

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Doutorado)

VICTOR HUGO GONZALEZ MARTINEZ

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E  
COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA  
SISTEMAS HIPERBÓLICOS SEMI-LINEARES**

Maringá

2021

VICTOR HUGO GONZALEZ MARTINEZ

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E  
COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA  
SISTEMAS HIPERBÓLICOS SEMI-LINEARES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.  
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

G643e Gonzalez Martinez, Victor Hugo  
Existência de solução e comportamento assintótico  
para sistemas hiperbólicos semi-lineares / Victor  
Hugo Gonzalez Martinez. -- Maringá, 2021.  
144 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Marcelo Moreira  
Cavalcanti.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
Análise, 2021.

Inclui índice.

1. Equação da onda. 2. Sistema Klein-Gordon. 3.  
Kelvin-Voigt. 4. Existência. 5. Taxas de decaimento  
uniforme. 6. Wave equation. 7. Klein-Gordon system.  
8. Existence of solutions. 9. Uniform decay rates.  
I. Cavalcanti, Marcelo Moreira, orient. II.  
Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências  
Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática -  
Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.3535

Edilson Damasio CRB9-1.123

# EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA SISTEMAS HIPERBÓLICOS SEMI-LINEARES

VICTOR HUGO GONZALEZ MARTINEZ

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

## COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - Universidade Estadual de Maringá - (Presidente)

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - Universidade Estadual de Maringá

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Claudete Matilde Webler Martins - Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Wellington José Corrêa - Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Campo Mourão

Prof. Dr. André Vicente - Universidade Estadual do Oeste do Paraná/Cascavel

Aprovada em: 11 de janeiro de 2021

Local de defesa: videoconferência, via <https://meet.google.com/bfw-voov-rcz>

*Dedico este trabalho à minha mãe.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder muita saúde, força e paciência durante minha vida.

Agradeço à minha mãe, pelo apoio incondicional, por sua força de superação, por ter me ensinado os primeiros passos na Matemática e por sempre ter feito o possível para que eu pudesse estudar. A todos da minha família que sempre me incentivaram e deram apoio, em especial ao meu irmão Guto, o melhor amigo que a vida me deu, pelos diversos momentos que passamos juntos, conversas e conselhos. Ao meu tio Wagner e minha tia Si, por todo incentivo durante minha vida, discussões e ensinamentos na busca do conhecimento para a realização dos meus sonhos.

Agradeço ao Professor Marcelo pelas diversas discussões que tivemos, por suas explicações pacientes, por seus conselhos preciosos, por sua confiança em mim e a sua disposição para conversar e vislumbrar as belezas da matemática seja nos seminários ou nos cafés da tarde.

Em especial, agradeço à Ju, pela confiança depositada em mim, pelos diversos momentos de alegria, por todo seu apoio e companhia.

Quero agradecer aos colegas de Doutorado por toda a convivência, discussões e momentos de descontração, em especial, ao Douglas F. Copatti, Rafael Afonso Barbosa, Vinicius Araujo Peralta, Pedro F. S. Othechar, Janaina P. Zanchetta e André Luiz Marques (*in memoriam*).

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá que me acolheu e aos professores do corpo docente pelos ensinamentos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

”But it ain’t about how hard you hit. It’s about how hard you can get hit and keep moving forward; how much you can take and keep moving forward”.

— Rocky Balboa.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência, unicidade e estabilidade das soluções para quatro problemas associados a dois sistemas hiperbólicos semi-lineares. O primeiro consiste na estabilização para um sistema do tipo Klein-Gordon com dissipações lineares localmente distribuídas acoplado por termos de velocidade e condições de fronteira do tipo Dirichlet. O segundo problema contempla a estabilização de um sistema linear acoplado por velocidades com uma dissipação não-linear localizada agindo em somente uma equação. O terceiro problema trata-se da estabilidade exponencial para uma equação da onda semi-linear em um meio não-homogêneo e sujeita a dissipações do tipo Kelvin-Voigt e friccional, onde a última age em uma região arbitrariamente pequena ferindo a condição geométrica de controle. Por fim, o quarto problema aborda uma equação da onda semi-linear sujeita a uma dissipação não-linear com crescimento do tipo crítico/sub-crítico.

**Palavras-chave:** Equação da Onda. Sistema Klein-Gordon. Kelvin-Voigt. Existência. Taxas de decaimento uniforme.

# Abstract

In this work, we study the existence, uniqueness and stability of the solutions to four problems associated with two semi-linear hyperbolic systems. The first consists of stabilization for a Klein-Gordon type system coupled by velocities terms with locally distributed linear dissipations and boundary conditions of the Dirichlet type. The second problem contemplates the stabilization of a linear system coupled by velocities with localized nonlinear damping acting in only one equation. The third problem is the exponential stability for a semi-linear wave equation in a non-homogeneous medium and subject to Kelvin-Voigt and frictional dissipations, where the latter acts in an arbitrarily small region hurting the geometric control condition. Finally, the fourth problem addresses to an semi-linear wave equation subject to a non-linear dissipation with growth of the critical/subcritical type.

**Keywords:** Wave Equation. Klein-Gordon system. Kelvin-Voigt. Existence os solutions. Uniform decay rates.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>16</b>
1.1	Distribuições e Espaços Funcionais . . . . .	16
1.2	Espaços $L^p(\Omega)$ . . . . .	17
1.3	Espaços de Sobolev . . . . .	20
1.4	Traço de uma função de $H^m(\Omega)$ . . . . .	22
1.5	Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis . . . . .	24
1.6	Espaços Funcionais a Valores Vetoriais . . . . .	26
1.7	Resultados Auxiliares . . . . .	29
1.8	Resultados Utilizados de Semigrupos . . . . .	32
1.9	Análise Microlocal . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Decaimento Exponencial Para O Sistema Klein-Gordon Acoplado Por Ve-</b>	
	<b>locidades</b>	<b>48</b>
2.1	Propriedade de Continuação Única . . . . .	51
2.2	Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	55
2.3	Estabilidade Exponencial . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Estabilidade Uniforme de um Modelo Linear Sujeito a Uma Dissipação</b>	
	<b>Não-Linear</b>	<b>71</b>
<b>4</b>	<b>Estabilidade Uniforme Local para uma Equação da Onda Semi-linear em</b>	
	<b>um Meio Não-homogêneo Sujeita a uma Dissipação Localmente Distribuída</b>	
	<b>do tipo Kelvin-Voigt</b>	<b>79</b>

---

4.1	Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	81
4.2	Decaimento Exponencial para as Soluções do Problema (4.1) . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Taxas de Decaimento Uniforme para a Equação da Onda Semi-linear Su-</b> <b>jeita a uma Dissipação Não-linear Localmente Distribuída</b>	<b>93</b>
5.1	Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	95
5.1.1	Formulação Abstrata e Funcionais de Energia . . . . .	97
5.2	Recuperando a Regularidade para $1 \leq p < \frac{n+2}{n-2}$ . . . . .	103
5.3	Estimando $F_k(u_k)$ . . . . .	108
5.4	Decaimento Uniforme da Energia . . . . .	110
5.5	Observabilidade Para o Problema Original . . . . .	120
5.6	Combinando Estimativas na Origem e no Infinito . . . . .	121
5.7	Calculando Taxas de Decaimento . . . . .	130
5.7.1	Caso linearmente limitado no infinito . . . . .	130
5.7.2	Casos sub-linear e super-linear . . . . .	132
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>135</b>

# INTRODUÇÃO

Esta tese é dedicada ao estudo da existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções de alguns modelos hiperbólicos semi-lineares sujeitos a dissipações do tipo friccional e localizada.

