UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)[1]

MARIA VERÔNICA BARTMEYER

Princípio de Ponto Fixo nos Espaços de Banach

Maringá
2023

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

MARIA VERÔNICA BARTMEYER

Princípio de Ponto Fixo nos Espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise - Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Gleb Germanovitch Doronin.

Maringá
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Bartmeyer, Maria Verônica
B291p Princípio de ponto fixo nos espaços de Banach / Maria Verônica Bartmeyer. -- Maringá, 2023.
83 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Gleb Germanovitch Doronin.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2023.

1. Princípio de ponto fixo. 2. Escalas de espaços de Banach. 3. Problema abstrato de Cauchy. 4. Soluções analíticas. 5. Fixed point principle. 6. Scale of Banach apaces. 7. Abstract Cauchy problem. 8. Analytic solutions. I. Doronin, Gleb Germanovitch, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.732
Edilson Damasio CRB9-1.123

MARIA VERÔNICA BARTMEYER

PRINCÍPIO DE PONTO FIXO EM ESPAÇOS DE BANACH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Marcos Vinicius Fagundes Padilha - IFPR
Prof. Dr. Rafael Borro Gonzalez - UEM

Aprovada em: 28 de março de 2023.
Local de defesa: Bloco F67 – Auditório do Departamento de Matemática.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Gleb Germanovitch Doronin. Agradeço à minha família, amigos, colegas e professores. Agradeço à CAPES, pela bolsa de estudos. Agradeço a todos os que acreditaram em mim, na realização deste trabalho e durante a minha trajetória acadêmica até aqui.

Maria Verônica Bartmeyer.

À Verônica Mileski Quirrenbach.
(In Memoriam)

Resumo

Este trabalho trata do princípio de Ponto Fixo nos espaços de Banach. Estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, com aplicações para existência e unicidade de solução para sistemas de equações diferenciais ordinárias, assim como de equações integrais. Demonstramos o teorema de existência e unicidade de solução (fraca) do problema de valor inicial e de contorno para uma equação parabólica não-linear. Em seguida, discutimos um problema de valor inicial em uma forma abstrata. Então, para o caso de um operador diferencial clássico, o Teorema de Kovalevskaya é demonstrado pelo método das majorantes. O capítulo seguinte é dedicado às chamadas Escalas de Espaços de Banach (EEB) e, em particular, a uma EEB de funções Analíticas reais. Formulamos o conceito de operador quasidiferencial em uma escala de espaços de Banach, o qual é utilizado para provar um teorema de existência e unicidade para o seguinte problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} = f(u,t), \quad u(0) = \theta,$$

onde $S \subset F(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é uma EEB e θ é o elemento nulo em S. Assumindo que $f : S \times \mathbb{R} \to S$ é um operador diferencial não-linear dado, um resultado de existência e unicidade é provado, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Como aplicação, segue de maneira imediata o teorema de Kovalevskaya, assim como a existência e unicidade de soluções do problema acima em classes de Gevrey.

Palavras chave: Princípio de ponto fixo. Escalas de espaços de banach. Problema abstrato de Cauchy. Soluções analíticas.

Abstract

This work is concerned with the Fixed Point principle in Banach spaces. We study the Banach Fixed Point Theorem with applications to the existence and uniqueness of solution for systems of ordinary differential equations, and for integral equations as well. We prove the theorem of existence and uniqueness of (weak) solution to the initial boundary-value problem for a non-linear parabolic equation. Next, we discuss an initial-value problem in an abstract form. Then, for the case of classical differential operator, Kovalevskaya's Theorem has been proved by the classical majorants method. The next chapter is devoted to the so-called Scales of Banach Spaces (SBS) and, in particular, a SBS of Real Analytic Functions. This is a central point of our work. We formulate the concept of a quasidifferential operator in a scale of Banach spaces which is used to prove an existence and uniqueness theorem for the following Cauchy problem:

$$\frac{du}{dt} = f(u,t), \quad u(0) = \theta,$$

where $S \subset F(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ is a SBS and θ is the zero element in S. Assuming that $f : S \times \mathbb{R} \to S$ is a given nonlinear differential operator, the existence-uniqueness result is proven by the Banach fixed point theorem. As an application, the Kovalevskaya theorem follows immediately, as well as the existence and uniqueness of solutions to the above problem in Gevrey's classes.

Keywords: Fixed point principle. Scale of Banach spaces. Abstract Cauchy problem. Analytic solutions.

Sumário

Introdução

Uma equação diferencial parcial, é uma equação na forma

$$F\left(x, u, (D^\alpha u)_{|\alpha|\le k}\right) = 0 \tag{1}$$

relacionando a função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e suas derivadas de ordem no máximo k, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é um multi-índice. O operador, definido por F, neste caso, diz-se Operador Diferencial Clássico, de ordem $k \in \mathbb{N}$. Um dos problemas fundamentais da teoria de Equações Diferenciais Parciais consiste em encontrar uma função u satisfazendo uma equação na forma (1), e as chamadas condições iniciais e de fronteira. Tais problemas, importantes na modelagem de uma ampla gama de fenômenos da Física, Biologia entre outras áreas para a realização de previsões e interpretação do comportamento de diversos sistemas, são conhecidos na Matemática como problemas de valor inicial (PVI) e os problemas de contorno (PVC).

O problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias de primeira odem consiste em encontrar uma função $u(t)$, definida numa vizinhança de um ponto t_0, tal que

$$F(t, u, u') = 0, \quad u(t_0) = u_0; \tag{2}$$

sendo F uma função em $\mathbb{R}^3$ e $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ dados. Na Biologia, por exemplo, tais problemas modelam a disseminação de doenças ou, ainda, o crescimento de uma população.

Já situações como o comportamento de reações químicas, dinâmica dos gazes e fluídos, a formação de padrões de pele animal e a transmissão de doenças em certas populações, são frequentemente modeladas com a utilização de equações diferenciais parciais. No problema de valor inicial para EDP's, as condições iniciais da solução são especificados em um dado ponto no espaço e no tempo, por exemplo:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = K(u)(u - u_t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde u é uma incógnita a ser encontrada, t é a variável independente representando o tempo e x é um vetor em n variáveis espaciais independentes; u_0 é o valor inicial da solução, v_0 é o valor inicial da sua derivada com relação ao tempo. Quando não for possível obter uma solução clássica $u \in C^\infty$, teremos como objetivo encontrar uma solução $u(x,t)$ que satisfaça a EDP dada e as condições iniciais em certos espaços de funções [1], buscando então soluções no sentido fraco.

Um problema de contorno (PVC) para uma equação diferencial parcial, por sua vez, é um problema onde uma condição de contorno é especificada na fronteira do domínio. Por exemplo, para o sistema

$$\begin{cases} L(u) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = g, \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

onde L é um operador diferencial linear, $f(x)$ é uma função dada em Ω, e g é uma função dada sobre a fronteira Γ do domínio, temos um PVC onde a função u é a incógnita a ser encontrada, satisfazendo a EDP e as condições de contorno [3, 4].

A resolução de PVI's e PVC's para EDP frequentemente requerem diferentes métodos e técnicas. Neste trabalho, abordaremos o Princípio de Ponto Fixo, demonstrado pelo método das aproximações sucessivas, visando garantir existência e unicidade de soluções. Tal procedimento consiste em aproximar as soluções do problema iterativamente, e é utilizado na resolução do problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias, integrais e diferenciais parciais, sejam estas últimas lineares ou não-lineares. Veremos que, quando a solução do problema é buscada em Espaços de Banach, isto é, em espaços normados, completos na métrica induzida pela sua norma, podemos concluir, sob algumas hipóteses adicionais, que sua existência é garantida e única [3, 7, 8].

Começamos esta dissertação apresentando definições e resultados fundamentais da teoria de Espaços Métricos e resultados da teoria de Espaços de Sobolev que serão utilizados ao longo do texto [2, 3, 8].

No Capítulo 2, demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para isso, utilizaremos um procedimento que consiste em aproximar as soluções do problema iterativamente, e é utilizado na resolução do problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias, integrais e diferenciais parciais, sejam estas últimas lineares ou não-lineares. Veremos que, quando a solução do problema é buscada em Espaços de Banach, podemos concluir, sob algumas hipóteses adicionais, que sua existência é garantida e única [3, 7, 8]. Ainda neste capítulo, abordaremos o problema de valor inicial e de contorno para o sistema de reação-difusão não-linear, que pode ser descrito por

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} = f(\mathbf{u}) \quad \text{em} \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times [0,T], \\ \mathbf{u} = g \quad \text{sobre} \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, f e g são funções reais dadas e f atende à condição de Lipschitz [3]. Tal problema pode ser visto como uma generalização do problema de valor inicial para EDO's:

$$\begin{cases} u_t(t) = f(t,u), \quad \mathrm{t} > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Neste caso, quando f é contínua, Lipschitz em relação à segunda variável e não depende das derivadas parciais, o teorema de existência local, de Picard-Lindelöf, garante que, para um valor inicial u_0 dado, podemos encontrar algum $t_0 > 0$ com a propriedade de que existe uma solução única para $0 \leq t < t_0$. Para o problema (3), podemos também garantir existência de solução local, sob certas hipóteses, o que segue como uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach [3].

No capítulo final, nos dedicaremos especialmente a equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{4}$$

as quais relacionam a função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e suas derivadas de primeira ordem.

O problema de encontrar uma solução u da EDP (4) em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, impondo ainda uma condição de fronteira $u = g$ em Γ, onde Γ é algum subconjunto de $\partial\Omega$ e $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ é uma função dada, é chamado problema de Cauchy, quando Γ não é uma superfície característica de (4).

Abordaremos o problema de Cauchy com dados analíticos reais, isto é, com representação em séries de potências, definidos em uma vizinhança de algum ponto em $\mathbb{R}^n$. Iremos construir uma solução em série de potências, para o caso em que (4) é uma equação diferencial parcial quasilinear. Para isto, utilizaremos o método das majorantes. O desenvolvimento deste método e a solução para este problema deve-se à matemática russa Sophia Kovalevskaya.

Já o caso em que a equação não depende de derivadas parciais, isto é, uma equação diferencial ordinária, tem solução analítica devido à Cauchy. O teorema que leva seu nome, conhecido da teoria de Equações Diferenciais ordinárias, e análago ao teorema de Kovalevskaya, afirma que uma equação diferencial ordinária (2), com coeficientes analíticos em um intervalo (a, b) e um termo independente tem em certo entorno do ponto $x_0 \in (a, b)$, onde valem as condições iniciais, possui uma solução única que satisfaz a estas condições iniciais. O teorema de Kovalevskaya é, portanto, uma generalização do teorema de Cauchy com ajuste para equações diferenciais parciais: se a superfície aonde valem as condições iniciais, não possui pontos característicos, e os dados iniciais são analíticos reais, então em certo entorno desta superfície, o problema tem uma solução analítica única.

Na segunda parte do Capítulo 3, iremos então analisar o problema de Cauchy abstrato, ou seja, considerando as soluções do problema

$$\frac{du}{dt} = f(u,t), \quad u(0) = \theta, \tag{5}$$

num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, suposto que a função $f : S \times \mathbb{R} \to S$ seja dada, S é um espaço abstrato de Banach, e θ é o elemento nulo em S.

Introduziremos então, o conceito de Escalas de Espaços de Banach, buscando solução para o problema (5) em escalas de espaços de Banach, quando f é um operador quasidiferencial, a ser definido. O leitor pode consultar as referências [10, 11, 12, 13]. Veremos que, no caso particular em que f é um operador diferencial clássico, o problema (5) pode ser resolvido em uma EEB de funçoes analíticas reais, a qual descrevemos no trabalho, verificando então o Teorema de Kovalevskaya. Além disso, outro caso particular é a Escala de Espaços de Banach de funções de Gevrey [12].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos e notações utilizadas na linguagem atual para os espaços e operadores envolvidos na resolução de equações diferenciais parciais.

1.1 Espaços Métricos

Serão apresentados conceitos iniciais, para o desenvolvimento da teoria de Espaços de Banach.

Seja M um conjunto qualquer, não vazio.

Definição 1.1. *Chamamos* ***métrica em*** M*, uma função* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer* $x, y, z \in M$*:*

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) $d(x, y) > 0$, *sempre que* $x \neq y$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Denotamos por $(M; d)$ o espaço métrico M com a métrica d.

Exemplo 1.1. *O espaço das funções reais limitadas* f*, definidas em um domínio* X*, denotado por* $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ *é um espaço métrico com a métrica* $d : \mathcal{B}(X; \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

De fato, seja X *um conjunto arbitrário. Relembremos que* $f : X \to \mathbb{R}$ *é uma função real limitada se existir uma constante* $k > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq k$*, para todo* $x \in X$*.*

Observemos primeiramente que este conjunto é um espaço vetorial. De fato, sejam $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Como* f *e* g *são limitadas, existem constantes positivas* c_f *e* c_g *tais que* $|f(x)| \leq c_f$ *e* $|g(x)| \leq c_g$ *para todo* $x \in X$*. Assim, temos que*

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c_f + c_g,$$

para todo $x \in X$, isto é, $|(f+g)(x)| \leq k$ para todo $x \in X$, com $k = c_f + c_g > 0$. Portanto, a soma de funções limitadas também é uma função limitada. Agora, observe que

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq \lambda c_f,$$

para todo $x \in X$, isto é, $|(\lambda f)(x)| \leq k$ para todo $x \in X$, com $k = \lambda c_f > 0$. Por fim, temos que $f \equiv 0$ é limitada.

Vejamos que $(\mathcal{B}(X;\mathbb{R}); d)$ é espaço métrico, com a métrica d. De fato, tomemos $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, então

d1) $d(f,f) = \sup_{x \in X} |f(x) - f(x)| = \sup_{x \in X} |0| = 0;$

d2) Suponhamos $f \neq g$, então existe $\tilde{x} \in X$, tal que $f(\tilde{x}) \neq g(\tilde{x})$. Assim,

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq |f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})| > 0;$$

d3) $d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g,f);$

d4) Como $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ é espaço vetorial, para f, g e h funções reais limitadas, existem constantes c_{f-g}, c_{g-h} tais que

$$c_{f-g} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = d(f,g)$$

e

$$c_{g-h} = \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)| = d(g,h).$$

Assim, temos que, para todo $x \in X$,

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq c_{f-g} + c_{g-h}$$

e, portanto

$$d(f,h) = \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| \leq c_{f-g} + c_{g-h} = d(f,g) + d(g,h).$$

Concluímos que $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ é um espaço métrico, com a métrica definida acima.

Exemplo 1.2. *(Métrica trivial) Definimos a métrica $d : X \to X$ como sendo $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$.*

As condições d1) a d3) são obviamente satisfeitas. Tome $x, y, z \in X$. Se $x = y = z$, não há o que fazer; se $x \neq y$ ou x, y, z são diferentes entre si, então

$$d(x,z) \leq 1 \leq d(x,y) + d(y,z),$$

e a propriedade d4) é satisfeita.

Definição 1.2. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ é dito* ***denso*** *em M se $\overline{A} = M$, isto é, se para cada $x \in M$ e toda vizinhança V aberta de x, existir um elemento de A contido nesta vizinhança.*

Definição 1.3. *Um espaço métrico M é dito* ***separável*** *se possui um subconjunto denso e enumerável.*

Exemplo 1.3. *O espaço $\mathbb{R}$ é separável, pois o subconjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é denso e enumerável.*

1.1.1 Espaços Métricos Completos

Definição 1.4. *(Sequência de Cauchy) Seja M um espaço métrico e $(x_n) \subset M$ uma sequência em M. Dizemos que (x_n) é uma* ***sequência de Cauchy*** *em M quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$, então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Proposição 1.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Dados $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \longrightarrow a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $d(x_n, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Agora, se $m, n > n_0$, então

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Proposição 1.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subset M$ uma sequência de Cauchy em M, e tomemos $\varepsilon = 1$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$, então $d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $X_{n_0} = \{x_k \in M; k > n_0\}$ é limitado e o diâmetro de (X_{n_0}) é menor ou igual a 1. Daí, $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\} \cup X_{n_0}$ é limitado, portanto a sequência (x_n) é limitada. □

Proposição 1.3. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração: Seja $(x_n) \subset M$ uma sequência de Cauchy em M, e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n), convergindo para $a \in M$. Tomando $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l > n_1$, então $d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, como (x_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$, então $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, chamemos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Assim, temos que, se $n > n_2$, existe $n_k > n_2$ tal que

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_k) + d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Proposição 1.4. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequência de Cauchy em sequência de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua, $(x_n) \subset M$ uma sequência de Cauchy e $\varepsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Agora, dado $\delta > 0$, como (x_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n > n_0$, então $d(x_m, x_n) < \delta$. Daí, $d(x_m, x_n) < \delta$ implica que $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ sempre que $m, n > n_0$. □

Corolário 1.1. *Seja $f : M \to N$ um homeomorfismo uniforme. Uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy se, e somente se, $(f(x_n))$ é de Cauchy em N.*

Demonstração. Veja [8]. □

Definição 1.5. *(Espaço métrico completo) Um espaço métrico M é dito **completo** quando toda sequência (x_n) de Cauchy em M converge para algum elemento $x \in M$.*

Proposição 1.5. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração. Seja $F \subset M$ fechado. Tome $(x_n) \subset F$ uma sequência de Cauchy em F. Então $(x_n) \subset M$, que é completo. Logo, existe $a \in M$ tal que $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, isto é, (x_n) converge em M. Mas F é fechado, portanto $a \in F$.

Agora, seja $N \subset M$ um subespaço completo. Então, dado $x \in M$, um ponto de aderência de N, temos que, se $(x_n) \subset N$ é tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então (x_n) é de Cauchy, pois N é completo. Daí, existe $a \in N$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Mas, pela unicidade do limite, $x = a$. Logo N é fechado. □

A seguir, seguem alguns resultados e exemplos, cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.6. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Corolário 1.2. *O produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, \ldots, M_n$ são completos.*

Corolário 1.3. *O espaço $\mathbb{R}^n$ (euclidiano) é completo.*

Proposição 1.7. *O produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é completo se, e somente se, cada um dos fatores $M_1, \ldots, M_i, \ldots$ é completo.*

Exemplo 1.4. *Se M é completo, então $\mathcal{B}(X; M)$ é completo.*

Exemplo 1.5. *Sejam M, N espaços métricos. Se N é completo, então o conjunto $\mathcal{C}(M; N)$ das funções $f : M \to N$ contínuas é um espaço métrico completo.*

Exemplo 1.6. *A reta $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.*

Exemplo 1.7. *O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ não é completo em $\mathbb{R}$.*

1.2 Espaços Normados

Seja E um espaço vetorial. Para desenvolveremos a teoria de Espaços de Banach, faz-se necessária a introdução de uma norma, como segue.

Definição 1.6. *Dizemos que uma função real $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ é uma* ***norma*** *em E quando satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:*

N1) Se $x \neq 0$, então $\|x\| \neq 0$;

N2) $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$;

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemplo 1.8. *Seja $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a função real dada por $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Então $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$. Além disso, $(\mathcal{B}(X; \mathbb{R}); \|\cdot\|)$ é um espaço métrico, quando definimos*

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

como vimos anteriormente.

