de  $\Lambda((\phi, \psi, \theta), (\phi, \psi, \theta))$ , deduzimos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \Lambda((\phi, \psi, \theta), (\phi, \psi, \theta)) &= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + \rho_3 \|\theta\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \beta \|\theta_x\|^2 \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\|^2 \\
&= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + \rho_3 \|\theta\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \beta \|\theta_x\|^2 \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\|^2 \\
&\geq b \|\psi_x\|^2 + \beta \|\theta_x\|^2 + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\|^2 \\
&\geq c \|(\phi, \psi, \theta)\|_W^2.
\end{aligned}$$

Assim,  $\Lambda$  é coerciva.

Agora, seja  $(u, v, w) \in W$ . Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré e a Proposição 2.4, obtemos

$$\begin{aligned}
|F(u, v, w)| &\leq \rho_1 \|f^1 + f^2\| \|u\| + \rho_2 \|f^3 + f^4\| \|v\| + 2\kappa \|f_x^1 + f^3\| \|u_x + v\| + \rho_3 \|f^5\| \|w\| \\
&\quad + \kappa \|u_x + v\| \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{-(s-\tau)} \|f_x^6(\tau)\| d\tau ds + \sigma \|f_x^3\| \|w\| \\
&\leq \rho_1 c_p \|f^1 + f^2\| \|u_x\| + \rho_2 c_p \|f^3 + f^4\| \|v_x\| + 2\kappa \|f_x^1 + f^3\| \|u_x + v\| \\
&\quad + \rho_3 c_p \|f^5\| \|w_x\| + \kappa \|u_x + v\| \|f^6\|_{M_g} + \sigma c_p \|f_x^3\| \|w_x\| \\
&\leq c \|f\|_{\mathfrak{H}} \|(u, v, w)\|_W,
\end{aligned}$$

o que prova a continuidade de  $F$ .

Agora, temos condições de aplicar o Teorema 2.1 para garantir a existência de uma terna  $(\phi, \psi, \theta) \in W$  tal que

$$\Lambda((\phi, \psi, \theta), (u, v, w)) = F(u, v, w), \quad \forall (u, v, w) \in W. \quad (3.20)$$

*Passo 2.* Defina

$$\Phi = \phi - f^1, \quad \Psi = \psi - f^3.$$

Por definição, as equações (3.19)<sub>1</sub> e (3.19)<sub>3</sub> são satisfeitas. Além disso, tendo em conta que  $\phi, f^1 \in H_0^1(0, L)$  e  $\psi, f^3 \in H_*^1(0, L)$ , obtemos que  $\Phi \in H_0^1(0, L)$  e  $\Psi \in H_*^1(0, L)$ .

*Passo 3.* Defina

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})(\Phi + \tilde{\Psi}) + \int_0^s f^6(\tau) e^{-(s-\tau)} d\tau, \quad s > 0. \quad (3.21)$$

Afirmamos que  $\eta$  pertence a  $D(\mathbb{L})$  e satisfaz (3.19)<sub>6</sub>. Com efeito, temos

$$\eta(0) = (1 - e^0)(\Phi + \tilde{\Psi}) + \int_0^0 f^6(\tau) e^{-(s-\tau)} d\tau = 0.$$

Aplicando a Proposição 2.4 no termo de convolução de  $\eta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds &\leq 2\|\Phi_x + \Psi\|^2 \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds \\ &\quad + 2 \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-\tau)} \|f_x^6(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \\ &\leq c \left( \|\Phi_x + \Psi\|^2 + \|f^6\|_{\mathcal{M}_g}^2 \right). \end{aligned}$$

Logo,  $\eta \in \mathcal{M}_g$ .

Na sequência, vamos calcular  $\eta_s$  em termos de funções conhecidas. Note que

$$\begin{aligned} \eta_s(s) &= e^{-s}(\Phi + \tilde{\Psi}) + \frac{d}{ds} \int_0^s f^6(\tau) e^{-(s-\tau)} d\tau \\ &= e^{-s}(\Phi + \tilde{\Psi}) - \int_0^s f^6(\tau) e^{-(s-\tau)} d\tau + f^6(s) \\ &= - \left[ (1 - e^{-s})(\Phi + \tilde{\Psi}) + \int_0^s f^6(\tau) e^{-(s-\tau)} d\tau \right] \\ &\quad + (\Phi + \tilde{\Psi}) + f^6(s) \\ &= -\eta(s) + (\Phi + \tilde{\Psi}) + f^6(s), \end{aligned}$$

para todo  $s > 0$ . Então,  $\eta_s \in \mathcal{M}_g$  e a equação (3.19)<sub>6</sub> é satisfeita.

*Passo 4.* Seja  $w \in H_0^1(0, L)$ . Utilizando a equação (3.20) com o vetor  $(0, 0, w) \in W$ , deduzimos que

$$\rho_3(\theta, w) + \beta(\theta_x, w_x) + \sigma(\psi_x, w) = \rho_3(f^5, w) + \sigma(f_x^3, w), \quad w \in H_0^1(0, L),$$

ou ainda,

$$\beta \int_0^L \theta_x(x) \overline{w_x(x)} dx = - \int_0^L (\rho_3 \theta(x) + \sigma \psi_x(x) - \rho_3 f^5(x) - \sigma f_x^3(x)) \overline{w(x)} dx, \quad w \in H_0^1(0, L).$$

Da definição de derivada fraca e das regularidades previamente obtidas, deduzimos

$$\beta \theta_{xx} = \rho_3 \theta - \rho_3 f^5 + \underbrace{\sigma (\psi_x - f_x^3)}_{=\Psi_x} = \rho_3 \theta - \rho_3 f^5 + \sigma \Psi_x \in L^2(0, L).$$

Logo,  $\theta \in H^2(0, L)$  e a equação (3.19)<sub>5</sub> é satisfeita.

*Passo 5.* Seja  $u \in H_0^1(0, L)$ . Utilizando a equação (3.20) com o vetor  $(u, 0, 0) \in W$ , temos

$$\begin{aligned} \rho_1(\phi, u) + \kappa c_g(\phi_x + \psi, u_x) &= \rho_1(f^1 + f^2, u) \\ &+ \kappa \left( \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds \right) (f_x^1 + f_x^3, u_x) \\ &- \kappa \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-\tau)} (f_x^6(\tau), u_x) d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em conta que  $\phi - f^1 = \Phi$  e de (3.21), obtemos que

$$\begin{aligned} c_g(\phi_x + \psi) - \left[ \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds \right] (f_x^1 + f_x^3) + \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-\tau)} f_x^6(\tau) d\tau \right) ds \\ = \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

temos

$$\kappa \int_0^L \left[ \omega(\phi_x + \psi)(x) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(x, s) ds \right] \overline{u_x(x)} dx = -\rho_1 \int_0^L (\Phi(x) - f^2(x)) \overline{u(x)} dx.$$

Da definição de derivada fraca e das regularidades obtidas anteriormente, obtemos

$$\kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right]_x = \rho_1 \Phi - \rho_1 f^2 \in L^2(0, L). \quad (3.23)$$

Logo, de (3.23) e notando que  $\tilde{\psi} \in H^2(0, L)$ , deduzimos que (3.19)<sub>2</sub> é satisfeita e que

$$\omega \phi + \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \in H^2(0, L),$$

como queríamos.

*Passo 6.* Seja  $v \in H_*^1(0, L)$ . Utilizando a equação (3.20) com o vetor  $(0, v, 0) \in W$ , considerando a igualdade (3.22) e lembrando que  $\psi - f^3 = \Psi$ , obtemos

$$b(\psi_x, v_x) = -\rho_2(\Psi, v) - \kappa \left( \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, v \right) - \sigma(\theta_x, v) + \rho_2(f^4, v). \quad (3.24)$$

Afirmamos que (3.24) é válida para todo  $v \in H^1(0, L)$ . De fato, dado  $v \in H^1(0, L)$ , defina

$$\varphi = v - \frac{1}{L} \int_0^L v(x) dx \in H_*^1(0, L).$$

Substituindo  $\varphi$  em (3.24), temos

$$b(\psi_x, \varphi_x) = -\rho_2(\Psi, \varphi) - \kappa \left( \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, \varphi \right) - \sigma(\theta_x, \varphi) + \rho_2(f^4, \varphi). \quad (3.25)$$

Por outro lado, explorando as regularidades  $(\phi, \psi, \theta) \in W$  e  $f \in \mathcal{H}$ , deduzimos

$$\begin{aligned} (\psi_x, \varphi_x) &= (\psi_x, v_x) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \psi_x(x) dx \right) = (\psi_x, v_x), \\ (\Psi, \varphi) &= (\Psi, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \Psi(x) dx \right) = (\Psi, v), \\ (\phi_x + \psi, \varphi) &= (\phi_x + \psi, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L (\phi_x + \psi)(x) dx \right) \\ &= (\phi_x + \psi, v), \\ \left( \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, \varphi \right) &= \left( \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, v \right) \\ &\quad - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x(x, s) ds dx \right) \\ &= \left( \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, v \right), \\ (\theta_x, \varphi) &= (\theta_x, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \theta_x(x) dx \right) = (\theta, v), \\ (f^4, \varphi) &= (f^4, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L f^4(x) dx \right) = (f^4, v). \end{aligned}$$

Logo, substituindo as ultimas seis igualdades em (3.25), chegamos na afirmação desejada. Em particular, vale

$$\begin{aligned} b \int_0^L \psi_x(x) \overline{v_x(x)} &= - \int_0^L \left[ \rho_2 \Psi(x) + \kappa \left( \omega(\phi_x + \psi)(x) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x, s) ds \right) \right] \overline{v(x)} dx \\ &\quad - \int_0^L (\sigma \theta_x(x) - \rho_2 f^4(x)) \overline{v(x)} dx. \end{aligned}$$

para todo  $v \in H^1(0, L)$ . Da definição de derivada fraca e das regularidades previamente obtidas,



chegamos a

$$b\psi_{xx} = \rho_2\Psi + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds \right] + \sigma\theta_x - \rho_2f^4 \in L^2(0, L). \quad (3.26)$$

Logo,  $\psi \in H^2(0, L)$  e a equação (3.19)<sub>4</sub> é satisfeita.

Finalmente, provemos que  $\psi_x \in H_0^1(0, L)$ . Seja  $v \in C([0, L])$  tal que  $v(0) = 0$  e  $v(L) = 1$ . Por um lado, realizando uma integração por partes, temos

$$\int_0^L \psi_x(x)\overline{v_x(x)} dx = \psi_x(x)\overline{v(x)} \Big|_0^L - \int_0^L \psi_{xx}(x)\overline{v(x)} dx = \psi_x(L) - \int_0^L \psi_{xx}(x)\overline{v(x)} dx. \quad (3.27)$$

Por outro lado, da definição de derivada fraca, temos

$$\int_0^L \psi_x(x)\overline{v_x(x)} dx = - \int_0^L \psi_{xx}(x)\overline{v(x)} dx. \quad (3.28)$$

Comparando as equações (3.27) e (3.28), obtemos  $\psi_x(L) = 0$ . Além disso, usando a equação (3.26) e explorando novamente as regularidades  $(\phi, \psi, \theta) \in W$  e  $f \in \mathcal{H}$ , deduzimos

$$\begin{aligned} b(\psi_x(L) - \psi_x(0)) &= b \int_0^L \psi_{xx}(x) dx \\ &= \rho_2 \int_0^L \Psi(x) dx + \kappa \int_0^L \left[ \omega(\phi_x + \psi)(x) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x, s) ds \right] dx \\ &\quad + \sigma \int_0^L \theta_x(x) dx - \rho_2 \int_0^L f^4(x) dx \\ &= \kappa \left[ \omega(\phi(L) - \phi(0)) + \int_0^\infty g(s)\eta(L, s) ds - \int_0^\infty g(s)\eta(0, s) ds \right] \\ &\quad + \sigma(\theta(L) - \theta(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\psi_x(0) = \psi_x(L) = 0$  e portanto,  $\psi_x \in H_0^1(0, L)$ . Assim, fica provado (ii).

*Conclusão.* Uma vez que  $\mathcal{H}$  é reflexivo,  $\mathbb{A}_1$  é dissipativo e  $I - \mathbb{A}_1$  é sobrejetor, o [28, Teorema 4.6] garante que  $D(\mathbb{A}_1)$  é denso em  $\mathcal{H}$ . Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips (veja [24, Teorema 1.2.4]), o operador  $\mathbb{A}_1$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $S_1(t) = e^{t\mathbb{A}_1}$ . A prova está completa.  $\square$

**Observação 3.6.** Antes de encerrarmos esta seção, vamos discutir brevemente a equivalência entre os problemas (3.1)-(3.3) e (3.5)-(3.7).

Por um lado, partindo do problema original, define-se a variável deslocamento de história  $\eta$  (veja (3.4)), e chegamos no sistema (3.5)-(3.7). Ou seja, em algum sentido, se  $(\phi, \psi, \theta)$  é solução de (3.1)-(3.3) então  $(\phi, \psi, \theta, \eta)$  é solução de (3.5)-(3.7).

Por outro lado, para mostrar a outra parte da equivalência, um estudo rigoroso sobre a

equação suplementar

$$\begin{cases} \eta_t = \mathbb{L}\eta + (\phi + \tilde{\psi})_t, & t > 0 \\ \eta^t(0) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

deve ser realizado. Os detalhes podem ser encontrados no trabalho [20]. Nele, os autores provam que  $\mathbb{L}$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de translações à direita  $R(t) : \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  cuja definição é

$$[R(t)\eta](s) := \begin{cases} \eta(s-t), & s > t, \\ 0, & 0 < s \leq t. \end{cases}$$

A forma explícita do semigrupo  $R(t)$  permite determinar a variável  $\eta$  em termos das funções  $\phi$  e  $\psi$ , a saber

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \eta^0(s-t) + (\phi + \tilde{\psi})(t) - (\phi + \tilde{\psi})(0), & s > t, \\ (\phi + \tilde{\psi})(t) - (\phi + \tilde{\psi})(t-s), & 0 < s \leq t. \end{cases} \quad (3.29)$$

Utilizando a expressão (3.29) é possível concluir que se  $(\phi, \psi, \theta, \eta)$  é solução de (3.5)-(3.7), então  $(\phi, \psi, \theta)$  é solução de (3.1)-(3.3), o que prova a equivalência desejada.

Na próxima seção, estudaremos a estabilidade exponencial do semigrupo  $S_1(t)$  definido em (4.12).

### 3.3 Caracterização da estabilidade exponencial

O objetivo desta seção é caracterizar a estabilidade exponencial do semigrupo  $S_1(t)$  em termos do comportamento do núcleo de memória  $g$ . Especificamente, vamos exibir uma condição sobre  $g$  que seja necessária e suficiente para garantir a existência de constantes  $M \geq 1$  e  $\gamma > 0$  tais que

$$\|S_1(t)z\|_{\mathcal{X}} \leq Me^{-\gamma t}\|z\|_{\mathcal{X}}, \quad t > 0$$

independentemente se a igualdade  $\chi_0 = 0$  é válida. Vejamos então a condição escolhida, cuja a definição é apresentada a seguir.

**Definição 3.7 ([9]).** Dizemos que uma função  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaz a  $\delta$ -condição para algum  $\delta > 0$ , se existe  $C \geq 1$  tal que

$$g(t+s) \leq Ce^{-\delta t}g(s), \quad (3.30)$$

para todo  $t > 0$  e para quase todo  $s > 0$ .

**Observação 3.8.** Observe que  $g$  satisfaz a  $\delta$ -condição se, e somente se, para cada  $t > 0$ , tivermos

$$\text{med} \left\{ s \in \mathbb{R}^+, g(t+s) - Ce^{-\delta t}g(s) > 0 \right\} = 0,$$

para algum  $C \geq 1$  e  $\delta > 0$ , em que  $\text{med}$  é a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^+$ . Essa versão da  $\delta$ -condição será útil na sequência.

Além disso, é fácil exibir um exemplo de uma função satisfazendo (3.30) e que não

satisfaz a condição usual

$$g'(s) \leq -c_0 g(s), \quad \forall s > 0,$$

para algum  $c_0 > 0$ . De fato, basta considerar a função

$$g(s) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } 0 < s \leq 1, \\ e^{-1}, & \text{se } 1 < s \leq 5/4, \\ e^{-x+1/4}, & \text{se } s > 5/4. \end{cases}$$

O resultado principal desta seção é o seguinte.

**Teorema 3.9.** *Seja  $g$  um núcleo admissível. Então, o semigrupo  $S_1(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se,  $g$  satisfaz a  $\delta$ -condição (3.30) para algum  $\delta > 0$ .*

A prova do Teorema 3.9 será dividida em duas subseções como segue.