Existem diversos trabalhos relacionados ao estudo do comportamento assintótico de equações de onda com dissipação do tipo friccional da forma  $au_t$  ou  $ag(u_t)$  no ambiente euclidiano ou Riemanniano. Em [60], são considerados sistemas não-lineares com dissipação localizada, enfraquecendo a condição geométrica usual na localização do termo de amortecimento e eliminando a hipótese de que o termo responsável pela dissipação tenha crescimento polinomial próximo da origem. Em Cavalcanti et. al. [26], [27] e [30], os autores investigaram a equação da onda com dissipação não-linear localizada. No primeiro artigo, os autores consideraram superfícies compactas, enquanto que nos outros dois artigos trabalharam com variedades compactas. Considerando a dissipação efetiva no complementar de um conjunto satisfazendo certas condições técnicas relacionadas a existência de multiplicadores, os autores provaram taxas de decaimento uniformes e ótimas em [27]. Já em [30], a taxa de decaimento ótima foi obtida sob uma região arbitrariamente pequena de controle baseada na construção de um multiplicador especial. Alabau-Boussouira em [3] exibiu taxas de decaimento ótimas ou quase-ótimas para a energia superior de uma classe de dissipações não-lineares variando de muito fraca até decaimento polinomial ou logarítmico-polinomial dos termos de dissipação próximos da origem. Em 2011, Alabau-Boussouira e Ammari [7] obtiveram taxas de decaimento de energia ótimas para os sistemas de dimensão infinita abstratos amortecidos com termos não-lineares, combinando condições geométricas ideais, conforme fornecido por Bardos et al. [14] com um método de convexidade de peso ideal de Alabau-Boussouira (veja [3] e [2]), uma abordagem que foi posteriormente estendida para a discretização uniforme de equações de evolução não linearmente amortecidas em [8]. Vários outros artigos sobre amortecimento de fricção merecem ser citados, entre eles, [16], [33], [37], [57], [72], [73] e [74].

Em [42] e [51], os autores descreveram a propagação de singularidades para uma equação

diferencial parcial  $Pu = 0 \in \mathcal{D}'$  em um domínio sem fronteira. Em particular, eles definiram o conjunto frente de ondas  $WF(u)$  de uma distribuição  $u \in \mathcal{D}'$ , o qual é um subconjunto do fibrado cotangente onde as singularidades podem se mover, e mostraram que o conjunto frente de ondas é invariante pelo fluxo Hamiltoniano  $H_p$  do símbolo principal  $p$  de  $P$ . Mais tarde, Hörmander [50] incorporou estes resultados em seu magnum opus *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. O capítulo 24 de [50] continua sendo uma referência essencial neste assunto. É bem conhecido que se  $P$  é um operador pseudo-diferencial próprio e clássico  $u \in \mathcal{D}'$  é tal que  $Pu \in C^\infty$ , então  $WF(u)$  é uma união de curvas integrais do Hamiltoniano de  $p$ . Inspirados pelos trabalhos mencionados, [20], [21] e [48] provaram um resultado análogo para uma medida microlocal de defeito  $\mu$  associada a uma sequência limitada em  $H_{loc}^1$  que converge fracamente para zero neste mesmo espaço. Sob certas condições, eles provaram que  $\text{supp}(\mu)$  é uma união de bicaracterísticas do símbolo principal  $p$  de um operador diferencial  $P$ . Este resultado desempenha um papel fundamental na teoria de controle e estabilização de equações de ondas.

O primeiro problema, objeto de estudo do Capítulo 2, consiste em provar a existência e unicidade de soluções fracas para o problema

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \text{div}(K(x)\nabla u) + v^2u + a(x)u_t - \gamma(x)v_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \rho(x)v_{tt} - \text{div}(K(x)\nabla v) + u^2v + b(x)v_t + \gamma(x)u_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

e além disso, que estas soluções decaem exponencialmente e uniformemente para zero, isto é, definindo

$$\begin{aligned} E_{u,v}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x)|u_t(x, t)|^2 + \rho(x)|v_t(x, t)|^2 + \nabla u(x, t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u(x, t) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v(x, t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x, t) + (uv)^2(x, t) dx, \end{aligned} \quad (0.2)$$

existem constantes positivas  $C, \gamma$ , tais que

$$E_u(t) \leq Ce^{-\gamma t} E_u(0), \text{ para todo } t \geq T_0, \quad (0.3)$$

para toda solução fraca do sistema (0.1) desde que os dados iniciais  $\{u_0, v_0, u_1, v_1\}$  sejam tomados em conjuntos limitados do espaço  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Este resultado é um resultado de estabilização local. De fato, as constantes  $C$  e  $\gamma$  são uniformes em toda bola do espaço de energia  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  com raio  $R > 0$  mas o resultado não garante que a taxa de decaimento seja global, isto é, que (0.3) seja válido com constantes positivas  $C$  e  $\gamma$  independentes do dado inicial.

O modelo proposto no sistema (0.1) é inspirado em um sistema introduzido por Segal em [77], dada por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + gv^2 u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + hu^2 v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (0.4)$$

o qual descreve a interação de campos escalares  $u, v$  com massas  $m_1, m_2$ , respectivamente, com constantes de interação  $g$  e  $h$ . Este sistema define o movimento de mésons carregados em um campo eletromagnético. Como o interesse do trabalho são as propriedades qualitativas desse sistema, não há perda de generalidade se considerarmos o caso em que  $m_1 = m_2 = 0$  e  $g = h = 1$ .

O problema (0.1), quando  $m_1 = m_2 = 0$  e  $g = h = 1$  com condições de fronteira do tipo Dirichlet em  $\partial\Omega$ , foi estudado por Medeiros e Menzala [67]. Neste artigo, os autores provaram a existência e unicidade de soluções fracas, pelo método de Galerkin, desde que  $d \leq 3$ . Algumas generalizações foram dadas em [68] e [69] utilizando o método de Galerkin, onde os autores consideraram não-linearidades da forma  $|v|^{\rho+2}|u|^\rho u$ ,  $|u|^{\rho+2}|v|^\rho v$  e algumas hipóteses sobre o coeficiente  $\rho$ , as quais são relacionadas com a dimensão do espaço. Relacionado a existência e unicidade de soluções globais também temos o artigo [9], onde os autores provam a existência e unicidade de soluções para um sistema de Klein-Gordon com memória e não-linearidades como aquelas consideradas em [68] e [69]. Outra generalização para esse sistema podem ser encontrada em [36], onde os autores consideram um sistema de Klein-Gordon do tipo  $k \times k$  com condições de fronteira do tipo acústica.

Em [44] o autor provou certas taxas de decaimento para as soluções do sistema de Klein-Gordon em  $\mathbb{R}^3$ , mais precisamente, se os dados são tomados em  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  então, toda

solução do sistema decai uniformemente em  $x$  a uma taxa de  $\mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}})$  quando  $|t| \rightarrow \infty$  e é assintótica a uma solução livre em  $t = \infty$  ou  $t = -\infty$ . Para obter esses resultados, o autor utilizou técnicas desenvolvidas por Morawetz e Strauss.

Também gostaríamos de citar os artigos [45] e [46]. Nesses trabalhos, foi estabelecida a estabilidade exponencial para o sistema (0.4) considerando duas dissipações do tipo friccional da forma  $a(x)u_t$  e  $b(x)v_t$ . Entranto, enfatizamos que nesses dois trabalhos o problema é estudado em um meio homogêneo, sem presença de coeficientes nas equações o que torna a análise mais simples já que as curvas bicaracterísticas são linhas retas.

Em [32], os autores consideraram um sistema de Klein-Gordon generalizado consistindo de duas equações semilineares contendo termos mistos degenerados, tornando o sistema do tipo hiperbólico-parabólico com dissipações na fronteira. Os autores provaram existência global de soluções e o decaimento uniforme das soluções.

Em [47], foi investigado a propriedade de decaimento no tempo para as soluções do problema (0.4). Os autores provaram que, na norma de  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$  as soluções apresentam um decaimento a uma taxa de  $\mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}})$  quando  $t \rightarrow +\infty$  desde que os dados iniciais sejam suficientemente pequenos. Após isso, o autor prova que as soluções de energia finita deste sistema tem decaimento local da energia quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Inspirados pelo trabalho de Dehman, G. Lebeau e Zuazua [40] damos uma prova direta da desigualdade de observabilidade associada ao problema (0.1), a saber, provamos que dado  $T \geq T_0$  existe uma constante positiva  $C = C(T)$  tal que

$$E_{u,v}(0) \leq C \int_0^T \int_\Omega (a(x)|u_t(x,t)|^2 + b(x)|v_t(x,t)|^2) dxdt, \quad (0.5)$$

para toda solução  $(u, v)$  do sistema (0.1), desde que os dados sejam tomados em conjuntos limitados do espaço  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Para provar (0.5) e portanto o resultado de estabilidade, argumentamos por contradição e encontramos uma sequência de soluções fracas  $\{w^n, z^n\}$  para o problema (0.1) tais que  $E_{w^n, z^n}(0) = 1$ . Para obter a contradição, precisamos provar que  $E_{w^n, z^n}(0) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Iremos provar, explorando as propriedades de  $K(x)$ ,  $a(x)$ ,  $b(x)$  e um princípio de

continuação única que

$$\int_0^T \int_{\omega} |w_t^n|^2 dx dt \rightarrow 0 \text{ e } \int_0^T \int_{\omega} |z_t^n|^2 dx dt \rightarrow 0 \quad (0.6)$$

quanto  $n$  tende ao infinito.