Prova. De fato, dadas $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ e λ escalar, temos que:

N1) Se $f \neq 0$, então existe $\tilde{x} \in X$, tal que $f(\tilde{x}) \neq 0$. Assim,

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \geq |f(\tilde{x})| > 0,$$

logo $\|f\| > 0$;

N2) $\|\lambda\, f\| = \sup_{x\in X} |\lambda\, f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda|\; |f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| = |\lambda|\; \|f\|$;

N3) Como $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)|$, isto é,

$$k = \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)|$$

é tal que $|f(x) + g(x)| \leq k$, para todo $x \in X$, temos que

$$\|f + g\| = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq k = \|f\| + \|g\|.$$

□

Exemplo 1.9. *A distância $d(f, g)$ em $\mathcal{B}([0, 1];\mathbb{R})$ é o comprimento da maior corda vertical que se pode traçar, ligando o gráfico de f ao gráfico de g. Sejam $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funções dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Temos que*

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 1.$$

Logo $f - g$ tem vértice em $x = \frac{1}{2}$. Avaliando $|f - g|$ em $x = \frac{1}{2}$, temos

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right| = \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} \left|x - x^2\right| = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 1.10. *(Métrica do máximo) Seja $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $f : X \to \mathbb{R}$, limitada. Então f pode ser identificada com a lista $(x_1, \ldots, x_n)$ onde $x_1 = f(1), \ldots, x_n = f(n)$. Assim, $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Dadas $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, denotemos $f = (x_1, \ldots, x_n), g = (y_1, \ldots, y_n)$, de onde temos que*

$$d(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{|x_i - y_i|\} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

*é a **métrica do máximo** em $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 1.11. *(Bolas abertas e bolas fechadas em $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$) Seja $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Então $g \in B[f,r]$ se $|f(x)-g(x)| \leq r$ e, $g \in B(f;r)$ se $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)] < r$. Primeiramente, note que $g \in B[f;r]$, significa que o gráfico da função g, denotado por $G(g)$, está contido na faixa $F(f)$ de amplitude $2r$ em torno do gráfico de f, isto é,*

$$G(g) \subset \{(x,y); f(x) - r \leq y \leq f(x) + r\}.$$

Assim,

$$g \in B[f;r] \Leftrightarrow G(g) \subset F(f).$$

Agora, se $g \in B(f;r)$, então

$$G(g) \subset \{(x,y); f(x) - r < y < f(x) + r\}.$$

Mas pode ocorrer, no entanto, que o gráfico da g esteja contido na faixa aberta, sem que $g \in B(f;r)$. De fato, tomando $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$, com $a, b > 0$, e $g(x) = x$ se $x \in [a,b)$ e $g(b) = 0$, temos que o gráfico de g está contido nesta faixa aberta de amplitude b, mas $B(f;b)$ não contém g, pois

$$\|f-g\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \{0\} \cup [a,b) = b.$$

Isto é, $G(g) \subseteq \{(x,y); f(x) - b < y < f(x) + b\}$, mas $g \notin B(f;b)$.

Exemplo 1.12. *De maneira mais geral, se $\mathcal{B}(X;M)$ é o conjunto das funções limitadas $f : X \to M$ de um conjunto arbitrário X em M , definimos a métrica do sup, ou **métrica da convergência uniforme**, dada por*

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

Esta métrica está bem definida pois, para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(X;M)$, o conjunto $D = \{d(f(x), g(x)); x \in X\}$ é um cojunto limitado de números reais. Portanto, $\mathcal{B}(X;M)$ é espaço métrico com métrica do sup.

Se E é um espaço vetorial normado, $\mathcal{B}(X;E)$ é espaço vetorial, e assim, a métrica do sup $d(f,g)$ provém da norma $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$, isto é,

$$d(f,g) := \|f-g\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

1.2.1 Espaços de Banach

Definição 1.7. *Um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$, completo na métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$ é chamado **Espaço de Banach**.*

Exemplo 1.13. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Denotamos por $\mathcal{L}(E,F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas f de E em F. Então $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço vetorial com a norma*

$$\|f\| = \sup_{x\in E,\ |x|=1} |f(x)|. \tag{1.1}$$

Além disso,

$$|f(x)| \leq \|f\|\,|x| \quad \forall \quad f \in \mathcal{L}(E,F).$$

De fato, para $|x| = 1$ ou $|x| = 0$ é imediato; para $|x| \geq 1$, temos que

$$|f(x)| \leq \|f\| \leq \|f\|\,|x| \quad \forall \quad f \in \mathcal{L}(E,F);$$

e, para $0 < |x| \leq 1$, temos

$$\frac{|f(x)|}{|x|} = \left|\frac{1}{|x|} f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leq \|f\| \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|\,|x|, \quad \forall \quad f \in \mathcal{L}(E,F).$$

Proposição 1.8. *Seja $S = \{u \in E; \quad |u| = 1\}$ a esfera unitária de E. Uma aplicação linear $f : E \to F$ é contínua se, e somente se, f restrita a S é limitada.*

Demonstração. Tomemos $\varepsilon = 1$. Como f é contínua em zero e $f(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta$ e $|f(x)| < 1$. Agora, seja c tal que $0 < \frac{1}{c} < \delta$. Se $x = 0$, é imediato. Se $x \neq 0$, então

$$\left|\frac{x}{c|x|}\right| = \left|\frac{1}{c}\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(\frac{x}{c|x|}\right)\right| < 1 \Rightarrow |f(x)| < c|x|.$$

Daí, como $|x| = 1$, temos que $|f(x)| < c$, para todo $x \in S$. □

Por definição, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ em $\mathcal{L}(E,F)$ significa $\|f_n - f\| \to 0$, quando $n \to \infty$, o que equivale a dizer que $f_n \to f$ uniformemente em S.

Proposição 1.9. *Se F é completo, então o espaço vetorial normado $\mathcal{L}(E,F)$ é completo.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Então, para cada $x_0 \in E$, a sequência $(f_n(x_0))$ é de Cauchy em F. De fato, tomando $\dfrac{\varepsilon}{\|x_0\|}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}, \quad \text{sempre que} \quad m, n > n_0.$$

Assim,

$$\|f_n(x_0) - f_m(x_0)\| = \|(f_n - f_m)(x_0)\| \leq \|f_n - f_m\|\,\|x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}\|x_0\| = \varepsilon,$$

isto é,

$$\|f_n(x_0) - f_m(x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall \quad m, n > n_0. \tag{1.2}$$

Como F é completo, para cada $x \in E$ fixo, $f_n(x) \to y_x$, quando $n \to \infty$. Definimos

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto y_x = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Então, como (f_n) é limitada, temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n(x)\| \leq \|f_n\|\|x\| \leq c\|x\|$$

para alguma constante $c > 0$. Fazendo $n \to \infty$, vemos que f é limitada.

Agora, fazendo $m \to \infty$ em (1.2), temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para $x \neq 0$,

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon\|x\| \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\|x\| \Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|f_n(x) - f(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon,$$

isto é, $\|f_n - f\| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $x = 0$, o resultado é imediato, pois f_n e f_m são aplicações lineares, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Portanto $f_n \to f$ em F.

□

Definição 1.8. *Uma série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *num espaço vetorial normado* E *diz-se* ***normalmente convergente*** *quando* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$*, isto é, quando a série das normas* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *é convergente.*

Proposição 1.10. *Se o espaço* E *é completo, toda série normalmente convergente, é convergente em* E*.*

Demonstração. Seja $S_n = x_1 + \ldots + x_n$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad n > n_0.$$

Assim,

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Logo, a sequência das somas parciais S_n é de Cauchy, e como E é completo, concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge em E. □

Exemplo 1.14. *O espaço $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f$ é contínua$\}$ não é completo com a norma*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

De fato, tomemos a sequência (f_n) com $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right), & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Observe que, para $m < n$, temos

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_2^2 &= \left(\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx\right) \\ &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx\right) + \left(\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx\right) \\ &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |(n-m)(x - \frac{1}{2})|^2 dx\right) + \left(\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |1 - (m)(x - \frac{1}{2})|^2 dx\right) \\ &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |(n-m)(x - \frac{1}{2})|^2 dx\right) + \left(\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |mx - (\frac{m}{2} + 1)|^2 dx\right) \\ &= \frac{(n-m)^2}{3}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{3m}\left(\frac{m}{n} + 1\right)^3 \\ &\longrightarrow 0, \quad \textit{quando} \quad m, n \to \infty. \end{aligned}$$

Logo (f_n) é de Cauchy em $C[0,1]$, mas converge para f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

que não pertence a $C[0,1]$.

Desejamos, no entanto, trabalhar num espaço aonde as funções sejam quadrado integráveis no sentido de Lebesgue. Para isso, pode-se definir o espaço $L^2(0,1)$, como sendo o completamento de $C[0,1]$, com a norma em (1.3), isto é,

$$L^2(0,1) := \overline{C[0,1]}^{\|\cdot\|_2},$$

com norma

$$\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

onde (f_n) é uma sequência em $C[0,1]$ tal que $f_n \to f$ em $L^2(0,1)$.

Denotamos

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx.$$

1.3 Espaços com produto interno

Nos próximos conceitos, considere X um espaço vetorial.

Definição 1.9. *Chamamos de* ***produto interno*** *em X, uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*

P1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$;

P2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$;

P3) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$;

P4) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad e \quad \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

para quaisquer $x, y, z \in X$, e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para todo $x, y \in X$, vale a seguinte desigualdade, conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

De fato, se $x = 0$ ou $y = 0$, é obvio. Para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, existe $z \in X$, tal que $z \perp x$ e $y = \alpha x + z$, com $\alpha = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$. Então, temos que

$$\|y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|z\|^2,$$

e assim,

$$\|y\|^2 \geq |\alpha|^2\|x\|^2 \geq \left|\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\right|^2 \langle x,x\rangle,$$

logo

$$\langle y,y\rangle\,\langle x,x\rangle \geq |\langle x,y\rangle|^2,$$

e segue a desigualdade desejada.

Podemos então definir a norma $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. De fato, valem as três propriedades:

N1) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x,x\rangle \neq 0 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \neq 0$, pela propriedade $P4$);

N2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle \lambda x, x\rangle} = \sqrt{\lambda\lambda\langle x,x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\|x\|$, pelas propriedades $P2$) e $P3$);

N3) Vale a desigualdade triangular, pois

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2, \quad \text{(desigualdade de Cauchy-Schwarz)} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Chamamos esta norma de norma induzida pelo produto interno.

Lema 1.1. *(Continuidade do produto interno) Se num espaço com produto interno, $x_n \to x$ e $y^n \to y$, então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Demonstração. De fato, para $(x^n) \subset X$ e $(y_n) \subset X$ tais que $x_n \to x \in X$ e $y^n \to y \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y_n - y\rangle - \langle x,y\rangle| \\
&= |\langle x_n - x, y\rangle + \langle x_n, y_n - y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y\rangle| + |\langle x_n, y_n - y\rangle| \\
&\leq \|x_n - x\|\,\|y\| + \|x_n\|\,\|y_n - y\|
\end{aligned}$$

Como $\|x_n - x\| \to 0$ e $\|y_n - y\| \to 0$ quando $n \to \infty$, temos que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \to 0, \text{quando} \quad n \to \infty,$$

e temos o desejado. □

Definição 1.10. *Um **espaço de Hilbert** é um espaço vetorial H, munido de um produto interno e completo em relação à norma definida por esse produto interno.*

Exemplo 1.15. *O conjunto $L^2(0,1)$ é um espaço de Hilbert com norma*

$$\|f\|_{L^2(0,1)} = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,1)}$$

induzida pelo produto interno

$$\langle f, g\rangle_{L^2(0,1)} \quad = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^2(0,1).$$

onde

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g_n(x)dx, \quad f, g \in L^2(0,1),$$

sendo que (f_n) e (g_n) são sequências em $C[0,1]$ tais que $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em $L^2(0,1)$. Uma definição mais formal será dada na seção seguinte.

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção resumimos a teoria de derivadas fracas e os possíveis espaços onde funções e suas derivadas fracas, integráveis no sentido de Lebesgue, aparecem. Tais espaços são bastante úteis para a resolução de diversas equações diferenciais parciais.

Apresentaremos, inicialmente, definições e algumas propriedades de funções mensuráveis. Observemos que se alguma propriedade vale em todo ponto de $\mathbb{R}^n$, exceto em um conjunto mensurável, com medida de Lebesgue nula, dizemos que esta propriedade vale em quase todo ponto, e denotamos q.t.p. Para fins de praticidade, não faremos distinção entre duas funções, no caso em que elas forem iguais q.t.p.

Definição 1.11. *O espaço $L^p(\Omega)$, das **funções L^p-integráveis**, para $1 \leq p < \infty$, é definido como*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \ f \ \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

Sabemos então que este é um espaço normado, com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Definimos ainda, para o caso em que $p = \infty$, o espaço das funções **essencialmente limitadas**

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \quad f \quad \text{é mensurável e} \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |f(x)| < +\infty\},$$

que é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |f(x)| := \inf\{C \in \mathbb{R}; |f(x)| \leq C \quad q.t.p.\}.$$

Proposição 1.11. *Vale a **desigualdade de Hölder**: Se $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Proposição 1.12. *$L^p(\Omega)$ é espaço normado completo, para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposição 1.13. *O conjunto $C(\overline{\Omega})$, das funções contínuas definidas no fecho de Ω é denso em $L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \infty$.*

Proposição 1.14. *$L^p(\Omega)$ é separável, para $1 \leq p < \infty$.*

Proposição 1.15. *Para todo $1 < p < \infty$, o espaço dual $(L^p(\Omega))'$ de $L^p(\Omega)$ é $L^{p'}(\Omega)$, onde p' é o conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.*

1.4.1 Espaços de Sobolev

Uma “função de teste”é uma função suficientemente regular a ponto de podermos aplicar a técnica de integração por partes atribuindo a derivada em um grau maior para tal função e dando uma interpretação para a derivada de uma função em um sentido mais fraco que o sentido clássico, isto é, definida por um limite.

Para simplificar os próximos passos, iremos usar um espaço de funções teste, sendo sempre com regularidade de derivadas clássicas e com suporte compacto, este espaço será suficiente para definirmos os espaços do Sobolev.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 1.12. *Chamamos de **suporte** de uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o fecho do conjunto dos valores $x \in \Omega$ tais que $u(x) \neq 0$.*

Definição 1.13. *Chamamos de **espaço de funções de teste**, o conjunto $D(\Omega)$ formado por todas as funções de classe $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.*

Observação 1.1. *Denotamos o espaço das funções teste definidas no domínio $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ como simplesmente $C_0^\infty(0, 1)$.*

Definição 1.14. *(Conceito de Derivada fraca em dimensão 1) Considere uma função $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$, tal que não seja necessariamente possível calcular sua derivada em todo o seu domínio. Se definirmos uma função $v : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_0^1 v(x)\varphi(x)\, dx = -\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\, dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$, então, podemos definir uma interpretação para a derivada de u, como sendo a função v acima citada.

Introduziremos as seguintes notações:

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é um multi-índice;
- $x^\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$;

- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$;
- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$;
- $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$;

e, para $k \in \mathbb{Z}_+$,

- $D^k_{x_i} u = \dfrac{\partial^k u}{\partial x_i^k}, \quad i = 1, \ldots, n.$

Definição 1.15. *A **derivada fraca**, com relação ao multi-ídice α, de uma função u definida em Ω é a função v que satisfaz*

$$\int_\Omega v\,\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\,D^\alpha \varphi\,dx, \quad \textit{para toda} \quad \varphi \in D(\Omega). \tag{1.4}$$

Os espaços formados pelas funções L^p-integráveis, no sentido de Lebesgue, que possuem derivadas fracas também pertences a algum espaço $L^p(\Omega)$ são nomeados espaços de Sobolev e descritos pela definição abaixo.

Definição 1.16. *Chamamos de **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$ o conjunto de funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq k$, a derivada $D^\alpha u$ definida em (1.4) pertence a $L^p(\Omega)$, com a norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^k u|^p dx \right)^{1/p}, \ (1 \leq p < \infty),$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_\Omega \operatorname{ess} |D^k u|, \ (p = \infty).$$

Se $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$, para $k \in \mathbb{Z}_+$. Além disso, observe que, se $k = 0$, temos que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Proposição 1.16. *O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, com o produto interno definido por*

$$(u, v)_{H^1} := \int_\Omega u\,v + \sum_{i=1}^n (\partial_i u)(\partial_i v)\ dx = \int_\Omega u\,v + \nabla u\,\nabla v\,dx.$$

Além disso, $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço denso de $H^1(\Omega)$.

Definição 1.17. *Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$, em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Isto significa que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existirem funções $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tais que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Assim, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é o espaço das funções u com derivadas fracas de ordem $|\alpha| \leq k$ em $L^p(\Omega)$, tais que

$$D^\alpha u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad \text{pra todo} \quad |\alpha| \leq k-1.$$

Denotamos $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Proposição 1.17. *O espaço $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, com o produto interno induzido de $H^1(\Omega)$; Além disso, $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço denso de $H_0^1(\Omega)$.*

Definição 1.18. *Definimos o* ***espaço dual*** *de $H_0^1(\Omega)$ por:*

$$H^{-1}(\Omega) = \{f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad f \quad \textit{é um operador linear limitado.}\}$$

Denota-se por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1},H_0^1}$, a dualidade de $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, e definiremos a norma

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup\{\langle f, u\rangle_{H^{-1},H_0^1};\ u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Teorema 1.1 (Desigualdade de Gronwall - forma diferencial)**.** *Seja $\eta(\cdot)$ uma função absolutamente contínua não negativa definida em $[0,T]$, que satisfaz a seguinte equação, para quase todo ponto:*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções integráveis não negativas definidas em $[0,T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right] \quad q.t.p. \quad 0 \leq t \leq T.$$

Em particular, se

$$\eta' \leq \phi\eta \quad \textit{em} \quad 0 \leq t \leq T \quad \textit{e} \quad \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \quad \textit{em} \quad [0,T].$$

Demonstração. Da hipótese, vemos que

$$\eta'(t) - \phi(t)\eta(t) \leq \psi(t),$$

e derivando o lado esquerdo desta desigualdade, obtemos daí que

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\right) = e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\left(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)\right) \leq e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)$$

para quase todo $0 \leq s \leq T$. Integrando a desigualdade acima, temos que

$$\left(\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)dr}\right) - \eta(0) \leq \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)\, ds.$$

Mas, como ϕ é não negativa, temos que $e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \leq 1$, e portanto,

$$\left(\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)dr}\right) \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds,$$

para cada $0 \leq t \leq T$, de onde segue a desigualdade desejada. □

Teorema 1.2 (Desigualdade de Gronwall - forma integral)**.** *Seja $\xi(t)$ uma função integrável não negativa em $[0,T]$, que satisfaz a seguinte equação, para quase todo ponto:*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2,$$

para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Então

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad q.t.p. \quad 0 \leq t \leq T.$$

Em particular, se

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds, \quad q.t.p. \quad 0 \leq t \leq T,$$

então

$$\xi(t) = 0, \quad q.t.p. \quad em \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demonstração. Seja $\eta(t) := \displaystyle\int_0^t \xi(s)ds$, então $\eta' \leq C_1\eta + C_2 \quad q.t.p.$ em $[0,T]$. Da desigualdade de Gronwall na forma diferencial, temos que

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq e^{\int_0^t C_1(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t C_2(s)ds\right] \\ &= e^{C_1 t}(\eta(0) + C_2 t) = C_2 t e^{C_1 t}, \quad \text{q.t.p.} \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Assim, como

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2,$$

segue de (1.5), que

$$\xi(t) \leq C_1\eta(t) + C_2 \leq C_2(1 + C_1te^{C_1t}).$$

$\square$

Teorema 1.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe C^∞. Então, existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de n e Ω, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Por densidade, basta mostrar a desigualdade para $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Fixemos um cubo dado pelas desigualdades $b_i < x_i < b_i + a$, para $i = 1, \dots N$, e contendo Ω como subconjunto.

Estendendo u igual a zero no complementar de Ω, obtemos uma função em $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ também denotada por u.

Para cada $x \in \Omega$, temos

$$\int_{b_1}^{x_1} \partial_1 u(z_1, x_2, \dots, x_N)dz_1 = u(x).$$

Aplicando Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq (x_1 - b_1) \int_{b_1}^{x_1} |\partial u(z_1, x_2, \dots, x_N)|^2 dz_1 \\ &\leq a \int_{b_1}^{b_1+x_1} |\partial u(z_1, x_2, \dots, x_N)|^2 dz_1. \end{aligned}$$

Integrando sucessivamente, obtemos

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq a^2 \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^2 dx \leq a^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Logo $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. $\square$

1.4.2 Espaços envolvendo tempo

Para construção de soluções fracas para equações diferenciais parciais parabólicas, lineares e não-lineares, faz-se necessário o estudo de espaços envolvendo uma variável tempo.