### 3.3.1 Prova do Teorema 3.9 (Necessidade)

Suponha que o semigrupo  $S_1(t)$  é exponencialmente estável. Seguindo as ideias de Chepyzhov e Pata [8], vamos considerar  $\eta_0 \in \mathcal{M}_g$  e definir

$$z(t) = S_1(t)(0, 0, 0, 0, 0, \eta_0) = (\phi(t), \Phi(t), \psi(t), \Psi(t), \theta(t), \eta^t).$$

Por definição, existem  $M \geq 1$  e  $\gamma > 0$  tais que

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|S_1(t)(0, 0, 0, 0, 0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M e^{-\gamma t} \|\eta_0\|_{\mathcal{M}_g}^2, \quad (3.31)$$

para todo  $t > 0$ . Agora, levando em consideração a expressão (3.29) e usando (3.31), deduzimos

$$\begin{aligned} \int_t^\infty g(s) \|\eta_{0x}(s-t)\|^2 ds &\leq 2\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_g}^2 + 2\|\phi_x(t) + \psi(t)\|^2 \\ &\leq \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t} \|\eta_0\|_{\mathcal{M}_g}^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

para todo  $t > 0$ .

Por outro lado, para cada  $t > 0$  considere o conjunto

$$\mathcal{N}_t := \left\{ s \in \mathbb{R}^+, g(t+s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t} g(s) > 0 \right\}.$$

Pela Observação 3.8 é suficiente mostra que  $\text{med } \mathcal{N}_t = 0$  para todo  $t > 0$ . Desta forma, suponhamos por contradição que exista  $t_0 > 0$  tal que  $\text{med } \mathcal{N}_{t_0} \in (0, +\infty]$ . Então,

$$0 < \int_{\mathcal{N}_{t_0}} \left[ g(t_0 + s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} g(s) \right] ds \leq \left[ 1 + \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) \right] \ell < +\infty. \quad (3.33)$$

Porém, de (3.32) temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{t_0}^{\infty} g(s) \|\eta_{0x}(s - t_0)\|^2 ds - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} \int_0^{\infty} g(s) \|\eta_{0x}(s)\|^2 ds \\ &= \int_0^{\infty} \left[ g(t_0 + s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} g(s) \right] \|\eta_{0x}(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

para todo  $\eta_0 \in \mathcal{M}_g$ . Agora, escolhemos  $\eta_0(s) = \chi_{\mathcal{N}_{t_0}}(s)\phi^*$ , em que  $\phi^* \in H_0^1(0, L)$  satisfaz  $\|\phi_x^*\| = 1$ . Com essa escolha, obtemos a desigualdade

$$\int_{\mathcal{N}_{t_0}} \left[ g(t_0 + s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} g(s) \right] ds \leq 0,$$

a qual contradiz (3.33). Portanto,  $g$  satisfaz a  $\delta$ -condição com  $\delta = \gamma > 0$  e

$$C = \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) \geq 1.$$

### 3.3.2 Prova do Teorema 3.9 (Suficiência)

Suponhamos por absurdo que o semigrupo  $S_1(t)$  não é exponencialmente estável. Pelo Corolário 2.11, existem sequências  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  e  $z_n \in D(\mathbb{A}_1)$  tais que:

- A.  $\lambda_n \rightarrow \lambda_* \in [-\infty, +\infty]$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,
- B.  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- C.  $i\lambda_n z_n - \mathbb{A}_1 z_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{H}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

No que segue, mostraremos que o item B não pode ocorrer, o que gerará a contradição desejada. De fato, escrevendo a convergência do item C em termo de suas componentes, temos

$$\begin{cases} i\lambda_n \phi_n - \Phi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), \\ i\lambda_n \rho_1 \Phi_n - \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{nx}(s) ds \right]_x \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \\ i\lambda_n \psi_n - \Psi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_*^1(0, L), \\ i\lambda_n \rho_2 \Psi_n - b\psi_{nxx} + \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{nx}(s) ds \right] + \sigma \theta_{nx} \rightarrow 0 & \text{em } L_*^2(0, L), \\ i\lambda_n \rho_3 \theta_n - \beta \theta_{nxx} + \sigma \Psi_{nx} \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L), \\ i\lambda_n \eta_n + \eta_{ms} - \left( \Phi_n + \tilde{\Psi} \right) \rightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}_g. \end{cases} \quad (3.34)$$

A fim de organizar as ideias, vamos separar o restante da demonstração em alguns lemas. Em todos eles, são válidas as hipóteses sobre o núcleo  $g$  assumidas no enunciado do Teorema 3.9. Além disso, para não sobrecarregar a notação, vamos denotar por  $c$  todas as constantes positivas que dependem dos parâmetros estruturais  $L, g, \rho_1, \rho_2, b, \kappa, \beta$  e  $\sigma$ .

**Lema 3.10.** *Existe  $\alpha > 0$  tal que o conjunto*

$$N = N_\alpha := \{s \in \mathbb{R}^+, \alpha g'(s) + g(s) < 0\}$$

*tem medida de Lebesgue positiva.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que para todo  $\alpha > 0$ , o conjunto  $N_\alpha$  tenha medida de Lebesgue nula. Para cada  $\alpha > 0$ , considere a seguinte decomposição em conjuntos disjuntos:

$$\mathbb{R}^+ = P_\alpha \cup N_\alpha \cup O,$$

em que

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \{s \in \mathbb{R}^+; \alpha g'(s) + g(s) \geq 0\}, \\ O &= \{s \in \mathbb{R}^+; g'(s) \text{ não existe}\}. \end{aligned}$$

Da Observação 3.3,  $g'$  existe quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  com  $g'(s) \leq 0$ , para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Consequentemente, a medida de Lebesgue do conjunto  $N_\alpha \cup O$  é nula e assim, para todo  $\alpha > 0$ , temos

$$g'(s) + \frac{1}{\alpha}g(s) \geq 0,$$

para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Fazendo  $\alpha \rightarrow +\infty$ , chegamos a  $g'(s) \geq 0$ , para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Logo,  $g' \equiv 0$  quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  e por continuidade temos que  $g$  é uma função constante positiva. Mas isto implica que  $g \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ , o que contradiz o fato de  $g$  ser um núcleo admissível. Portanto, existe  $\alpha > 0$  satisfazendo a condição desejada.  $\square$

**Lema 3.11.** *Seja  $g_*(s) := \chi_N(s)g(s)$ . Vale a seguinte convergência*

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{g_*}}^2 - \int_0^\infty g'(s)\|\eta_{nx}(s)\|^2 ds + \|\theta_{nx}\|^2 \rightarrow 0$$

*quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Da definição de  $N$  e do fato que  $\mathbb{A}_1$  é dissipativo, temos

$$\begin{aligned} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{g_*}}^2 - \int_0^\infty g'(s)\|\eta_{nx}(s)\|^2 ds + \|\theta_{nx}\|^2 &\leq c \left( - \int_0^\infty g'(s)\|\eta_{nx}(s)\|^2 ds + \|\theta_{nx}\|^2 \right) \\ &\leq c \operatorname{Re}(-Az_n, z_n)_{\mathcal{H}} \\ &= c \operatorname{Re}(i\lambda_n z_n - Az_n, z_n)_{\mathcal{H}} \\ &\leq c \|i\lambda_n z_n - Az_n\|_{\mathcal{H}} \|z_n\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Logo, dos itens B e C, concluímos a convergência desejada.  $\square$

Utilizando o Lema 3.11, podemos reduzir o conjunto de convergências (3.34) no seguinte

sistema:

$$\begin{cases} f_n^1 := i\lambda_n\phi_n - \Phi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), \\ f_n^2 := i\lambda_n\rho_1\Phi_n - \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{nx}(s) ds \right]_x \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \\ f_n^3 := i\lambda_n\psi_n - \Psi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_*^1(0, L), \\ f_n^4 := i\lambda_n\rho_2\Psi_n - b\psi_{nxx} + \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{nx}(s) ds \right] \rightarrow 0 & \text{em } L_*^2(0, L), \\ f_n^5 := i\lambda_n\rho_3\theta_n - \beta\theta_{nxx} + \sigma\Psi_{nx} \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L), \\ f_n^6 := i\lambda_n\eta_n + \eta_{ms} - (\Phi_n + \tilde{\Psi}_n) \rightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}_g. \end{cases} \quad (3.35)$$

Continuando com os lemas auxiliares, temos o seguinte.

**Lema 3.12.** *Existe  $c > 0$  tal que*

$$\int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \leq c\|\eta\|_{\mathcal{M}_g}^2, \quad (3.36)$$

para todo  $\eta \in \mathcal{M}_g$ .

*Demonstração.* Seja  $\eta \in \mathcal{M}_g$ . Explorando a  $\delta$ -condição (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds &= \int_0^\infty \left( \int_0^s g^{1/2}(s)\|\eta_x(\tau)\|, d\tau \right)^2 ds \\ &\leq C \int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-\frac{\delta}{2}(s-\tau)} g^{1/2}(\tau)\|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Agora, aplicamos a desigualdade de Young para convoluções [17, Teorema 8.7] com

$$e^{-\frac{\delta}{2}(\cdot)} \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad g^{1/2}(\cdot)\|\eta_x(\cdot)\| \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

para chegarmos a

$$\int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-\frac{\delta}{2}(s-\tau)} g^{1/2}(\tau)\|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \leq \frac{4}{\delta^2} \left( \int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|^2 ds \right).$$

Portanto, combinando as estimativas acima concluímos o desejado.  $\square$

**Lema 3.13.** *Se  $\lambda_* = 0$ , então  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* De (3.35)<sub>1</sub>, (3.35)<sub>3</sub>, (3.35)<sub>6</sub> e do item B, temos

$$\Phi_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad \Psi_n \rightarrow 0 \text{ em } H_*^1(0, L), \quad \eta_{ms} \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{M}_g.$$

Levando em conta que  $\eta_n \in D(\mathbb{L})$ , podemos aplicar Lema 3.12 para obter

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \leq \sqrt{\int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|\eta_{ms}(\tau)\| d\tau \right)^2 ds} \leq c\|\eta_{ms}\|_{\mathcal{M}_g} \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

Assim, das imersões  $H_*^1(0, L) \hookrightarrow L_*^2(0, L)$ ,  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$  e de (3.37), temos

$$\Phi_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad \Psi_n \rightarrow 0 \text{ em } L_*^2(0, L), \quad \eta_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{M}_g. \quad (3.38)$$

Agora, tomando o produto interno de (3.35)<sub>2</sub> com  $\phi_n$  em  $L^2(0, L)$ , o produto interno de (3.35)<sub>4</sub> com  $\psi_n$  em  $L_*^2(0, L)$  e somando os respectivos resultados, deduzimos

$$\begin{aligned} \kappa\omega\|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 + b\|\psi_{nx}\|^2 &= (f_n^2 - i\lambda_n\rho_1\Phi_n, \phi_n) + (f_n^4 - i\lambda_n\rho_2\Psi_n, \psi_n) \\ &\quad + \kappa \int_0^\infty g(s)(\eta_{nx}(s), \phi_{nx} + \psi_n) ds. \end{aligned} \quad (3.39)$$

De (3.35)<sub>2</sub>, (3.35)<sub>4</sub> e (3.38), inferimos

$$\begin{aligned} |(f_n^2 - i\lambda_n\rho_1\Phi_n, \phi_n)| &\leq \|f_n^2 - i\lambda_n\rho_1\Phi_n\| \|\phi_n\| \rightarrow 0, \\ |(f_n^4 - i\lambda_n\rho_2\Psi_n, \psi_n)| &\leq \|f_n^4 - i\lambda_n\rho_2\Psi_n\| \|\psi_n\| \rightarrow 0, \\ \left| \int_0^\infty g(s)(\eta_{nx}(s), \phi_{nx} + \psi_n) ds \right| &\leq \sqrt{\ell} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \|\phi_{nx} + \psi_n\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, combinando (3.38) e (3.39) concluímos que  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como queríamos.  $\square$

Nos próximos lemas, vamos assumir que  $\lambda_* \neq 0$ . Neste caso, utilizando a propriedade de conservação do sinal, podemos supor sem perda de generalidade que, a menos de uma subsequência,  $\lambda_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 3.14.** *A sequência*

$$J_n := \int_0^\infty g_*(s)(1 - \cos(\lambda_n s)) ds \quad (3.40)$$

satisfaz  $J_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n > 0.$$

*Demonstração.* Se  $\lambda_* \in \mathbb{R}$ , então considere o seguinte conjunto

$$P_1 := \left\{ s \in \mathbb{N}, s = \frac{2j\pi}{\lambda_n} \text{ ou } s = \frac{2j\pi}{\lambda_*}, j, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como  $P_1$  é enumerável, então possui medida de Lebesgue nula e portanto o conjunto  $\mathbb{N} \setminus P_1$  tem medida de Lebesgue positiva. Assim, da definição de  $P_1$  e tendo em conta que  $g$  é positiva em  $\mathbb{R}^+$ , segue que

$$J_n = \int_{\mathbb{N} \setminus P_1} g(s)(1 - \cos(\lambda_n s)) ds > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, temos

$$|g_*(s)(1 - \cos(\lambda_n s))| \leq 2g(s),$$

para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$  e, da continuidade da função cosseno,

$$g_*(s)(1 - \cos(\lambda_n s)) \rightarrow g_*(s)(1 - \cos(\lambda_* s))$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada [17, Teorema 2.24], obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \int_0^\infty g_*(s)(1 - \cos(\lambda_* s)) ds = \int_{N \setminus P_1} g(s)(1 - \cos(\lambda_* s)) ds > 0.$$

Agora, suponha que  $\lambda_* \in \{-\infty, +\infty\}$ . Então, considerando o conjunto

$$P_2 := \left\{ s \in N, s = \frac{2j\pi}{\lambda_n}, j, n \in \mathbb{N} \right\}$$

e argumentando de forma análoga ao caso  $\lambda_* \in \mathbb{R}$ , chegamos a  $J_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, como  $g_* \in L^1(\mathbb{R}^+)$ , podemos aplicar o Lema 2.7 para concluirmos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_*(s) ds - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_*(s) \cos(\lambda_n s) ds = \int_0^\infty g_*(s) ds > 0,$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Lema 3.15.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\phi_{nx} + \psi_n\| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos resolver a E.D.O. (3.35)<sub>6</sub> com respeito a variável  $s$ . De fato, utilizando o fator integrante  $e^{i\lambda_n s}$  na equação (3.35)<sub>6</sub> e procedendo de forma padrão, obtemos

$$\eta_n(s) = \frac{1}{i\lambda_n} \left(1 - e^{-i\lambda_n s}\right) \left(\Phi_n + \tilde{\Psi}_n\right) + \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} f_n^6(\tau) d\tau. \quad (3.41)$$

Combinando (3.35)<sub>1</sub>, (3.35)<sub>3</sub> e (3.41), deduzimos

$$\eta_n(s) = \left(1 - e^{-i\lambda_n s}\right) \left(\phi_n + \tilde{\psi}_n\right) - \frac{1}{i\lambda_n} \left(1 - e^{-i\lambda_n s}\right) \left(f_n^1 + \tilde{f}_n^3\right) + \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} f_n^6(\tau) d\tau. \quad (3.42)$$

Fazendo o produto interno de (3.42) com  $\phi_n + \tilde{\psi}_n$  em  $\mathcal{M}_{g_*}$  temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g_*(s)(1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 &= \frac{1}{i\lambda_n} \left( \int_0^\infty g_*(s)(1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \right) (f_{nx}^1 + f_n^3, \phi_{nx} + \psi_n) \\ &\quad - \int_0^\infty g_*(s) \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} (f_{nx}^6(\tau), \phi_{nx} + \psi_n) d\tau ds \\ &\quad + (\eta_n, \phi_n + \tilde{\psi}_n)_{\mathcal{M}_{g_*}}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real de ambos os lados da ultima igualdade, obtemos

$$\|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 = \frac{A_n^1}{J_n}, \quad (3.43)$$



em que  $J_n$  é definido em (3.40) e

$$A_n^1 : = \operatorname{Re} \left[ (\eta_n, \phi_n + \tilde{\psi}_n)_{\mathcal{M}_{g_*}} + \frac{1}{i\lambda_n} \left( \int_0^\infty g_*(s)(1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \right) (f_{nx}^1 + f_n^3, \phi_{nx} + \psi_n) \right] \\ - \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty g_*(s) \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} (f_{nx}^6(\tau), \phi_{nx} + \psi_n) d\tau ds \right].$$