Nosso desejo é propagar a convergência (0.6) de  $\omega \times (0, T)$  para todo o conjunto  $\Omega \times (0, T)$ . Para fazer isso, utilizaremos algumas ferramentas de análise microlocal. De fato, consideraremos a medida microlocal de defeito  $\mu$ , introduzida por Gérard [48], associada as soluções do problema em estudo. Após provarmos que

$$\begin{aligned} \rho(x) \partial_t^2 w_t^n - \operatorname{div}(K(x) \nabla w_t^n) &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)), \\ \rho(x) \partial_t^2 z_t^n - \operatorname{div}(K(x) \nabla z_t^n) &\rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)), \end{aligned} \quad (0.7)$$

então, utilizando as propriedades de  $\mu$  podemos provar que  $\mu$  se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador de ondas  $\rho(x) \partial_{tt}^2 - \operatorname{div}(K(x) \nabla(\cdot))$  provando a convergência desejada. É importante observar que para evitar certas condições técnicas que poderiam surgir ao considerar a propagação até o bordo, consideramos  $\omega$ , a região onde a dissipação é efetiva, como uma vizinhança da fronteira do conjunto  $\Omega$  satisfazendo a condição geométrica de controle e assim, podemos utilizar os resultados encontrados em [21]. Essa ideia será exposta mais profundamente no capítulo 2.

Inspirados nos trabalhos [10], [11], tendo em mente que  $\rho \in C^\infty(\Omega)$  e  $\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0$ , também poderíamos reformular o problema (0.1) da seguinte forma. Fixado um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $(\Omega, G)$  com uma métrica Riemanniana  $G = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , denotemos  $G_{ij} = \langle \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j \rangle$  e  $G^{ij} = K_{ij}/\rho$  a matriz inversa de  $G_{ij}$  e definamos  $\rho = \sqrt{\det(G_{ij})}$ . O operador de Laplace-Beltrami neste sistema de coordenadas é dado por

$$\Delta_G u = \frac{1}{\sqrt{\det G_{ij}}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{\det G_{ij}} G^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\rho(x)} \operatorname{div}(K(x) \nabla u)$$

onde  $\nabla$  é o gradiente usual correspondente a métrica euclidiana no domínio  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Conseqüentemente,

$$\rho(x) \partial_t^2 u - \operatorname{div}[K(x) \nabla u] = 0 \Leftrightarrow \partial_t^2 u - \Delta_G u = 0, \quad G = (K/\rho)^{-1} \quad (0.8)$$

e a análise de (0.1) é equivalente ao seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_G u + \frac{1}{\rho(x)} v^2 u + \frac{1}{\rho(x)} a(x) u_t - \frac{1}{\rho(x)} \gamma(x) v_t = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} - \Delta_G v + \frac{1}{\rho(x)} u^2 v + \frac{1}{\rho(x)} b(x) v_t + \frac{1}{\rho(x)} \gamma(x) u_t = 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Para o segundo problema, estudado no capítulo 3, consideramos  $(M, \mathbf{g})$  uma variedade Riemanniana compacta  $d$ -dimensional ( $d \geq 2$ ) com fronteira suave  $\partial M$  onde  $\mathbf{g}$  denota a métrica Riemanniana de classe  $C^\infty$ . Denotando por  $\Delta_{\mathbf{g}}$  o operador de Laplace-Beltrami em  $M$ , estudamos a estabilidade assintótica do seguinte sistema de equações de onda:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u - \gamma(x) v_t + a(x) g(u_t) = 0 & \text{em } M \times (0, +\infty), \\ v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v + \gamma(x) u_t = 0 & \text{em } M \times (0, +\infty), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial M \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } M, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) & \text{em } M, \end{cases} \quad (0.9)$$

onde o coeficiente de dissipação  $a(x)$  é não negativo e efetivo em um subconjunto aberto próprio  $M_*$  (a ser definido posteriormente) de  $M$ . Sobre o coeficiente de acoplamento  $\gamma$ , supomos que existem duas constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $a(x)/c_1 \leq \gamma(x) \leq c_2 a(x)$  para quase todo  $x$  em  $M$ . Em particular, o coeficiente de acoplamento é efetivo somente onde a dissipação é efetiva. Além disso,  $g$  é uma função monótona crescente tal que  $A|s| \leq g(s) \leq B|s|$  para todo  $|s| \geq 1$  onde  $A$  e  $B$  são constante positivas.

Neste caso, somente uma equação terá dissipação e a dificuldade está em determinar se o efeito de dissipação fornecido por este único amortecimento é suficiente para estabilizar todo o sistema, já que a única dissipação é não linear e efetiva em uma sub-região a qual, sob certas condições, pode ser arbitrariamente pequena. A falta de dissipação em uma das equações pode ser compensada pelo efeito do acoplamento forte dado pelas velocidades. Entretanto, como o coeficiente de dissipação se anula em algumas partes do domínio, então nessas regiões uma das equações não é somente deixada sem dissipação mas também em certo sentido está desacoplada da equação com dissipação, tornando ainda mais difícil transferir as propriedades da equação com dissipação para todo o sistema.

O objetivo principal do capítulo 3 é mostrar que as soluções do problema (0.9) decaem uniformemente para zero. Para ser preciso, definindo

$$E_{u,v}(t) = \frac{1}{2} \int_M |u_t(x, t)|^2 + |v_t(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 + |\nabla v(x, t)|^2 dM$$

a energia associada ao problema (0.9), deduzimos que

$$E_{u,v}(t) \leq S \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right), \quad \forall t > T_0 \quad (0.10)$$

com  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = 0$ , onde o semigrupo  $S(t)$  é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0) \quad (0.11)$$

e  $q$  é uma função contínua e monótona crescente.

Para provar a taxa de decaimento dada em (0.10), provamos a seguinte desigualdade

$$E_{u,v}(T) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|u_t(x, t)|^2 + |g(u_t(x, t))|^2) dx dt, \quad \text{para todo } T \geq T_0, \quad (0.12)$$

onde  $C$  é uma constante positiva. A desigualdade acima é o ingrediente principal para se obter a taxa de decaimento dada em (0.10) considerando o método desenvolvido por Lasiecka e Tataru em [55], do qual é possível derivar taxas de decaimento explícitas da fórmula geral (0.10) (veja por exemplo, [2], [3], [24] e [29]).

Para alcançar a desigualdade de observabilidade (0.12), tomamos em vantagem dois ingrediente principais. Primeiro, utilizamos um multiplicador intrínseco construído por Cavalcanti et al. em [30]. Dado  $\varepsilon > 0$ , e  $u$  a solução do problema de valor inicial com condições de fronteira do tipo Dirichlet associado a equação da onda

$$u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u = f \text{ em } M \times (0, +\infty),$$

para qualquer  $f \in L^2(0, T; L^2(M))$ , o multiplicador é dado por  $\langle \nabla k, \nabla u \rangle$ , onde  $k : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave tal que sua Hessiana  $\nabla^2 k$  está intimamente relacionada com a função não linear  $g$  em um subconjunto aberto  $V \subset M$  que satisfaz  $\text{med}(V) \geq \text{med}(M) - \varepsilon$ ,  $\text{med}(V \cap \partial M) \geq \text{med}(\partial M) - \varepsilon$  e  $\langle \nabla k, \nabla u \rangle < 0$  sobre  $V \cap \partial M$ . Aplicando esse multiplicador especial e seguindo os argumentos descritos em [30], obtemos uma importante desigualdade

de energia para cada uma das equações de onda do sistema. O segundo passo é aplicar um multiplicador elíptico usado com sucesso antes por Alabau-Boussouira et. al. em [7], a fim de se beneficiar do acoplamento forte através das velocidades para finalmente se obter a desigualdade de observabilidade (0.12).