Definição 1.19. *O espaço $L^P(0,T;X)$ consiste no espaço de todas as funções mensuráveis $u:[0,T]\to X$, com*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} < +\infty,$$

se $1\leq p<+\infty$, e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{t\in[0,T]}\text{ess}\|u(t)\|_X < +\infty.$$

Definição 1.20. *O espaço $C([0,T];X)$ compreende todas as funções contínuas $u:[0,T]\to X$ tais que*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_X < +\infty.$$

Definição 1.21. *Seja $u\in L^1(0,T;X)$. Diremos que $v\in L^1\,(0,T;X)$ é a* ***derivada fraca*** *de u e escrevemos $u'=v$, desde que*

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)\;dt = -\int_0^T \phi(t)v(t)\;dt,$$

$\forall \quad \phi\in C_0^\infty(0,T); \quad \phi:[0,T]\to\mathbb{R}.$

Definição 1.22. *Definimos*

(i) O ***espaco de Sobolev*** *$W^{1,p}(0,T;X)$, de todas as funções $u\in L^p(0,T;X)$ tais que u' existe no sentido fraco e pertence a $L^p(0,T;X)$. A norma neste espaço é dada por*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p\;dt\right)^{1/p}, & (1\leq p<\infty) \\ \sup_{0\leq t\leq T}\text{ess}\left(\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X\right), & (p=\infty). \end{cases}$$

(ii) Escrevemos $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.

Definição 1.23. *Consideremos* $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega;\ d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. *Se* Ω *for tal que* $\partial\Omega = \varnothing$, *consideremos* $\Omega = \Omega_\varepsilon$. *Definindo*

$$\eta(y) = \begin{cases} c\, e^{\frac{1}{|y|^2-1}}, & |y| < 1 \\ 0, & |y| \geq 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

sendo $c > 0$ *escolhida de maneira que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)dy = 1, \tag{1.7}$$

temos que $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$. *Definimos a Mollifier canônica* η_ε *como sendo*

$$\eta_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.8}$$

η_ε *é de classe* C^∞, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)dx = 1$ *e o suporte* $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$.

Definição 1.24. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *defina a mollificação* $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$ *dada por*

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(x) &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy, \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Teorema 1.4. *Seja* $u \in W^{1,p}(0, T; X)$, *para algum* $1 \leq p \leq +\infty$. *Então*

(i) $u \in C([0, T]; X)$ *(após ser redefinido sobre um conjunto de medida nula);*

(ii) $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau, \quad \forall \quad 0 \leq s \leq t \leq T;$

(iii) $\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| \leq c(T)\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$, *com* $C(T) > 0$, *i.e.*, $W^{1,p}(0, T; X) \hookrightarrow C([0, T]; X)$.

Demonstração. Iremos primeiramente estender u como sendo zero em $(-\infty, 0)$ e em $(T, +\infty)$.

Seja $\eta_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), \varepsilon > 0$ a mollifier padrão em $\mathbb{R}$, e considere a mollificação $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ dada por

$$u_\varepsilon(x) = \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \eta_\varepsilon(y)\, u(t-y)dy, \quad \forall t \in [0, T]_\varepsilon$$

Como $u \in W^{1,p}(0, T; X)$, de fato este procedimento é possível. Além disso,

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty((\varepsilon, i - \varepsilon); X)$ e

(ii) $u_\varepsilon \to u$ em $W^{1,p}(0,T.X)$ se $\varepsilon \to 0$.

Daí, em particular
$$u'_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u' \quad \text{em} \quad (\varepsilon, T-\varepsilon).$$

De fato,
$$\begin{aligned}
(u^\varepsilon)'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \eta_\varepsilon(t-y)u(y)dy\right) \\
&= \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \frac{d}{dt}\eta_\varepsilon(t-y)u(y)dy \\
&= (-1)\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \frac{d}{dy}\eta_\varepsilon(t-y)u(y)dy \\
&= (-1)(-1)\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \eta_\varepsilon(t-y)\frac{d}{dy}(u(y))dy = (\eta_\varepsilon * u')(t);
\end{aligned}$$

e ainda,
$$\begin{cases} u_\varepsilon \to u \quad \text{em} \quad L^p(0,T;X), \varepsilon \to 0; \\ u'_\varepsilon \to u' \quad \text{em} \quad L^p(0,T;X), \varepsilon \to 0. \end{cases}$$

Fixemos $0 < s < t < T$. Como $u_\varepsilon \in C^\infty((\varepsilon, T-\varepsilon); X)$, temos
$$u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(\varepsilon) + \int_s^t u'_\varepsilon(\tau)d\tau.$$

Isto é, como vale (1.4.2) e $u' \in L^p(0,T;X)$, da igualdade acima e do teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que
$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0, \quad u < s < t < T.$$

Como a aplicação $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \mu'(\tau)d\tau$ é contínua, segue que $u \in C([0,T];X)$ e o item (ii) do teorema.

Para o item (iii), de (ii) temos:
$$u(t) - u(s) = \int_s^t u'(\tau)d\tau$$

Integrando de 0 a T,

$$\begin{aligned}
\int_0^T u(t)-u(s)ds &= \int_0^T\int_s^t u'(\tau)d\tau ds \\
&= \int_0^t\int_s^t u'(\tau)d\tau ds - \int_t^T\int_t^s u'(\tau)d\tau ds \\
&= \int_0^t\int_0^\tau u'(\tau)dsd\tau = \int_t^T\int_\tau^T u'(\tau)dsdz \\
&= \int_0^t \tau u'(\tau)dz - \int_t^T (T-\tau)u'(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Então,

$$\left\|\int_0^T u(t)-u(s)ds\right\| \leq 2T\int_0^1 \|u'(\tau)\|\, d\tau.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\| &\leq \frac{1}{T}\left\|\int_0^T u(t)-u(s)ds\right\| + \frac{1}{T}\left\|\int_0^T u(s)ds\right\| \\
&\leq 2\int_0^T \|u'(\tau)\|\, d\tau + \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|ds \\
&\leq 2\,\|u'\|_{L^1(0,T;X)} + T^{-1}\|u\|_{L^1(0,T;X)}.
\end{aligned}$$

Como $L^p(0,T)\hookrightarrow L^1(0,T)$, segue o item (iii).

□

Teorema 1.5. *Suponha* $u\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ *e* $u'\in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. *Então*

(i) $u\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$;

(ii) A aplicação $t\mapsto \|u(t)\|^2_{L^2((\Omega))}$ *é absolutamente contínua e*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2} = 2\left\langle u'(t),u(t)\right\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

para quase todo $0\leq t\leq T$;

(iii) Tem-se a estimativa

$$\max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(T)\left(\|u\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|u\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right),\quad C(T)>0.$$

Demonstração. Iremos estender u para o intervalo $[-\sigma,T+\sigma]$ para $\sigma>0$, e definir a mollificação

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u,\quad u^\varepsilon(t) = \int_{-\sigma}^{T+\sigma}\eta_\epsilon(t-y)u(y)dy.$$

Então, para $\varepsilon, \delta > 0$,

$$\frac{d}{dt}\left\|u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\left\langle (u^{\varepsilon})'(t) - \left(u^{\delta}\right)'(t), u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\right\rangle.$$

Assim,

$$\left\|u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\|u^{\varepsilon}(s) - u^{\delta}(s)\right\|_{L^2(\Omega)} + \int_s^t \frac{d}{d\tau}\|u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

o que implica

$$\left\|u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u^{\varepsilon}(s) - u^{\delta}(s)\|_{L^2(\Omega)} + 2\int_s^t \left\langle (u^{\varepsilon})'(\tau) - \left(u^{\delta}\right)'(\tau), u^{\varepsilon}(\tau) - u^{\delta}(\tau)\right\rangle d\tau$$

para todo $0 \leq s < t \leq T$. Fixando $s \in (0,T)$ tal que $u^{\varepsilon}(s) \to u(s)$ em $L^2(\Omega)$, temos, da desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T} 2\int_s^t \left\langle (u^{\varepsilon})'(\tau) - \left(u^{\delta}\right)'(\tau), u^{\varepsilon}(\tau) - u^{\delta}(\tau)\right\rangle d\tau \leq \\
\leq \sup_{0\leq t\leq T} 2\Big(\frac{1}{2}\int_s^t |(u^{\varepsilon})'(\tau) - \left(u^{\delta}\right)'(\tau)| d\tau + \frac{1}{2}\int_s^t |u^{\varepsilon}(\tau) - u^{\delta}(\tau)| d\tau\Big) \\
\leq \int_0^T \|(u^{\varepsilon})'(\tau) - \left(u^{\delta}\right)'(\tau)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|u^{\varepsilon}(\tau) - u^{\delta}(\tau)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon,\delta\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \|(u^{\varepsilon})'(t) - \left(u^{\delta}\right)'(t)\|_{L^2_{(\Omega)}} \leq \\
\leq \lim_{\varepsilon,\delta\to\infty} \int_0^T \|(u^{\varepsilon})'(\tau) - \left(u^{\delta}\right)'(\tau)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|u^{\varepsilon}(\tau) - u^{\delta}(\tau)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau = 0.
\end{aligned}$$

E portanto as funções regulares $\{u^{\varepsilon}\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ convergem em $C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ para o limite $v \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. Agora, como $u_{\varepsilon}(t) \to u(t)$ para quase todo $t \in [0,T]$, pela unicidade do limite, concluímos que $u = v$ em quase todo ponto. □

Teorema 1.6. *Suponha Ω aberto, limitado, com fronteira suave. Seja $m \geq 0$, um inteiro. Tome $u \in L^2(0,T; H^{m+2}(\Omega))$ e $u' \in L^2(0,T; H^m(\Omega))$. Então*

(i) $u \in C([0,T]; H^{m+2}(\Omega))$, após possivelmente ser redefinido sobre um conjunto de medida nula;

(ii) $\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_{H^{m+2}(\Omega))} \leq C\big(\|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}\big)$, a constante C dependendo apenas de T, Ω e de m.

Demonstração. Veja [3]. □

1.5 Funções Analíticas

Nesta seção, revemos a representação em série de potências de funções analíticas que tomam valores reais, e introduzimos as ferramentas necessárias para o desenvolvimento do método utilizado por Kovalevskaya para demonstrar existência e unicidade para um problema de Cauchy, descrito no capítulo 3.

Definição 1.25. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é **analítica** em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se existir $r > 0$ e constantes $\{f_\alpha\}$ tais que*

$$f(x) = \sum_\alpha f_\alpha \left(x - x_0\right)^\alpha, \quad (|x - x_0| < r)$$

sendo a soma tomada sobre todos os multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Notação:

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n;$
- $x^\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}};$

Se f é uma função analítica em x_0, então f é infinitamente diferenciável em uma vizinhança de x_0. Além disso, as constantes f_α são calculadas por

$$f_\alpha = \frac{D^\alpha f\left(x_0\right)}{\alpha!},$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$. Assim, f é igual a sua expansão de Taylor em x_0:

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{D^\alpha f\left(x_0\right)}{\alpha!} \left(x - x_0\right)^\alpha, \quad |x - x_0| < r.$$

Teorema 1.7 (Teorema Multinomial)**.** *Seja $x = (x_1, \ldots\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$\begin{aligned}(x_1 + \ldots + x_n)^k &= \sum_{|\alpha| = k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| = k} \frac{|\alpha_1 + \ldots + \alpha_n|!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.16. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{r}{r - (x_1, \ldots, x_n)}$. Então esta função é analítica em zero, quando $\|x\| < \frac{r}{\sqrt{n}}$, com série de Taylor*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{r}\right)^k = \sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha.$$

Para o caso $n = 2$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r = 1$, temos que

$$f(z) = \frac{1}{1-(x+y)} = \sum_{k=0}^{\infty}(x+y)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right) x^{k-i}y^i = \sum_{\alpha}\frac{|\alpha_1+\alpha_2|!}{\alpha_1!\alpha_2!}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2},$$

isto é,

$$f(z) = \sum_{\alpha}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}z^{\alpha},$$

que é absolutamente convergente em $\|z\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha}\frac{|\alpha_1+\alpha_2|!}{\alpha_1!\alpha_2!}\left|x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}\right| &= 1 + |x| + |y| + \frac{2!}{2!}\left|x^2\right| + \frac{2!}{2!}\left|y^2\right| + \frac{2!}{1!}|xy| + \\
&\quad + \frac{3!}{3!}|x^3| + \frac{3!}{3!}|y^3| + \frac{3!}{2!}\left|x^2y\right| + \frac{3!}{2!}\left|xy^2\right| + \cdots \\
&= 1 + |x| + |y| + |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 + \\
&\quad + |x|^3 + 3\left|x^2y\right| + 3\left|xy^2\right| + |y|^3 + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(|x|+|y|)^k < \infty,
\end{aligned}$$

quando $|x| + |y| \leq \|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2}\sqrt{2} < 1$.

Definição 1.26. *Sejam $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha}\left(x - x_0\right)^{\alpha}$ e $g = \sum_{\alpha} g_{\alpha}\left(x - x_0\right)^{\alpha}$ duas séries de potências. Dizemos que g* ***majora*** *f, denotando por*

$$g \gg f,$$

se

$$|f_{\alpha}| \leq g_{\alpha},$$

para todo multi-índice α.

Lema 1.2. *(Majorantes)*

i) Se $g \gg f$ e g converge para $\|x\| < r$, então f também converge para $\|x\| < r$;

ii) Se $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha}\left(x\right)^{\alpha}$ converge para $\|x\| < r$ e $0 < s\sqrt{n} < r$, então f tem majorante para $\|x\| < \dfrac{s}{\sqrt{n}}$.

Demonstração. (i) Suponhamos que $g \gg f$ e g converge para $\|x\| < r$, então se $|x| < r$, temos que

$$\sum_\alpha |f_\alpha x^\alpha| \leq \sum_\alpha |f_\alpha|\, |x^\alpha| \leq \sum_\alpha |g_\alpha|\, |x^\alpha| < \infty.$$

(ii) Seja $0 < \dfrac{S}{\sqrt{n}} < r$ e $y = s\,(1, 1, \ldots, 1)$ Então, para

$$\|y\| = \sqrt{s^2 + \cdots + s^2} = \sqrt{ns^2} = s\sqrt{n} < r,$$

temos que a soma $\sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$ converge. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f_\alpha y^\alpha| \leq c, \quad \forall \quad \alpha. \tag{1.10}$$

Em particular,

$$|f_\alpha y^\alpha| = |f_\alpha y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}| = |f_\alpha\, s^{|\alpha|}| = s^{|\alpha|}\, |f_\alpha|.$$

Então, temos de (1.10), que

$$s^{|\alpha|}\, |f_\alpha| = |f_\alpha y^\alpha| \leq C,$$

isto é,

$$|f_\alpha| \leq \frac{C}{s^{|\alpha|}} \leq \frac{C}{s^{|\alpha|}}\, \frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

Mas então,

$$g(x) = \frac{C\, s}{s - (x_1 + \ldots + x_n)} = C \sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{s^{|\alpha|}|\alpha|!}\, x^\alpha,$$

majora f quando $\|x\| < \dfrac{s}{\sqrt{n}}$.

□

Observação: Dadas séries de potência $\{f^k\}_{k=1}^m$, $\{g^k\}_{k=1}^m$, colocamos $f = (f^1, \ldots, f^m)$ e $g = (g^1, \ldots, g^n)$, e escrevemos $g \gg f$ significando $g^k \gg f^k, \quad (k = 1, \ldots, m)$.

Capítulo 2

Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo, utiliza-se o método das aproximações sucessivas, para demonstrar o teorema de Banach sobre existência e unicidade de pontos fixos de funções definidas em espaços de Banach. Para isto, é introduzido o conceito de contração. Em seguida, são apresentadas aplicações deste teorema, na solução de um sistema de equações diferencias ordinárias, de certos tipos, e do problema de valor inicial e de contorno para uma equação diferencial parcial parabólica não-linear.

2.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

A seguir, um teorema sobre pontos fixos de contrações, demonstrado pelo o método das aproximações sucessivas.

Definição 2.1. *Um* ***ponto fixo*** *de uma aplicação $f : M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$, para quaisquer $x, y \in M$.*

Sejam M e N espaços métricos.

Definição 2.2. *Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se uma* ***contração*** *quando existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)$.*

Teorema 2.1. *(Teorema do Ponto Fixo de Banach) Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui único ponto fixo em M.*

Observe que toda contração é uma função contínua. De fato, para qualquer $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) &\leq c\, d(x,y) \\ &< d(x,y) \\ &< \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in M$, sendo $0 \leq c < 1$ a constante de contracão.

Demonstração. Seja $f : M \to M$, uma contração, com constante de contração $c > 0$. Iremos verificar que, se tomarmos $x_0 \in M$ qualquer e pusermos

$$x_1 = f(x_0),\ \ldots\ , x_{n+1} = f(x_n), \ldots$$

a sequência (x_n) converge em M e $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ é o único ponto fixo de f.

Existência. Tomemos $x_0 \in M$ e definamos a sequência $x = (x_n)$ dada por $x_1 = f(x_0)$ e $x_{n+1} = f(x_n)$.

Afirmamos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, temos que

$$d(x_1, x_0) = d(f(x_0), x_0) \leq c\, d(x_1, x_0),$$

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq c\, d(x_1, x_0),$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq cd(x_1, x_1) \leq c^2 d(x_1, x_0)$$

e, em geral,

$$d(x_{n+1} x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq c^n d(x_1, x_0).$$

Resulta daí que, para todo $m, n \in \mathbb{N}, m < n$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq c^m d(x_1, x_0) + c^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots + c^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &= \left(c^m + c^{m+1} + \ldots + c^{n-1}\right) d(x_1, x_0) \\ &= c^m \left(1 + c + \ldots + c^{n-m-1}\right) d(x_1, x_0) \\ &< c^m \frac{1}{1-c} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{1-c} d(x_1, x_0)$ é constante, e $\lim\limits_{m\to\infty} c^m = 0$, temos que $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$, o que prova a afirmação.

Sendo (x_n) uma sequencia de Cauchy no espaço métrico completo M, resulta que (x_n) converge para $a \in M$ e, da continuidade da f, temos que

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(a).$$

Logo a é ponto fixo de f.

Unicidade. Sejam $x, y \in M$ tais que $f(x) = x$ e $f(y) = y$. Seja $0 \leq c < 1$ a constante de contração de f. Então, temos que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y),$$

isto é,

$$(1-c)\, d(x, y) \leq 0.$$

Como $(1-c) > 0$, resulta que $d(x, y) = 0$, isto é, $x = y$.

Concluímos assim, que f possui um único ponto fixo $a \in M$. $\square$

Corolário 2.1. *Seja $T : M \to M$ uma função contínua em um espaço métrico completo M e suponha que T^m é uma contração em M para algum inteiro positivo m. Então T tem um único ponto fixo.*

Demonstração. Por hipótese, $B = T^m$ é uma contração em M, isto é, $d(Bx, By) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in M$, onde $\alpha < 1$. Então, para todo $x_0 \in M$,

$$\begin{aligned} d(B^n T x_0, B^n x_0) &\leq \alpha\, d(B^{n-1} T x_0, B^{n-1} x_0) \\ &\dots \\ &\leq \alpha^n d(T x_0, x_0) \\ &\longrightarrow \quad 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned} \tag{2.1}$$

O Teorema do Ponto Fixo de Banach implica então que B tem um único ponto fixo, o qual chamaremos x, e $B^n x_0 \to x$. Como a aplicação T é contínua, isto implica que $B^n T x_0 = T B^n x_0 \to T x$. Assim,

$$d(B^n T x_0, B^n x_0) \longrightarrow d(Tx, x),$$

e, por (2.1), temos que $d(Tx, x) = 0$. Assim, x é um ponto fixo de T. Como todo ponto fixo de T é também ponto fixo de B, concluímos então que T não pode ter mais do que um ponto fixo.

$\square$

2.2 Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos de aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Decorrem deste resultado, teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais e equações integrais.

2.2.1 Existência e unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias

A seguir, iremos demonstrar um importante resultado da teoria de equações diferenciais ordinárias. Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$x' = f(t, x). \tag{2.2}$$

O problema de valor inicial para esta equação consiste num sistema dado pela equação (2.2) e por uma condição inicial, como segue:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde t_0 e x_0 são números reais dados.

Teorema 2.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R} \times E$ um aberto, onde E é um espaço de Banach, e uma aplicação continua $f : U \to E$. Suponhamos que f cumpre a condição de Lipschitz com respeito à segunda variável:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq c\,\|x - y\|, \tag{2.4}$$

onde a constante c não depende dos pontos $(t,x),(t,y) \in U$. Então, o problema (2.2) tem uma única solução.