Tendo em conta o Lema 3.14, basta provarmos que  $A_n^1 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Com efeito, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Poincaré e o Lema 3.12, deduzimos

$$|A_n^1| \leq c \|\phi_{nx} + \psi_n\| \left[ \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{g_*}} + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \int_0^\infty g(s) \int_0^s \|f_{nx}^6(\tau)\| d\tau ds \right] \\ \leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} \left[ \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{g_*}} + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right] \\ \leq c \left[ \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{g_*}} + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right].$$

Logo, do Lema 3.11 e das convergências (3.35)<sub>1</sub>, (3.35)<sub>3</sub> e (3.35)<sub>6</sub>, obtemos que  $A_n^1 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, de (3.43) segue a convergência desejada.  $\square$

**Lema 3.16.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Tomando o produto interno de (3.42) com  $\eta_n$  in  $\mathcal{M}_g$ , temos

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g}^2 = A_n^2, \tag{3.44}$$

em que

$$A_n^2 : = \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} (f_{nx}^6(\tau), \eta_{nx}(s)) d\tau ds \\ + \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-i\lambda_n s})(\phi_{nx} + \psi_n, \eta_{nx}(s)) ds \\ - \frac{1}{i\lambda_n} \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-i\lambda_n s})(f_{nx}^1 + f_n^3, \eta_{nx}(s)) ds.$$

Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 3.12 obtemos

$$\begin{aligned}
|A_n^2| &\leq c \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \left[ \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \sqrt{\int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|f_{nx}^6(\tau)\| d\tau \right)^2 ds} \right] \\
&\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} \left[ \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right] \\
&\leq c \left[ \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right].
\end{aligned}$$

Logo, do Lema 3.15 e das convergências (3.35)<sub>1</sub>, (3.35)<sub>3</sub> e (3.35)<sub>6</sub>, obtemos que  $A_n^2 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o resultado segue de (3.44).  $\square$

**Lema 3.17.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\Phi_n\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Fazendo o produto interno (3.35)<sub>2</sub> com  $\phi_n$  in  $L^2(0, L)$ , usando (3.35)<sub>1</sub> e aplicando a técnica de integração por partes, inferimos

$$\rho_1 \|\Phi_n\|^2 = A_n^3, \quad (3.45)$$

em que

$$A_n^3 := -(f_n^2, \phi_n) - \rho_1 (\Phi_n, f_n^1) + \kappa \omega(\phi_{nx} + \psi_n, \phi_{nx}) + \kappa \int_0^\infty g(s) (\eta_{nx}(s), \phi_{nx}) ds.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré e notando que

$$\|\phi_{nx}\| \leq \|\phi_{nx} + \psi_n\| + c \|\psi_{nx}\| \leq c \|z_n\|_{\mathcal{H}},$$

chegamos na seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
|A_n^3| &\leq c \|\phi_{nx}\| [\|f_n^2\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g}] + \rho_1 \|\Phi_n\| \|f_n^1\| \\
&\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} [\|f_n^2\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} + \|f_{nx}^1\|] \\
&\leq c [\|f_n^2\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} + \|f_{nx}^1\|].
\end{aligned}$$

Logo, do Lema 3.15, do Lema 3.16 e das convergências (3.35)<sub>1</sub> e (3.35)<sub>2</sub>, obtemos que  $A_n^3 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o resultado segue de (3.45).  $\square$

**Lema 3.18.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\psi_{nx}\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Agora, é o momento exato em que a equação (3.35)<sub>5</sub> entra em ação para evitar o uso da igualdade  $\chi_0 = 0$ . De fato, Tomando o produto interno de (3.35)<sub>5</sub> com  $\psi_{nx}$ , utilizando a equação (3.35)<sub>3</sub> e aplicando a técnica de integração por partes, obtemos

$$\|\psi_{nx}\|^2 = A_n^4, \quad (3.46)$$

onde

$$A_n^4 = \frac{1}{i\sigma\lambda_n}(f_n^5, \psi_{nx}) + \frac{1}{i\lambda_n}(f_{nx}^3, \psi_{nx}) - \frac{\beta}{i\sigma\lambda_n}(\theta_{nx}, \psi_{nxx}) - \frac{\rho_3}{\sigma}(\theta_n, \psi_{nx}). \quad (3.47)$$

Isolando  $\psi_{nxx}$  na equação (3.35)<sub>4</sub> e substituindo a expressão encontrada no terceiro termo de (3.47), temos

$$\begin{aligned} A_n^4 &= \frac{1}{i\sigma\lambda_n}(f_n^5, \psi_{nx}) + \frac{1}{i\lambda_n}(f_{nx}^3, \psi_{nx}) - \frac{\beta\rho_2}{b\sigma}(\theta_{nx}, \Psi_n) - \frac{\beta\kappa\omega}{ib\sigma\lambda_n}(\theta_{nx}, \phi_{nx} + \psi_n) \\ &\quad - \frac{\beta\kappa}{ib\sigma\lambda_n} \int_0^\infty g(s)(\theta_{nx}, \eta_{nx}(s)) ds + \frac{\beta}{ib\sigma\lambda_n}(\theta_{nx}, f_n^4) - \frac{\rho_3}{\sigma}(\theta_n, \psi_{nx}). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Poincaré, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |A_n^4| &\leq \frac{c}{|\lambda_n|} (\|\psi_{nx}\| \|f_n^5\| + \|\psi_{nx}\| \|f_{nx}^3\| + \|\theta_{nx}\| \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\theta_{nx}\| \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} + \|\theta_{nx}\| \|f_n^4\|) \\ &\quad + c (\|\theta_{nx}\| \|\Psi_n\| + \|\theta_{nx}\| \|\psi_{nx}\|) \\ &\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} \left( \frac{1}{|\lambda_n|} + 1 \right) (\|f_n^5\| + \|f_{nx}^3\| + \|f_n^4\| + \|\theta_{nx}\|) \\ &\leq c \left( \frac{1}{|\lambda_n|} + 1 \right) (\|f_n^5\| + \|f_{nx}^3\| + \|f_n^4\| + \|\theta_{nx}\|). \end{aligned}$$

Logo, do Lema 3.11 e das convergências (3.35)<sub>4</sub>, (3.35)<sub>5</sub> e (3.35)<sub>6</sub>, concluímos que  $A_n^4 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o resultado segue de (3.46).  $\square$

**Lema 3.19.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\Psi_n\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Tomando o produto interno de (3.35)<sub>4</sub> com  $\psi_n$  em  $L^2(0, L)$  e usando a equação (3.35)<sub>3</sub> temos

$$\rho_2 \|\Psi_n\|^2 = A_n^5 \quad (3.48)$$

em que

$$A_n^5 = -(f_n^4, \psi_n) - \rho_2(\Psi_n, f_n^3) + b\|\psi_{nx}\|^2 + \kappa\omega(\phi_{nx} + \psi_n, \psi_n) + \kappa \int_0^\infty g(s)(\eta_{nx}(s), \psi_n) ds.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de

Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
|A_n^5| &\leq \|f_n^4\| \|\psi_n\| + b \|\psi_{nx}\|^2 + \rho_2 \|\Psi_n\| \|f_n^3\| + \kappa \omega \|\phi_{nx} + \psi_n\| \|\psi_n\| \\
&\quad + \kappa \|\psi_n\| \int_0^\infty g(s) \|\eta_{nx}(s)\| ds \\
&\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} [\|f_n^4\| + \|\psi_{nx}\| + \|f_n^3\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{H}}] \\
&\leq c [\|f_n^4\| + \|\psi_{nx}\| + \|f_{nx}^3\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{H}}].
\end{aligned}$$

Logo, do Lema 3.15, do Lema 3.16, do Lema 3.18 e das convergências (3.35)<sub>3</sub> e (3.35)<sub>4</sub>, deduzimos que  $A_n^5 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o resultado segue de (3.48).  $\square$

*Prova do Teorema 3.9 (Suficiência).* Do Lema 3.11, Lema 3.13, Lema 3.15, Lema 3.16, Lema 3.17, Lema 3.18 e Lema 3.19 segue que  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , qualquer que seja  $\lambda_* \in [-\infty, +\infty]$ . Mas, isto contradiz o fato que  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, o semigrupo  $S_1(t)$  é exponencialmente estável.  $\square$

## Modelo TBF com dissipação termoviscoelásticas agindo na força de cisalhamento

Neste capítulo, vamos estudar um sistema de Timoshenko-Boltzmann-Fourier em que a termoviscoelasticidade age apenas na força de cisalhamento. Especificamente, como mencionado na introdução desta tese, estamos interessados em mostrar que a igualdade  $\chi_0 = 0$  é necessária para a obtenção da estabilidade exponencial do semigrupo solução .

### 4.1 O problema original

Dado  $L > 0$ , consideremos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g(s)(\phi_x + \psi)(t-s) ds \right]_x + \nu \vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa \left[ (\phi_x + \psi) - \int_0^\infty g(s)(\phi_x + \psi)(t-s) ds \right] - \nu \vartheta = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \vartheta_t - \alpha \vartheta_{xx} + \nu (\phi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (4.1)$$

com as seguintes condições de fronteira

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \vartheta_x(0, t) = \vartheta_x(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.2)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), \quad x \in (0, L), \\ \phi(x, t) + \int_0^x \psi(y, t) dy = p_0(x, t), \quad (x, t) \in (0, L) \times (-\infty, 0). \end{cases} \quad (4.3)$$

Vale lembrar que as constantes  $\rho_1, \rho_2, \kappa$  e  $b$  são positivas e que o núcleo de memória  $g$  e a história passada  $p_0$  são funções dadas.

**Observação 4.1.** Como mencionado na Observação 3.1, a condição (4.3)<sub>4</sub> não é usual e é fortemente utilizada na equivalência entre o problema (4.1) e o problema autônomo equivalente que será introduzido a seguir.

## 4.2 O problema autônomo equivalente

Inspirados nas ideias de Dafermos [12], vamos considerar a *variável deslocamento de história*:

$$\eta^t(x, s) = \left( \phi + \tilde{\psi} \right) (x, t) - \left( \phi + \tilde{\psi} \right) (x, t - s). \quad (4.4)$$

A variável acima definida satisfaz (formalmente) as condições

$$\begin{cases} \eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = (\phi + \tilde{\psi})_t(t), & (x, t, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s) := (\phi + \tilde{\psi})(x, 0) - (\phi + \tilde{\psi})(x, -s), & (x, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \eta^t(x, s) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Desta forma, reescrevemos o problema (4.1)-(4.3) no seguinte sistema autônomo equivalente

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty \eta_x(s) ds \right]_x + \nu \vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty \eta_x(s) ds \right] - \nu \vartheta = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \vartheta_t - \alpha \vartheta_{xx} + \nu (\phi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ \eta_t + \eta_s - (\phi + \tilde{\psi})_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.5)$$

com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} \phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \vartheta_x(0, t) = \vartheta_x(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, \\ \eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, & (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta^t(x, 0) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.6)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L), \\ \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), & x \in (0, L), \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), & (x, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (4.7)$$

A fim de realizar um estudo rigoroso do sistema (4.5)-(4.7), vamos introduzir os espaços funcionais e algumas notações básicas.

Começamos considerando o espaço de Hilbert (complexo)  $L^2(0, L)$  munido do seguinte produto interno e norma:

$$(u, v) = \int_0^L u(x) \overline{v(x)} dx, \quad \|u\| = \left( \int_0^L |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Para contemplar as condições de fronteira do sistema (4.5)-(4.7), consideramos também os

seguintes espaços de Hilbert com seus respectivos produtos internos e normas:

$$\begin{aligned} L_*^2(0, L) &= \left\{ u \in L^2(0, L), \frac{1}{L} \int_0^L u(x) dx = 0 \right\}, & (u, v)_{L_*^2} &= (u, v), & \|u\|_{L_*^2} &= \|u\|, \\ H_0^1(0, L) &= \{ u \in H^1(0, L), u(0) = u(L) = 0 \}, & (u, v)_{H_0^1} &= (u_x, v_x), & \|u\|_{H_0^1} &= \|u_x\|, \\ H_*^1(0, L) &= \left\{ u \in H^1(0, L), \frac{1}{L} \int_0^L u(x) dx = 0 \right\}, & (u, v)_{H_*^1} &= (u_x, v_x), & \|u\|_{H_*^1} &= \|u_x\|. \end{aligned}$$

Além disso, para lidar com a variável de deslocamento da história, consideramos o seguinte espaço com peso  $h$ :

$$\mathcal{M}_h := \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_0^1(0, L); \int_0^\infty h(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds < \infty \right\},$$

em que  $h \in L^1(\mathbb{R}^+)$ . O espaço  $\mathcal{M}_h$  é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno e norma

$$(\eta, \xi)_{\mathcal{M}_h} = \int_0^\infty h(s) (\eta_x(s), \xi_x(s)) ds, \quad \|\eta\|_{\mathcal{M}_h}^2 := \int_0^\infty h(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds.$$

Para estudar a existência de soluções, vamos definir a classe de núcleos de memória  $g$  que serão utilizadas ao longo deste capítulo.

**Definição 4.2.** Dizemos que uma função  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é um núcleo admissível se  $g$  é absolutamente contínua, não-crescente e integrável com

$$\ell := \int_0^\infty g(s) ds \in (0, 1).$$

**Observação 4.3.** Se  $g$  é um núcleo admissível, então  $g'$  existe quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  com  $g'(s) \leq 0$ , para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . De fato, como  $g$  é absolutamente contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral de Lebesgue [17, Teorema 3.35], que  $g'$  existe quase sempre em  $\mathbb{R}^+$ . Além disso, da monotonicidade e continuidade de  $g$ , temos

$$g'(s) = \lim_{\tau \rightarrow s} \frac{g(s) - g(\tau)}{s - \tau} \leq 0,$$

para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ , como queríamos.

Seja  $g$  um núcleo admissível no sentido da Definição 4.2. Sob as notações acima e definindo

$$\omega = 1 - \ell > 0,$$

consideramos o espaço de fase estendido

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L_*^2(0, L) \times \mathcal{M}_g$$

equipado com produto interno

$$\begin{aligned} (z^1, z^2)_{\mathcal{H}} &= \rho_1(\Phi^1, \Phi^2) + \rho_2(\Psi^1, \Psi^2) + \rho_3(\vartheta^1, \vartheta^2) + b(\psi_x^1, \psi_x^2) + \kappa(\eta^1, \eta^2)_{\mathcal{M}_g} \\ &\quad + \kappa\omega(\phi_x^1 + \psi^1, \phi_x^2 + \psi^2) \end{aligned} \tag{4.8}$$

e norma

$$\|z\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|\Phi\|^2 + \rho_2 \|\Psi\|^2 + \rho_3 \|\vartheta\|^2 + \kappa\omega \|\phi_x + \psi\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \kappa \|\eta\|_{\mathcal{M}_g}^2, \quad (4.9)$$

em que  $z_i = (\phi^i, \Phi^i, \psi^i, \Psi^i, \vartheta^i, \eta^i)$ ,  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \vartheta, \eta) \in \mathcal{H}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Observação 4.4.** A norma (4.9) é obtida realizando cálculos formais e trabalhando diretamente com o sistema (4.5)-(4.7). Para o leitor interessado na motivação por trás da obtenção desta norma veja o Apêndice 1.1.1.

Ainda com respeito a norma (4.9), salientamos que esta é equivalente à norma usual de  $\mathcal{H}$ . Com efeito, aplicando a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré, temos

$$c_1 (\|\phi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2) \leq \|\phi_x + \psi\|^2 + \|\psi_x\|^2 \leq c_2 (\|\phi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2),$$

para algumas constantes  $c_2 > c_1 > 0$ . Dessa forma, o espaço  $\mathcal{H}$  munido da norma (4.9) é um espaço de Banach e, uma vez que a (4.9) é induzida pelo produto interno (4.8), deduzimos que  $\langle \mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}} \rangle$  é um espaço de Hilbert.

Uma vez que o sistema (4.5)-(4.7) é linear e autônomo, podemos utilizar ferramentas da teoria de semigrupos de operadores lineares para estudá-lo. Para que tal teoria seja aplicada vamos, a partir do (4.5)-(4.7), construir um problema de Cauchy abstrato em  $\mathcal{H}$ .