Sistemas onde apenas uma equação possui mecanismo de amortecimento foram estudados por diversos autores (veja por exemplo, [4], [5] e [6]), motivado pelo fato de que pode ser menos caro amortecer uma única equação do que amortecer cada equação ou, em algumas aplicações, pode não ser possível amortecer cada componente do sistema. Um sistema do tipo onda fortemente acoplado, conforme apresentado no capítulo 3, foi estudado recentemente por Alabau-Boussouira et. al. [7]. Os autores provaram, assumindo que o coeficiente de acoplamento e de amortecimento satisfazem a Condição Geométrica dos Multiplicadores por Partes, que todo o sistema decai tão rápido quanto uma equação amortecida. Portanto, o resultado apresentado no capítulo 3 generaliza esse resultado para variedades compactas. Observe que o resultado de estabilidade assintótica para o problema (0.9) em uma variedade Riemanniana  $(M, \mathbf{g})$  se aplica em particular considerando  $(\Omega, G)$  com métrica  $G = (K/\rho)^{-1}$  e pela equivalência dada em (0.8) para sistemas de equações de onda fortemente acoplados em um meio não-homogêneo. Esse sistema também foi investigado por Kapitonov em [53] com uma dissipação linear localmente distribuída, sob a condição de que os suportes dos coeficientes de acoplamento e de amortecimento coincidem, obtendo estabilização uniforme para a solução.

Por fim, ressaltamos que os resultados discutidos nos capítulos 2 e 3 estão publicados no artigo [25].

O terceiro problema, estudado no capítulo 4, aborda os resultados publicados no artigo [11], mais precisamente, consiste no estudo de uma equação da onda semilinear posta em um meio não-homogêneo sujeita a uma dissipação localmente distribuída do tipo Kelvin-Voigt

onde a função  $f$  tem crescimento sub-crítico de acordo com as imersões de Sobolev, a saber,

$$\begin{cases} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) - \operatorname{div}[a(x)\nabla \partial_t u] + b(x)\partial_t u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (0.13)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , é um domínio limitado com fronteira suficientemente regular  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  são funções de classe  $C^\infty$  tais que para todo  $x \in \Omega$  e  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \quad (0.14)$$

onde  $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$  são constantes positivas e  $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$  é uma matriz simétrica positiva definida. Denotamos por  $\omega$  a interseção de  $\Omega$  com uma vizinhança de  $\partial\Omega$  em  $\mathbb{R}^d$ .

O principal objetivo é provar que as soluções fracas do problema (0.13) decaem exponencialmente e uniformemente para zero, isto é, definindo

$$E_u(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho(x)|\partial_t u(x, t)|^2 + \nabla u(x, t)^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x, t)) \, dx + \int_{\Omega} F(u(x, t)) \, dx, \quad (0.15)$$

onde  $F(\lambda) = \int_0^\lambda f(s) \, ds$ , existem constantes positivas  $C, \gamma$ , tais que

$$E_u(t) \leq C e^{-\gamma t} E_u(0), \quad \forall t \geq T_0, \quad (0.16)$$

para toda solução fraca do problema (0.13) desde que os dados iniciais  $\{u_0, u_1\}$  sejam tomados em conjuntos limitados de  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Este é um resultado de estabilização local, as constantes  $C$  e  $\gamma$  são uniformes em toda bola do espaço de energia  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  com raio  $R > 0$  mas o resultado não garante que a taxa de decaimento seja global, isto é, que (0.16) seja válido com constantes positivas  $C$  e  $\gamma$  independentes do dado inicial.

Por simplicidade, podemos supor que  $\rho = 1$  e  $K(x) = I_d$  uma vez que os mesmos cálculos apresentados no capítulo 2 podem ser repetidos neste caso. Damos uma prova direta da desigualdade de observabilidade do problema (0.13), mais precisamente, mostramos que dado  $T > 0$  existe uma constante positiva  $C = C(T)$  tal que

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x)|\nabla u_t(x, t)|^2 + b(x)|u_t(x, t)|^2 \, dx dt, \quad (0.17)$$

para toda solução  $u$  do sistema (0.13), desde que os dados iniciais sejam tomados em conjuntos limitados de  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Existem duas dificuldades com relação ao problema (0.13). A primeira é que estamos trabalhando com uma dissipação viscoelástica do tipo Kelvin-Voigt localizada em uma vizinhança da fronteira do conjunto  $\Omega$ . Mesmo no caso  $f \equiv 0$ , este é um problema delicado, já que o operador que define a dissipação é não limitado. Além disso, como o termo de amortecimento é efetivo somente onde  $a(x) > 0$ , temos a interação entre um material elástico (subconjunto de  $\Omega$  onde  $a \equiv 0$ ) e um material viscoelástico (porção de  $\Omega$  onde  $a > 0$ ). A estabilidade do problema se torna suscetível a continuidade dos materiais, no sentido em que, já foi provado no caso unidimensional por Liu e Liu em [64] que se o coeficiente de dissipação  $a$  é descontínuo através da interface dos materiais, a energia não decai uniformemente. No caso de dimensões maiores, mesmo com uma dissipação mais regular e considerando dados iniciais mais suaves, como explanado em Liu e Rao [65], existe uma perda de regularidade das soluções, o que torna mais difícil o uso do método dos multiplicadores. Daí, a técnica dos multiplicadores deve ser utilizada com o auxílio de outros métodos com o intuito de superar essa dificuldade. O método então leva os autores imporem várias condições técnicas sobre o coeficiente de dissipação. No trabalho [82], o autor consegue enfraquecer algumas dessas condições sobre o coeficiente de amortecimento bem como sobre a região onde ele é efetivo. Entretanto, o autor ainda necessita de uma desigualdade envolvendo o gradiente da função  $a(\cdot)$ , o que não será necessário no nosso problema. Mais recentemente, Cavalcanti et. al. provaram em [32] um resultado para o problema (0.13), sem o termo  $f(u)$ , impondo certas condições nas regiões onde as dissipações são efetivas.

Além disso, foi provado por [19], no contexto de variedades com condições de controle perfeitas e imperfeitas, que a energia das soluções da equação da onda com dissipação do tipo Kelvin-Voigt decai exponencialmente, dado que a região onde a dissipação  $a$  satisfaz a (C.G.C.) é suave e  $|\partial^\alpha a(x)| \leq C_\alpha a^{\frac{k-|\alpha|}{k}}$ ,  $|\alpha| \leq 2$  para algum  $k > 2$  e a velocidade inicial é nula, isto é,  $u_t(x, 0) = 0$ . Os autores utilizaram métodos de análise semiclássica e a velocidade inicial nula parece essencial para se obter o resultado.

Por outro lado, precisamos impor condições suficientes sobre a não linearidade  $f$  para garantir a boa colocação e o decaimento exponencial da energia para as soluções do problema (0.13).

No capítulo 5, trabalhamos com uma equação da onda semi-linear com dissipação não-linear do tipo crítico/sub-crítico, a saber, consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (0.18)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) é um domínio limitado com fronteira suave  $\partial\Omega$  e  $f, g$  são funções a valores reais satisfazendo certas propriedades.

Associamos o seguinte funcional de energia ao problema (0.18):

$$E_u(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx, \quad (0.19)$$

onde  $F$  é a primitiva de  $f$ .