Demonstração. Tomemos um aberto $U \subset \mathbb{R} \times E$, onde E é um espaço de Banach, e uma aplicação continua $f : U \to E$, cumprindo a condição de Lipschitz com respeito à segunda variável

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq c\,\|x - y\|$$

onde a constante c não depende dos pontos $(t,x),(t,y) \in U$.

Procuramos uma aplicação diferenciável

$$\varphi : I \to E$$

definida num intervalo I que contenha t_0 no seu interior, que resolva o problema (2.2), isto é, tal que $\varphi(t_0) = x_0$ e, para todo $t \in I$, $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$, onde ponto $(t_0,x_0) \in U$ é dado em (2.2). (Esta última igualdade implica, em particular, que φ é continuamente derivável e seu gráfico está contido em U).

Observe que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)), \quad \forall \quad t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se e somente se, para todo $t \in I$,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds.$$

Afirmação 1. Existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que, para o intervalo $I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ e para a bola $B = [x_0, \beta]$ em E, valem

a) $I \times B \subset U$,

b) $|f(t,x)| \leq M, \quad \forall \quad (t,x) \in I \times B$,

c) $\alpha\, M \leq \beta \quad$ e $\quad \alpha\, c < 1$,

onde c é dada por (2.4).

De fato, como U é aberto, existe $\beta > 0$ tal que $B = B\,[x_0, \beta] \subset U$, e portanto $a)$ é válida. Além disso, como f é continua e $\overline{I \times B}$ é fechado e limitado no espaço de Banach $\mathbb{R} \times E$, então f é limitada em $I \times B \subset \overline{I \times B}$, e assim, $b)$ vale. Podemos ainda tomar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, tal que vale c). Assim, a afirmação 1 está demonstrada.

Consideremos agora o espaço métrico $\mathcal{C}(I, B) = \{f : I \to B; \quad f \quad \text{é continua}\}$, com a métrica $\|f\| = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$ da convergência uniforme.

Portanto, para resolver o problema (2.2), definamos a aplicação

$$
\begin{aligned}
F : \mathcal{C}(I; B) &\longrightarrow \mathcal{C}(I; B) \\
\varphi(s) &\longmapsto [F(\varphi(s))](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,
\end{aligned}
$$

para todo $t \in I$, e provemos que F possui um único ponto fixo. Iremos mostrar que as condições do teorema do Ponto Fixo de Banach se aplicam em F.

Afirmação 2. Veja que $[F(\varphi(s))](t) \in B$, para todo $\varphi(s) \in \mathcal{C}(I; B), \quad \forall t \in I$.

De fato, pela afirmação 1, temos que

$$
\begin{aligned}
\|[F(\varphi)](t) - x_0\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds - x_0 \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s))\| ds \\
&\leq M\,|t - t_0| \leq M\,\alpha \leq \beta.
\end{aligned}
$$

Afirmação 3. $F(\varphi)$ é lipschtziana, para cada $\varphi \in C(I, B)$.

Com efeito, tomando $t, t' \in I$, temos novamente pela afirmação 1 que

$$
\begin{aligned}
|[F(\varphi)](t) - [F(\varphi)]\,(t')| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds + x_0 - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t'} f(s, \varphi(s))ds \right) \right| \\
&= \left| \int_{t}^{t'} f(s, \varphi(s))ds \right| \\
&\leq M|t - t'|.
\end{aligned}
$$

Em particular, $F(\varphi) \in C(I; B)$, para toda $\varphi \in C(I; B)$, logo $F(C(I; B)) = C(I; B)$, isto é, F é uma aplicação do espaço métrico completo $C\,(I; B)$ em si mesmo.

Afirmação 4. F é uma contração do espaço métrico completo $C(I;B)$ em si mesmo.

Tomemos $\varphi, \psi \in C(I;B)$ quaisquer. Então, da afirmação 1, temos que

$$\begin{aligned}
\|F(\varphi) - F(\psi)\|_{\mathcal{C}(I;B)} &= \sup_{t\in I} |[F(\varphi)](t) - [F(\psi)(t)]| \\
&= \sup_{t\in I} \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds \right| \\
&\leq \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))| ds \\
&\leq \sup_{s\in I} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))|\, \alpha \\
&\leq \sup_{s\in I} c\, \alpha |\varphi(s) - \psi(s)| \\
&= \alpha\, c \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}(I;B)}
\end{aligned}$$

Agora, tomando $K = \alpha\, c < 1$, temos que $\|F(\varphi) - F(\psi)\| \leq K\|\varphi - \psi\|, \quad K < 1.$

Observemos ainda que $\mathcal{C}(I;B)$, munido da nrma da convergência uniforme é um espaço completo. Existe, portanto, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach, uma única aplicação contínua $\varphi : I \to B$ tal que $F(\varphi) = \varphi$, ou seja,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s;\varphi(s))ds, \quad \forall \quad t \in I.$$

□

Tal resultado chama-se Teorema de Picard para existência e unicidade de soluções do Problema de Valor Inicial para Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias.

2.2.2 Equação de Fredholm

Busca-se neste tópico, demonstrar existência e unicidade de soluções para uma equação integral que chamamos Equação de Fredholm de tipo II, a ser definida.

Definição 2.3. *É chamada* ***equação de Fredholm do tipo I****, a equação da forma:*

$$\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau = v(t)$$

onde $[a,b]$ é um intervalo dado, x é uma função em $[a,b]$ incógnita, a função k, chamada núcleo da equação, é definida em $G = [a,b] \times [a,b]$ e v é uma função definida em $[a,b]$ dada.

Agora, se multiplicarmos a integral por um parâmetro $-\mu$ e acrescentarmos ao lado esquerdo $x(t)$, obteremos uma equação do tipo II, como segue:

Definição 2.4. *É chamada* ***equação de Fredholm do tipo II****, a equação da forma:*

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau = v(t). \tag{2.5}$$

Sabemos que $\mathcal{C}[a,b]$ é completo com a métrica

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Vamos assumir que $v \in C[a,b]$ e que a função k é contínua em G. Como k é contínua no compacto G, então existe c tal que

$$|k(t,\tau)| \leq c \tag{2.6}$$

para todo $(t,\tau) \in G$.

Podemos então mostrar que a equação do tipo II tem solução única x em $J = [a,b]$, como segue:

Teorema 2.3. *Existe uma única função contínua x com domínio em $J = [a,b]$ que satisfaz a equação de Fredholm do tipo II, com $|\mu| < \dfrac{1}{c(b-a)}$, onde c é a constante que limita a função k, no compacto G.*

Demonstração. É suficiente mostrar que o operador

$$F : C[a,b] \to C[a,b]$$

definido por

$$[F(x)](t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

é uma contração, para $|\mu| < \dfrac{1}{c(b-a)}$, e concluímos então que, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, $F(x) = x$ tem solução única x em $[a,b]$.

Com efeito, da limitação (2.6) temos que, para $x, y \in \mathcal{C}[a, b]$,

$$\begin{aligned}
d(Fx, Fy) &= \max_{t\in[a,b]} |Fx(t) - Fy(t)| \\
&= \max_{t\in[a,b]} |v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau - (v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)y(\tau)d\tau)| \\
&= |\mu| \max_{t\in[a,b]} \Big| \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau - \int_a^b k(t,\tau)y(\tau)d\tau) \Big| \\
&= |\mu| \max_{t\in[a,b]} \Big| \int_a^b k(t,\tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \Big| \\
&\leq |\mu| \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,\tau)||[x(\tau) - y(\tau)]|d\tau \\
&\leq |\mu| c \max_{\sigma\in[a,b]} [x(\sigma) - y(\sigma)] \int_a^b d\tau \\
&= |\mu| \; c \; (b-a) \; d(x,y)
\end{aligned}$$

Isto é,

$$d(Fx, Fy) \leq |\mu| \; c \; (b-a) \; d(x,y).$$

Tomando

$$|\mu| < \frac{1}{c\,(b-a)},$$

garantimos que o operador F seja uma contração. □

2.2.3 Equação de Volterra

Consideremos agora a equação integral de Volterra, dada por

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau = v(t). \tag{2.7}$$

Observe que esta equação distingue-se da equação (2.5) pelo limite superior de integração, o qual é variável. Sob algumas condições, provamos que há uma única solução para esta equação, sem ser necessário impor uma restrição para o parâmetro μ.

Teorema 2.4. *Suponha que v em (2.7) é contínua em $[a, b]$ e o núcleo k é contínuo na região triangular R no plano $t\tau$ dado por $a \leq \tau \leq t$, $a \leq t \leq b$. Então (2.7) tem solução única x em $[a, b]$, para todo μ.*

Demonstração. Definimos o operador $T : C[a, b] \to C[a, b]$ por

$$[T(x)](t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Então $T(x)$ é contínuo. Como k é uma função contínua definida no conjunto compacto R, é limitada, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que vale

$$|k(t,\tau)| \leq c, \text{ para todo } (t,\tau) \in R. \tag{2.8}$$

Mostraremos que existe uma única $x \in C[a,b]$ tal que $T(x) = x$.

De fato, tomando $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$, por (2.8), temos que

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= \max_{t\in[a,b]} |Tx(t) - Ty(t)| \\
&= \max_{t\in[a,b]} \left| v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau - \Big(v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)y(\tau)d\tau \Big) \right| \\
&= |\mu| \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau - \int_a^t k(t,\tau)y(\tau)d\tau) \right| \\
&= |\mu| \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t k(t,\tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \right| \\
&\leq |\mu| \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |k(t,\tau)||[x(\tau) - y(\tau)]|d\tau \\
&\leq |\mu|\ c\ \max_{\sigma\in[a,b]} [x(\sigma) - y(\sigma)] \int_a^t d\tau \\
&= |\mu|\ c\ (t-a)\ d(x,y).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$d(Tx,Ty) \leq |\mu|\ c\ (t-a)\ d(x,y), \quad \forall x, y \in C[a,b].$$

Agora, assumamos que, para algum m vale

$$|T^m x - T^m y| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y), \quad \forall x, y \in \mathcal{C}[a,b]. \tag{2.9}$$

Então, tomando $t \in [a,b]$, temos que

$$\begin{aligned}
|T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)| &= \left| v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)T^m x(\tau)d\tau - \Big(v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)T^m y(\tau)d\tau \Big) \right| \\
&\leq |\mu| \int_a^t |k(t,\tau)[T^m x(\tau_1) - T^m y(\tau_1)]|\, d\tau \\
&\leq |\mu| \int_a^t c|\mu|^m c^m \frac{(\tau-a)^m}{m!} d(x,y)d\tau \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \int_a^t \frac{(\tau-a)^m}{m!}\, d\tau d(x,y) \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!}\, d(x,y).
\end{aligned}$$

Agora, tomando no lado esquerdo da inequação, o máximo sobre $t \in [a,b]$ e, usando $t - a \leq b - a$ do lado direito, obtemos daí que, para todo m,

$$d(T^m x, T^m y) \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y), \quad \forall \quad x, y \in \mathcal{C}[a,b]$$

Chamemos $L = |\mu|\, c\,(t-a)$, então existe $m_0 > 0$ tal que

$$\frac{L^m}{m!} < 1, \quad \forall \quad m \geq m_0.$$

Logo T^m é uma contração em $\mathcal{C}[a,b]$, para todo $m \geq m_0$.

Concluímos então, pelo Corolário 2.1, que T tem um único ponto fixo, e o teorema está demonstrado. □

2.2.4 PVIC para uma EDP parabólica não-linear

Aplicações do Teorema do Ponto Fixo para EDP's não-lineares costumam envolver termos de perturbação, assim, dada uma equação diferencial parcial elíptica linear bem comportada, é comum acrescentar uma pequena modificação não-linear, como por exemplo uma contração. Assim, a equação em (2.10) perturba uma equação parabólica (A.5). A especificidade da resolução, está então em tomar um parâmetro suficientemente pequeno, de maneira a garantir a propriedade de contração.

Iremos nesta seção estudar a solvabilidade do problema de valor inicial e de contorno (PVIC) do sistema de reação-difusão:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) & \text{em} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T] \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \mathbf{u} = g & \text{sobre} \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $T > 0$ é fixo, $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$, $\mathbf{g} = (g^1, g^2)$.

Adaptando (A.2), temos a seguinte definição:

Definição 2.5. *Dizemos que uma função* $\mathbf{u} \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2))$, *com* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^2))$ *é uma* **solução fraca** *do problema* (2.10), *se*

$$\langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle_{H^{-1},H_0^1} + B[\mathbf{u},\mathbf{v}] = (f(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} \quad q.t.p. \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.11}$$

para cada $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ *e*

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{g}. \tag{2.12}$$

$B[\cdot,\cdot]$ é a forma bilinear associada a $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Iremos denotar simplesmente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para o par dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1},H_0^1}$, e $(\cdot,\cdot)$ para o produto interno $(\cdot,\cdot)_{L^2((\Omega);\mathbb{R})}$.

Busca-se uma solução única em $\Omega \times (0,T] = (0,1)\times(0,1)\times(0,T)$. Vamos assumir que $g \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ e que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja Lipschitz contínua.

Lema 2.1. *Se f é Lipschitz contínua, então existe $C > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq C\left(\|z\| + 1\right), \quad \forall \quad z \in \mathbb{R}^2. \tag{2.13}$$

Demonstração. Como f é Lipschitz contínua, temos para todo $z \in \mathbb{R}^2$, e $e_1 = (1, 0)$, que

$$\begin{aligned}
\|f(z)\| &\leq \|f(z) - f(e_1)\| + \|f(e_1)\| \\
&\leq L\|z - e_1\| + \|f(e_1)\| \\
&\leq L(\|z\| + 1) + \|f(e_1)\| \\
&= (\|z\| + 1)\Big(L + \frac{\|f(e_1)\|}{\|z\| + 1}\Big) \\
&\leq (\|z\| + 1)(L + \|f(e_1)\|) \\
&\leq C\left(\|z\| + 1\right).
\end{aligned}$$

onde $C = L + \|f(e_1)\|$ e L é a constante de Lipschitz da f. □

Teorema 2.5. *Existe uma única solução fraca de* (2.10)*.*

Demonstração. **Existência.** Iremos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach em $X = C([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^2))$, com a norma

$$\|v\| = \max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_{L^2(\Omega);\mathbb{R}^2)}.$$

Define-se $A : X \to X$ como segue. Dado $\mathbf{u} \in X$, seja

$$\mathbf{h}(t) := \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), (0 \leq t \leq T). \tag{2.14}$$

Então, (2.14) $\Rightarrow \mathbf{h} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. De fato, temos da desigualdade (2.13), que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{h}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} &= \|\mathbf{f}(\mathbf{u})\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \left(C\left(\|\mathbf{u}\| + 1\right)\right)^2 \\
&= C^2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| + 1\right) \quad < \quad \infty.
\end{aligned}$$

Da teoria de Equações Diferenciais Parabólicas Lineares (ver Apêncide A), vemos assim, que a EDP parabólica linear

$$\begin{cases}
\mathbf{w}_t - \Delta\mathbf{w} = \mathbf{h} \quad \text{em} \quad (x,t) \in \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T] \\
\qquad \mathbf{w} = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times [0, T] \\
\qquad \mathbf{w} = \mathbf{g} \qquad \text{sobre} \quad \Omega \times \{t = 0\}
\end{cases} \tag{2.15}$$

tem solução única (fraca) $\mathbf{w} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2))$, com $\mathbf{w'} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^2))$.

E, assim, $\mathbf{w}$ satisfaz

$$\langle \mathbf{w'}, \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{w},\mathbf{v}] = (\mathbf{f}(\mathbf{w}),\mathbf{v}) \quad q.t.p. \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.16}$$

para cada $\mathbf{v} \ \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ e $\mathbf{w}(0) = \mathbf{g}$.

Definimos em $X = C([0,T];L^2(\Omega;\mathbb{R}))$, portanto, o operador

$$\begin{aligned} A : X &\to X \\ \mathbf{u} &\mapsto A[\mathbf{u}] = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Afirmação. Para t suficientemente pequeno, A é contração.

Tomemos $\mathbf{u},\mathbf{u}^* \in X$, e defina $\mathbf{w} = A[\mathbf{u}]$ e $\mathbf{w}^* = A[\mathbf{u}^*]$, tal que $\mathbf{w}$ satisfaz (2.16) para $\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, e $\mathbf{w}^*$ satisfaz uma identidade semelhante, para $\mathbf{h}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u}^*)$.

Veja que

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} = -2\|\nabla\mathbf{w}-\nabla\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} + 2(\mathbf{w}-\mathbf{w}^*,\mathbf{h}-\mathbf{h}^*). \tag{2.17}$$

De fato, de (2.15), temos que

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t - \Delta\mathbf{w} = \mathbf{h}, \\ \mathbf{w}_t^* - \Delta\mathbf{w}^* = \mathbf{h}^*. \end{cases}$$

Subtraindo, temos que

$$\mathbf{w}_t - {\mathbf{w}_t}^* - (\Delta\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}^*) = \mathbf{h}{-}\mathbf{h}^*.$$

Denotemos $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^*$ e $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h} - \mathbf{h}^*$. Então

$$\tilde{\mathbf{w}}_t - \Delta\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{h}}. \tag{2.18}$$

Multiplicando a equação (2.18) por $\tilde{\mathbf{w}}$ e integrando, temos que

$$\int_\Omega \tilde{\mathbf{w}}_t\tilde{\mathbf{w}}\, d\Omega - \int_\Omega \Delta\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}}\, d\Omega = \int_\Omega \tilde{\mathbf{h}}\tilde{\mathbf{w}}\, d\Omega \tag{2.19}$$

Mas

$$\int_\Omega \tilde{\mathbf{w}}_t\tilde{\mathbf{w}} d\Omega = \int_\Omega \frac{(\tilde{\mathbf{w}}^2)_t}{2} d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} \tag{2.20}$$

e

$$\int_\Omega \Delta\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}}d\Omega = -\int_\Omega \nabla\tilde{\mathbf{w}}\nabla\tilde{\mathbf{w}}d\Omega = -\|\nabla\tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}. \tag{2.21}$$

Como $\int_\Omega \tilde{\mathbf{h}}\tilde{\mathbf{w}}d\Omega = (\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{w}})$ e substituindo (2.20) e (2.21) em (2.19), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} + \|\nabla\tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} = (\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{w}})$$

de onde segue o desejado em (2.17).

Além disso, das desigualdades de Hölder, Young e então Poincaré, vemos que

$$\begin{aligned}
2(\mathbf{w}-\mathbf{w}^*, \mathbf{h}-\mathbf{h}^*) &\leq 2\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}\ \|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{u}^*)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \varepsilon\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{u}^*)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \varepsilon C\|\nabla\mathbf{w}-\nabla\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{u}^*)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

Da desigualdade acima e de (2.17), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2} + 2\|\nabla\mathbf{w}-\nabla\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} &= 2(\mathbf{w}-\mathbf{w}^*, \mathbf{h}-\mathbf{h}^*) \\
&\leq \varepsilon C\|\nabla\mathbf{w}-\nabla\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{\varepsilon}\|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{u}^*)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

e, como f é contração, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} + (2-\varepsilon C)\|\nabla\mathbf{w}-\nabla\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} &\leq \frac{1}{\varepsilon}\|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{u}^*)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \frac{L^2}{\varepsilon}\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Agora, se tomarmos $\varepsilon < \dfrac{2}{C}$, ou seja, $2-\varepsilon C > 0$, vale

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} \leq \frac{L^2}{\varepsilon}\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}.$$

Denotando $K = \dfrac{L^2}{\varepsilon}$ e integrando a última desigualdade em $0 \leq s \leq T$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \frac{d}{dt}\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(t)dt \leq K\int_0^s \|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(t)dt \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow \|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}\Big|_0^s \leq K\int_0^s \max_{t\in[0,s]}\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(t)dt \\
&\Leftrightarrow \|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(s) - \|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(0) \leq Ks\max_{t\in[0,s]}\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Tomando o máximo em $[0,T]$, temos que

$$\max_{s\in[0,T]} \|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(s) \leq KT\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|^2_X \tag{2.23}$$

e, tomando T tal que $\sqrt{KT}<1$, demonstramos a afirmação.

Concluímos que, dadas f e A, existe uma única $\mathbf{u}\in X$ tal que $A[\mathbf{u}]=\mathbf{u}$.