### 4.2.1 Problema de Cauchy abstrato

Para simplificar a escrita do problema que buscamos, consideremos o operador  $\mathbb{L} : D(\mathbb{L}) \subset \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  dado por

$$D(\mathbb{L}) := \{\eta \in \mathcal{M}_g, \mathbb{L}\eta \in \mathcal{M}_g \text{ e } \eta(0) = 0\}, \quad \mathbb{L}\eta := -\partial_s \eta.$$

Seja  $\Phi = \phi_t$ ,  $\Psi = \psi_t$  e  $z_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \vartheta_0, \eta^0)$ . Podemos reescrever (4.5)-(4.7) como seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} z_t = \mathbb{A}_2 z, & t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (4.10)$$



em que o operador linear  $\mathbb{A}_2 : D(\mathbb{A}_2) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é definido por

$$\mathbb{A}_2 z = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1} \left[ \kappa \omega (\phi_x + \psi)_x + \kappa \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds - \nu \vartheta_x \right] \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2} \left[ b \psi_{xx} - \kappa \omega (\phi_x + \psi) - \kappa \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds + \nu \vartheta \right] \\ \frac{1}{\rho_3} [\alpha \vartheta_{xx} - \nu (\Phi_x + \Psi)] \\ \mathbb{L} \eta + (\Phi + \tilde{\Psi}) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e seu domínio  $D(\mathbb{A}_2)$  consiste de todas as funções  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \vartheta, \eta)$  que pertencem ao espaço

$$H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times [H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)] \times H_*^1(0, L) \times [H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)] \times D(\mathbb{L})$$

tais que

$$\psi_x, \vartheta_x \in H_0^1(0, L), \quad \omega \phi + \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \in H^2(0, L).$$

A partir de agora, focaremos nosso estudo no operador  $\mathbb{A}_2$  e no problema (4.10).

## 4.2.2 O semigrupo solução

Nosso primeiro resultado visa mostrar que o problema (4.10) admite solução em algum sentido. Para isso, é suficiente provar que o operador  $\mathbb{A}_2$  é gerador infinitesimal de  $C_0$ -semigrupo de contrações [24, 28].

**Teorema 4.5.** *Seja  $g$  um núcleo admissível. Então, o operador  $\mathbb{A}_2$  definido em (4.11) é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $S_2(t) = e^{t\mathbb{A}_2}$ . Conseqüentemente, para todo  $z_0 \in \mathcal{H}$ , o problema (4.10) possui uma única solução generalizada  $z \in C(0, \infty; \mathcal{H})$  dada por*

$$z(t) = S_2(t)z_0, \quad t \geq 0. \quad (4.12)$$

Em particular, se  $z_0 \in D(\mathbb{A}_2)$  então  $z$  é a solução clássica de (4.10) e

$$z \in C^1(0, \infty; \mathcal{H}) \cap C(0, \infty; D(\mathbb{A}_2)).$$

*Demonstração.* No que segue, vamos mostrar que:

- (i)  $\mathbb{A}_2$  é um operador dissipativo;
- (ii)  $I - \mathbb{A}_2$  é sobrejetor.

*Prova de (i).* Seja  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \eta) \in D(\mathbb{A}_2)$ . Aplicando a técnica de integração por partes e

utilizando as condições de fronteira, obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}_2 z, z)_{\mathcal{H}} &= -\kappa\omega(\phi_x + \psi, \Phi_x) - \kappa \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \Phi_x) ds + \kappa\omega(\Phi_x + \Psi, \phi_x + \psi) \\
&\quad + \kappa \int_0^\infty g(s)(\Phi_x + \Psi, \eta_x(s)) ds + \kappa(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} - b(\psi_x, \Psi_x) - \kappa\omega(\phi_x + \psi, \Psi) \\
&\quad - \kappa \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \Psi) ds + b(\Psi_x, \psi_x) - \alpha\|\vartheta_x\|^2 - \nu(\Phi_x + \Psi, \vartheta) + \nu(\vartheta, \Phi_x + \Psi) \\
&= \kappa\omega[(\Phi_x + \Psi, \phi_x + \psi) - (\phi_x + \psi, \Phi_x + \Psi)] \\
&\quad + \kappa \int_0^\infty g(s)[(\Phi_x + \Psi, \eta_x(s)) - (\eta_x(s), \Phi_x + \Psi)] ds \\
&\quad + \nu[(\vartheta, \Phi_x + \Psi) - (\Phi_x + \Psi, \vartheta)] + b[(\Psi_x, \psi_x) - (\psi_x, \Psi_x)] \\
&\quad - \alpha\|\vartheta_x\|^2 + \kappa(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g}.
\end{aligned}$$

Tendo em conta que  $w - \bar{w} = 2i \operatorname{Im} w$ , deduzimos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}_2 z, z)_{\mathcal{H}} &= -\alpha\|\vartheta_x\|^2 + \kappa(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} + 2i \operatorname{Im} \kappa\omega(\Phi_x + \Psi, \phi_x + \psi) \\
&\quad + 2i \operatorname{Im} \left[ \kappa \int_0^\infty g(s)(\Phi_x + \Psi, \eta_x(s)) ds + \nu(\vartheta, \Phi_x + \Psi) + b(\Psi_x, \psi_x) \right].
\end{aligned}$$

Extraindo a parte real da igualdade acima, chegamos na seguinte expressão

$$\operatorname{Re}(\mathbb{A}_2 z, z)_{\mathcal{H}} = -\alpha\|\vartheta_x\|^2 + \kappa \operatorname{Re}(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g}. \quad (4.13)$$

Por outro lado, aplicando integração por partes, inferimos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} &= - \int_0^\infty g(s)(\eta_{sx}(s), \eta_x(s)) ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty g(s) \frac{d}{ds} \|\eta_x(s)\|^2 ds \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ g(y) \|\eta_x(y)\|^2 - g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \eta_x\left(\frac{1}{y}\right) \right\|^2 - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right]
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds. \quad (4.14)$$

Com efeito, seja  $y > 0$ . Explorando o fato que  $\eta \in D(\mathbb{L})$  e aplicando a desigualdade de Hölder,

temos

$$\begin{aligned}
0 \leq g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \eta_x\left(\frac{1}{y}\right) \right\|^2 &= g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \int_0^{1/y} \eta_{sx}(s) ds \right\|^2 \\
&\leq g\left(\frac{1}{y}\right) \left( \int_0^{1/y} \|\eta_{sx}(s)\| ds \right)^2 \\
&= \left( \int_0^{1/y} \sqrt{g\left(\frac{1}{y}\right)} \|\eta_{sx}(s)\| ds \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{y} \int_0^{1/y} g(s) \|\eta_{sx}(s)\|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{y} \|\eta_s\|_{\mathcal{M}_g}^2.
\end{aligned}$$

Fazendo  $y \rightarrow \infty$  e utilizando o teorema do confronto, obtemos

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{y}\right) \left\| \eta_x\left(\frac{1}{y}\right) \right\|^2 = 0 \quad (4.15)$$

e conseqüentemente,

$$(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ g(y) \|\eta_x(y)\|^2 - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right]. \quad (4.16)$$

Analisando os termos de (4.16), concluímos que existem três possibilidades excludentes, a saber:

- a)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left( - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right) = 0;$
- b)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left( - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right) > 0;$
- c)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left( - \int_{1/y}^y g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right) = +\infty.$

No que segue, vamos provar que nem a) e nem c) podem ocorrer. De fato, suponhamos que a) ocorra. Da arbitrariedade de  $\eta$ , deduzimos que  $g'(s) = 0$  para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Uma vez que  $g$  é contínua, obtemos que  $g$  é constante, o que contradiz  $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ .

Suponha agora que c) ocorra. Por um lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g}| \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{1/y}^y g(s) |(\eta_{sx}(s), \eta_x(s))| ds \leq \|\eta_s\|_{\mathcal{M}_g} \|\eta\|_{\mathcal{M}_g} < +\infty, \quad (4.17)$$

para todo  $\eta \in D(\mathbb{L})$ . Por outro lado, como  $g(\cdot) \|\eta_x(\cdot)\|^2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ , teríamos pelo item (a) do

Corolário 2.6 que

$$(\mathbb{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}_g} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{1/y}^y g(s) (\eta_{sx}(s), \eta_x(s)) ds = +\infty,$$

contrariando (4.17). Logo, não pode ocorrer c).

Logo, vale b) e assim podemos aplicar o item (b) do Corolário 2.6 para concluirmos (4.14) e também

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \|\eta_x(y)\|^2 = 0, \quad (4.18)$$

como queríamos.

Combinando (4.13) e (4.14), chegamos a

$$\operatorname{Re} (\mathbb{A}_2 z, z)_{\mathcal{H}} = -\alpha \|\vartheta_x\|^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \leq 0, \quad \forall z \in D(\mathbb{A}_2). \quad (4.19)$$

Portanto,  $\mathbb{A}_2$  é um operador dissipativo.

*Prova de (ii).* Seja  $f = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$ . Para mostrar a sobrejetividade desejada, precisamos encontrar um vetor  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \vartheta, \eta) \in D(\mathbb{A}_2)$  tal que

$$\begin{cases} \phi - \Phi = f^1, \\ \rho_1 \Phi - \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right]_x + \nu \vartheta_x = \rho_1 f^2, \\ \psi - \Psi = f^3, \\ \rho_2 \Psi - b \psi_{xx} + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] - \nu \vartheta = \rho_2 f^4, \\ \rho_3 \vartheta - \alpha \vartheta_{xx} + \nu (\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f^5, \\ \eta + \eta_s - (\Phi + \tilde{\Psi}) = f^6. \end{cases} \quad (4.20)$$

O processo de construção de uma solução de (4.20) com a regularidade desejada é extensa e por isso vamos seguir os passos descritos abaixo:

Passo 1. Construir uma terna  $(\phi, \psi, \vartheta) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$  utilizando o teorema de Lax-Milgram.

Passo 2. Construir um par  $(\Phi, \Psi) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$  satisfazendo as equações (4.20)<sub>1</sub> e (4.20)<sub>3</sub>.

Passo 3. Construir uma função  $\eta \in D(\mathbb{L})$  que verifica a equação (4.20)<sub>6</sub>.

Passo 4. Mostrar que

$$\vartheta \in H^2(0, L), \quad \vartheta_x \in H_0^1(0, L)$$

e que a equação (4.20)<sub>5</sub> é satisfeita.

Passo 5. Mostrar que

$$\omega \phi + \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \in H^2(0, L)$$

e que a equação (4.20)<sub>2</sub> é satisfeita.

Passo 6. Mostrar que

$$\psi \in H^2(0, L), \quad \psi_x \in H_0^1(0, L)$$

e que a equação (4.20)<sub>4</sub> é satisfeita.

No que segue, denotaremos por  $c$  todas as constantes positivas que dependem apenas dos parâmetros do sistema (4.20).

*Passo 1.* Seja

$$V := H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$$

munido da norma

$$\|(u, v, w)\|_V = \|u_x + v\| + \|v_x\| + \|w_x\|, \quad (u, v, w) \in V$$

e

$$c_g := 1 - \int_0^\infty g(s)e^{-s} ds = \omega + \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds > 0.$$

Considere a forma sesquilinear

$$\Lambda : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\begin{aligned} \Lambda((\phi, \psi, \vartheta), (u, v, w)) &= \rho_1(\phi, u) + \rho_2(\psi, v) + \rho_3(\vartheta, w) + b(\psi_x, v_x) + \alpha(\vartheta_x, w_x) \\ &\quad + \kappa c_g(\phi_x + \psi, u_x + v) - \nu(\vartheta, u_x + v) + \nu(\phi_x + \psi, w). \end{aligned}$$

e o funcional antilinear  $F : V \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= \rho_1(f^1 + f^2, u) + \rho_2(f^3 + f^4, v) + \kappa \left[ \ell - \int_0^\infty g(s)e^{-s} ds \right] (f_x^1 + f^3, u_x + v) \\ &\quad - \kappa \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{-(s-\tau)} (f_x^6(\tau), u_x + v) d\tau ds + (\rho_3 f^5 + \nu f_x^1 + \nu f^3, w). \end{aligned}$$

Vale ressaltar que a forma  $\Lambda$  e o funcional  $F$  não são definidos de maneira aleatória. As motivações por trás de suas definições podem ser encontradas no Apêndice 1.1.2.

A fim de utilizar o teorema de Lax-Milgram, provaremos que:

- $\Lambda$  é contínua e coerciva;
- $F$  é contínua.

De fato, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
|\Lambda((\phi, \psi, \vartheta), (u, v, w))| &\leq \rho_1 \|\phi\| \|u\| + \rho_2 \|\psi\| \|v\| + \rho_3 \|\vartheta\| \|w\| + b \|\psi_x\| \|v_x\| + \alpha \|\vartheta_x\| \|w_x\| \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| \|u_x + v\| + \nu \|\vartheta\| \|u_x + v\| + \nu \|\phi_x + \psi\| \|w\| \\
&\leq \rho_1 c_p^2 \|\phi_x\| \|u_x\| + \rho_2 c_p^2 \|\psi_x\| \|v_x\| + \rho_3 c_p^2 \|\vartheta_x\| \|w_x\| + b \|\psi_x\| \|v_x\| + \\
&\quad + \alpha \|\vartheta_x\| \|w_x\| + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| \|u_x + v\| + \nu c_p \|\vartheta_x\| \|u_x + v\| \\
&\quad + \nu c_p \|\phi_x + \psi\| \|w_x\| \\
&\leq c (\|\phi_x\| \|u_x\| + \|\psi_x\| \|v_x\| + \|\vartheta_x\| \|w_x\|) \\
&\quad + c (\|\phi_x + \psi\| \|u_x + v\| + \|\vartheta_x\| \|u_x + v\| + \|\phi_x + \psi\| \|w_x\|) \\
&\leq c \|(\phi, \psi, \vartheta)\|_V \|(u, v, w)\|_V,
\end{aligned}$$

para todo  $(\phi, \psi, \vartheta), (u, v, w) \in V$ . Logo,  $\Lambda$  é contínua.

Além disso, para todo  $(\phi, \psi, \vartheta) \in V$  temos

$$\begin{aligned}
\Lambda((\phi, \psi, \vartheta), (\phi, \psi, \vartheta)) &= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + \rho_3 \|\vartheta\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \alpha \|\vartheta_x\|^2 \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| - \nu (\vartheta, \phi_x + \psi) + \nu (\phi_x + \psi, \vartheta) \\
&= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + \rho_3 \|\vartheta\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \alpha \|\vartheta_x\|^2 \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\| + 2i\nu \operatorname{Im}\{(\phi_x + \psi, \vartheta)\}.
\end{aligned}$$

Considerando apenas a parte real de  $\Lambda((\phi, \psi, \vartheta), (\phi, \psi, \vartheta))$ , deduzimos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \Lambda((\phi, \psi, \vartheta), (\phi, \psi, \vartheta)) &= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + \rho_3 \|\vartheta\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \alpha \|\vartheta_x\|^2 \\
&\quad + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\|^2 \\
&\geq b \|\psi_x\|^2 + \alpha \|\vartheta_x\|^2 + \kappa c_g \|\phi_x + \psi\|^2 \\
&\geq c \|(\phi, \psi, \vartheta)\|^2.
\end{aligned}$$

Assim,  $\Lambda$  é coerciva.

Agora, seja  $(u, v, w) \in V$ . Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré e a Proposição 2.4, obtemos

$$\begin{aligned}
|F(u, v, w)| &\leq \rho_1 \|f^1 + f^2\| \|u\| + \rho_2 \|f^3 + f^4\| \|v\| + 2\kappa \|f_x^1 + f^3\| \|u_x + v\| + \rho_3 \|f^5\| \|w\| \\
&\quad + \kappa \|u_x + v\| \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{-(s-\tau)} \|f_x^6(\tau)\| d\tau ds + \nu \|f_x^1 + f^3\| \|w\| \\
&\leq \rho_1 c_p \|f^1 + f^2\| \|u_x\| + \rho_2 c_p \|f^3 + f^4\| \|v_x\| + 2\kappa \|f_x^1 + f^3\| \|u_x + v\| \\
&\quad + \rho_3 c_p \|f^5\| \|w_x\| + \kappa \|u_x + v\| \|f^6\|_{\mathcal{M}_g} + \nu c_p \|f_x^1 + f^3\| \|w_x\| \\
&\leq c \|f\|_{\mathcal{H}} \|(u, v, w)\|_V,
\end{aligned}$$

o que prova a continuidade de  $F$ .