Para se obter a estabilização uniforme da energia não-linear  $E_u(t)$  associada ao problema (0.18), dois ingredientes são essenciais: (A): identidade da energia:

$$E_u(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u(x, t))\partial_t u(x, t) dx dt = E_u(t_1) \quad (0.20)$$

para todo  $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$  e (B): desigualdade de observabilidade: existe uma constante  $C = C(\|\{u_0, u_1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}) > 0$  tal que

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u|^2 + |g(\partial_t u)|^2) dx dt \quad (0.21)$$

é válido para todo  $T \geq T_0$ , onde  $T_0$  está associado com a condição geométrica de controle. A abordagem baseada nos ingredientes acima é uma estratégia bem conhecida na teoria da estabilização, como pode ser visto em [11], [38], [40], [52], [86] e em suas referências. Nestes artigos, os autores trabalham diretamente com o problema (0.18) e utilizam um princípio de continuação única como um ingrediente crucial para provar a desigualdade de observabilidade. No entanto, a abordagem direta tem um desafio que foi explicado em [40] da seguinte forma:

Primeiramente, argumenta-se por contradição que a observabilidade falha e, portanto, obtém-se uma sequência de soluções (adequadamente normalizadas) que violam a desigualdade desejada. Então, pela passagem ao limite, obtém-se uma função  $u$  no espaço de energia que resolve

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T) \quad (0.22)$$

com  $\partial_t u|_\omega \equiv 0$ . O objetivo é mostrar que (0.22) tem uma única solução e esta solução é a nula pois isto vai implicar que a única solução de (0.18) sem a dissipação é a nula, o que é um absurdo. Para isto, derivamos no tempo o problema (0.22) e definindo  $w = \partial_t u$  obtemos

$$\partial_t^2 w - \Delta w + f'(u)w = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T) \quad (0.23)$$

com  $w|_\omega \equiv 0$ . O próximo passo é aplicar o princípio de continuação única no problema (0.23), que possui um potencial de baixa ordem, para deduzir que  $w \equiv 0$ . Isto vai implicar que  $u$  é independente do tempo e portanto,  $u$  torna-se uma solução estacionária de um problema elítico semi-linear cuja solução é certamente a nula, graças ao sinal da não-linearidade. Alguns resultados de continuação única, assumindo condições de integrabilidade bastante fortes para o potencial, estão disponíveis na literatura [43], [76], [61], [80], [85]. Parte desses resultados são válidos apenas localmente, enquanto outros valem globalmente. No entanto, nenhum deles se aplica diretamente à classe da não-linearidade por causa das suposições menos restritivas no seu crescimento.

A dificuldade explicada acima com a abordagem direta foi tratada em [40] mostrando uma regularidade escondida do potencial  $f'(u)$  no caso em que o domínio é  $\Omega = \mathbb{R}^3$ . Para lidar com a mesma dificuldade em um domínio limitado arbitrário  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , primeiramente introduzimos uma sequência de problemas truncados, em vez de trabalhar diretamente no problema original (0.18):

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k + f_k(u_k) + a(x)g(\partial_t u_k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0,k}(x), \partial_t u_k(x, 0) = u_{1,k}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (0.24)$$

onde  $f_k$  será definida posteriormente é uma sequência de funções essencialmente limitadas e  $\{u_{0,k}, u_{1,k}\}$  é uma sequência de dados regulares que converge para  $\{u_0, u_1\}$  no espaço de fase.

---

Se mostrarmos que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_k$  possui uma regularidade forte, então podemos explorar propriedades adicionais do termo não linear  $f_k(u_k)$  utilizando estimativas de Strichartz que são válidas para soluções da equação de onda subcrítica. Tendo condições de integrabilidade sobre  $f'_k(u_k)$  podemos aplicar o princípio de continuação única para potenciais essencialmente limitados. Como a sequência de soluções do problema (0.24) converge para a solução do problema original (0.18), é suficiente obter a identidade de energia e a desigualdade de observabilidade para cada problema truncado já que as mesmas propriedades, bem como o decaimento, permanecem válidas para o problema original por meio de uma passagem ao limite e para isto, utilizaremos as ideias introduzidas em [22]. Uma vantagem da presente abordagem é que não precisamos utilizar o conceito de sequência linearizável devido a Gérard [49], que sob certas hipóteses assegura que as soluções da equação da onda semi-linear (sub-crítica) estão próximas das soluções da equação da onda linear sem dissipação. Deste modo, o capítulo 5 aborda uma classe mais ampla de dissipações e generaliza substancialmente os resultados de [11].

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

### 1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  pontos do  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$   $n$ -uplas de números inteiros não negativos. Considerando  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  e  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ , denotaremos o operador derivação em  $\mathbb{R}^n$  por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Definimos o *suporte* da função  $\varphi$  em  $\Omega$ , e denotamos por  $\text{supp}(\varphi)$ , o fecho em  $\Omega$  do conjunto  $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ . Quando  $\text{supp}(\varphi)$  é compacto, dizemos que  $\varphi$  tem suporte compacto em  $\Omega$ . Denotaremos por  $C_0^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que são infinitamente diferenciáveis em  $\Omega$  e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de  $\Omega$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$ , é o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sucessão  $\{\varphi_\nu\}$  de funções de  $C_0^\infty(\Omega)$  e  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  dizemos que

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto  $K$  de  $\Omega$  tal que

- (i)  $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu$  e  $\text{supp}(\varphi) \subset K$ ;
- (ii)  $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente sobre  $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Uma *distribuição* sobre  $\Omega$  é uma forma linear sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$  que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1). Denotaremos por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  o *espaço vetorial das distribuições* sobre  $\Omega$ . Diremos que  $\{T_\nu\}$ , uma sucessão de elementos de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , converge para  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,

e escreveremos

$$T_\nu \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição  $T$  sobre  $\Omega$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , a derivada distribucional de ordem  $\alpha$  da distribuição  $T$ , denotada por  $D^\alpha T$ , é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  possui derivada distribucional de todas as ordens,  $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua.

## 1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam  $\Omega$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  e  $p$  um número real tal que  $1 \leq p < \infty$ . Denotaremos por  $L^p(\Omega)$  o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis  $u$ , definidas em  $\Omega$  tais que  $|u|^p$  é Lebesgue integrável sobre  $\Omega$ .

O espaço  $L^p(\Omega)$  munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por  $L^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $u$  é mensurável e existe uma constante  $C$  tal que  $|u(x)| \leq C$  para quase todo  $x \in \Omega$ . Uma norma em  $L^\infty(\Omega)$  é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular,  $L^2(\Omega)$ , com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

e a norma  $\|u\|^2 = (u, u)$ , é um espaço de Hilbert.

Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Diz-se que  $p'$  é o *expoente conjugado* de  $p$  se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Proposição 1.1 (*Desigualdade de Young*)** *Se  $a$  e  $b$  são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^p}{p}$$

*sempre que  $1 < p, q < \infty$  e  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ .*

*A desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma*

$$ab \leq \varepsilon a^q + C(\varepsilon)b^p.$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Proposição 1.2 (*Desigualdade de Interpolação*)** *Se  $u \in L^{q'}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  com  $1 \leq q' \leq q \leq \infty$ , então  $u \in L^r(\Omega)$  para todo  $q' \leq r \leq q$  e verifica-se a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^{q'}}^{\alpha} \|u\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

*onde  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q'} + \frac{1-\alpha}{q}$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).*

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Proposição 1.3 (*Desigualdade de Hölder*)** *Sejam  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^{p'}(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então  $uv \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder generalizada)** *Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_k$  funções tais que  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , onde  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$ . Então o produto  $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$  e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Proposição 1.5 (Desigualdade de Minkowski)** *Sejam  $u, v \in L^p(\Omega)$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Ver [68]. ■

**Teorema 1.1 (Convergência Dominada de Lebesgue)** *Se uma sequência  $\{f_k\}$  de funções integráveis a Lebesgue num conjunto  $\Omega$  converge quase sempre em  $\Omega$  para um função  $f$ , e se  $|f_k| \leq \psi$ , quase sempre em  $\Omega$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , para um certa função  $\psi \in L^1(\Omega)$ , então a integral  $\int_{\Omega} f$  existe e*

$$\int_{\Omega} f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k dx.$$

**Demonstração:** Ver [68]. ■

Denota-se por  $L^p_{loc}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço das (classes de) funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|u|^p$  é Lebesgue integrável sobre cada subconjunto compacto de  $\Omega$ .

**Proposição 1.6 (Du Bois Raymond)** *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

*então  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Ver [23]. ■

**Lema 1.1 (Lema de Fatou)** *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções em  $L^1(\Omega)$  que satisfaz*

a) *para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \geq 0$  q.s. em  $\Omega$ ;*

b)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty$ .