Dado $T>0$, escolhemos $T_1>0$ tal que $\sqrt{KT_1}<1$. Então aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para encontrar uma solução do problema (2.10) sobre o intervalo $[0,T_1]$. Desde que $\mathbf{u}(t)\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^2)$ quase sempre em $0\leq t\leq T_1$, podemos redefinir T_1 se necessário e assumir que $\mathbf{u}(T_1)\in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Como T_1 depende de K, que por sua vez depende apenas da constante de Lipschitz para f, podemos repetir o que foi feito, agora para $[T_1,2T_1]$ e estender a nossa solução para esse intervalo. Assim, construímos após alguns passos, uma solução global fraca em $[0,T]$, para todo $T>0$.

Unicidade. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}^*$ forem duas soluções para (2.10), temos para $\mathbf{w}=A[\mathbf{u}]$ e $\mathbf{w}^*=A[\mathbf{u}^*]$.

De (2.22), temos que

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\|\mathbf{w}-\mathbf{w}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(t)dt \leq K\int_0^s \|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}(t)dt. \tag{2.24}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(s)-\mathbf{u}^*(s)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} &= \|A[\mathbf{u}(s)]-A[\mathbf{u}^*(s)]\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}\\
&= \|\mathbf{w}(s)-\mathbf{w}^*(s)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}\\
&= \int_0^s \frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}^*(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq K\int_0^s \|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}^*(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}dt, \quad 0\leq s\leq T.
\end{aligned}$$

Da desigualdade acima e da desigualdade de Gronwall na forma integral (1.2), tomando $\xi(s)=\|\mathbf{u}(s)-\mathbf{u}^*(s)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ e, como

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \|\mathbf{u}(s)-\mathbf{u}^*(s)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}\\
&\leq K\int_0^s \|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}^*(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}dt\\
&= K\int_0^s \xi(t)dt, \quad q.t.p.
\end{aligned}$$

temos que $\xi(s)=0 \quad q.t.p.$. De onde concluímos que $\mathbf{u}\equiv\mathbf{u}^*$. Portanto, a solução é única. $\square$

Capítulo 3

Problema de Valor Inicial Abstrato

Uma equação diferencial parcial de primeira ordem, em duas variáveis, é uma equação na forma

$$F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.1}$$

relacionando a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suas derivadas parciais de primeira ordem.

Buscamos uma solução u da EDP (3.1) em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, impondo ainda uma condição de fronteira $u = g$ em Γ, onde Γ é algum subconjunto de $\partial\Omega$ e $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

Relembremos a notação que será utilizada a seguir.

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ é um multi-índice, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!$; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$;
- $(x, t)^\alpha = x^{\alpha_1} \cdot t^{\alpha_2}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$;
- $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad D_x^k u = \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad D_t^k u = \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$

De maneira geral, uma função $u = u(x, t)$ definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma solução clássica da equação (3.1) se as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ existirem em Ω e

$$F\big(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\big) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

A equação (3.1) é dita linear se F é uma função linear afim nas variáveis $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$, e se a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(x, t) D^\alpha u = f(x, t).$$

Chamamos $L := \sum_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha D^\alpha$ de operador diferencial linear, e escrevemos a equação anterior simplesmente como $Lu = f$.

Mais geralmente, a equação (3.1) é dita quasi-linear se F é uma função linear afim nas variáveis $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$, e se a equação pode ser reescrita como

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} a_\alpha(u,x,t)D^\alpha u = f(x,t).$$

Podemos então nos perguntar se, dada uma equação (3.1), podemos encontrar uma solução u, satisfazendo certas condições desejadas, na vizinhança de determinado ponto, ou em certo domínio? Como construir esta solução?

Veja que a equação $u_{xx} + u_{tt} = 0$ tem infinitas soluções. Quais condições devemos colocar sobre $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e Ω, de maneira a obter uma solução única? Tendo encontrado uma solução, esta depende continuamente das condições sobre a fronteira de Ω?

Definição 3.1. *Dizemos que um problema para uma equação diferencial parcial é **bem-posto** se satisfazer as seguintes condições*

a. para cada $u_0 \in X$ no espaço de solução, existe uma solução $u(x,t) \in X$ do problema;

b. a solução é unicamente definida;

c. a solução depende continuamente dos dados iniciais fornecidos no problema, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todo u_0 e $v_0 \in X$, vale que

$$\|u_0 - v_0\| < \delta \Rightarrow \|u(x,t) - v(x,t)\| < \varepsilon.$$

onde u é solução do problema com dado inicial u_0 e v, por sua vez, é solução do problema com dado inicial v_0.

Exemplo 3.1 (Hadamard). *Seja*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{tt} &= 0, \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{n^2}\sin(nx), \\ u(x,0) &= \frac{1}{n}\sin(nx). \end{cases} \tag{3.2}$$

onde n é um inteiro positivo.

Observe que

$$u^n(x,t) = \frac{1}{n^2}e^{nt}\sin(nx) \tag{3.3}$$

satisfaz a primeira equação, para todo índice $n \in \mathbb{N}$. De fato, calculando as derivadas parciais, temos que

$$u^n{}_{xx}(x,t) = -e^{nt}\sin(nx), \quad u^n{}_{tt}(x,t) = e^{nt}\sin(nx),$$

logo

$$u^n{}_{xx}(x,t) = -u^n{}_{tt}(x,t), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e ainda, avaliando u_t em $t = 0$, temos que

$$u^n{}_t(x, 0) = \frac{1}{n^2} \sin(nx), \quad \forall n \quad \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Fazendo então n tender ao infinito em (3.3) e avaliando em $t = 0$, vemos que

$$\lim_{n \to \infty} u^n(x, 0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx) = 0.$$

Agora, observe que $u(x, t) = 0$ é uma solução para o problema (3.2) com dados iniciais nulos. Então vemos que, para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u(x, 0) - u^n(x, 0)\| = \left\| \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right\| < \delta, \quad n > n_0.$$

Entretanto,

$$\|u(x, t) - u^n(x, t)\| = \left\| \frac{1}{n^2} e^{nt} \sin(nx) \right\| \to \infty, \quad (n \to \infty).$$

Portanto este problema não é bem-posto, pois ainda que tivéssemos uma solução única satisfazendo (3.2), esta solução não dependeria continuamente dos dados iniciais.

3.1 Problema de Cauchy para EDP's e o Teorema de Kovalevskaya

O problema abstrato de Cauchy consiste em encontrar uma aplicação $t \mapsto u(t)$ do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais t em algum espaço métrico vetorial S tal que as equações a seguir valem:

$$\frac{du}{dt} = f(u, t), \quad u(0) = \theta, \tag{3.5}$$

suposto que a função $f : S \times \mathbb{R} \to S$ seja dada, e θ é o elemento nulo em S.

Um teorema de existência e unicidade para o problema de Cauchy, na classe das funções analíticas, deve-se à matemática russa Sofya Kovalevskaya (1850 - 1891), uma das primeiras mulheres da história a exercer uma cátedra universitária (na universidade de Estocolmo, de 1884 até o final de sua vida). Observe que nem sempre existe uma solução analítica do problema acima, como podemos ver a seguir.

Exemplo 3.2. *Não existe na origem uma solução analítica da equação*

$$\begin{cases} u_t & = u_{xx} \\ u|_{t=0} & = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases} \tag{3.6}$$

De fato, se existisse uma solução analítica

$$u(x,t) = \sum_{\gamma,\delta} u_{\gamma,\delta} x^\gamma t^\delta,$$

para o problema acima, os coeficientes $u_{\gamma,\delta}$ *teriam a forma*

$$u_{\gamma,\delta} = \frac{1}{\gamma!\delta!} D_x^\gamma D_t^\delta u(0,0).$$

Assim,

$$u_{2s,k} = \frac{(2s+2k)!}{(2s)!k!}(-1)^{k+s}$$

e

$$u_{2s+1,k} = 0,$$

para $s \geq 0, k \geq 0$. *Mas, neste caso, a série resultante não pode ser convergente em nenhum entorno da origem, visto que diverge, por exemplo, em qualquer ponto* $(0,t)$, *para* $t \neq 0$.

A seguir, iremos analisar o problema de Cauchy, para equações diferenciais parciais, em duas variáveis, quasi-lineares, na classe de funções analíticas reais, com dado inicial zero. Além disso, iremos supor que os dados são analíticos.

Consideremos a equação diferencial parcial, em duas variáveis, quasi-linear de primeira ordem:

$$a_1(u,x,t)\,u_x + a_2(u,x,t)u_t + a_0(u,x,t) = 0. \tag{3.7}$$

Observemos inicialmente que podemos considerar as condições de fronteira válidas em uma hiperfície (intervalo) suave Γ, de dimensão 1 em Ω, tal que $\Gamma \subset \{t = 0\}$. Além disso, podemos assumir que os dados iniciais são identicamente nulos.

Sem perda de generalidade, (3.7) pode ser escrita na forma

$$u_t = B(u,x)u_x + C(u,x), \tag{3.8}$$

sempre que $a_2(u,x,t) \neq 0$, e buscamos soluções analíticas reais num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Tendo em conta estas observações, o problema de Cauchy em questão consiste em encontrar uma solução analítica $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, para

$$\begin{cases} u_t & = B(u,x)u_x + C(u,x), \quad \|(x,t)\| < r \\ u & = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad |x| < r \quad \text{e} \quad t = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

onde $B, C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções analíticas reais dadas e $r > 0$ deve ser encontrado.

Para ilustrar, consideremos o seguinte problema:

Exemplo 3.3. *Existe uma solução em série de potências*

$$u = \sum_{\alpha} u_\alpha (x,t)^\alpha, \tag{3.10}$$

convergente quando $|(x,t)| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, *para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t = u\, u_x + 2u + \frac{1}{1-x}, & \textit{para } \|(x,t)\| < r \\ u = 0, & \textit{para } |x| < r, \quad t = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Resolução. Suponhamos que exista uma solução uma solução analítica

$$u(x,t) = \sum_{\alpha} u_\alpha (x,t)^\alpha = \sum_{\gamma,\delta} u_{\gamma,\delta} x^\gamma t^\delta,$$

para o problema (3.11), onde $\alpha = (\gamma, \delta) \in \mathbb{N}^2$ é um multi-índice. Então, os coeficientes $u_{\gamma,\delta}$ teriam a forma

$$u_{\gamma,\delta} = \frac{1}{\gamma!\delta!} D_x^\gamma D_t^\delta u(0,0). \tag{3.12}$$

1º) Iremos calcular os coeficientes (3.12), utilizando os dados do problema.

Da condição inicial, temos que $u(x,t) = 0$ quando $|x| < r$ e $t = 0$, para algum $r > 0$. Logo, em $(x,t) = (0,0)$, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(0+h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0)}{h} = 0, \tag{3.13}$$

portanto $D_x^1 u(0,0) = 0$. Deduzimos então, que $0 = u(0,0) = u_x(0,0) = u_{xx}(0,0) = \cdots$, isto é,

$$D^\alpha u(0,0) = 0, \quad \forall \quad \alpha = (\gamma, 0)\,. \tag{3.14}$$

Derivando a primeira equação em (3.11), em relação a x, temos:

$$\begin{aligned}
D_x^\gamma u_t &= D_x^\gamma\left(u\,u_x + 2u + \frac{1}{1-x}\right)\\
&= D_x^\gamma(u\,u_x) + D_x^\gamma(2u) + D_x^\gamma\left(\frac{1}{1-x}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\gamma}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix} D_x^k u\; D_x^{\gamma-k}(u_x) + 2D_x^\gamma(u) + \frac{\gamma!}{(1-x)^{\gamma+1}}\\
&= D_x^k u\; D_x^{\gamma-k+1}u + 2D_x^\gamma(u) + \frac{\gamma!}{(1-x)^{\gamma+1}}.
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Mas de (3.14) e, como

$$D_x^\gamma\left(\frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{\gamma!}{(1-x)^{\gamma+1}}\Bigg|_{x=0} = \gamma!,\tag{3.16}$$

temos que, para $\alpha = (\gamma, 1)$,

$$D^\alpha u(0,0) = D_x^\gamma D_t u(0,0) = \gamma!,$$

logo

$$u_\alpha = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!} = \frac{\gamma!}{\gamma!} = 1 \quad , \quad \forall \quad \alpha = (\gamma, 1)\,.$$

Da mesma maneira, para $\alpha = (\gamma, 2)$, temos que

$$\begin{aligned}
D^\alpha u &= D_x^\gamma D_t^2 u\\
&= D_x^\gamma D_t^1(u_t)\\
&= D_x^\gamma D_t^1\left(u\,u_x + 2u + \frac{1}{1-x}\right)\\
&= D_x^\gamma\left(u_t\,u_x + u\,u_{xt} + 2u_t + 0\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\gamma}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix} D_x^k(u_t)\; D_x^{\gamma-k}u_x + \sum_{k=0}^{\gamma}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix} D_x^k u\; D_x^{\gamma-k}(u_{xt}) + 2D_x^\gamma(u_t)\\
&= \sum_{k=0}^{\gamma}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix} D_x^k D_t^1 u\; D_x^{\gamma-k+1}u + \sum_{k=0}^{\gamma}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix} D_x^k u\; D_x^{\gamma-k+1}D_t^1 u + 2D_x^\gamma D_t^1 u.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Avaliando (3.17) em $x = t = 0$, temos de (3.14), que

$$\begin{aligned}
D^\alpha u(0,0) &= \sum_{k=0}^{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} D_x^k D_t^1 u(0,0)\ D_x^{\gamma-k+1} u(0,0) \\
&+ \sum_{k=0}^{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} D_x^k u(0,0)\ D_x^{\gamma-k+1} D_t^1 u(0,0) + 2 D_x^\gamma D_t^1 u(0,0). \\
&= \sum_{k=0}^{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} k!\ 0 + \sum_{k=0}^{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} 0\ (\gamma - k + 1)! + 2\gamma! \\
&= 2\gamma!
\end{aligned}$$

logo

$$u_\alpha = \frac{D_x^\gamma D_t^2 u(0,0)}{\alpha!} = \frac{2\gamma!}{\gamma!} = 2 \quad , \quad \forall \quad \alpha = (\gamma, 2)\,.$$

Além disso, de (3.11), temos

$$\begin{aligned}
D_t^\delta u &= D_t^{\delta-1}(u_t) \\
&= D_t^{\delta-1}\left(u\, u_x + 2u + \frac{1}{1-x}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\delta-1} \begin{pmatrix} \delta-1 \\ j \end{pmatrix} D_t^j u\ D_t^{\delta-1-j}(u_x) + 2 D_t^{\delta-1} u \\
&= \sum_{j=0}^{\delta-1} \begin{pmatrix} \delta-1 \\ j \end{pmatrix} D_t^j u\ D_x^1 D_t^{\delta-1-j} u + 2 D_t^{\delta-1} u.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Então, de (3.18) temos de maneira geral que

$$\begin{aligned}
D_x^\gamma D_t^\delta u &= \sum_{j=0}^{\delta-1} \begin{pmatrix} \delta-1 \\ j \end{pmatrix} \left[\sum_{k=0}^{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} D_x^k(D_t^j u)\ D_x^{\gamma-k}(D_x^1 D_t^{\delta-1-j} u)\right] + D_x^\gamma(2 D_t^{\delta-1} u), \\
&= \sum_{j=0}^{\delta-1} \begin{pmatrix} \delta-1 \\ j \end{pmatrix} \left[\sum_{k=0}^{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} D_x^k D_t^j u\ D_x^{\gamma-k+1} D_t^{\delta-1-j} u\right] + 2 D_x^\gamma D_t^{\delta-1} u.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

A equação (3.19) nos mostra que $D^\alpha u(0,0)$, para $\alpha = (\gamma, \delta)$ pode ser calculado em termos de derivadas da forma $D^{\alpha_1} u(0,0)$, com $\alpha_1 = (\gamma_1, \delta_1)$ e $\delta_1 \leq \delta - 1$.

Concluímos então que os coeficientes de u ficam unicamente determinados por uma recorrência, isto é, para cada multi-índice podemos escrever

$$u_\alpha = u_{\gamma,\delta} = \frac{1}{\gamma!\delta!} D_x^\gamma D_t^\delta u(0,0)$$

como um polinômio com coeficientes não negativos, e em termos de derivadas de u, da forma $D^{\alpha_1}u(0,0)$, com $\alpha_1 = (\gamma_1, \delta_1)$ e $\delta_1 \leq \delta - 1$.

$2^{\underline{o}}$) Observe ainda, que

$$\begin{aligned}
u &= \sum_\alpha u_\alpha (x,t)^\alpha \\
&= \sum_{\gamma,\delta} u_{\gamma,\delta} x^\gamma t^\delta \\
&= u_{0,0} x^0\, t^0 + 0 + u_{1,0} x^1\, t^0 + u_{0,1} x^0\, t^1 + \cdots \\
&= 0\, x^0\, t^0 + 0\, x^1\, t^0 + 1\, x^0\, t^1 + 0\, x^2\, t^0 + \\
&\quad + 1\, x^1\, t^1 + 2\, x^0\, t^2 + 0\, x^3\, t^0 + 1\, x^2\, t^1 + 2\, x^1\, t^2 + \cdots \\
&= t + x\, t + 2t^2 + x^2 t + 2xt^2 + \cdots \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} x^{k-i} t^i \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (x+t)^k \\
&= \sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (x,t)^\alpha,
\end{aligned}$$

isto é, a série de potências

$$u^* = \sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (x,t)^\alpha,$$

definida em $(x_0, t_0) = (0,0)$, majora u ($u^* \gg u$). Mas u^* é convergente quando $\|(x,t)\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, portanto u também é convergente, no mesmo domínio, e, temos o resultado desejado.

Assim, mostramos que se existir uma solução de (3.11) na forma (3.10), podemos então calcular todas as suas derivadas em $(0,0)$ em termos de quantidades conhecidas, isto é, em termos dos coeficientes de séries de potências dadas no problema.

Concluímos dos passos $1^{\underline{o}}$) e $2^{\underline{o}}$), que o problema (3.11) admite uma única solução analítica, com raio de convergência $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Considerando as observações iniciais, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Kovalevskaya)**.** *Assuma B, C funções analíticas reais. Então existe $r > 0$ e uma única função analítica real*

$$u = \sum_\alpha u_\alpha (x,t)^\alpha \tag{3.20}$$

resolvendo o problema de valor inicial (3.9).

Demonstração. O método de Kovalevskaya para encontrar uma solução

$$u = \sum_{\alpha} u_\alpha (x,t)^\alpha \tag{3.21}$$

para a equação diferencial parcial quasi-linear de 1ª ordem consiste em dois passos:

1º) Devemos calcular os coeficientes

$$u_\alpha = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!}$$

em termos de B e C.

2º) Emprega-se o método das majorantes para mostrar que a série de potências (3.21) converge se $|(x,t)| < r$, para r pequeno.

Calculemos os coeficientes de B e C. Como estas funções são analíticas, podemos escrever

$$B(z,x) = \sum_{\gamma,\delta} b_{\gamma,\delta}\, z^\gamma\, x^\delta; \quad C(z,x) = \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma,\delta}\, z^\gamma\, x^\delta \tag{3.22}$$

estas séries convergindo se $|z| + |x| < s$, para algum $s > 0$ pequeno. Assim,

$$b_{\gamma,\delta} = \frac{D_z^\gamma D_x^\delta B(0,0)}{\gamma!\delta!}, \quad c_{\gamma,\delta} = \frac{D_z^\gamma D_x^\delta C(0,0)}{\gamma!\delta!}$$

para todos as multi-índices γ, δ.

Como $u = 0$ em $t = 0$, temos que

$$u_\alpha = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!} = 0, \quad \forall \quad \alpha = (\alpha_1, 0)\,, \quad \text{isto é,} \quad 0 = u(0,0) = u_x(0,0) = u_{xx}(0,0) = \cdots$$

logo

$$u_\alpha = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!} = \frac{D_x^{\alpha_1} C(0,0)}{\alpha_1!}, \quad \forall \quad \alpha = (\alpha_1, 1)$$

Para $\alpha = (\alpha_1, 2)$, temos de (3.8), que

$$\begin{aligned}
D^\alpha u(0,0) &= D_x^\alpha D_t^2 u(0,0) \\
&= D_x^{\alpha_1} D_t^1 \left(B(u,x)u_x + C(u,x)\right)\Big|_{x=t=0} \\
&= D_x^{\alpha_1} \left(D_t^1 B(u,x) u_x + B(u,x) D_t^1 (u,x) + D_t^1 C(u,x)\right)\Big|_{x=t=0} \\
&= D_x^{\alpha_1} \left(B\left(u,x\right)\; D_t^1\left(u_x\right) + D_t^1 C(u,x)\right)\Big|_{x=t=0}
\end{aligned}$$

e a expressão do lado direito pode ser escrita como um polinômio em termo das derivadas de B e C, com coeficientes não negativos, e de derivadas de u, $D^\beta u$, onde $D^\beta u = D_x^{\beta_1} D_t^{\beta_2} u$, com $\beta_2 \leq 1$, isto é, como no caso anterior.