Agora, temos condições de aplicar o teorema de Lax-Milgram [27, Corolário 6.6.2] para

garantir a existência de uma terna  $(\phi, \psi, \vartheta) \in V$  tal que

$$\Lambda((\phi, \psi, \vartheta), (u, v, w)) = F(u, v, w), \quad \forall (u, v, w) \in V. \quad (4.21)$$

*Passo 2.* Defina

$$\Phi = \phi - f^1, \quad \Psi = \psi - f^3.$$

Por definição, as equações (4.20)<sub>1</sub> e (4.20)<sub>3</sub> são satisfeitas. Além disso, tendo em conta que  $\phi, f^1 \in H_0^1(0, L)$  e  $\psi, f^3 \in H_*^1(0, L)$ , obtemos que  $\Phi \in H_0^1(0, L)$  e  $\Psi \in H_*^1(0, L)$ .

*Passo 3.* Defina

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})(\Phi + \tilde{\Psi}) + \int_0^s f^6(\tau)e^{-(s-\tau)} d\tau, \quad s > 0. \quad (4.22)$$

Afirmamos que  $\eta$  pertence a  $D(\mathbb{L})$  e satisfaz (4.20)<sub>6</sub>. Com efeito, temos

$$\eta(0) = (1 - e^0)(\Phi + \tilde{\Psi}) + \int_0^0 f^6(\tau)e^{-(s-\tau)} d\tau = 0.$$

Aplicando a Proposição 2.4 no termo de convolução de  $\eta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|^2 ds &\leq 2\|\Phi_x + \Psi\|^2 \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds \\ &\quad + 2 \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-\tau)} \|f_x^6(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \\ &\leq c \left( \|\Phi_x + \Psi\|^2 + \|f^6\|_{\mathcal{M}_g}^2 \right). \end{aligned}$$

Logo,  $\eta \in \mathcal{M}_g$ .

Na sequência, vamos calcular  $\eta_s$  em termos de funções conhecidas. Note que

$$\begin{aligned} \eta_s(s) &= e^{-s}(\Phi + \tilde{\Psi}) + \frac{d}{ds} \int_0^s f^6(\tau)e^{-(s-\tau)} d\tau \\ &= e^{-s}(\Phi + \tilde{\Psi}) - \int_0^s f^6(\tau)e^{-(s-\tau)} d\tau + f^6(s) \\ &= - \left[ (1 - e^{-s})(\Phi + \tilde{\Psi}) + \int_0^s f^6(\tau)e^{-(s-\tau)} d\tau \right] \\ &\quad + (\Phi + \tilde{\Psi}) + f^6(s) \\ &= -\eta(s) + (\Phi + \tilde{\Psi}) + f^6(s), \end{aligned}$$

para todo  $s > 0$ . Então,  $\eta_s \in \mathcal{M}_g$  e a equação (4.20)<sub>6</sub> é satisfeita.

*Passo 4.* Seja  $w \in H_*^1(0, L)$ . Utilizando a equação (4.21) com o vetor  $(0, 0, w) \in V$ , concluímos que

$$\rho_3(\vartheta, w) + \alpha(\vartheta_x, w_x) + \nu(\phi_x + \psi, w) = \rho_3(f^5, w) + \nu(f_x^1 + f^3, w), \quad w \in H_*^1(0, L). \quad (4.23)$$

Vamos mostrar que (4.23) é válida para todo  $w \in H^1(0, L)$ . De fato, dado  $w \in H^1(0, L)$ , defina

$$\zeta = w - \frac{1}{L} \int_0^L w(x) dx \in H_*^1(0, L).$$

Substituindo  $\zeta$  em (4.23), temos

$$\rho_3(\vartheta, \zeta) + \alpha(\vartheta_x, \zeta_x) + \nu(\phi_x + \psi, \zeta) = \rho_3(f^5, \zeta) + \nu(f_x^1 + f^3, \zeta). \quad (4.24)$$

Por outro lado, explorando as regularidades  $(\phi, \psi, \vartheta) \in V$  e  $f \in \mathcal{H}$ , deduzimos

$$\begin{aligned} (\vartheta, \zeta) &= (\vartheta, w) - \frac{1}{L} \overline{\left( \int_0^L w(x) dx \right)} \underbrace{\left( \int_0^L \vartheta(x) dx \right)}_{=0} = (\vartheta, w), \\ (\vartheta_x, \zeta_x) &= (\vartheta_x, w_x) - \frac{1}{L} \overline{\left( \int_0^L w(x) dx \right)}_x \underbrace{\left( \int_0^L \vartheta_x(x) dx \right)}_{=0} = (\vartheta_x, w_x), \\ (\phi_x + \psi, \zeta) &= (\phi_x + \psi, w) - \frac{1}{L} \overline{\left( \int_0^L w(x) dx \right)} \underbrace{\left( \int_0^L (\phi_x + \psi)(x) dx \right)}_{=0} = (\phi_x + \psi, w), \\ (f^5, \zeta) &= (f^5, w) - \frac{1}{L} \overline{\left( \int_0^L w(x) dx \right)} \underbrace{\left( \int_0^L f^5(x) dx \right)}_{=0} = (f^5, w), \\ (f_x^1 + f^3, \zeta) &= (f_x^1 + f^3, w) - \frac{1}{L} \overline{\left( \int_0^L w(x) dx \right)} \underbrace{\left( \int_0^L (f_x^1 + f^3)(x) dx \right)}_{=0} = (f_x^1 + f^3, w). \end{aligned}$$

Logo, substituindo as ultimas cinco igualdades em (4.24), chegamos na afirmação desejada. Em particular, vale

$$\alpha \int_0^L \vartheta_x(x) \overline{w_x(x)} dx = - \int_0^L [\rho_3 \vartheta(x) + \nu(\phi_x + \psi)(x) - \rho_3 f^5(x) - \nu(f_x^1 + f^3)(x)] \overline{w(x)} dx, \quad (4.25)$$

para todo  $w \in H^1(0, L)$ . Da definição de derivada fraca e das regularidades previamente obtidas, deduzimos

$$\alpha \vartheta_{xx} = \rho_3 \vartheta - \rho_3 f^5 + \nu \left[ \underbrace{\phi_x - f_x^1}_{=\Phi_x} + \underbrace{\psi - f^3}_{=\Psi} \right] = \rho_3 \vartheta - \rho_3 f^5 + \nu (\Phi_x + \Psi) \in L^2(0, L). \quad (4.26)$$

Logo,  $\vartheta \in H^2(0, L)$  e a equação (4.20)<sub>5</sub> é satisfeita.

Para concluir esta etapa, falta provarmos que  $\vartheta_x \in H_0^1(0, L)$ . Considere então  $\zeta \in C([0, L])$  tal que  $\zeta(0) = 0$  e  $\zeta(L) = 1$ . Por um lado, realizando uma integração por partes, temos

$$\int_0^L \vartheta_x(x) \overline{\zeta_x(x)} dx = \vartheta_x(x) \overline{\zeta(x)} \Big|_0^L - \int_0^L \vartheta_{xx}(x) \overline{\zeta(x)} dx = \vartheta_x(L) - \int_0^L \vartheta_{xx}(x) \overline{\zeta(x)} dx. \quad (4.27)$$



Por outro lado, da definição de derivada fraca, temos

$$\int_0^L \vartheta_x(x) \overline{\zeta_x(x)} dx = - \int_0^L \vartheta_{xx}(x) \overline{\zeta(x)} dx. \quad (4.28)$$

Comparando as equações (4.27) e (4.28), chegamos em  $\vartheta_x(L) = 0$ . Agora, usando a equação (4.26) e explorando novamente as regularidades  $(\phi, \psi, \vartheta) \in V$  e  $f \in \mathcal{H}$ , temos

$$\begin{aligned} \vartheta_x(L) - \vartheta_x(0) &= \int_0^L \vartheta_{xx}(x) dx \\ &= \rho_3 \int_0^L \vartheta(x) dx - \rho_3 \int_0^L f^5(x) dx + \nu \int_0^L \Phi_x(x) dx + \nu \int_0^L \Psi(x) dx \\ &= \Phi(L) - \Phi(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\vartheta_x(0) = \vartheta_x(L) = 0$  e portanto,  $\vartheta_x \in H_0^1(0, L)$ .

*Passo 5.* Seja  $u \in H_0^1(0, L)$ . Utilizando a equação (4.21) com o vetor  $(u, 0, 0) \in V$ , temos

$$\begin{aligned} \rho_1(\phi, u) + \kappa c_g(\phi_x + \psi, u_x) + \nu(\vartheta_x, u) &= \rho_1(f^1 + f^2, u) \\ &\quad + \kappa \left( \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds \right) (f_x^1 + f^3, u_x) \\ &\quad - \kappa \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-\tau)} (f_x^6(\tau), u_x) d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $\phi - f^1 = \Phi$  e que

$$\begin{aligned} c_g(\phi_x + \psi) - \left[ \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds \right] (f_x^1 + f^3) + \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-\tau)} f_x^6(\tau) d\tau \right) ds \\ = \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \end{aligned} \quad (4.29)$$

temos

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^L \left[ \omega(\phi_x + \psi)(x) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(x, s) ds \right] \overline{u_x(x)} dx &= -\rho_1 \int_0^L (\Phi(x) - f^2(x)) \overline{u(x)} dx \\ &\quad - \nu \int_0^L \vartheta_x(x) \overline{u(x)} dx. \end{aligned}$$

Da definição de derivada fraca e das regularidades obtidas anteriormente, obtemos

$$\kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right]_x = \rho_1 \Phi - \rho_1 f^2 + \nu \vartheta_x \in L^2(0, L). \quad (4.30)$$

Logo, de (4.30) e notando que  $\tilde{\psi} \in H^2(0, L)$ , deduzimos que (4.20)<sub>2</sub> é satisfeita e que

$$\omega\phi + \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \in H^2(0, L),$$

como queríamos.

*Passo 6.* Seja  $v \in H_*^1(0, L)$ . Utilizando a equação (4.21) com o vetor  $(0, v, 0) \in V$ , considerando a igualdade (4.29) e lembrando que  $\psi - f^3 = \Psi$ , obtemos

$$b(\psi_x, v_x) = -\rho_2(\Psi, v) - \kappa \left( \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, v \right) + \nu(\vartheta, v) + \rho_2(f^4, v). \quad (4.31)$$

Afirmamos que (4.23) é válida para todo  $v \in H^1(0, L)$ . De fato, dado  $v \in H^1(0, L)$ , defina

$$\varphi = v - \frac{1}{L} \int_0^L v(x) dx \in H_*^1(0, L).$$

Substituindo  $\varphi$  em (4.31), temos

$$b(\psi_x, \varphi_x) = -\rho_2(\Psi, \varphi) - \kappa \left( \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, \varphi \right) + \nu(\vartheta, \varphi) + \rho_2(f^4, \varphi). \quad (4.32)$$

Por outro lado, explorando as regularidades  $(\phi, \psi, \vartheta) \in V$  e  $f \in \mathcal{H}$ , deduzimos

$$\begin{aligned} (\psi_x, \varphi_x) &= (\psi_x, v_x) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \psi_x(x) dx \right) = (\psi_x, v_x), \\ (\Psi, \varphi) &= (\Psi, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \Psi(x) dx \right) = (\Psi, v), \\ (\phi_x + \psi, \varphi) &= (\phi_x + \psi, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L (\phi_x + \psi)(x) dx \right) \\ &= (\phi_x + \psi, v), \\ \left( \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, \varphi \right) &= \left( \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, v \right) \\ &\quad - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x(x, s) ds dx \right) \\ &= \left( \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, v \right), \\ (\vartheta, \varphi) &= (\vartheta, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L \vartheta(x) dx \right) = (\vartheta, v), \\ (f^4, \varphi) &= (f^4, v) - \frac{1}{L} \underbrace{\left( \int_0^L v(x) dx \right)}_{=0} \left( \int_0^L f^4(x) dx \right) = (f^4, v). \end{aligned}$$

Logo, substituindo as últimas seis igualdades em (4.32), chegamos na afirmação desejada. Em

particular, vale

$$\begin{aligned} b \int_0^L \psi_x(x) \overline{v_x(x)} &= - \int_0^L \left[ \rho_2 \Psi(x) + \kappa \left( \omega(\phi_x + \psi)(x) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(x, s) ds \right) \right] \overline{v(x)} dx \\ &\quad - \int_0^L (-\nu \vartheta(x) - \rho_2 f^4(x)) \overline{v(x)} dx. \end{aligned} \quad (4.33)$$

para todo  $v \in H^1(0, L)$ . Da definição de derivada fraca e das regularidades previamente obtidas, chegamos a

$$b\psi_{xx} = \rho_2 \Psi + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] - \nu \vartheta - \rho_2 f^4 \in L^2(0, L). \quad (4.34)$$

Logo,  $\psi \in H^2(0, L)$  e a equação (4.20)<sub>4</sub> é satisfeita.

Finalmente, provemos que  $\vartheta_x \in H_0^1(0, L)$ . Seja  $v \in C([0, L])$  tal que  $v(0) = 0$  e  $v(L) = 1$ . Por um lado, realizando uma integração por partes, temos

$$\int_0^L \psi_x(x) \overline{v(x)} dx = \psi_x(x) \overline{v(x)} \Big|_0^L - \int_0^L \psi_{xx}(x) \overline{v(x)} dx = \psi_x(L) - \int_0^L \psi_{xx}(x) \overline{v(x)} dx. \quad (4.35)$$

Por outro lado, da definição de derivada fraca, temos

$$\int_0^L \psi_x(x) \overline{v(x)} dx = - \int_0^L \psi_{xx}(x) \overline{v(x)} dx. \quad (4.36)$$

Comparando as equações (4.35) e (4.36), obtemos  $\psi_x(L) = 0$ . Além disso, usando a equação (4.34) e explorando novamente as regularidades  $(\phi, \psi, \vartheta) \in V$  e  $f \in \mathcal{H}$ , deduzimos

$$\begin{aligned} b(\psi_x(L) - \psi_x(0)) &= b \int_0^L \psi_{xx}(x) dx \\ &= \rho_2 \int_0^L \Psi(x) dx + \kappa \int_0^L \left[ \omega(\phi_x + \psi)(x) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(x, s) ds \right] dx \\ &\quad - \nu \int_0^L \vartheta(x) dx - \rho_2 \int_0^L f^4(x) dx \\ &= \kappa \left[ \omega(\phi(L) - \phi(0) + \int_0^\infty g(s) \eta(0, s) ds - \int_0^\infty g(s) \eta(L, s) ds \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\psi_x(0) = \psi_x(L) = 0$  e portanto,  $\psi_x \in H_0^1(0, L)$ . Assim, fica provado (ii).

*Conclusão.* Uma vez que  $\mathcal{H}$  é reflexivo,  $\mathbb{A}_2$  é dissipativo e  $I - \mathbb{A}_2$  é sobrejetor, o [28, Teorema 4.6] garante que  $D(\mathbb{A}_2)$  é denso em  $\mathcal{H}$ . Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips (veja [24, Teorema. 1.2.4]), o operador  $\mathbb{A}_2$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $S_2(t) = e^{t\mathbb{A}_2}$ . A prova está completa.  $\square$

**Observação 4.6.** Antes de encerrarmos esta seção, vamos discutir brevemente a equivalência entre os problemas (4.1)-(4.3) e (4.5)-(4.7).

Por um lado, partindo do problema original, define-se a variável deslocamento de história (4.4) e chegamos no sistema (4.5)-(4.7). Ou seja, em algum sentido, se  $(\phi, \psi, \vartheta)$  é solução de (4.1)-(4.3) então  $(\phi, \psi, \vartheta, \eta)$  é solução de (4.5)-(4.7).

Por outro lado, para mostrar a outra parte da equivalência, um estudo rigoroso sobre a equação suplementar

$$\begin{cases} \eta_t = \mathbb{L}\eta + (\phi + \tilde{\psi})_t, & t > 0 \\ \eta^t(0) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

deve ser realizado. Os detalhes podem ser encontrados no trabalho [20]. Nele, os autores provam que  $\mathbb{L}$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de translações à direita  $R(t) : \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  cuja definição é

$$[R(t)\eta](s) := \begin{cases} \eta(s-t), & s > t, \\ 0, & 0 < s \leq t. \end{cases}$$

A forma explícita do semigrupo  $R(t)$  permite determinar a variável  $\eta$  em termos das funções  $\phi$  e  $\psi$ , a saber

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \eta^0(s-t) + (\phi + \tilde{\psi})(t) - (\phi + \tilde{\psi})(0), & s > t, \\ (\phi + \tilde{\psi})(t) - (\phi + \tilde{\psi})(t-s), & 0 < s \leq t. \end{cases} \quad (4.37)$$

Utilizando a expressão (4.37) é possível concluir que se  $(\phi, \psi, \vartheta, \eta)$  é solução de (4.5)-(4.7), então  $(\phi, \psi, \vartheta)$  é solução de (4.1)-(4.3), o que prova a equivalência desejada.