*Para quase todo  $x \in \Omega$  definimos  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \infty$ . Então,  $f \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 1.2** *Considere  $1 \leq p \leq \infty$ . Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $L^p(\Omega)$  e seja  $f \in L^p(\Omega)$  tal que  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ . Então, existe uma subsequência  $(f_{n_k})$  e uma função  $h \in L^p(\Omega)$  tal que*

a)  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  q.s. em  $\Omega$ ;

b)  $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$  para todo  $k$ , q.s. em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Ver [18]. ■

## 1.3 Espaços de Sobolev

Sejam  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $m \geq 1$ . O espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  é o espaço vetorial de todas as funções de  $L^p(\Omega)$  tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para todo  $|\alpha| \leq m$ . Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Uma norma em  $W^{m,p}(\Omega)$  é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso  $p = 2$ , escreve-se  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  e, munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx,$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , como sendo fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ , ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando  $\Omega$  é limitado em alguma direção  $x_i$  de  $\mathbb{R}^n$  e  $1 \leq p < \infty$ , então a norma em  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , dada por

$$\|u\|^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p \, dx,$$

é equivalente a norma induzida por  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Representa-se por  $W^{-m,p'}(\Omega)$  o dual topológico de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , onde  $1 \leq p < \infty$  e  $p'$  é o índice conjugado de  $p$ . Por  $H^{-m}(\Omega)$  denota-se o dual topológico de  $H_0^m(\Omega)$ .

**Teorema 1.3** *Sejam  $\Omega$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $C^m$ , com fronteira limitada e  $m$  um inteiro tal que  $m \geq 1$ , e  $1 \leq p < \infty$ . Então temos as seguintes imersões contínuas:*

- (i) se  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$  então  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , onde  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ ;
- (ii) se  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$  então  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [p, +\infty[$ ;
- (iii) se  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$  então  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

**Demonstração:** Ver [18] ■

**Teorema 1.4 (Teorema de Rellich-Kondrachov)** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado bem regular do  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \geq 2$ . Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) *se  $p < n$  então  $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega)$ ,  $\forall 1 \leq q < \frac{np}{n-p}$ ;*

(ii) *se  $p = n$  então  $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, +\infty[$ ;*

(iii) *se  $p > n$  então  $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} C^0(\bar{\Omega})$ .*

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 1.5** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ , onde  $I$  é um intervalo limitado de  $\mathbb{R}$ . Então existe  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  tal que*

$$u = \tilde{u} \text{ q.s. em } I$$

e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt \text{ para todo } x, y \in \bar{I}.$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

## 1.4 Traço de uma função de $H^m(\Omega)$

Se  $u \in C(\bar{\Omega})$ , podemos obter os valores de  $u$  sobre a fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$ , basta para isto tomar a restrição  $u|_{\Gamma}$ . Entretanto, se  $u \in H^m(\Omega)$ , como a medida  $n$ -dimensional de  $\Gamma$  é zero, não tem sentido, a priori, falar dos valores de  $u$  em  $\Gamma$ . O objetivo da teoria de traço é dar um significado para  $u|_{\Gamma}$ .

Conforme explicitado em [23], se  $\Omega$  é um aberto suficientemente regular, existe uma única aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \\ u &\longmapsto \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}, \end{aligned}$$

denominada aplicação traço, que é linear, contínua, sobrejetiva, com núcleo  $H_0^m(\Omega)$ , verificando

$$\gamma u = \left( u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} |_{\Gamma} \right), \forall u \in D(\bar{\Omega}),$$

e admitindo uma inversa à direita  $\gamma^{-1}$  linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear

$$\gamma^{-1} : \prod_{j=0}^{m-1} H_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^m(\Omega),$$

que é contínua e satisfaz

$$\gamma(\gamma^{-1}\xi) = \xi, \forall \xi \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Tomando, em particular,  $m = 1$ , temos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u = u|_{\Gamma}, \end{aligned}$$

que é denominada aplicação traço de ordem zero.

Consideremos  $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ , onde  $\Omega$  é um aberto suficientemente regular, munido do produto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)},$$

o que o faz um espaço de Hilbert.

A aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_1 : D(\overline{\Omega}) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \end{aligned}$$

prolonga-se, por continuidade, a uma única aplicação linear e contínua  $\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ , posto que  $D(\overline{\Omega})$  é denso em  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ .

**Corolário 1.1** *A aplicação traço  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  é sobrejetiva e, além disso,*

$$\text{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega).$$

**Demonstração:** Ver [66]. ■

## 1.5 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca  $*$ , assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

Considerando  $E$  um espaço de Banach, a *topologia fraca*  $\sigma(E, E')$  sobre  $E$  é a topologia menos fina sobre  $E$  que torna contínuas todas as aplicações  $f \in E'$ .

Seja  $(x_n)$  uma sucessão convergente para  $x$  na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ . Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que  $(x_n)$  converge fraco para  $x$  esse fato denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

**Proposição 1.7** *Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão em  $E$ , então:*

- (i)  $x_n \rightharpoonup x$  em  $E$  se, e somente se,  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ ,  $\forall f \in E'$ ;
- (ii) Se  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ , então  $x_n \rightharpoonup x$  em  $E$ ;
- (iii) Se  $x_n \rightharpoonup x$  em  $E$ , então  $\|x\|_E$  é limitada e  $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$ ;
- (iv) Se  $x_n \rightharpoonup x$  em  $E$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $E'$ , então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

**Demonstração:** Ver [18]. ■

Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $x \in E$  fixo. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} J_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle, \end{aligned}$$

que é linear e contínua e portanto  $J_x \in E''$ ,  $\forall x \in E$ . Deste modo, definamos a aplicação  $J : E \rightarrow E''$  tal que  $J(x) = J_x$ , a qual é chamada de *injeção canônica* de  $E$  em  $E''$ .

A topologia fraca  $*$ , ou  $\sigma(E', E)$ , é a topologia menos fina sobre  $E'$  que faz contínuas todas as aplicações  $J_x$ .

Seja  $(f_n)$  uma sucessão convergente para  $f$  na topologia fraca  $\ast \sigma(E, E')$ . Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que  $\{f_n\}$  converge fraco  $\ast$  para  $f$ , ou simbolicamente

$$f_n \xrightarrow{\ast} f \text{ em } E',$$

quando não houver possibilidade de confusão.

**Proposição 1.8** *Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão em  $E'$ , então:*

- (i)  $f_n \xrightarrow{\ast} f$  em  $E'$  se, e somente se,  $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ ,  $\forall x \in E$ ;
- (ii) Se  $f_n \rightarrow f$  forte, então  $f_n \rightharpoonup f$  em  $\sigma(E', E'')$ ;
- (iii) Se  $f_n \rightharpoonup f$  em  $\sigma(E', E'')$ , então  $f_n \xrightarrow{\ast} f$  em  $E'$ ;
- (iv) Se  $f_n \xrightarrow{\ast} f$  em  $E'$ , então  $\|f_n\|_{E'}$  é limitada e  $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$ ;
- (v) Se  $f_n \xrightarrow{\ast} f$  em  $E'$  e  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ , então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

**Demonstração:** Ver [18]. ■

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica  $J : E \rightarrow E''$  é sobrejetora. Um espaço métrico  $E$  é dito *separável* quando existe um subconjunto  $M \subset E$  enumerável e denso em  $E$ .

**Teorema 1.6** *Seja  $E$  um espaço de Banach tal que  $E'$  é separável. Então  $E$  é separável.*

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 1.7** *Seja  $E$  um espaço de Banach separável e seja  $(f_n)$  uma sequência limitada em  $E'$ . Então existe uma subsequência  $(f_{n_k})$  que converge na topologia fraca  $\ast$  ( $\sigma(E', E)$ ).*

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 1.8** *Seja  $E$  um espaço de Banach reflexivo e seja  $(x_n)$  um sequência limitada em  $E$ . Então existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  que converge na topologia fraca ( $\sigma(E, E')$ ).*

**Demonstração:** Ver [18]. ■

## 1.6 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar espaços envolvendo as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido a problemas de evolução.

Para  $t \in (0, T)$  fixo, interpretamos a função  $x \mapsto u(x, t)$  como um elemento do espaço  $X$ . Denotaremos este elemento como  $u(t) \in X$  com valores no espaço  $X$ .

Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

O espaço  $L^p(a, b; X)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , consiste das funções (classes) mensuráveis sobre  $[a, b]$  com imagem em  $X$ , ou seja, as funções  $u : (a, b) \rightarrow X$  tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left( \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço  $L^\infty(a, b; X)$  consiste das funções (classes) mensuráveis sobre  $[a, b]$  com imagem em  $X$ , isto é, as funções  $u : (a, b) \rightarrow X$  limitadas quase sempre em  $(a, b)$ . A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

O espaço  $C^m(a, b; X)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , consiste de todas as funções contínuas  $u : [a, b] \rightarrow X$  que possuem derivadas contínuas até a ordem  $m$  sobre  $[a, b]$ . A norma, neste caso, é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

**Proposição 1.9** *Sejam  $m = 0, 1, \dots$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $X$  e  $Y$  espaços de Banach.*

- (a)  $C^m(a, b; X)$  é um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$ .
- (b)  $L^p(a, b; X)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  e  $L^\infty(a, b; X)$  são espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ .
- (c)  $C(a, b; X)$  é denso  $L^p(a, b; X)$  e a imersão  $C(a, b; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$  é contínua.

(d) Se  $X$  é um espaço de Hilbert com produto interno  $(\cdot, \cdot)_X$  então  $L^2(a, b; X)$  é também um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{L^2(a, b; X)} := \int_{\Omega} (u(t), v(t))_X dt.$$

(e)  $L^p(a, b; X)$  é separável se  $X$  for separável e  $1 \leq p < +\infty$ .

(f) O espaço  $L^p(a, b; X)$  é reflexivo se  $1 < p < \infty$ .

(g) Se  $X \hookrightarrow Y$ , então  $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$ ,  $1 \leq q \leq r \leq +\infty$ .

**Demonstração:** Ver [84]. ■

**Proposição 1.10** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $1 \leq p \leq +\infty$ . Se  $f \in L^1(0, T; X)$  e  $\|f\|_X \in L^p(0, T)$ , então  $f \in L^p(0, T; X)$  e  $\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \|f\|_{L^p(0, T)}$ .*

**Demonstração:** Ver [78]. ■

O espaço dual de  $L^p(a, b; X)$ . Consideremos  $Y = L^p(a, b; X)$ . Temos a seguinte relação de dualidade  $Y' = L^q(a, b; X')$ , com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , devido ao seguinte teorema:

**Teorema 1.9** *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e separável,  $1 < p < +\infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então cada função  $v \in L^q(a, b; X')$  corresponde a um único funcional  $\bar{v} \in Y'$  dada por*

$$\langle \bar{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt, \quad \forall u \in Y. \quad (1.2)$$

*Reciprocamente, para cada  $\bar{v} \in Y'$  corresponde exatamente uma função  $v \in L^q(a, b; X')$  dada por (1.2). Além disso,*

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a, b; X')}.$$

**Demonstração:** Ver [84]. ■

Seja  $X$  um espaço de Banach. Denotaremos por  $\mathcal{D}(a, b; X)$  o espaço localmente convexo e completo das funções vetoriais  $\varphi : (a, b) \rightarrow X$  infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $(a, b)$ . Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(a, b; X)$$

se:

- (i) Existe um compacto  $K$  de  $(a, b)$  tal que  $\text{supp}(\varphi_\nu)$  e  $\text{supp}(\varphi)$  estão contidos em  $K$ , para todo  $\nu$ ;
- (ii) Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \rightarrow \frac{d^k}{dt^k}\varphi$  em  $X$ , uniformemente em  $t \in (a, b)$ .

O espaço das aplicações lineares contínuas de  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a, b; \mathbb{R})$  em  $X$  será denotado por  $\mathcal{D}'(a, b; X)$ , ou seja,  $S \in \mathcal{D}'(a, b; X)$  se  $S : \mathcal{D}(a, b) \rightarrow X$  é linear e se  $\theta_\nu \rightarrow \theta$  em  $\mathcal{D}(a, b)$  implicar que  $\langle S, \theta_\nu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$  em  $X$ . Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(a, b; X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle \text{ em } X, \forall \theta \in \mathcal{D}(a, b).$$

O espaço  $\mathcal{D}(a, b; X)$  munido da convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais* de  $(a, b)$  com valores em  $X$ .

Denotaremos por  $H_0^1(a, b; X)$  o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a, b; X) := \{v \in L^2(a, b; X); v' \in L^2(a, b; X); v(a) = v(b) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$((w, v)) = \int_a^b (w(t), v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t), v'(t))_X dt.$$

**Proposição 1.11** *Seja  $u \in L^2(a, b; X)$ . Então existe um único  $f \in H^{-1}(a, b; X)$  que verifica*

$$\langle f, \theta \xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a, b); \quad \forall \xi \in X.$$

**Demonstração:** [70]. ■

**Observação 1.1** *Da proposição anterior podemos identificar  $f$  com  $u'$ , de posse disso, diremos que se  $u \in L^2(a, b; X)$  então  $u' \in H^{-1}(a, b; X)$ .*

**Proposição 1.12** *A aplicação*

$$\begin{aligned} g : L^2(a, b; X) &\longrightarrow H^{-1}(a, b; X) \\ u &\longmapsto g(u) = u', \end{aligned}$$

onde  $X$  é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

**Demonstração:** Ver [70]. ■

## 1.7 Resultados Auxiliares

No que segue, uma expressão da forma  $a(s) \lesssim b(s)$  significa que  $a(s) \leq Cb(s)$ , onde  $C > 0$  é uma constante positiva que não depende de  $s$ . Mais ainda,  $a(s) \sim b(s)$  é utilizado quando  $a(s) \lesssim b(s)$  e  $b(s) \lesssim a(s)$ .

**Teorema 1.10 (Fórmulas de Green)**

1. Se  $\gamma \in H^2(\Omega)$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla \gamma \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta \gamma dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. Se  $u, \gamma \in H^2(\Omega)$ , então

$$\int_{\Omega} u \Delta \gamma - \gamma \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

**Demonstração:** Ver [18] p.316. ■

**Teorema 1.11 (Teorema da Compacidade de Aubin-Lions-Simon)** *Sejam  $B_0, B$  e  $B_1$  espaços de Banach tais que  $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$  e:*

(i) *A imersão  $B_0 \hookrightarrow B$  é compacta;*

(ii) *A imersão  $B \hookrightarrow B_1$  é contínua.*

Definamos

$$W = \{u \in L^p(]0, T[; B_0); u' \in L^r(]0, T[; B_1)\},$$

onde  $1 \leq p, r \leq \infty$ . Consideremos  $W$  munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(]0, T[; B_0)} + \|u'\|_{L^r(]0, T[; B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então, se  $p < \infty$  a imersão de  $W$  em  $L^p(]0, T[; B)$  é compacta. Se  $p = \infty$  e se  $r > 1$ , a imersão de  $W$  em  $C(]0, T[; B_1)$  é compacta.

**Demonstração:** Ver [17]. ■

**Lema 1.2 (Strauss)** *Seja  $\mathcal{O}$  uma subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ ,  $1 < q < +\infty$  e  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência limitada em  $L^q(\mathcal{O})$ . Se  $u_n \rightarrow u$  q.s. em  $\mathcal{O}$ , então  $u \in L^q(\mathcal{O})$  e  $u_n \rightharpoonup u$  em  $L^q(\mathcal{O})$ . Além disso, se  $1 \leq r < q$ , também temos que  $u_n \rightarrow u$  fortemente em  $L^r(\mathcal{O})$ .*

**Demonstração:** Ver Exercício 4.16 em [18] ou [79]. ■

**Teorema 1.12 (Lema de Lions)** *Seja  $(u_\mu)$  uma sucessão de funções pertencentes a  $L^q(Q)$  com  $1 < q < \infty$ . Se*

(i)  $u_\mu \rightarrow u$  quase sempre em  $Q$ ;

(ii)  $\|u_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$ ;

então  $u_\mu \rightharpoonup u$  fraco em  $L^q(Q)$ .