Mais geralmente, para cada $\alpha = (\gamma, \delta) \in \mathbb{N}^2$, calculamos

$$D^\alpha u(0,0) = p_\alpha \left(\dots D_z^\gamma D_x^\delta B, \dots, D_z^\gamma D_x^\delta C, \dots, D^\beta u, \dots \right)\big|_{x=t=0}$$

onde p_α denota um polinômio com coeficientes não negativos.

De (3.9) e (3.22), deduzimos que, para cada α,

$$u_\alpha = q_\alpha \left(\dots, b_{\gamma,\delta}, \dots, c_{\gamma,\delta}, \dots, u_\beta \right),$$

onde q_α é um polinômio com coeficientes não negativos, e $\beta_2 \leq \alpha_2 - 1$, para cada multi-índice β no lado direito desta equação.

Mostramos então que se existir uma solução de (3.9) na forma (3.21), podemos calcular todas as suas derivadas em $(0,0)$, em termos de quantidades conhecidas.

Agora, no segundo passo, empregaremos o método das majorantes para mostrar que a série de potências

$$u = \sum_\alpha u_\alpha (x,t)^\alpha$$

converge se $\|(x,t)\| < r$, para r suficientemente pequeno. Para isto, vamos primeiramente supor que existam séries de potências $B^* \gg B$ e $C^* \gg C$, dadas por

$$B^* = \sum_\alpha b_\alpha^* (x,t)^\alpha, \quad \text{e} \quad C = \sum_\alpha c_\alpha^* (x,t)^\alpha,$$

ou ainda,

$$B^* = \sum_{\gamma,\delta} b_{\gamma,\delta}^* z^\gamma x^\delta, \quad \text{e} \quad C^* = \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma,\delta}^* z^\gamma x^\delta,$$

convergentes para $|z| + |x| < s$. Isto é, B^* e C^* majoram B e C, respectivamente, com

$$\begin{aligned} 0 &\leq |b_{\gamma,\delta}| \leq b_{\gamma,\delta}^* \\ 0 &\leq |c_{\gamma,\delta}| \leq c_{\gamma,\delta}^*, \end{aligned}$$

para todo γ, δ. Agora, consideraremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t^* = B^* \left(u^*, x \right) u_x^* + C^* \left(u^*, x \right), & \|(x,t)\| < r \\ u^* = 0, & |x| < r, t = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

e, como acima, procuremos uma solução da forma

$$u^* = \sum_\alpha u_\alpha^* (x,t)^\alpha,$$

onde
$$u^*_\alpha = \frac{D^\alpha u^*(0,0)}{\alpha!}.$$

Afirmamos que $0 \le |u_\alpha| \le u^*_\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^2$. A prova é por indução.

Como
$$\begin{aligned}|u_\alpha| &= |q_\alpha(\ldots, b_{\gamma,\delta}, \ldots, c_{\gamma,\delta}, \ldots, u_\beta, \ldots)| \\ &\le q_\alpha(\ldots, |b_{\gamma,\delta}|, \ldots, |c_{\gamma,\delta}|, \ldots, |u_\beta|, \ldots) \\ &\le q_\alpha\left(\ldots, b^*_{\gamma,\delta}, \ldots, c^*_{\gamma,\delta}, \ldots, u^*_\beta, \ldots\right) \\ &= u^*_\alpha,\end{aligned}$$
para todo α, temos que, $u^* \gg u$. Logo é suficiente provar que a série de potências
$$u^*_\alpha = \frac{D^\alpha u^*(0,0)}{\alpha!}$$
converge próximo de zero.

Como visto no lema (1.2), da teoria de funções analíticas, se escolhermos
$$B^* := \frac{Kr}{r-x-z}, \quad C^* := \frac{Kr}{r-x-z}$$
então $B^* \gg B$ e $C^* \gg C$ para algum K suficientemente grande, $r > 0$ suficientemente pequeno e $|x| + |t| < r$. Desta maneira, o problema (3.23) fica
$$\begin{cases} u^*_t = \dfrac{Kr}{r-x-u^*}\left(u^*_x + 1\right), & \|(x,t)\| < r \\ u^* = 0, & |x| < r, \quad t = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$
Mas este problema tem solução explícita $u^* = v^*$, com
$$v^*(x,t) := \frac{1}{2}\left(r - x - \left[(r-x)^2 - 2\cdot 2Krt\right]^{1/2}\right). \tag{3.25}$$

Observe que esta expressão é analítica para $\|(x,t)\| < r$, se $r > 0$ é suficientemente pequeno. Assim, u^* definida em (3.25) tem a forma
$$u^* = \sum_\alpha u^*_\alpha (x,t)^\alpha, \quad \text{com} \quad u^*_\alpha = \frac{D^\alpha u(0,0)}{\alpha!},$$
e a serie de potências convergindo quando $\|(x,t)\| < r$.

Portanto, como $u^* \gg u$, concluímos que a série de potências (3.21) converge também para $\|(x,t)\| < r$.

Isto define a função analítica u próximo a zero. Como a expansão de Taylor das funções analíticas u_t e $B(u,x)u_x + C(u,x)$ coincidem em 0, elas coincidem também na região $\|(x,t)\| < r$.

Por fim, verifiquemos que (3.25) é solução de (3.23). De fato, como $|x| < r$, em $t = 0$ temos que

$$v^*(x,0) = \frac{1}{2}\left(r - x - \left[(r-x)^2 - 0\right]^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(r - x - (r-x)) = 0.$$

Além disso, derivando a segunda equação em (3.25) em relação a x, temos que

$$v_x^* = \frac{1}{2}\left(0 - 1 - \frac{1}{2}\,\frac{2(r-x)(-1)}{[(r-x)^2 - 4Krt]^{1/2}}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{r-x}{[(r-x)^2 - 4Krt]^{1/2}}\right). \quad (3.26)$$

Derivando agora a segunda equação em (3.25) em relação a t, e fazendo aparecer v_x^*, temos que

$$\begin{aligned}
v_t^* &= \frac{1}{2}\left(0 - 0 - \frac{1}{2}\frac{-4Krt}{[(r-x)^2 - 4Krt]^{1/2}}\right)\\
&= \frac{Kr}{[(r-x)^2 - 4Krt]^{1/2}}\,\frac{(v_x^*+1)}{(v_x+1)}\\
&= K\ r\ (v_x^*+1)\,\frac{1}{[(r-x)^2 - 4Krt]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{r-x}{[(r-x)^2 - 4Krt]^{1/2}}\right) + 1\right]}
\end{aligned}$$

Remodelando a equação acima, escrevemos

$$\begin{aligned}
v_t^* &= Kr\,(v_x^*+1)\,\frac{1}{\frac{1}{2}\ [(r-x)^2 - 4Krt]^{1/2} + \underbrace{\frac{1}{2}(r-x) + \frac{1}{2}(r-x)}_{r-x} - \frac{1}{2}(r-x)}\\
&= Kr\,(v_x^*+1)\ \frac{1}{r - x - \frac{1}{2}\left[r - x - [(r-x)^2 - 4Krt]^{1/2}\right]}\\
&= \frac{Kr\,(v_x^*+1)}{r - x - v^*}.
\end{aligned}$$

Concluímos assim, que (3.25) satisfaz a equação (3.24), como desejado. □

3.2 Escalas de Espaços de Banach

Antes de estudarmos o problema abstrato de Cauchy, iremos nesta seção, definir e estudar o conceito Escalas de Espaços de Banach. Em seguida, iremos construir uma classe de Escalas Espaços de Banach, de Funções Analíticas.

Definição 3.2. *Suponha que cada número real $\rho > 0$ está em correspondência com um espaço de Banach B_ρ com norma $\|.\|_\rho$, e que valem as seguintes condições:*

(E1) $\rho > \rho' \Rightarrow B_\rho \subset B_{\rho'}$;

(E2) $u \in B_\rho \Rightarrow \|u\|_{\rho'} \leq \|u\|_\rho$.

Então o espaço vetorial $S = \bigcup_{0<\rho} B_\rho$ *é chamado uma* ***escala de Espaços de Banach****, EEB (em inglês,* scale of Banach spaces - *SBS). Chamamos* ρ*, o parâmetro da escala.*

A respeito desta definição, faremos algumas considerações. A condição $(E1)$ significa que para qualquer $\rho' < \rho$ a imersão $I^\rho_{\rho'} : B_\rho \to B_{\rho'}$, está bem definida. A condição $(E2)$, por sua vez, significa que a aplicação $I^\rho_{\rho'}$ é continua e sua norma não excede 1. De fato, se $\rho' < \rho$ então $B_\rho \subset B_{\rho'}$ e

$$\begin{aligned} I^\rho_{\rho'} : B_\rho &\to B_{\rho'} \\ u &\to I^{\rho'}_\rho(u) = u \end{aligned}$$

está bem definida pois, como $u \in B_\rho$ implica que $u \in B\rho'$. Além disso, $I^\rho_{\rho'}$ é injetiva e é um homomorfismo de B_ρ sobre sua imagem. Logo $I^\rho_{\rho'}$ é imersão.

Da condição $(E2)$, vemos ainda que, dado $\varepsilon > 0$, se $\|u - v\| < \delta = \varepsilon$, então temos que

$$\begin{aligned} \|I^\rho_{\rho'}(u) - I^\rho_{\rho'}(v)\|_{\rho'} &\leq \|I^\rho_{\rho'}(u) - I^\rho_{\rho'}(v)\|_\rho \\ &= \|u - v\|_\rho < \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo, $I^\rho_{\rho'}$ é contínua.

Além disso, como I^ρ_ρ é linear, temos que

$$\begin{aligned} \|I^\rho_{\rho'}\|_{\mathcal{L}(B_\rho, B_{\rho'})} &= \sup\{\|I^\rho_{\rho'}(u)\|_{\rho'}; u \in B_\rho,\ \|u\|_\rho = 1\} \\ &= \sup_{u \in B_\rho,\ \|u\|_\rho = 1} \|I^\rho_{\rho'}(u)\|_{\rho'} \\ &\leq \sup_{u \in B_\rho,\ \|u\|_\rho = 1} \|I^\rho_{p'}(u)\|_\rho \\ &= \sup_{u \in B_\rho,\ \|u\|_\rho = 1} \|u\|_\rho = 1. \end{aligned}$$

Assim, $\|I^\rho_{\rho'}\|_{\mathcal{L}_{(B_\rho, B_{\rho'})}} \leq 1$, isto é, sua norma não excede 1.

É natural, considerando as aplicações estudadas nos capítulos anteriores, nos perguntarmos se podemos construir uma escala de espaços de Banach de funções L^p. Elaboramos portanto o seguinte exemplo:

Exemplo 3.4. *No espaço* $L^p(0,1)$*, as condições* $(E1)$ *e* $(E2)$ *são satisfeitas, para* $1 \leq p < \infty$*. De fato, sejam* $q > p \geq 1$ *e* $u \in L^q(0,1)$*. Veja que*

$$\|u\|^q_{L^q} = \int_0^1 |u(x)|^q dx = \||u|^q\|_{L^1}. \tag{3.27}$$

Denotando $p' = \frac{p}{p-q}$ *e* $q' = \dfrac{p}{q}$*, temos que* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$*. Então, da desigualdade de Hölder* (1.11)*, vale* $\||u|^q\|_{L^1} \leq \|1\|_{L^{p'}} \||u|^q\|_{L^{q'}}$*, isto é,*

$$\int_0^1 |u(x)|^q dx \leq \int_0^1 1^{\frac{p}{p-q}} dx \left(\int_0^1 (|u(x)|^q)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\dfrac{1}{p/q}} = (\|u\|_{L^p})^q. \tag{3.28}$$

De (3.27) *e* (3.28)*, concluímos que*

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^p}.$$

Logo, temos que

(E1) $L^q(0,1) \subset L^p(0,1)$*;*

(E2) se $u \in L^q(0,1)$ *então* $\|u\|_p \leq \|u\|_q$.

Entretanto, como a norma $\|\cdot\|_p$ *não está bem definida para* $0 < p < 1$*,* $L^p(0,1)$ *não é espaço de Banach para estes valores de* p*, logo* $S = \bigcup\limits_{0<p} L^p(0,1)$ *não é Escala de Espaços de Banach.*

3.2.1 A classe de EEB de funções analíticas

A seguir, iremos descrever a construção de uma classe de Escalas de Espaços de Banach de funções analíticas, e apresentar algumas de suas propriedades.

Tomemos um conjunto **fechado** $\omega \subset \mathbb{R}^m$ e consideremos as funções $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, com $x = (x^1, \ldots, x^m)$. Seja $A_\rho(\omega)$, denotando o conjunto das funções $u \in C^\infty(\omega)$ para as quais a **norma-**ρ, definida pela fórmula

$$\|u, \omega\|_\rho := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha|=n} \sup_{x \in \omega} |D^\alpha u(x)|, \tag{3.29}$$

é finita. Relembremos, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ é um multi-índice e $D^n u = \{D^\alpha u, |\alpha| = n\}$.

Observação: Uma função $u \in A_\rho(\omega)$ é analítica em $\omega \subset \mathbb{R}^m$ e em cada ponto $x_0 \in \omega$, o raio de convergência da sua série de Taylor em potências de $(x - x_0)$ não é menor do que o número ρ/m.

Proposição 3.1. *O conjunto* $A_\rho(\omega)$ *é um espaço normado, com a norma definida em* (3.29)*, para cada* $\rho > 0$ *fixado.*

Demonstração. Vejamos primeiramente que, dado $\rho > 0$, a função $\|\cdot, \omega\|_\rho$ é uma norma em $A_\rho(\omega)$. Tomemos $u, v \in A_\rho(\omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$(N1)\|u,\omega\|_\rho = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha u(x)| = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha u(x)| = 0, \quad \forall \quad n\in\mathbb{N},\\
\Leftrightarrow |D^\alpha u(x)| = 0, \quad \forall \quad n\in\mathbb{N}, \quad |\alpha| = n \quad \text{e} \quad x\in\omega,\\
\Leftrightarrow |u(x)| = 0, \quad \forall \quad x\in\omega,\\
\Leftrightarrow u\equiv 0.
\end{aligned}$$

$N2)$ Observemos que, pela linearidade da derivada, $\lambda u\in A_\rho(\omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|\lambda u,\omega\|_\rho &= \lim_{n\to\infty}\sum_{N=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha(\lambda u)(x)|\\
&= \lim_{N\to\infty}|\lambda|\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha(u)(x)|\\
&= |\lambda|\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha(u)(x)|\\
&= |\lambda|\|u,\omega\|_\rho < +\infty.
\end{aligned}$$

Além disso, mostramos que $\|\lambda u,\omega\|_\rho = |\lambda|\ \|u,\omega\|_\rho$, para todo $u\in A_\rho(\omega)$.
$N3)$ Veja, ainda pela linearidade da derivada, que para todo $n\in N$,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha(u+v)(x)| &= |D^\alpha u(x) + D^\alpha v(x)|\\
&\le |D^\alpha u(x)| + |D^\alpha v(x)|\\
&\le \max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha v(x)|, \quad \forall \quad x\in\omega.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha(u+v)(x)|\right| \le \sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha u(x)| + \sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha v(x)|,$$

para todo $n\in N$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u+v,\omega\|_\rho &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha(u+v)(x)|\\
&\le \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha u(x)| + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^n}{n!}\max_{|\alpha|=n}\sup_{x\in\omega}|D^\alpha v(x)|\\
&= \|u,\omega\|_\rho + \|v,\omega\|_\rho.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|u+v,\omega\|_\rho \le \|u,\omega\|_\rho + \|v,\omega\|_\rho$ para todo $u,v\in A_\rho(\omega)$. □

Proposição 3.2. *$A_\rho(\omega)$ é um espaço de Banach com a norma* (3.29).

Demonstração. Tomemos uma sequência (u_n) de Cauchy em $A_\rho(\omega)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m, n \geq n_0$,

$$\|u_n - u_m, \omega\|_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \omega} |D^\alpha (u_n - u_m)(x)| < \varepsilon.$$

Mas então, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m, n \geq n_0$, temos que

$$\frac{\rho^k}{k!} \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \omega} |D^\alpha (u_n - u_m)(x)| < \varepsilon.$$

Em particular, para $k = 0$, temos que

$$\sup_{x \in \omega} |(u_n - u_m)(x)| < \varepsilon, \tag{3.30}$$

para todo $m, n \geq n_0$. Logo (u_n) é uma sequênca de Cauchy no espaço das funções contínuas reais $\mathcal{C}(\omega)$, com a norma da convergência uniforme. Temos, portanto, o limite u em $\mathcal{C}(\omega)$, como candidato a limite da nossa sequência.

Agora, como $u_n \in C^\infty(\omega)$, as suas derivadas são contínuas para todo $n \in \mathbb{N}$ e, sendo (u_n) de Cauchy em $A_\rho(\omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|u_n, \omega\|_\rho &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \omega} |D^\alpha (u_n)(x)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{\rho^k}{k!} \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \omega} |D^\alpha (u_n)(x)| \\
&= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{\rho^k}{k!} \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \omega} |D^\alpha (\lim_{n\to\infty} u_n)(x)| \\
&= \|u, \omega\|_\rho.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Além disso, fixando $m_0 \geq n_0$, temos por hipótese

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|u_n, \omega\|_\rho &\leq \lim_{n\to\infty} \|u_n - u_{m_0}, \omega\|_\rho + \|u_{m_0}, \omega\|_\rho \\
&= \|u_{m_0}, \omega\|_\rho < +\infty.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Logo, de (3.31) e (3.32), temos que $\|u, \omega\|_\rho$ é finita, portanto $u \in A_\rho(\omega)$.

□

Veremos agora, que a função $u \in A_\rho(\omega)$ é uma função real de m variáveis $x = (x^1, \ldots, x^m)$ tal que, em cada ponto $x_0 \in \omega$, o raio de convergência da sua série de Taylor em potências de $(x - x_0)$ não é menor do que o número ρ/m.

Tomemos $u \in A_\rho(\omega)$. Então $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^m$ e a série

$$\|u, \omega\|_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha|=n} \sup_{x\in\omega} |D^\alpha u(x)|$$

é convergente. Como $u \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, possui série de Taylor no ponto $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in \omega$, e podemos definir

$$D^n u\,(x_0)\,(x - x_0)^n = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x^i}\,(x_0)\left(x^i - x_0^i\right)\right)^n,$$

onde

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\,(x_0)\right)^n = \frac{\partial^n u}{\partial (x^i)^n}\,(x_0)\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação: veja que, em particular, para o caso $m = 2, z = (x, y), z_0 = (x_0, y_0)$, temos que

$$\begin{aligned} D^n u\,(z_0)\,(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\,(x_0, y_0)\ \frac{\partial^{n-i} u}{\partial y^{n-i}}\,(x_0, y_0)\ (x - x_0)^i\,(y - y_0)^{n-i} \\ &= u\,(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\,(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}\,(x_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial^2 u\,(x_0)\,(x - x_0)^2}{\partial x^2} + \\ &\quad + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,(x_0, y_0)\,(x - x_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,(x_0, y_0)\,(y - y_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Agora, para o caso geral, temos que

$$\begin{aligned} &D^n u\,(x_0)\ (x - x_0)^n = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x^i}\,(x_0)\left(x^i - x_0^i\right)\right)^n \\ &= \sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = n,}} \left(\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}\,\frac{\partial^n u}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \ldots \partial (x^m)^{\alpha_m}}\,(x_0)\ \left(x^1 - x_0^1\right)^{\alpha_1} \cdots \left(x^m - x_0^m\right)^{\alpha_m}\right). \end{aligned}$$

Desejamos então verificar quando a série de Taylor

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{D^n u(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \tag{3.33}$$

é majorada pela série (3.29).