Na próxima seção, estudaremos a estabilidade exponencial do semigrupo  $S_2(t)$  definido em (4.12).

### 4.3 Caracterização da estabilidade exponencial

O resultado principal desta seção é o seguinte.

**Teorema 4.7.** *Seja  $g$  um núcleo admissível satisfazendo a condição  $\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = g_0 < +\infty$ . Suponha ainda que  $\chi_0 = 0$ . Então, o semigrupo  $S_2(t)$  exponencialmente estável se, e somente se,  $g$  satisfaz a  $\delta$ -condição (3.30) para algum  $\delta > 0$ .*

A prova do Teorema 4.7 será dividida em duas subseções como segue.

#### 4.3.1 Prova do Teorema 4.7 (Necessidade)

Suponha que o semigrupo  $S_2(t)$  é exponencialmente estável. Seguindo as ideias de Chepyzhov e Pata [8], vamos considerar  $\eta_0 \in \mathcal{M}_g$  e definir

$$z(t) = S_2(t)(0, 0, 0, 0, 0, \eta_0) = (\phi(t), \Phi(t), \psi(t), \Psi(t), \vartheta(t), \eta^t).$$

Por definição, existem  $M \geq 1$  e  $\gamma > 0$  tais que

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|S_2(t)(0, 0, 0, 0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M e^{-\gamma t} \|\eta_0\|_{\mathcal{M}_g}^2, \quad (4.38)$$

para todo  $t > 0$ . Agora, levando em consideração a expressão (4.37) e usando (4.38), deduzimos

$$\begin{aligned} \int_t^\infty g(s) \|\eta_{0x}(s-t)\|^2 ds &\leq 2\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_g}^2 + 2\|\phi_x(t) + \psi(t)\|^2 \\ &\leq \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t} \|\eta_0\|_{\mathcal{M}_g}^2, \end{aligned} \quad (4.39)$$

para todo  $t > 0$ .

Por outro lado, para cada  $t > 0$  considere o conjunto

$$\mathcal{N}_t := \left\{ s \in \mathbb{R}^+, g(t+s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t} g(s) > 0 \right\}.$$

Pela Observação 3.8 é suficiente mostrar que  $\text{med } \mathcal{N}_t = 0$  para todo  $t > 0$ . Desta forma, suponhamos por contradição que exista  $t_0 > 0$  tal que  $\text{med } \mathcal{N}_{t_0} \in (0, +\infty]$ . Então,

$$0 < \int_{\mathcal{N}_{t_0}} \left[ g(t_0 + s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} g(s) \right] ds \leq \left[ 1 + \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) \right] \ell < +\infty. \quad (4.40)$$

Porém, de (4.39) temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{t_0}^\infty g(s) \|\eta_{0x}(s-t_0)\|^2 ds - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} \int_0^\infty g(s) \|\eta_{0x}(s)\|^2 ds \\ &= \int_0^\infty \left[ g(t_0 + s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} g(s) \right] \|\eta_{0x}(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

para todo  $\eta_0 \in \mathcal{M}_g$ . Agora, escolhemos  $\eta_0(s) = \chi_{\mathcal{N}_{t_0}}(s) \phi^*$ , em que  $\phi^* \in H_0^1(0, L)$  satisfaz  $\|\phi_x^*\| = 1$ . Com essa escolha, obtemos desigualdade

$$\int_{\mathcal{N}_{t_0}} \left[ g(t_0 + s) - \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) e^{-\gamma t_0} g(s) \right] ds \leq 0,$$

a qual contradiz (4.40). Portanto,  $g$  satisfaz a  $\delta$ -condição com  $\delta = \gamma > 0$  e

$$C = \frac{2M}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) \geq 1.$$

### 4.3.2 Prova do Teorema 4.7 (Suficiência)

Suponhamos por absurdo que o semigrupo  $S_2(t)$  não é exponencialmente estável. Pelo Corolário 2.11, existem sequencias  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  e  $z_n \in D(\mathbb{A}_2)$  tais que:

A.  $\lambda_n \rightarrow \lambda_* \in [-\infty, +\infty]$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,

B.  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

C.  $i\lambda_n z_n - \mathbb{A}_2 z_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{H}$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

No que segue, mostraremos que o item B não pode ocorrer, o que gerará a contradição desejada. De fato, escrevendo a convergência do item C em termo de suas componentes, temos

$$\begin{cases} i\lambda_n \phi_n - \Phi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), \\ i\lambda_n \rho_1 \Phi_n - \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s) \eta_{mx}(s) ds \right]_x + \nu \vartheta_{nx} \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \\ i\lambda_n \psi_n - \Psi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_*^1(0, L), \\ i\lambda_n \rho_2 \Psi_n - b\psi_{nxx} + \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s) \eta_{mx}(s) ds \right] - \nu \vartheta_n \rightarrow 0 & \text{em } L_*^2(0, L), \\ i\lambda_n \rho_3 \vartheta_n - \alpha \vartheta_{nxx} + \nu(\Phi_{nx} + \Psi_n) \rightarrow 0 & \text{em } L_*^2(0, L), \\ i\lambda_n \eta_n + \eta_{ns} - (\Phi_n + \tilde{\Psi}_n) \rightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}_g. \end{cases} \quad (4.41)$$

A fim de organizar as ideias, vamos separar o restante da demonstração em alguns lemas. Em todos eles, são válidas as hipóteses sobre o núcleo  $g$  assumidas no enunciado do Teorema 4.7. Além disso, para não sobrecarregar a notação, vamos denotar por  $c$  todas as constantes positivas que dependem dos parâmetros estruturais  $L, g, \rho_1, \rho_2, b, \kappa, \alpha$  e  $\nu$ .

**Lema 4.8.** *Existe  $\beta > 0$  tal que o conjunto*

$$N = N_\beta := \{s \in \mathbb{R}^+, \beta g'(s) + g(s) < 0\}$$

*tem medida de Lebesgue positiva.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que para todo  $\beta > 0$ , o conjunto  $N_\beta$  tenha medida de Lebesgue nula. Para cada  $\beta > 0$ , considere a seguinte decomposição em conjuntos disjuntos:

$$\mathbb{R}^+ = P_\beta \cup N_\beta \cup O,$$

em que

$$\begin{aligned} P_\beta &= \{s \in \mathbb{R}^+; \beta g'(s) + g(s) \geq 0\}, \\ O &= \{s \in \mathbb{R}^+; g'(s) \text{ não existe}\}. \end{aligned}$$

Da Observação 4.3,  $g'$  existe quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  com  $g'(s) \leq 0$ , para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Conseqüentemente, a medida de Lebesgue do conjunto  $N_\beta \cup O$  é nula e assim, para todo  $\beta > 0$ , temos

$$g'(s) + \frac{1}{\beta} g(s) \geq 0,$$

para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Fazendo  $\beta \rightarrow +\infty$ , chegamos a  $g'(s) \geq 0$ , para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Logo,  $g' \equiv 0$  quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  e por continuidade temos que  $g$  é uma função constante positiva. Mas isto implica que  $g \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ , o que contradiz o fato de  $g$  ser um núcleo admissível. Portanto, existe  $\beta > 0$  satisfazendo a condição desejada.  $\square$

**Lema 4.9.** *Seja  $\tilde{g}(s) := \chi_N(s)g(s)$ . Vale a seguinte convergência*

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\tilde{g}}}^2 - \int_0^\infty g'(s)\|\eta_{nx}(s)\|^2 ds + \|\vartheta_{nx}\|^2 \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Da definição de  $N$  e do fato que  $\mathbb{A}_2$  é dissipativo, temos

$$\begin{aligned} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\tilde{g}}}^2 - \int_0^\infty g'(s)\|\eta_{nx}(s)\|^2 ds + \|\vartheta_{nx}\|^2 &\leq c \left( - \int_0^\infty g'(s)\|\eta_{nx}(s)\|^2 ds + \|\vartheta_{nx}\|^2 \right) \\ &\leq c \operatorname{Re}(-Az_n, z_n)_{\mathcal{H}} \\ &= c \operatorname{Re}(i\lambda_n z_n - Az_n, z_n)_{\mathcal{H}} \\ &\leq c \|i\lambda_n z_n - Az_n\|_{\mathcal{H}} \|z_n\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Logo, dos itens B e C, concluímos a convergência desejada.  $\square$

Utilizando o Lema 4.9, podemos reduzir o conjunto de convergências (4.41) no seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_n^1 := i\lambda_n \phi_n - \Phi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), \\ f_n^2 := i\lambda_n \rho_1 \Phi_n - \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{nx}(s) ds \right] \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \\ f_n^3 := i\lambda_n \psi_n - \Psi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_*^1(0, L), \\ f_n^4 := i\lambda_n \rho_2 \Psi_n - b\psi_{nxx} + \kappa \left[ \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{nx}(s) ds \right] \rightarrow 0 & \text{em } L_*^2(0, L), \\ f_n^5 := i\lambda_n \rho_3 \vartheta_n - \alpha\vartheta_{nxx} + \nu(\Phi_{nx} + \Psi_n) \rightarrow 0 & \text{em } L_*^2(0, L), \\ f_n^6 := i\lambda_n \eta_n + \eta_{ms} - (\Phi_n + \tilde{\Psi}_n) \rightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}_g. \end{cases} \quad (4.42)$$

Procedendo com os lemas auxiliares, temos o seguinte.

**Lema 4.10.** *Existe  $c > 0$  tal que*

$$\int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \leq c \|\eta\|_{\mathcal{M}_g}^2, \quad (4.43)$$

para todo  $\eta \in \mathcal{M}_g$ .

*Demonstração.* Seja  $\eta \in \mathcal{M}_g$ . Explorando a  $\delta$ -condição (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds &= \int_0^\infty \left( \int_0^s g^{1/2}(s)\|\eta_x(\tau)\|, d\tau \right)^2 ds \\ &\leq C \int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-\frac{\delta}{2}(s-\tau)} g^{1/2}(\tau)\|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Agora, aplicamos a desigualdade de Young para convoluções [17, Teorema 8.7] com

$$e^{-\frac{\delta}{2}(\cdot)} \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad g^{1/2}(\cdot)\|\eta_x(\cdot)\| \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

para chegarmos a

$$\int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-\frac{\delta}{2}(s-\tau)} g^{1/2}(\tau) \|\eta_x(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \leq \frac{4}{\delta^2} \left( \int_0^\infty g(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \right).$$

Portanto, combinando as estimativas acima concluímos o desejado.  $\square$

**Lema 4.11.** *Se  $\lambda_* = 0$ , então  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* De (4.42)<sub>1</sub>, (4.42)<sub>3</sub>, (4.42)<sub>6</sub> e do item B, temos

$$\Phi_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad \Psi_n \rightarrow 0 \text{ em } H_*^1(0, L), \quad \eta_{ns} \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{M}_g.$$

Levando em conta que  $\eta_n \in D(\mathbb{L})$ , podemos aplicar Lema 4.10 para obter

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \leq \sqrt{\int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|\eta_{nxs}(\tau)\| d\tau \right)^2 ds} \leq c \|\eta_{ns}\|_{\mathcal{M}_g} \rightarrow 0. \quad (4.44)$$

Assim, das imersões  $H_*^1(0, L) \hookrightarrow L_*^2(0, L)$ ,  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$  e de (4.44), temos

$$\Phi_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad \Psi_n \rightarrow 0 \text{ em } L_*^2(0, L), \quad \eta_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{M}_g. \quad (4.45)$$

Agora, tomando o produto interno de (4.42)<sub>2</sub> com  $\phi_n$  em  $L^2(0, L)$ , o produto interno de (4.42)<sub>4</sub> com  $\psi_n$  em  $L_*^2(0, L)$  e somando os respectivos resultados, deduzimos

$$\begin{aligned} \kappa\omega \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 + b \|\psi_{nx}\|^2 &= (f_n^2 - i\lambda_n \rho_1 \Phi_n, \phi_n) + (f_n^4 - i\lambda_n \rho_2 \Psi_n, \psi_n) \\ &\quad + \kappa \int_0^\infty g(s) (\eta_{nx}(s), \phi_{nx} + \psi_n) ds. \end{aligned} \quad (4.46)$$

De (4.42)<sub>2</sub>, (4.42)<sub>4</sub> e (4.45), inferimos

$$\begin{aligned} |(f_n^2 - i\lambda_n \rho_1 \Phi_n, \phi_n)| &\leq \|f_n^2 - i\lambda_n \rho_1 \Phi_n\| \|\phi_n\| \rightarrow 0, \\ |(f_n^4 - i\lambda_n \rho_2 \Psi_n, \psi_n)| &\leq \|f_n^4 - i\lambda_n \rho_2 \Psi_n\| \|\psi_n\| \rightarrow 0, \\ \left| \int_0^\infty g(s) (\eta_{nx}(s), \phi_{nx} + \psi_n) ds \right| &\leq \sqrt{\ell} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \|\phi_{nx} + \psi_n\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, de (4.45) e (4.46) concluímos que  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como queríamos.  $\square$

Nos próximos lemas, vamos assumir que  $\lambda_* \neq 0$ . Neste caso, utilizando a propriedade de conservação do sinal, podemos supor sem perda de generalidade que, a menos de uma subsequência,  $\lambda_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 4.12.** *A sequência*

$$J_n := \int_0^\infty \tilde{g}(s) (1 - \cos(\lambda_n s)) ds \quad (4.47)$$

satisfaz  $J_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n > 0.$$



*Demonstração.* Se  $\lambda_* \in \mathbb{R}$ , então considere o seguinte conjunto

$$P_1 := \left\{ s \in N, s = \frac{2j\pi}{\lambda_n} \text{ ou } s = \frac{2j\pi}{\lambda_*}, j, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como  $P_1$  é enumerável, então possui medida de Lebesgue nula e portanto o conjunto  $N \setminus P_1$  tem medida de Lebesgue positiva. Assim, da definição de  $P_1$  e tendo em conta que  $g$  é positiva em  $\mathbb{R}^+$ , segue que

$$J_n = \int_{N \setminus P_1} g(s)(1 - \cos(\lambda_n s)) ds > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, temos

$$|\tilde{g}(s)(1 - \cos(\lambda_n s))| \leq 2g(s),$$

para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$  e, da continuidade da função cosseno,

$$\tilde{g}(s)(1 - \cos(\lambda_n s)) \rightarrow \tilde{g}(s)(1 - \cos(\lambda_* s))$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada [17, Teorema 2.24], obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \int_0^{\infty} \tilde{g}(s)(1 - \cos(\lambda_* s)) ds = \int_{N \setminus P_1} g(s)(1 - \cos(\lambda_* s)) ds > 0.$$

Agora, suponha que  $\lambda_* \in \{-\infty, +\infty\}$ . Então, considerando o conjunto

$$P_2 := \left\{ s \in N, s = \frac{2j\pi}{\lambda_n}, j, n \in \mathbb{N} \right\}$$

e argumentando de forma análoga ao caso  $\lambda_* \in \mathbb{R}$ , chegamos a  $J_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, como  $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ , podemos aplicar o Lema 2.7 para concluirmos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \tilde{g}(s) ds - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \tilde{g}(s) \cos(\lambda_n s) ds = \int_0^{\infty} \tilde{g}(s) ds > 0,$$

como queríamos demonstrar. □

**Lema 4.13.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\phi_{nx} + \psi_n\| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos resolver a E.D.O. (4.42)<sub>6</sub> com respeito a variável  $s$ . De fato, utilizando o fator integrante  $e^{i\lambda_n s}$  na equação (4.42)<sub>6</sub> e procedendo de forma padrão, obtemos

$$\eta_n(s) = \frac{1}{i\lambda_n} \left(1 - e^{-i\lambda_n s}\right) \left(\Phi_n + \tilde{\Psi}_n\right) + \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} f_n^6(\tau) d\tau. \quad (4.48)$$

Combinando (4.42)<sub>1</sub>, (4.42)<sub>3</sub> e (4.48), deduzimos

$$\eta_n(s) = \left(1 - e^{-i\lambda_n s}\right) \left(\phi_n + \tilde{\psi}_n\right) - \frac{1}{i\lambda_n} \left(1 - e^{-i\lambda_n s}\right) \left(f_n^1 + \tilde{f}_n^3\right) + \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} f_n^6(\tau) d\tau. \quad (4.49)$$