Note que, para cada multi-índice α, com $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n$, temos que

$$\begin{aligned} |(x - x_0)^\alpha| &= \left|\left(x^1 - x_0^1\right)^{\alpha_1} \ldots (x^m - x_0^n)^{\alpha_m}\right| \\ &= \left|x^1 - x_0^1\right|^{\alpha_1} \ldots \left|x^m - x_0^m\right|^{\alpha_m} \\ &\leq \left(\max_{i=1,\ldots,m} \left|x^i - x_0^i\right|\right)^n, \end{aligned} \tag{3.34}$$

e, além disso, para todo multi-índice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, com $|\beta| \leq |\alpha| = n$ e $i \leq m$, temos que

$$\begin{aligned} \left|D^\beta u(x_0)(x - x_0)^n\right| &= \left|\frac{\partial^{|\beta|} u\,(x_0)}{\partial(x^1)^{\beta_1} \ldots \partial(x^m)^{\beta_m}}\right| \\ &\leq \max_{|\alpha|=n} |D^\alpha u\,(x_0)| \\ &\leq \max_{|\alpha|=n} \sup_{x\in\omega} |D^\alpha u\,(x)|\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Pelas desigualdades (3.34) e (3.35), vemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{D^n u(x_0)(x - x_0)^n}{n!}\right| &= \frac{1}{n!}\left|\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial u\,(x_0)}{\partial x^i}\left(x^i - x_0^i\right)\right)^n\right| \\ &\leq \frac{1}{n!} m^n \max_{|\alpha|=n} \sup_{x\in\omega} |D^\alpha u(x)|\ \|x - x_0\|^n. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Concluímos então que, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $m^n \|x - x_0\|^n \leq \rho^n$, a série de Taylor (3.33) da u é majorada pela série (3.29). Se (3.29) é convergente, para $\rho > 0$, então a série de Taylor da u converge, para $x \in \mathbb{R}^n$, e seu raio de convergência r é ao menos $\dfrac{\rho}{m}$.

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.5. *Verificaremos que $e^x \in A_\rho(0,1)$. De fato,*

$$\|e^x, (0,1)\|_\rho = \sum_{n=0}^\infty \frac{\rho^n}{n!} \max_{|\alpha|=n} \sup_{x\in(0,1)} |D^\alpha e^x| = \sum_{n=0}^\infty \frac{\rho^n}{n!} e$$

é convergente pois, pelo teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\rho^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho}{n+1} = 0 < 1,$$

logo a série $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{\rho^n}{n!} e$ é absolutamente convergente, para todo $\rho > 0$, e $e^x \in A_\rho(0,1)$, para todo $\rho > 0$.

É possível construir de maneira análoga uma escala de espaços de Banach de funções pertencentes à classe de Gevrey [12]. Para isto, substituímos o denominador $n!$

na definição da norma (3.29) por $(n!)^l$, com $l > 1$.

3.3 Teorema de Ovsyannikov

Nesta seção final, desejamos generalizar o problema de Cauchy em Escalas de Espaços de Banach.

Iremos formular condições a respeito da aplicação f, referente ao problema abstrato (3.5), e da norma em uma escala de espaços de Banach $S = \bigcup_{0<\rho} B_\rho$, suficientemente gerais para adequá-la ao problema de Cauchy em uma escala de espaços de Banach S. Tendo elaborado o conceito de operador diferencial em uma EEB, e um teorema de existência e unicidade para o problema, em questão, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para comprovar sua veracidade.

Os requisitos impostos sobre f devem combinar um análogo à condição de Lipschtz e um análogo à condição de que f contém derivadas de no máximo primeira ordem.

Definição 3.3. *Seja $S = \bigcup_{0<p} B_\rho$ uma escala de espaços de Banach. Uma aplicação $f : S \to S$ é chamada **operador quasidiferencial** em uma vizinhança de zero em S, se existirem números $r > 0$, $\overline{\rho} > 0$ e uma função duas vezes diferenciável $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva, com $F'(\xi) \leq 0$ e $F''(\xi) \leq 0$, tal que para qualquer ρ_1, $0 < \rho_1 < \overline{\rho}$ e qualquer $\rho < \rho_1$, a desigualdade $\|u\|_{\rho_1} < r$ implica na inclusão $f(u) \in B_\rho$ e*

$$\|u\|_{\rho_1} < r, \|v\|_{\rho_1} < r \Rightarrow \|f(u) - f(v)\|_\rho < \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \left[F(\|u\|_\rho + \|v\|_\rho)\|u - v\|_\rho\right]. \quad (3.37)$$

Ademais, se $f(u, t)$ depende explicitamente de t, esta dependência deve ser também ajustada.

Definição 3.4. *Dizemos que uma aplicação $f : S \times \mathbb{R} \to S$ é **contínua em** t se, para cada $u \in B_{\rho_1}$ fixado e cada $\rho < \rho_1$, aplicação $t \mapsto f(u, t)$ é contínua como uma aplicação de $\mathbb{R}$ em B_ρ.*

Iremos ainda, impor as seguintes condições à norma $\|u\|_\rho$ como função do parâmetro ρ, para cada $u \in S$ fixado:

(E3) $\|u\|_\rho$ é diferenciável e convexa para baixo: $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\|u\|_\rho \leq 0$;

(E4) a desigualdade triangular $\|u + v\|_\rho \leq \|u\|_\rho + \|v\|_\rho$ pode ser derivada termo a termo:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\|u + v\|_\rho \leq \frac{\partial}{\partial \rho}\|u\|_\rho + \frac{\partial}{\partial \rho}\|v\|_\rho$$

Note que ambas as condições são satisfeitas em escalas da forma $A(\omega)$, definidas anteriormente.

Lema 3.1. *Suponhamos que a propriedade* $(E3)$ *seja satisfeita em* S. *Se um operador quasidiferencial* $f(u,t)$ *é contínuo em* t, *com* $t \in I = [0, t_0]$ *e, para cada* $\rho < \rho_0$, *a aplicação* $u : I \to B_\rho$ *é contínua, com* $\|u(t)\|_\rho < r$, *então a composição*

$$f(u(\cdot), \cdot) : I \to B_\rho, \quad t \mapsto f(u(t), t)$$

também é contínua.

Demonstração. Veja [12]. □

Tendo em vista o exposto acima, o seguinte teorema será enunciado, a título de conhecimento:

Teorema 3.2 (Ovsyannikov)**.** *Seja* f *um operador quasidiferencial em uma escala de espaços de Banach* $S = \bigcup_{0<p} B_\rho$ *para cada* $t \in I = [0, t_0]$, *com a propriedade (3.1) válida para* r *e* F *independentes de* t. *Seja a aplicação* $(u, t) \mapsto f(u, t)$ *contínua em* t, *no intervalo* I. *Suponha que a norma na escala* S *satisfaz as condições* $(E3)$ *e* $(E4)$. *Então, se* $f(\theta, t) \in B_{\rho_0}$ *para* $t \in [0, t_0]$, *existe um número* $k > 0$ *tal que a solução* $t \mapsto u(t)$ *do problema (1.1) existe e é única em* S *para valores* (ρ, t) *em*

$$\Delta = \{(\rho, t); \rho + kt < \rho_0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad 0 < \rho < \rho_0)\}.$$

Demonstração. Veja [12]. □

Iremos apresentar então, uma versão do teorema 3.2, a qual considera a função f, em (3.5) como sendo um operador diferencial, definido a seguir:

Definição 3.5. *Seja* $S = \bigcup\limits_{0<\rho} B_\rho$ *uma escala de espaços de Banach. Uma aplicação* $f : B_\rho \times I \to B_\rho$ *é um* ***operador diferencial*** *em uma vizinhança de zero, para* $t \in [0, t_0]$, *se* f *é um operador diferencial clássico de* $1^{\underline{a}}$ *ordem (ver* (1)*) e se existirem números* $r > 0$, $\rho_0 > 0$ *e uma função contínua* $F : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, *tal que para qualquer* $0 < \rho < \rho_0$, *a desigualdade* $\|u\|_\rho < r$ *implica na inclusão* $f(u, t) \in B_\rho$ *e*

$$\|u\|_\rho < r, \|v\|_\rho < r \Rightarrow \|f(u, t) - f(v, t)\|_\rho < F(\|u\|_\rho + \|v\|_\rho)\|u - v\|_\rho. \tag{3.38}$$

Lema 3.2. *Se um operador diferencial* f *é contínuo em* t, *com* $t \in I = [0, t_0]$ *e, para cada* $\rho < \rho_0$, *a aplicação* $u : I \to B_\rho$ *é contínua, com* $\|u(t)\|_\rho < r$, *então a composição*

$$\begin{aligned} f : I &\to B_\rho \\ t &\mapsto f(u(t), t) \end{aligned} \tag{3.39}$$

também é contínua.

Demonstração. Tomemos $\varepsilon > 0$, $t \in I$ e uma função contínua $u : I \to B_\rho$.

Como

$$\begin{aligned} f : B_\rho \times I &\to B_\rho \\ (u,t) &\mapsto f(u,t). \end{aligned}$$

é contínua em t, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|t - \bar{t}| < \delta_1 \Rightarrow \|f(u,t) - f(u,\bar{t})\|_\rho < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.40}$$

.

Também, como $u : I \to B_\rho$ é contínua, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|t - \bar{t}| < \delta_2 \Rightarrow \|u(t) - u(\bar{t})\|_\rho < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{3.41}$$

onde $M = \sup\limits_{\xi \in [0,2r)} F(\xi)$.

Observe que, para $\|u(t)\|_\rho < r$ e $\|u(\bar{t})\|_\rho < r$, temos, respectivamente, que

$$f(u(t),t) \in B_\rho \quad \text{e} \quad f(u(\bar{t}),\bar{t}) \in B_\rho$$

e vale a desigualdade (3.38).

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para $|t - \bar{t}| < \delta$, temos de (3.38), (3.40) e de (3.41), que

$$\begin{aligned} \|f(u(t),t) - f(u(\bar{t}),\bar{t})\|_\rho &= \|f(u(t),t) - f(u(t),\bar{t}) + f(u(t),\bar{t}) - f(u(\bar{t}),\bar{t})\|_\rho \\ &\leq \|f(u(t),t) - f(u(t),\bar{t})\|_\rho + \|f(u(t),\bar{t}) - f(u(\bar{t}),\bar{t})\|_\rho \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + F(\|u(t)\|_\rho + \|u(\bar{t})\|_\rho)\|u(t) - u(\bar{t})\|_\rho \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.42}$$

□

Teorema 3.3. *Seja $f : B_\rho \times T \to B_\rho$ um operador diferencial em uma vizinhança de zero em uma escala de espaços de Banach $S = \bigcup\limits_{0<p} B_\rho$ para cada t pertencente a um intervalo $I = [0, t_0]$ e contínua em t, no intervalo I. Então, se $f(\theta, t) \in B_\rho$ para $t \in [0, t_0]$ e $0 < \rho < \rho_0$, existe uma única solução $u(t) \in B_\rho$ para o problema* (3.5).

Demonstração. Inicialmente, observemos que, como f é um operador diferencial em uma vizinhança de zero, para $t \in [0, t_0]$, existem $r > 0$ e $\rho_0 > 0$ tais que, para qualquer $0 < \rho < \rho_0$, a desigualdade $\|u\|_\rho < r$ implica que $f(u,t) \in B_\rho$. Em particular, temos que $\|\theta\|_\rho < r$, logo $f(\theta, t) \in B_\rho$, para qualquer $0 < \rho < \rho_0$.

Para cada $\rho < \rho_0$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} A : \mathcal{C}([0,t_0]; B_\rho) &\to \mathcal{C}([0,t_0]; B_\rho) \\ (u,t) &\mapsto [A(u)](t) = \int_0^t f(u(\tau),\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Veja que $[A(u)](t)$ está bem definida e age de um espaço de Banach em si mesmo. De fato, tome $u \in \mathcal{C}([0,t_0]; B_\rho)$, como u é contínua em $I = [0,t_0]$, para todo $\rho < \rho_0$ e, como $\|u(0)\|_\rho = \|\theta\|_\rho = 0$, podemos então tomar t_0 suficientemente pequeno, de maneira que

$$\|u(t)\|_\rho < r, \quad \forall \quad t \in [0,t_0]. \tag{3.43}$$

Então, pelo Lema (3.2), temos que $f : I \to B_\rho$ definida em (3.39) é contínua em $I = [0,t_0]$, para $0 < \rho < \rho_0$, logo A está bem definida. Além disso, temos que

$$\sup_{0\le t\le t_0} \|[A(u)](t)\|_\rho \le t_0 \|f(u,t)\|_\rho < \infty. \tag{3.44}$$

Agora, basta provar que A possui um único ponto fixo, ou seja, $u(t) = [A(u)](t)$ e, como f é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo concluímos que

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t),t), \\ u(0) = \theta \end{cases}$$

tem uma única solução.

Para isto, provaremos que A é uma contração no espaço de Banach $\mathcal{C}([0,t_0]; B_\rho)$, em si mesmo, e o Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante o resultado desejado.

Existe por hipótese uma função contínua $F : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$, tal que vale (3.38), para $0 < \rho < \rho_0$. Como F é contínua no compacto $[0,2r]$, é limitada neste conjunto por uma constante K, que não depende de t. Em particular, para $\|u\|_\rho < r$ e $\|v\|_\rho < r$, temos que

$$F(\|u\|_\rho + \|v\|_\rho) \le K. \tag{3.45}$$

Assim, por (3.38), (3.43) e (3.45), temos que

$$\begin{aligned}
\|[A(u)](t) - [A(v)](t)\|_\rho &= \left\| \int_0^t f(u(\tau),\tau)d\tau - \int_0^t f(v(\tau),\tau)d\tau \right\|_\rho \\
&\leq \int_0^t \|f(u(\tau),\tau) - f(v(\tau),\tau)\|_\rho \, d\tau \\
&\leq \int_0^t \sup_{0\leq\tau\leq t} \|f(u(\tau),\tau) - f(v(\tau),\tau)\|_\rho \, d\tau \\
&\leq \int_0^t F(\|u\|_\rho + \|v\|_\rho) \, \|u-v\|_\rho \, d\tau \\
&\leq Kt\|u-v\|_\rho,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

para toda $u, v \in B_\rho$,

Tomando o supremo sobre $[0, t_0]$ em (3.46), temos que

$$\|A(u) - A(v)\|_\rho \leq Kt_0 \, \|u-v\|_\rho \, . \tag{3.47}$$

Por fim, tomando t_0 em (3.47) tal que $t_0 < \dfrac{1}{K}$, concluímos que A é contração. $\square$

Como aplicação deste teorema, vemos que segue válido o Teorema 3.1, de Kovalevskaya, assim como a existência e unicidade de soluções do problema (3.5) em classes de Gevrey [12].

Bibliografia

[1] ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. **Sobolev Spaces**. London: Academic Press, 2003.

[2] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** New York: Springer, 2010. 599 p. ISBN 978-0-387-70913-0.

[3] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. 2. ed. United States of America: American Mathematical Society, 2010. 749 p. v. 19. ISBN 978-0-8218-4974-3.

[4] FOLLAND, Gerld B. **Introduction to Partial Differential Equations.** 2. ed. New Jersey: Priceton Academic Press, 1995. 324 p. ISBN 978-0-691-04361-6.

[5] HADAMARD, Jacques. **Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.** Londres: Yale University Press, 1923. 316 p.

[6] KOVALEVSKAYA, Sofya. **A Russian Childhood**. 1. ed. New York: Spreinger-Verlag, 1978. 252 p. ISBN 978-1-4419-2808-5.

[7] KREYSIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. 1. ed. Unitcd States of America: John Wiley & Sons, 2013. 688 p. ISBN 0-471-50731-8.

[8] LIMA, Elon L. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2017. 337 p. ISBN 978-85-244-0159-9.

[9] MIJAILOV, Valentin P. **Ecuaciones en Derivadas Parciales** 1. ed. Moscú: Editorial Mir, 1978. 421 p.

[10] NISHIDA, Takaaki. **A note on theorem of Nirenberg.** Journal of Differential Geometry, [S. l.], v. 12, n. 4, p. 629-633, 12 fev. 1976.

[11] NIRENBERG, Louis. **Topics in Nonlinear Functional Analysis:** Courant lecture notes in mathematics. New York: American Mathematical Society, 1974. 145 p. ISBN 0-8218-2819-3.

[12] OVSYANNIKOV, L. V. **Cauchy Problem in a Scale of Banach Spaces.** Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Moscow, v. 281, p. 3-11, 2013.

[13] TREVES, François. **Ovsyannikov Theorem and Hyperdifferential Operators:** Notas de Matemática nº 46. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1968. 238 p.

Apêndice

1.1 EDP's parabólicas lineares

1.1.1 Equações lineares de evolução

A seguir, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Considere $\Omega_T = \partial\Omega \times [0,T]$ a fronteira cilíndrica. Vamos considerar o problema:

$$\begin{cases} u_t + Lu &= f \quad \text{em} \quad \Omega_T \\ \qquad u &= g \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\} \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $u : \overline{\Omega_T} \to \mathbb{R}$ é desconhecido, $u = u(x,t)$.

Para cada t fixado, L é um operador diferencial parcial de $2^{\underline{a}}$ ordem na forma divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x,t)u_{x_i}\right) x_j + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \tag{A.2}$$

ou na forma não divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

para coeficientes $a^{i,j}, b^{i,j}, c$ dados $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Para $n = 2$, por exemplo, a forma não divergente será

$$\begin{aligned} Lu &= -\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{2} b^i(x,t)u_{x_j} + c(x,t)u \\ &= -\left(a^{11}(x,t)u_{x_1x_1} + a^{12}(x,t)u_{x_1x_2} + a^{21}(x,t)u_{x_2x_1} + \right. \\ &\quad \left. + a^{22}(x,t)u_{x_2x_2}\right) + b^1(x,t)u_{x_1} + b^2(x,t)u_{x_2} + c(x,t)u. \end{aligned}$$

Definição A.1. *Diremos que o operador parcial $\frac{\partial}{\partial t} + L$ é* ***fortemente uniformemente***

parabólico se existir $\theta > 0$, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \quad \forall \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n; (x,t) \in \Omega_T.$$

Observação: Para cada $t \in [0,T]$ fixado, o operador L é fortemente uniformemente elíptico. Um exemplo óbvio é quando $a^{i,j} = \delta_{i,j}$, $b^i = c = 0$. Neste caso, $L = -\Delta$ e a EDP $u_t - \Delta u = f$ torna-se a equação do calor usual onde f é uma força externa atuante.

1.1.2 Soluções Fracas

No que segue desta seção, L é um operador fortemente parabólico na forma divergente (A.2). Para definir o que é uma solução fraca, vamos assumir que

a. $a^{i,j}, b^i, c \in L^\infty(\Omega_T), i,j = 1, \ldots, n;$

b. $f \in L^2(\Omega_T), \quad g \in L^2(\Omega);$

c. $a^{i,j} = a^{j,i}, i,j = 1, \ldots, n.$

Consideremos a forma bilinear dependente de t:

$$B[u,v;t] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\cdot,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\cdot,t)u_{x_i}v + c(\cdot,t)uv\,dx$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e quase todo $t \in [0,T]$.

Para que a definição a seguir de solução fraca seja plausível, vamos primeiro supor temporariamente que $u = u(x,t)$ é de fato uma solução regular do problema (A.1). Consideremos

$$\begin{aligned} u : [0,T] &\to H_0^1(\Omega) \\ t &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} u(t) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (u(t))(x) := u(t,x). \end{aligned}$$

Em outras palavras, iremos considerar u como sendo uma aplicação de t no espaço $H_0'(\Omega)$, de funções de x. Vamos também definir

$$\begin{aligned} f : [0,T] &\to L^2(\Omega) \\ t &\mapsto f(t), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f(t) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f(t))(x) := f(t,x). \end{aligned}$$

Então, se fixarmos a função $v \in H_0^1(\Omega)$, podemos multiplicar a equação de (A.1) por v e integrando-se por partes temos

$$\langle u'(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = (f, v)_{L^2}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{A.3}$$

Aqui, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará o par dualidade $H^{-1}, {H_0}^1$. De fato, observe que

$$u_t = h^0 + \sum_{j=1}^{n} h^j_{x_j} \quad \text{em } \Omega_T, \tag{A.4}$$

onde $h^0 = f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - c\, u, \quad h^j = \sum_{i=1}^{n} a^{ij} u_{x_i}$, para $j = 1, \ldots, n$.

Logo (A.4) e o fato de que $h^0, h^j \in L^2(\Omega)$ nos fornece que $u_t \in H^{-1}(\Omega)$ para quase todo $t \in [0, T]$. Daí o fato de escrevermos o primeiro membro do lado esquerdo de (A.3) como uma dualidade.

Estas considerações todas motivam a seguinte definição:

Definição A.2. *Dizemos que uma função* $u \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ *e* $u' \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$ *é uma* ***solução fraca*** *do problema de valor inicial e de fronteira parabólico* (A.1) *se*

(i) $\langle u'(t), v\rangle_{H^{-1}, H_0^1} + B[u(t), v; t] = (f(t), v)_{L^2}$, *para toda* $v \in H_0^1(\Omega)$ *e quase todo* $t \in [0, T]$.

(ii) $u(0) = g$.

Note que, como $u \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ e $u' \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$, então pelo teorema 1.5, temos que $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e assim, a igualdade (ii) tem sentido.

1.1.3 Existência de soluções fracas

Neste tópico, iremos utilizar o Método de Faedo-Galerkin para a equação

$$u_t + \Delta u = f.$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{em} \quad \Omega_T \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times [0, T] \\ u = g & \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{A.5}$$

onde $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas e $u : \overline{\Omega_T} \to \mathbb{R}$ é desconhecido, $u = u(x, t)$.

Iremos então construir um problema aproximado, de modo a utilizar a teoria clássica de existência de soluções para EDO's. Este problema dependerá fortemente do parâmetro aproximado $m \in \mathbb{N}$, então deveremos obter estimativas para as soluções aproximadas independentes de m.

Temos assim que nosso operador é fortemente uniformemente elíptico na forma divergente e também simétrico ($a^{i,j} = a^{j,i}$, para $i, j = 1, \ldots, n$). Consideremos então o seguinte problema de autovetores:

$$\begin{cases} -\Delta w^k = \lambda_k w_k \quad \text{em} \quad \Omega \\ w_k = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo teorema dos autovalores de operadores simétricos temos que $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ é uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$ e $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ é uma base ortogonal em $H_0^1(\Omega)$. De fato, como o operador $L = -\Delta$ é simétrico, temos que $S : +L^{-1}$ é um operador linear limitado e compacto que leva $L^2(\Omega)$ em si mesmo. Vejamos que S é simétrico. Sejam $f, g \in L^2(\Omega)$. Então $Sf = u$ significa que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} Lu = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e, da mesma maneira, $Sg = v$ significa que $v \in H_0^1(\Omega)$ resolve

$$\begin{cases} Lv = g \quad \text{em} \quad \Omega \\ v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco.

Assim, temos que $(Sf, g) = (u, g) = B[v, u]$ e $(f, Sg) = (f, v) = B[u, v]$. Como $B[u, v] = B[v, u]$, temos que $(Sf, g) = (f, Sg)$ ára todo $f, g \in L^2(\Omega)$. Portanto S é simétrico.

Observe que

$$(Sf, f) = (u, f) = B[u, u] \geq 0, \quad (f \in L^2(\Omega)).$$

Assim, a teoria de operadores simétricos e compactos implica que todos os autovalores de S são reais, positivos e existem respectivos autovetores (autofunções) que formam uma base ortonoram de $L^2(\Omega)$. Mas para $\eta \neq 0$, temos que $Sw = \eta w$ se, e somente se, $Lu = \lambda w$, para $\lambda = \frac{1}{\eta}$, e segue o desejado, pois, multiplicando a equação, temos

$$-\int_\Omega \Delta w_k \cdot w_j = \int_\Omega \nabla w_k \cdot \nabla w_j = (\nabla w_k, \nabla w_j)_{L^2} = \lambda \, (w_k, w_j)_{L^2}$$

isto é,

$$((\nabla w_k, \nabla w_j))_{H_0^1} = \lambda_k (w_k, w_j) = \begin{cases} \lambda_k, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Portanto, $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é ortogonal em $H_0^1(\Omega)$.

Fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$. Diremos que $u_m(t) \in V_m$ se, e somente se,

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\omega_k, \tag{A.6}$$

onde esperamos selecionar os coeficientes $d_m^k(t)$, $t \in [0, T], k = 1, \ldots, m$. Temos

$$d_m^k(0) = (g, \omega_k)_{L^2} \tag{A.7}$$

$$(u_m'(t), \omega_k) + (\underbrace{\nabla u_m(t), \nabla \omega_k}_{B\,[u_m(t), \nabla\omega_k; t]})_{L^2} = (f(t), \omega_k)\,, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{A.8}$$

A forma (A.6) satisfaz a "projeção"de (A.8) do problema

$$\begin{cases} u_t + \Delta u = f & \text{em} \quad \Omega_T \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega_T \\ u = g & \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{A.9}$$

sobre o espaço V_m.

Note que,

$$\begin{cases} (u_m'(t), \omega_k) + (\nabla u_m(t), \nabla w_k) = (f(t), w_k) \\ u_m(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k \longrightarrow g \end{cases} \tag{A.10}$$

é chamado problema aproximado.

Teorema A.1 (Existência de Soluções Aproximadas)**.** *Para cada* $m = 1, 2, \ldots$ *existe u,a única solução* u_m*, da forma* (A.6) *satisfazendo* (A.7) *e* (A.8)*.*

Demonstração. Seja u_m da forma $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\omega_k$.

Notemos primeiramente que

$$
\begin{aligned}
(u_m'(t), \omega_k) &= \left(\sum_{j=1}^{m} {d_m^j}'(t) w_j, w_k \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} {d_m^j}'(t) \, (w_j, w_k) = d_m^{k\prime}(t),
\end{aligned}
$$

pois $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ é ortonormal. Além disso,

$$
\begin{aligned}
(\nabla u_m(t), \nabla w_k) &= \left(\nabla \left(\sum_{j=1}^{m} d_m^j(t) \omega_j \right), \nabla \omega_k \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} d_m^j(t) \nabla w_j, \nabla \omega_k \right) \\
&= \lambda_k d_m^k(t).
\end{aligned}
$$

Escrevendo $f^k(t) = (f(t), w_k)_{L^2}, k = 1, \ldots, m$ temos de que

$$
(u_m'(t), \omega_k) + (\nabla u_m(t), \nabla w_k) = (f(t), w_k)
$$

torna-se o sistema de EDO's

$$
{d_m^k}'(t) + \lambda_k d_m^k(t) = f^k(t), \quad k = 1, \cdots .
$$

cuja condição inicial é

$$
d_m^k(0) = (g, w_k)_{L^2}, \quad k = 1, \cdots .
$$

Assim, obtemos o PVI

$$
\begin{cases}
{d_m^k}'(t) + \lambda_k d_m^k(t) = f^k(t), & k = 1, \cdots \\
d_m^k(0) = (g, w_k)_{L^2}.
\end{cases}
\tag{A.11}
$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade da Teoria de EDO's, existe uma única função absolutamente contínua $d_m(t) = (d_m'(t), \cdots, d_m^m(t))$ satisfazendo (A.11) para quase todo ponto $t \in [0, T_m]$. Então u_m definido em (A.6) resolve o Problema Aproximado (A.10) para quase todo ponto $t \in [0, T_m]$. (Este resultado é conhecido como Teorema de Caratheodory). $\square$

Teorema A.2. *Existe uma constante $C > 0$ que depende de Ω_T, tal que*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

para $m = 1, 2, \cdots$

Demonstração. Como para o problema aproximado (A.11) temos solução, podemos multiplicar a primeira equação por $d_m^k(t)$ e somando em $k = 1, \cdots m$, obtemos daí, e de (A.6):

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\omega_k,$$

que

$$\sum_{k=1}^{m}\left(u_m'(t), d_m^k(t)w_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\nabla u_m(t), \nabla w_k d_m^k(t)\right) = \left(f(t), d_m^k(t)w_k\right)$$

Logo,

$$(u_m'(t), u_m(t))_{L^2} + (\nabla u_m(t), \nabla u_m(t))_{L^2} = (f, u_m(t))_{L^2} \tag{A.12}$$

para quase todo $t \in [0, T_m]$.

Então, como $\dfrac{d}{dt}(u_m(t), u_m(t)) = 2\,(u_m'(t), u_m(t))$, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 = (f, u_m(t))_{L^2} \tag{A.13}$$

Mas

$$(f, u_m(t))_{L^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \|v_m(t)\|_{41_0^1}^2 \tag{A.14}$$

e

$$\begin{aligned}(f, u_m(t))_{L^2} &= \int_\Omega f(x,t)u_m(x,t)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} |u_m(x,t)|^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

Por (A.14) e (1.1.3), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_{L^2}^2$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2.$$

Escrevendo $\eta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2}^2$ e $\xi(t) = \|f(t)\|_{L^2}^2$, temos que

$$\eta'(t) \leq \eta(t) + \xi(t),$$

para quase todo $t \in [0, T]$. Temos que $d_m(t)$ é uma função absoluta monte continua, então

$$\eta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\omega_k \right\|_{L^2}^2$$

é absolutamente continua em $[0, T]$ e não negativa. Ainda, η satisfaz

$$\eta'(t) \leq 1 \cdot \eta(t) + \xi(t) \tag{A.15}$$

em quase todo $t \in [0, T]$, sendo não negativa e integrável em $[0, T]$.

Então, pela desigualdade de Gronwall, na forma diferencial, temos

$$\eta(t) \leq e^t \left(\eta(0) + \int_0^t \xi(s) ds \right)$$

para todo $t \in [0, T_m]$. Mas

$$\eta(0) = \|u_m(0)\|_{L^2}^2 = |(g, \omega_k)|^2 \leq \|g\|_{L^2}^2 \cdot 1$$

donde, por (A.15), temos

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq e^t \left(\|g\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \\ &= e^t \left(\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right) \end{aligned}$$

observe que a exponencial acima nos indica que podemos considerar $t \in [0, T]$, para todo $T > 0$.

Retornando agora a (A.14) e integrando em $[0, T]$, temos

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 dt = \int_0^T (f, u_m(t))_{L^2}\, dt$$

isto é,

$$\|u_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2} \, dt = \int_0^T (f, u_m(t))_{L^2} \, dt$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_m\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} &= \int_0^T \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \, dt \\
&\leq \frac{1}{2} \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{1}{2} \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{1}{2} \int_0^T e^t \left(\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} \right) dt + \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{1}{2} \left(e^T + 1\right) \|g\|^2_{L^2(\Omega)} + e^T \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} \\
&= \left(e^T + 1\right) \left(\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} \right) \\
&= C(T) \left(\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} \right)
\end{aligned}$$

Fixemos agora $v \in H^1_0(\Omega)$ tal que $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq 1$. Escrevamos $v = v^1 + v^2$, onde $v^1 \in V_m$, $v^2 \in V_m^\perp$ e $(v^2, w_k) = 0$, para todo $k = 1, \ldots, m$.
Note que $\|v^1\|_{H^1_0} \leq \|v\|_{H^1_0} \leq 1$ pois $\{w_k\}$ é ortogonal. Como $v^1 \in V_m$, temos que

$$(u'_m(t), v')_{L^2} + (\nabla u_m(t), v')_{L^2} = (f(t), v')_{L^2} \, ,$$

então,

$$\begin{aligned}
\langle u'_m(t), v \rangle_{H^{-1}, H'_0} &= \left\langle u'_m(t), v^1 + v^2 \right\rangle_{H^{-1}, H^1_0} \\
&= (u'_m(t), v')^2_L \\
&= \left(f(t), v^1\right)_{L^2} - \left(\nabla u_m(t), \nabla v^1\right) L^2 \\
&\leq \|f(t)\|_{L^2} + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2} \, .
\end{aligned}$$

Daí, como $\|v'\|_{H^1_0} \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|u'_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \|f(t)\|_{L^2} + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2} \\
&= \|f(t)\|_{L^2} + \|\varphi_m(t)\|_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

e

$$\|u'_m(t)\|^2_{H^{-1}} \leq 2 \left(\|f(t)\|^2_{L^2} + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \right)$$

Integrando em $[0, T]$ temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|u_m'(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,dt &\leq 2\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \|u_m\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1\right)}\right)\\
&\leq C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}
$$

pelas estimativas anteriores. Por fim, juntamos todas as estimativas obtidas e chegamos em

$$
\max_{0\leq t\leq T}\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|g\|_{L^2(\Omega))}\right).
$$

□

Existência e unicidade.

O próximos passo será passar o limite quando $m \to \infty$, para construir uma solução fraca do problema (A.5)

$$
\begin{cases}
u_t + Lu = f \quad \text{em} \quad \Omega_T\\
u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_T\\
u = g \quad \text{em} \quad \Omega\times\{t=0\}.
\end{cases}
$$

Teorema A.3. *Existe uma solução fraca do problema* (A.5).

Demonstração. Pela estimativa de energia obtida no teorema A.2, temos

1. $\{u_m\}_m$ é limitada em $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$;
2. $\{u_m\}_m$ é limitada em $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$;
3. $\{u_m'\}_m$ é limitada em $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$.

Por Riesz, temos que $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \equiv \left(L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)\right)'$.

Por outro lado, como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, temos da segunda estimativa que existe $\{u_{m_l}\}\subset\{u_m\}$ tal que

$$
u_{m_l} \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)
$$

e, pela terceira limitação, como $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ é separável, temos que existe

$$
\{u_{m_l}\}\subset\{u_m\}
$$

tal que

$$
u_{m_l}' \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ fracamente em } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right).
$$

Temos ainda, que $H^{-1}(\Omega)$ é reflexivo, de maneira que a topologia fraca e a topologia fraca * coincidem, e assim

$$u'_{m_l} \rightharpoonup v \text{ fracamente em } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right).$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ e $w \in H_0^1(\Omega)$. Então, por definição de derivada fraca, temos que

$$\int_0^T \left\langle u'_{m_l}, \varphi w\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt = -\int_0^T (u_{m_l}, \varphi' w)_{H_0^1}\, dt.$$

Como $u_{m_l} \rightharpoonup u$ en $L^2\,(0,T;H^{-1}(\Omega))$, temos que

$$(u_{m_l}, \varphi' w)_{H_0^1} \rightharpoonup (u, \varphi' w)_{H_0^1}\,, \text{ se } \ell \to +\infty.$$

Daí, temos que

$$-\int_0^T (u_{m_l}\varphi' w)_{H_0^1}\, dt \longrightarrow -\int_0^T (u, \varphi' w)_{H_0^1} = \int_0^T \langle u', \varphi w\rangle_{H^{-1},H_0'}\,.$$

Por outro lado,

$$\int_0^T \left\langle u'_{m_l}, \varphi w\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \to \int_0^T \langle v, l\omega\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Pela unicidade do limite

$$\int_0^T \langle u', \varphi w\rangle\, dt = \int_0^T \langle v, \varphi w\rangle dt.$$

Como e espaço

$$\mathcal{M} = \left\{\varphi w, \varphi \in C_0^\infty(0,T), w \in H_0^1(\Omega)\right\}$$

é tal que as combinações lineares finitas formam um conjunto denso em $L^2\,(0,T;H_0^1(\Omega))$ i.e. $\mathcal{M}$ é total. Daí, $u' = v$.

Com isto,

$$\begin{aligned} u_{m_l} &\rightharpoonup u \quad \text{ em } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \\ u'_{m_l} &\rightharpoonup u \text{ em } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Fixemos um inteiro N e vamos escolher uma função

$$v \in C^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$$

tal que

$$\vec{v}(t)=\sum_{k=1}^{N} g^k(t)w_k$$

onde os g^k sã funções reais, definidas em $[0,T]$.

Tomemos $m \geq N$. Multiplicando o problema aproximado (A.10) por g^k e somando em $k=1,\ldots,N$, em seguida integrando com respeito a t, obtemos

$$\int_0^T \left\langle u_m'(t), \sum_{k=1}^{N} g^k(t)w_k \right\rangle_{H^{-1}H_0^1} dt + \int_0^T \left(\nabla u_m(t), \sum_{k=1}^{N} g^k(t)\nabla w_k\right)_{L^2} dt$$
$$= \int_{-s}^{T} \left(f(t), \sum_{k=1}^{N} g^k(t)w_k\right) dt$$

Logo,

$$\int_0^T \langle u_m'(t), \vec{v}(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla\vec{v}(t))_{L^2} dt = \int_0^T (f(t), \vec{v}(t))dt \qquad \text{(A.16)}$$

Considerando $m=m_l$, temos, devido a (1.1.3), que

$$\int_0^T \langle u'(t), \vec{v}(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla\vec{v}(t))_{L^2} dt = \int_0^T (f(t), \vec{v}(t))dt \qquad \text{(A.17)}$$

Como o espaço $\mathcal{M}$ (para g^k suficientemente regular) é tal que as combinações lineares finitas são densas em $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, temos em particular, para $v\in H_0^1(\Omega)$ que

$$\langle u'(t), \vec{v}(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} + (\nabla u(t), \nabla\vec{v}(t))_{L^2} = (f(t), \vec{v}(t)) \qquad \text{(A.18)}$$

para todo $v\in H_0^1(\Omega)$ e quase todo $t\in[0,T]$.

Como $u\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ e $u'\in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, temos pelo teorema 1.5, que $u\in C([0,T;H^{-1}(\Omega)])$.

Logo, vale (i), da definição (A.2), de solução fraca.

Vejamos agora o item (ii), isto é, que $u(0)=g$.

Tomemos $v(t)=\sum\limits_{k=1}^{N} g^k(t)w_k$. Por (A.17), temos

$$-\int_0^T \langle \vec{v}'(t), u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^{\top} (\nabla u(t), \nabla\vec{v}(t))_{L^2} dt = \int_0^T (f(t), \vec{v}(t)) + (u(0), \vec{v}(0))_{L^2}$$

para cada $\vec{v}\in C^1\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$ tal que $\vec{v}(t)=0$. Analogamente, por (A.16), deduzimos que

$$-\int_0^T \langle \vec{v}'(t), u_m(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1}\, dt + \int_0^\top (\nabla u_m(t), \nabla \vec{v}(t))_{L^2} dt = \int_0^T (f(t), \vec{v}(t)) + (u(0), \vec{v}(0))_{L^2}$$

Seja $m = m_l$, temos então por (1.1.3) e pelo fato de que $u_{m_l}(0) \to u(0)$ em $L^2(\Omega)$, que

$$(u(0), \vec{v}(0))_{L^2} = (g, \vec{v}(0))_{L^2} = (g, \tilde{v})_{L^2}, \quad \forall \tilde{v} = \vec{v}(0) \in H_0^1(\Omega).$$

Dado $v \in L^2(\Omega)$, existe $\tilde{v}_r \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\tilde{v}_r \to v \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Como $(u(0), \tilde{v}_r)_{L^2} = (g, \tilde{v}_r)_{L^2}$, temos por passagem do limite, que

$$u(0) = g \quad \text{ em } L^2(\Omega).$$

□

Teorema A.4. *A solução de* (A.5) *é única.*

Demonstração. Pela linearidade do problema, é suficiente checar este fato para $f \equiv 0$ em Ω_T e $g = 0$ em $\partial\Omega_T$. Por (A.18), temos que, se considerarmos $v = u(t) \in H_0^1(\Omega)$, para quase todo $t \in [0, r]$, vale

$$\langle u'(t), u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} + (\nabla u(t), \nabla u(t))_{L^2} = (f(t), u(t))_{L^2} = 0.$$

Daí, pelo item (ii) do Teorema 1.5 , temos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\,\langle u'(t), u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$

e assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = 0$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \le 0 \le \|u(t)\|_{L^2}^2.$$

Então, se $\eta(t) = \|u(t)\|_{L^2}^2$, temos que $\eta'(t) \le 2\eta(t)$.

Agora, por Gronwall,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \eta(t) \\
&\leq e^{\int_0^t 2ds}\,[\eta(0) + \int_0^t 0ds] \\
&= e^{2t}\eta(0) \\
&= e^{2t}\|g\| = 0.
\end{aligned}
$$

Logo $\|u(t)\|_{L^2} = 0$, e concluímos que $u \equiv 0$. $\square$