Fazendo o produto interno de (4.49) com  $\phi_n + \tilde{\psi}_n$  em  $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$  temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{g}(s)(1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 &= \frac{1}{i\lambda_n} \left( \int_0^\infty \tilde{g}(s)(1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \right) (f_{nx}^1 + f_n^3, \phi_{nx} + \psi_n) \\ &\quad - \int_0^\infty \tilde{g}(s) \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} (f_{nx}^6(\tau), \phi_{nx} + \psi_n) d\tau ds \\ &\quad + (\eta_n, \phi_n + \tilde{\psi}_n)_{\mathcal{M}_{\tilde{g}}}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real de ambos os lados da ultima igualdade, obtemos

$$\|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 = \frac{B_n^1}{J_n}, \quad (4.50)$$

em que  $J_n$  é definido em (4.47) e

$$\begin{aligned} B_n^1 : &= \operatorname{Re} \left[ (\eta_n, \phi_n + \tilde{\psi}_n)_{\mathcal{M}_{\tilde{g}}} + \frac{1}{i\lambda_n} \left( \int_0^\infty \tilde{g}(s)(1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \right) (f_{nx}^1 + f_n^3, \phi_{nx} + \psi_n) \right] \\ &\quad - \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty \tilde{g}(s) \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} (f_{nx}^6(\tau), \phi_{nx} + \psi_n) d\tau ds \right]. \end{aligned}$$

Tendo em conta o Lema 4.12, basta provarmos que  $B_n^1 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Com efeito, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré e o Lema 4.10, deduzimos

$$\begin{aligned} |B_n^1| &\leq c \|\phi_{nx} + \psi_n\| \left[ \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\tilde{g}}} + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \int_0^\infty g(s) \int_0^s \|f_{nx}^6(\tau)\| d\tau ds \right] \\ &\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} \left[ \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\tilde{g}}} + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right] \\ &\leq c \left[ \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\tilde{g}}} + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right]. \end{aligned}$$

Logo, do Lema 4.9 e das convergências (4.42)<sub>1</sub>, (4.42)<sub>3</sub> e (4.42)<sub>6</sub>, obtemos que  $B_n^1 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, de (4.50) segue a convergência desejada.  $\square$

**Lema 4.14.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Tomando o produto interno de (4.49) com  $\eta_n$  in  $\mathcal{M}_g$ , temos

$$\|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g}^2 = B_n^2, \quad (4.51)$$

em que

$$\begin{aligned} B_n^2 &:= \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-\tau)} (f_{nx}^6(\tau), \eta_{nx}(s)) d\tau ds \\ &\quad + \int_0^\infty g(s) (1 - e^{-i\lambda_n s}) (\phi_{nx} + \psi_n, \eta_{nx}(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{i\lambda_n} \int_0^\infty g(s) (1 - e^{-i\lambda_n s}) (f_{nx}^1 + f_n^3, \eta_{nx}(s)) ds. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 4.10 obtemos

$$\begin{aligned} |B_n^2| &\leq c \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} \left[ \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \sqrt{\int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s \|f_{nx}^6(\tau)\| d\tau \right)^2 ds} \right] \\ &\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} \left[ \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right] \\ &\leq c \left[ \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 + \frac{1}{|\lambda_n|} \|f_{nx}^1 + f_n^3\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g} \right]. \end{aligned}$$

Logo, do Lema 4.13 e das convergências (4.42)<sub>1</sub>, (4.42)<sub>3</sub> e (4.42)<sub>6</sub>, obtemos que  $B_n^2 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o resultado segue de (4.51).  $\square$

**Lema 4.15.** *Vale a seguinte convergência*

$$\|\Phi_n\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Fazendo o produto interno (4.42)<sub>2</sub> com  $\phi_n$  in  $L^2(0, L)$ , usando (4.42)<sub>1</sub> e aplicando a técnica de integração por partes, inferimos

$$\rho_1 \|\Phi_n\|^2 = B_n^3, \tag{4.52}$$

em que

$$B_n^3 := -(f_n^2, \phi_n) - \rho_1 (\Phi_n, f_n^1) + \kappa \omega(\phi_{nx} + \psi_n, \phi_{nx}) + \kappa \int_0^\infty g(s) (\eta_{nx}(s), \phi_{nx}) ds.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré e notando que

$$\|\phi_{nx}\| \leq \|\phi_{nx} + \psi_n\| + c \|\psi_{nx}\| \leq c \|z_n\|_{\mathcal{H}},$$

chegamos na seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |B_n^3| &\leq c \|\phi_{nx}\| [\|f_n^2\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g}] + \rho_1 \|\Phi_n\| \|f_n^1\| \\ &\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} [\|f_n^2\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} + \|f_{nx}^1\|] \\ &\leq c [\|f_n^2\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g} + \|f_{nx}^1\|]. \end{aligned}$$

Logo, do Lema 4.13, do Lema 4.14 e das convergências (4.42)<sub>1</sub> e (4.42)<sub>2</sub>, obtemos que  $B_n^3 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o resultado segue de (4.52).  $\square$

**Lema 4.16.** *Assuma que  $\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = g_0 < +\infty$  e que*

$$\chi_0 = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0. \quad (4.53)$$

Então, vale a seguinte convergência

$$\|\Psi_n\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* A prova deste lema é extensa e por isso dividiremos em vários passos.

Passo 1. Fazendo o produto interno de  $f_{nx}^1$  com  $\Psi_n$  em  $L^2(0, L)$  e usando a equação (4.42)<sub>1</sub>, temos

$$(f_{nx}^1, \Psi_n) = i\lambda_n(\phi_{nx}, \Psi_n) - (\Phi_{nx}, \Psi_n).$$

Passo 2. Fazendo o produto interno de  $f_n^2$  com  $\psi_{nx}$  em  $L^2(0, L)$  e usando a equação (4.42)<sub>2</sub>, temos

$$\frac{1}{\rho_1}(f_n^2, \psi_{nx}) = i\lambda_n(\Phi_n, \psi_{nx}) - \frac{\kappa}{\rho_1} \left( \omega(\phi_{nx} + \psi_n)_x + \int_0^\infty g(s)\eta_{mxx}(s) ds, \psi_{nx} \right).$$

Passo 3. Fazendo o produto interno de  $f_{nx}^3$  com  $\Phi_n$  em  $L^2(0, L)$  e usando a equação (4.42)<sub>3</sub>, temos

$$(f_{nx}^3, \Phi_n) = i\lambda_n(\psi_{nx}, \Phi_n) - (\Psi_{nx}, \Phi_n).$$

Passo 4. Fazendo o produto interno de  $f_n^4$  com  $\omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{mx}(s) ds$  em  $L^2(0, L)$  e usando a equação (4.42)<sub>3</sub>, obtemos

$$\begin{aligned} \omega \|\Psi_n\|^2 &= i\lambda_n(\Psi_n, \phi_{nx}) - \ell(\Psi_n, \Phi_{nx}) - \ell(\Psi_n, f_{nx}^1) - \omega(\Psi_n, f_n^3) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_2} \left( f_n^4, \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{mx}(s) ds \right) \\ &\quad + i\lambda_n \int_0^\infty g(s)(\Psi_n, \eta_{mx}(s)) ds + \frac{\kappa}{\rho_2} \left\| \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{mx}(s) ds \right\|^2 \\ &\quad + \frac{b}{\rho_2} \left( \psi_{nx}, \omega(\phi_{nx} + \psi_n)_x + \int_0^\infty g(s)\eta_{mxx}(s) ds \right). \end{aligned}$$

Passo 5. Fazendo o produto interno de  $f^6$  com  $\tilde{\Psi}_n$  em  $\mathcal{M}_g$  e usando a equação (4.42)<sub>6</sub>, temos

$$\begin{aligned} \ell \|\Psi_n\|^2 &= i\lambda_n \int_0^\infty g(s)(\eta_{mx}(s), \Psi_n) ds + \int_0^\infty g(s)(\eta_{msx}(s), \Psi_n) ds - \ell(\Phi_{nx}, \Psi_n) \\ &\quad - \int_0^\infty g(s)(f_{nx}^6(s), \Psi_n) ds. \end{aligned}$$

Passo 6. Somando membro a membro as igualdades obtidas no Passo 1 - Passo 5, deduzimos que

$$\|\Psi_n\|^2 = B_n^4 + B_n^5 + B_n^6 \quad (4.54)$$

onde

$$\begin{aligned} B_n^4 &= i\lambda_n \left[ (\phi_{nx}, \Psi_n) + \overline{(\phi_{nx}, \Psi_n)} + (\Phi_n, \psi_{nx}) + \overline{(\Phi_n, \psi_{nx})} \right] \\ &\quad + i\lambda_n \int_0^\infty g(s) \left[ (\Psi_n, \eta_{nx}(s)) + \overline{(\Psi_n, \eta_{nx}(s))} \right] ds \\ &\quad + (1 + \ell) \left[ (\Psi_n, \Phi_{nx}) - \overline{(\Psi_n, \Phi_{nx})} \right], \\ B_n^5 &= -\frac{\kappa}{\rho_1} \left( \psi_{nx}, \omega(\phi_{nx} + \psi_n)_x + \int_0^\infty g(s) \eta_{nxx}(s) ds \right) \\ &\quad + \frac{b}{\rho_2} \left( \psi_{nx}, \omega(\phi_{nx} + \psi_n)_x + \int_0^\infty g(s) \eta_{nxx}(s) ds \right), \\ B_n^6 &= \frac{\kappa}{\rho_2} \left\| \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s) \eta_{nx}(s) ds \right\|^2 + \int_0^\infty g(s) (\eta_{msx}(s), \Psi_n) ds \\ &\quad - (f_{nx}^1, \Psi_n) - \frac{1}{\rho_1} (f_n^2, \psi_{nx}) - (f_{nx}^3, \Phi_n) + \ell (\Psi_n, f_{nx}^1) + \omega(\Psi_n, f_n^3) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_2} \left( f_n^4, \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s) \eta_{nx}(s) ds \right) - \int_0^\infty g(s) (f_{nx}^6(s), \Psi_n) ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} B_n^4 &= i\lambda_n \left[ (\phi_{nx}, \Psi_n) + \overline{(\phi_{nx}, \Psi_n)} + (\Phi_n, \psi_{nx}) + \overline{(\Phi_n, \psi_{nx})} \right] \\ &\quad + i\lambda_n \int_0^\infty g(s) \left[ (\Psi_n, \eta_{nx}(s)) + \overline{(\Psi_n, \eta_{nx}(s))} \right] ds \\ &\quad + (1 + \ell) \left[ (\Psi_n, \Phi_{nx}) - \overline{(\Psi_n, \Phi_{nx})} \right] \\ &= 2i\lambda_n \operatorname{Re} \left\{ (\phi_{nx}, \Psi_n) + (\Phi_n, \psi_{nx}) + \int_0^\infty g(s) (\Psi_n, \eta_{nx}(s)) ds \right\} \\ &\quad + 2i(1 + \ell) \operatorname{Im}\{(\Psi_n, \Phi_{nx})\}. \end{aligned}$$

Assim, tomando a parte real de  $B_n^4$ , deduzimos que

$$\operatorname{Re}\{B_n^4\} = 0. \quad (4.55)$$

Além disso, explorando a igualdade (4.53), temos

$$\operatorname{Re}\{B_n^5\} = - \underbrace{\left( \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \right)}_{=\chi_0} \operatorname{Re} \left\{ \left( \psi_{nx}, \omega(\phi_{nx} + \psi_n)_x + \int_0^\infty g(s) \eta_{nxx}(s) ds \right) \right\} = 0. \quad (4.56)$$

Passo 7. Extraíndo a parte real de (4.54) e usando as igualdades (4.55) e (4.56), obtemos

$$\|\Psi_n\|^2 = \operatorname{Re}\{B_n^6\}. \quad (4.57)$$

Afirmamos que  $B_n^6 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . De fato, usando a desigualdade triangular e a

desigualdade de Hölder e aplicando o Lema 4.13 e o Lema 4.14, temos

$$\left\| \omega(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g(s)\eta_{nx}(s) ds \right\|^2 \leq c \left( \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g}^2 \right) \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Agora, utilizando que  $\eta_n \in D(\mathbb{L})$  e tendo em conta os limites (4.15) e (4.18), inferimos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)(\eta_{nsx}(s), \Psi_n) ds &= \int_0^\infty g(s) \frac{d}{ds} (\eta_{nx}(s), \Psi_n) ds \\ &= - \int_0^\infty g'(s)(\eta_{nx}(s), \Psi_n) ds. \end{aligned}$$

Assim, da desigualdade de Hölder, do Lema 4.9 e do fato que  $g_0 < +\infty$ , segue que

$$\left| \int_0^\infty g(s)(\eta_{nsx}(s), \Psi_n) ds \right| \leq \sqrt{g_0} \|\Psi_n\| \sqrt{- \int_0^\infty g'(s) \|\eta_{nx}(s)\|^2 ds} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Denotando por  $B_n^7$  os termos de  $B_n^6$  que dependem das funções  $f_n^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 6$ , aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré e usando as convergências (4.42)<sub>1</sub>, (4.42)<sub>2</sub>, (4.42)<sub>3</sub>, (4.42)<sub>4</sub> e (4.42)<sub>6</sub>, temos

$$|B_n^7| \leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} (\|f_{nx}^1\| + \|f_n^2\| + \|f_{nx}^3\| + \|f_n^4\| + \|f_n^6\|_{\mathcal{M}_g}) \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Coletando as convergências acima, chegamos a  $B_n^6 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como afirmamos.

Portanto, o resultado segue de (4.57). □

**Lema 4.17.** *Nas hipóteses do Lema 4.16, vale a seguinte convergência*

$$\|\psi_{nx}\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Tomando o produto interno de (4.42)<sub>4</sub> com  $\psi_n$  em  $L^2(0, L)$  e usando a equação (4.42)<sub>3</sub> temos

$$b\|\psi_{nx}\|^2 = B_n^8 \tag{4.58}$$

em que

$$B_n^8 = (f_n^4, \psi_n) + \rho_2 \|\Psi_n\|^2 + \rho_2 (\Psi_n, f_n^3) - \kappa \omega(\phi_{nx} + \psi_n, \psi_n) - \kappa \int_0^\infty g(s)(\eta_{nx}(s), \psi_n) ds.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de

Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
|B_n^8| &\leq \|f_n^4\| \|\psi_n\| + \rho_2 \|\Psi_n\|^2 + \rho_2 \|\Psi_n\| \|f_n^3\| + \kappa \omega \|\phi_{nx} + \psi_n\| \|\psi_n\| \\
&\quad + \kappa \|\psi_n\| \int_0^\infty g(s) \|\eta_{nx}(s)\| ds \\
&\leq c \underbrace{\|z_n\|_{\mathcal{H}}}_{=1} [\|f_n^4\| + \|\Psi_n\| + \|f_n^3\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g}] \\
&\leq c [\|f_n^4\| + \|\Psi_n\| + \|f_{nx}^3\| + \|\phi_{nx} + \psi_n\| + \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_g}].
\end{aligned}$$

Logo, do Lema 4.13, do Lema 4.14, do Lema 4.16 e das convergências (4.42)<sub>3</sub> e (4.42)<sub>4</sub>, deduzimos que  $B_n^8 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, o resultado segue de (4.58).  $\square$

*Prova do Teorema 4.7 (Suficiência).* Do Lema 4.9, Lema 4.11, Lema 4.13, Lema 4.14, Lema 4.15, Lema 4.16 e Lema 4.17 segue que  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , qualquer que seja  $\lambda_* \in [-\infty, +\infty]$ . Mas, isto contradiz o fato que  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, o semigrupo  $S_2(t)$  é exponencialmente estável.  $\square$

## Análise comparativa

Uma vez cumpridos os dois primeiros objetivos propostos nesta tese, estamos em condições de realizar uma análise sobre a influência da igualdade  $\chi_0 = 0$  com relação a estabilidade exponencial do semigrupo solução associado a cada modelo.

### 5.1 Análise local: modelos (3.1) e (4.1)

Destacamos aqui as principais características e apontamos as diferenças e semelhanças entre os modelos estudados nos Capítulos 3 e 4.

- Mesmo com acoplamentos agindo em forças diferentes, tais acoplamentos são responsáveis por gerar normas semelhantes no espaço de fase (veja (3.9) e (4.9)) e dissipações de mesma intensidade (veja (3.18) e (4.19)).
- Com respeito ao comportamento assintótico dos semigrupos solução, foi possível caracterizar a estabilidade exponencial de ambos via  $\delta$ -condição (1.13). Porém, durante o processo de obtenção dos resultados, algumas hipóteses adicionais foram necessárias, as quais estão apresentadas na tabela abaixo.

Hipótese	Modelo (3.1)	Modelo (4.1)
$\chi_0 = 0$	Não	Sim
$g_0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) < +\infty$	Não	Sim

Tabela 5.1: Hipóteses adicionais utilizadas.

Para explicar a diferença apresentada na Tabela 5.1, vamos retornar às convergências associadas a equação resolvente de cada sistema, mais precisamente, na prova da suficiência do Teorema 3.9 (Subseção 3.3.2) e do Teorema 4.7 (Subseção 4.3.2). Em cada caso, contrariando a estabilidade exponencial dos semigrupos solução, existia uma sequência limitada de soluções clássicas  $z_n$  (Corolário 2.11). Por um lado  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, a menos de uma subsequência,  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , o provava a contradição desejada. No entanto, para mostrar que  $\|z_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , é necessário provar a convergência para zero termo a termo e desta forma, é possível identificar precisamente o uso de cada hipótese adicional.



Termo	Convergência recuperada	$\chi_0 = 0$	$g_0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) < +\infty$
1°	$\ \vartheta_{nx}\ $	Não	Não
2°	$\ \phi_{nx} + \psi_n\ $	Não	Não
3°	$\ \eta_n\ _{\mathcal{M}_g}$	Não	Não
4°	$\ \Phi_n\ $	Não	Não
5°	$\ \psi_{nx}\ $	Não	Não
6°	$\ \Psi_n\ $	Não	Não

Tabela 5.2: Convergências associadas ao modelo (3.1)

Termo	Convergência recuperada	$\chi_0 = 0$	$g_0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) < +\infty$
1°	$\ \vartheta_{nx}\ $	Não	Não
2°	$\ \phi_{nx} + \psi_n\ $	Não	Não
3°	$\ \eta_n\ _{\mathcal{M}_g}$	Não	Não
4°	$\ \Phi_n\ $	Não	Não
5°	$\ \Psi_n\ $	Sim	Sim
6°	$\ \psi_{nx}\ $	Sim	Sim

Tabela 5.3: Convergências associadas ao modelo (4.1)

Ao analisar as Tabelas 5.3 e 5.4, podemos ver que as quatro primeiras convergências são recuperadas sem o uso de hipóteses adicionais. Na verdade, os cálculos para obter tais convergências são exatamente o mesmo, como pode ser observado nas Subseções 3.3.2 e 4.3.2. No entanto, a partir do quinto termo a situação é um pouco mais delicada e uma análise das forças governantes do sistema de Timoshenko e seus respectivos acoplamentos se faz necessária. Os detalhes desta análise serão discutidos na próxima seção.

## 5.2 Análise global

Para finalizar, vamos analisar todos os cenários estudados na literatura juntamente com os cenários estudados nos Capítulos 3 e 4.

- Ao observar as leis constitutivas (1.2) para os acoplamentos elásticos, as leis (1.4) para acoplamentos viscoelásticos, as leis (1.5) para acoplamentos termoelásticos e as leis (1.6) para acoplamentos termoviscoelásticos, é evidente que a força de cisalhamento  $S$  está associada ao termo  $\phi_x + \psi$ , enquanto o momento fletor  $M$  está associado ao termo  $\psi_x$ . Ou seja, é plausível pensar que se houver um acoplamento não-elástico agindo em cada uma das forças  $S$  e  $M$ , então temos informações suficientes para trabalhar com as normas  $\|\phi_x + \psi\|$  e  $\|\psi_x\|$  e possivelmente com  $\|z\|_{\mathcal{H}}$ . Em contrapartida, se ambos acoplamentos

não-elástico estão agindo somente em uma das forças  $S$  ou  $M$ , então, a priori, não seria possível obter informações da norma  $\|\phi_x + \psi\|$  ou da norma  $\|\psi_x\|$  simultaneamente. Neste sentido, para contornar este problema e conseguir informações sobre as duas normas  $\|\phi_x + \psi\|$  e  $\|\psi_x\|$ , é necessário impor uma hipótese adicional, que nesse caso é a igualdade  $\chi_0 = 0$ . Estes fatos podem ser comprovados com os trabalhos abordados na literatura juntamente com o estudo feito nesta tese, conforme apresenta as tabelas abaixo.

Momento fletor Força de cisalhamento	( $M$ ) ( $S$ )	Elástico	Termoelástico	Viscoelástico
Elástico		Conservativo	Sim	Sim
Termoelástico		Sim	Não	Não
Viscoelástico		Sim	Não	Não

Tabela 5.4: Dependência da igualdade  $\chi_0 = 0$  em modelos com acoplamentos termoelásticos e viscoelásticos agindo em forças distintas

Elástico ( $S$ ) Termoviscoelástico ( $M$ )	Elástico ( $M$ ) Termoviscoelástico ( $S$ )
Sim	Sim

Tabela 5.5: Dependência da igualdade  $\chi_0 = 0$  em modelos com um único acoplamento termoviscoelástico

As Tabelas 5.4 e 5.5 nos dão um norte para responder a seguinte pergunta:

*Quando a igualdade  $\chi_0 = 0$  é necessária para mostrar que o semigrupo solução é exponencialmente estável?*

*Resposta: Quando existe um acoplamento elástico agindo em uma das forças, a igualdade  $\chi_0 = 0$  é necessária para obter a estabilidade exponencial do semigrupo solução. Caso contrário, isto é, quando existe um acoplamento termoelástico ou viscoelástico agindo em cada uma das forças governantes, a estabilidade exponencial pode ser obtida independentemente da igualdade  $\chi_0 = 0$ .*

- A influência da igualdade  $\chi_0 = 0$  sobre a estabilidade exponencial dos semigrupos solução, reflete, em algum sentido, a seguinte diferença:

Termoelasticidade e Viscoelasticidade  $\neq$  Termoviscoelasticidade.

De fato, mesmo que os efeitos dissipativos gerados em cada caso tenham a forma

Dissipação total = Dissipação térmica + Dissipação viscoelástica,

devemos enxergar essa expressão de formas diferentes. No caso em que a termoelasticidade e a viscoelasticidade estão presentes simultaneamente e agindo em forças distintas, o sistema de Timoshenko associado possui dois mecanismos de dissipação e por isso é **COMPLETAMENTE** dissipativo:

$$\text{Dissipação total} = \underbrace{\text{Dissipação térmica}}_{1^{\text{a}} \text{ dissipação}} + \underbrace{\text{Dissipação viscoelástica}}_{2^{\text{a}} \text{ dissipação}}.$$

Já no caso em que termoviscoelasticidade age em uma única força e elasticidade é considerada na força complementar, o sistema de Timoshenko associado possui apenas um mecanismo de dissipação e por isso é PARCIALMENTE dissipativo:

$$\text{Dissipação total} = \underbrace{\text{Dissipação térmica} + \text{Dissipação viscoelástica}}_{\text{única dissipação}}.$$

Dessa forma, no primeiro caso a igualdade  $\chi_0 = 0$  não é necessária e no segundo caso a igualdade  $\chi_0 = 0$  é necessária.

- A hipótese  $g_0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) < +\infty$  é técnica e é frequentemente usada quando temos que trabalhar explicitamente com o termo  $\eta_s$ , o qual é abordado em [19] por exemplo. Logo, como as técnicas aplicadas no Capítulo 4 são provenientes do trabalho [19], não conseguimos remover tal hipótese.
- Uma observação final: no Capítulo 4 foi estudado apenas a estabilidade exponencial quando a igualdade  $\chi_0 = 0$  é válida. No caso  $\chi_0 \neq 0$ , pode-se mostrar que o semigrupo solução é semi-uniformemente estável com taxa ótima  $\sqrt{t}$ . Este resultado será feito no artigo proveniente desta tese.

## Apêndice

### 1.1 Motivações

Os cálculos realizados nesta seção são formais e por isso vamos considerar funções suficientemente regulares.

#### 1.1.1 Normas

Considere o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty \eta_x(s) ds \right]_x + \sigma \theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty \eta_x(s) ds \right] - \sigma \theta = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_t - \beta \theta_{xx} + \sigma (\phi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ \eta_t + \eta_s - (\phi + \tilde{\psi})_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Seja  $z = (\phi, \phi_t, \psi, \psi_t, \theta, \eta) \in D(\mathbb{A}_1)$  uma solução clássica de (A.1) em que  $\mathbb{A}_1$  é o operador definido em (3.11). Tomando o produto interno de (A.1)<sub>1</sub> com  $\phi_t$  em  $L^2(0, L)$ , o produto interno de (A.1)<sub>2</sub> com  $\psi_t$  em  $L^2(0, L)$ , o produto interno de (A.1)<sub>3</sub> com  $\eta$  em  $\mathcal{M}_g$ , somando os resultados e utilizando a técnica de integração por partes, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \rho_1 \|\phi_t\|^2 + \rho_2 \|\psi_t\|^2 + \rho_3 \|\theta\| + \kappa \omega \|\phi_x + \psi\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \kappa \|\eta\|_{\mathcal{M}_g}^2 \right] = -\beta \|\theta_x\|^2 + (\mathbb{L}\eta, \eta).$$

Assim, denotando por  $\Phi = \phi_t$  e  $\Psi = \psi_t$ , a norma (3.9) nada mais é a expressão que está sendo derivada no lado esquerdo da igualdade. De forma inteiramente análoga, mostra-se a motivação por trás da norma (4.9).

#### 1.1.2 Formas sequilineares e funcionais antilineares

Seja  $f = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$  e assuma que  $z = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta) \in D(\mathbb{A}_1)$  é solução do sistema

$$\begin{cases} \phi - \Phi = f^1, \\ \rho_1 \Phi - \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right]_x + \sigma \theta_x = \rho_1 f^2, \\ \psi - \Psi = f^3, \\ \rho_2 \Psi - b \psi_{xx} + \kappa \left[ \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] - \sigma \theta = \rho_2 f^4, \\ \rho_3 \theta - \beta \theta_{xx} + \sigma (\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f^5, \\ \eta + \eta_s - (\Phi + \tilde{\Psi}) = f^6. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Seja  $(u, v, w) \in V$ . Por um lado, tomando o produto interno de (A.2)<sub>2</sub> com  $u$  em  $L^2(0, L)$ , o produto interno de (A.2)<sub>4</sub> com  $v$  em  $L^2(0, L)$ , o produto interno de (A.2)<sub>5</sub> com  $w$  em  $L^2(0, L)$ , utilizando a técnica de integração por partes e somando as equações resultantes, temos

$$\begin{aligned} & \rho_1(\Phi, u) + \rho_2(\Psi, v) + \rho_3(\theta, w) + b(\psi_x, w_x) + \beta(\theta_x, w_x) - \sigma(\theta, u_x + v) \\ & + \kappa \left( \omega(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds, u_x + v \right) + \sigma(\Phi_x + \Psi, w) \\ & = \rho_1(f^2, u) + \rho_2(f^4, u) + \rho_3(f^5, u). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por outro lado, resolvendo a E.D.O em (A.2)<sub>6</sub> na variável  $s$ , temos

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})(\Phi + \tilde{\Psi}) + \int_0^s f^6(\tau)e^{-(s-\tau)} d\tau, \quad s > 0.$$

Além disso, das equações (A.2)<sub>1</sub> e (A.2)<sub>3</sub>, inferimos

$$\Phi = \phi - f^1, \quad \Psi = \psi - f^3.$$

Assim, substituindo as expressões obtidas para  $\Phi$ ,  $\Psi$  e  $\eta$  em (A.3) obtemos

$$\Lambda((\phi, \psi, \theta), (u, v, w)) = F(u, v, w), \quad \forall (u, v, w) \in V$$

em que

$$\begin{aligned} \Lambda((\phi, \psi, \theta), (u, v, w)) & = \rho_1(\phi, u) + \rho_2(\psi, v) + \rho_3(\theta, w) + b(\psi_x, v_x) + \beta(\theta_x, w_x) \\ & + \kappa c_g(\phi_x + \psi, u_x + v) - \sigma(\theta, u_x + v) + \sigma(\phi_x + \psi, w). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(u, v, w) & = \rho_1(f^1 + f^2, u) + \rho_2(f^3 + f^4, v) + \kappa \left[ \ell - \int_0^\infty g(s)e^{-s} ds \right] (f_x^1 + f^3, u_x + v) \\ & - \kappa \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{-(s-\tau)} (f_x^6(\tau), u_x + v) d\tau ds + (\rho_3 f^5 + \sigma f_x^1 + \sigma f^3, w), \end{aligned}$$

como queríamos. De forma inteiramente análoga, mostra-se a motivação por trás da forma sesquilinear  $\Lambda$  e do funcional antilinear  $F$  associados ao problema (4.1)-(4.3).

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] D. D. S. Almeida Júnior, M. L. Santos e J. E. Muñoz Rivera, *Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 65(6) (2014) 1233-1249.
- [2] M. O. Alves, et al., *On a Timoshenko system with thermal coupling on both the bending moment and the shear force*. Journal of Evolution Equations 20.1 (2020) 295-320.
- [3] M.O. Alves, E.H. Gomes Tavares, M.A. Jorge Silva and J.H. Rodrigues, *On modeling and uniform stability of a partially dissipative viscoelastic Timoshenko system*. SIAM J. Math. Anal. 51(6) (2019) 4520–4543.
- [4] L. Boltzmann, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*. Wien. Ber. 70, 275–306 (1874).
- [5] L. Boltzmann, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*. Wied. Ann. 5, 430–432 (1878).
- [6] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2011.
- [7] B. M. R. Calsavara, E. H. Gomes Tavares e M. A. Jorge Silva, *Exponential stability for a thermo-viscoelastic Timoshenko system with fading memory*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 512.2 (2022) 126147.
- [8] V. V. Chepyzhov e V. Pata, *Some remarks on stability of semigroups arising from linear viscoelasticity*. Asymptotic Analysis 46 (2006) no. 3-4, 251-273.
- [9] M. Conti, F. Dell’Oro e V. Pata, *Some unexplored questions arising in linear viscoelasticity*. Journal of Functional Analysis 282.10 (2022) 109422.
- [10] M. Conti, F. Dell’Oro e V. Pata, *Timoshenko systems with fading memory*. Dynamics of PDE 10.4 (2013): 367-377.
- [11] F. Dell’Oro e V. Pata, *On the stability of Timoshenko systems with Gurtin–Pipkin thermal law*. Journal of Differential Equations 257.2 (2014) 523-548.
- [12] C. M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. 37 (1970) 297–308.
- [13] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [14] B. Feng, *Uniform decay of energy for a porous thermoelasticity system with past history*. Applicable Analysis 97.2 (2018): 210-229.
- [15] J. E. Muñoz Rivera e H. D. Fernández Sare, *Stability of Timoshenko systems with past history*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 339.1 (2008) 482-502.

- [16] H. D. Fernández Sare e R. Racke, *On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law*. Archive for Rational Mechanics and Analysis 194.1 (2009) 221-251.
- [17] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons 1999.
- [18] C. Giorgi, M. G. Naso e V. Pata, *Exponential stability in linear heat conduction with memory: a semigroup approach*. Commun. Appl. Anal. 5 (2001), 121-133.
- [19] E. H. Gomes Tavares, M. A. Jorge Silva e H. P. Oquendo, *On the stability of a Timoshenko-Boltzmann model*. Preprint.
- [20] M. Grasselli e V. Pata, *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 50 (2002) 155-178.
- [21] M. Grasselli, V. Pata e G. Prouse, *Longtime behavior of a viscoelastic Timoshenko beam*. Discrete & Continuous Dynamical Systems 10.1&2 (2004) 337.
- [22] M. A. Jorge Silva e R. Racke, *Effects of history and heat models on the stability of thermoelastic Timoshenko systems*. Journal of Differential Equations 275 (2021) 167-203.
- [23] Z. Liu e C. Peng, *Exponential stability of a viscoelastic Timoshenko beam*. Advances in Mathematical Sciences and Applications 8 (1998) 343-351.
- [24] Z. Liu e S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, Vol. 398. CRC Press, 1999.
- [25] S. A. Messaoudi e B. Said-Houari, *Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history*. Journal of mathematical analysis and applications 360.2 (2009) 459-475.
- [26] J. E. Muñoz Rivera e R. Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems—global existence and exponential stability*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 276.1 (2002) 248-278.
- [27] J. T. Oden e L. Demkowicz, *Applied functional analysis*, Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [28] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [29] B. Said-Houari e A. Kasimov, *Damping by heat conduction in the Timoshenko system: Fourier and Cattaneo are the same*. J Diff Equ, 2013, 255 611–632.
- [30] S. P. Timoshenko, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, Series 6, 41, issue 245, (1921) 744- 746.
- [31] S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1955.
- [32] V. Volterra, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications*. Acta Math. 35 (1912), 295-356.
- [33] V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.