**Demonstração:** Ver [62] p. 12. ■

**Lema 1.3** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach e assumamos que a imersão de  $X$  em  $Y$  é contínua e injetora e que  $X$  é reflexivo. Seja  $C_s(0, T; Y)$  o espaço das funções  $f \in L^\infty(0, T; Y)$  que são escalarmente contínuas, isto é, a aplicação  $t \mapsto \langle f(t), y' \rangle$  é contínua para cada  $y' \in Y'$ , onde  $Y'$  é o dual de  $Y$ . Então,  $L^\infty(0, T; X) \cap C_s(0, T; Y) = C_s(0, T; X)$*

**Demonstração:** Ver [63]. ■

**Lema 1.4** Se  $f \in L^p(0, T; X)$  e  $\partial f / \partial t \in L^p(0, T; X)$  com  $(1 \leq p \leq \infty)$  então  $f \in C(0, T; X)$ .

**Demonstração:** Ver [62]. ■

**Definição 1.1** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear  $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é

(i) contínua se existe uma constante  $C$  tal que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H \text{ e}$$

(ii) coerciva se existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2, \quad \forall v \in H.$$

**Teorema 1.13 (Lax-Milgram)** Seja  $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda  $\varphi \in H'$ , existe um único  $u \in H$  tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se  $a$  é simétrica, então  $u$  se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 1.14 (Desigualdade de Poincaré)** Suponhamos que  $\Omega$  seja um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ , então, para todo  $1 \leq p < \infty$ , existe uma constante  $C$  (dependendo da medida de  $\Omega$  e de  $p$ .) tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Demonstração:** Ver [18]. ■

**Teorema 1.15 (Stampacchia)** *Seja  $G$  uma função Lipschitziana em  $\mathbb{R}$  tal que  $G(0) = 0$ . Então, se  $\Omega$  é limitado,  $1 < p < \infty$  e  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , temos que  $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

**Demonstração:** Ver [54]. ■

**Proposição 1.13 (Desigualdade de Jensen)** *Seja  $B$  um hipercubo do  $\mathbb{R}^n$ , então, para toda função côncava  $F$  e toda função integrável  $g \in L^1(B)$ , teremos*

$$F\left(\frac{1}{\text{med}B} \int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{\text{med}B} \int_B F(g(x))dx.$$

**Demonstração:** Ver [75]. ■

**Teorema 1.16 (Estimativas de Strichartz)** *Seja  $(\Omega, g)$  uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 3 com fronteira,  $T > 0$  e  $(q, r)$  satisfazendo*

$$\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}, \quad q \in \left[\frac{7}{2}, \infty\right]. \quad (1.3)$$

*Então existe  $C = C(T, q) > 0$  tal que para cada  $G \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$  e cada  $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , a solução  $u$  de*

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_g u &= G(t) \\ (u, \partial_t u)(0) &= (u_0, u_1) \end{aligned}$$

*satisfaz a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))} \leq C \left( \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|G\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right). \quad (1.4)$$

**Demonstração:** Ver [15]. ■

## 1.8 Resultados Utilizados de Semigrupos

**Definição 1.2** *Seja  $X$  um espaço vetorial e  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  uma função. Então,*

a)  $f$  é dita própria se existe  $x \in X$  tal que  $f(x) < \infty$ ;

b) o conjunto  $D_e(f) = \{x \in X : f(x) < \infty\}$  é chamado de domínio efetivo da função  $f$ .

**Definição 1.3** Seja  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  um função própria. Dizemos que  $f$  é semicontínua inferiormente (s.c.i) em  $x_0 \in X$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma vizinhança  $U_{x_0}$  tal que  $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$  para todo  $x \in U_{x_0}$  quando  $x_0 \in D_e(f)$ . Dizemos que  $f$  é semicontínua em  $X$  se ela é s.c.i em cada ponto de  $X$ .

**Proposição 1.14** Seja  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:

a)  $f$  é s.c.i;

b) Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto de nível  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  é fechado.

**Demonstração:** Ver [1] página 80. ■

**Definição 1.4** Seja  $X$  um espaço vetorial e  $A$  um subconjunto convexo de  $X$ . Uma função  $f : A \rightarrow (-\infty, \infty]$  é dita convexa se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

para todo  $x, y \in A$  e  $t \in [0, 1]$ .

**Definição 1.5** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. A aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é dita Gateaux diferenciável em  $x \in X$  se existe uma aplicação  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = Ty,$$

para todo  $y \in X$ . A aplicação  $T$  é única e é denotada por  $f'(x)$  e dizemos que  $f$  é  $G$ -diferenciável em  $x$ .

**Proposição 1.15 (Kachurovskii)** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $A$  um subconjunto convexo de  $X$ . Considere  $f : A \rightarrow (-\infty, \infty]$  uma função  $G$ -diferenciável em cada ponto  $u \in A$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $f$  é convexa;
- b)  $f'(u)(v - u) \leq f(v) - f(u)$  para todo  $u, v \in A$ ;
- c)  $(f'(u) - f'(v))(u - v) \geq 0$  para todo  $u, v \in A$ .

**Demonstração:** Ver [83] página 80. ■

**Definição 1.6** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais. Um elemento do espaço produto  $X \times Y$  será escrito na forma  $[x, y]$  para  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Um operador  $A$  de  $X$  em  $Y$  será um subconjunto de  $X \times Y$ . Se  $A \subset X \times Y$ , definimos:*

$$\begin{aligned} Ax &= \{y \in Y : [x, y] \in A\} \\ \mathcal{D}(A) &= \{x \in X : Ax \neq \emptyset\} \\ \mathcal{R}(A) &= \bigcup_{x \in \mathcal{D}(A)} Ax \\ A^{-1} &= \{[y, x] : [x, y] \in A\} \end{aligned}$$

Se  $A, B \subset X \times Y$ , e  $\lambda$  é um número real, definimos

$$\lambda A = \{[x, \lambda y] : [x, y] \in A\} \tag{1.5}$$

$$A + B = \{[x, y + z] : [x, y] \in A, [y, z] \in B\}. \tag{1.6}$$

O operador será dito unívoco se  $\#\{y \in Y : y \in Ax\} = 1$ .

Daqui em diante,  $X$  será um espaço de Banach e  $X^*$  denotará seu dual.

**Definição 1.7** *Um conjunto  $A \subset X \times X^*$  é chamado monótono se*

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle_{X, X^*} \geq 0,$$

para todo  $[x_i, y_i] \in A$ ,  $i = 1, 2$ .

**Definição 1.8** Um subconjunto de  $X \times X^*$  é dito maximal monótono se não está propriamente contido em qualquer outro subconjunto monótono de  $X \times X^*$ .

**Observação 1.2** Se  $A$  é um operador de  $X$  em  $X^*$  unívoco então a condição de monotonicidade torna-se

$$\langle x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2 \rangle_{X, X^*} \geq 0,$$

para todo  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ .

**Definição 1.9** Seja  $A$  um operador de  $X$  em  $X^*$  unívoco. Dizemos que  $A$  é fortemente monótono em  $X$  se existe uma constante positiva  $c > 0$  tal que

$$\langle x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2 \rangle_{X, X^*} \geq c \|x_1 - x_2\|_X^2,$$

para todo  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ .

**Definição 1.10** Seja  $A$  um operador de  $X$  em  $X^*$  unívoco tal que  $\mathcal{D}(A) = X$ . Dizemos que  $A$  é hemicontínuo em  $X$  se

$$\lim_{t \rightarrow 0} A(x + ty) \rightharpoonup Ax.$$

**Definição 1.11** Um operador  $A : X \rightarrow X^*$  é dito coercivo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle x_n, x_n^* \rangle_{X, X^*}}{\|x_n\|_X} = \infty,$$

para todo  $[x_n, x_n^*] \in A$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$ .

**Definição 1.12** Dada uma função convexa e própria  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  e um ponto  $x \in X$ , denotamos por  $\partial\varphi(x)$  o conjunto

$$\partial\varphi(x) = \{x^* \in X^* : \varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle x - y, x^* \rangle_{X, X^*}, \text{ para todo } y \in X\}.$$

Tais elementos  $x^*$  são chamados de sub-gradientes de  $\varphi$  em  $x$ , e  $\partial\varphi(x)$  é chamado de sub-diferencial de  $\varphi$  em  $x$ .

**Observação 1.3** *É óbvio que  $\partial\varphi : X \rightarrow X^*$  é um operador monótono.*

**Lema 1.5** *Seja  $\varphi$  uma função  $G$ -diferenciável em  $x \in D_e(\varphi)$ . Então,  $\partial\varphi(x)$  consiste de um único elemento, a saber, a diferencial de Gateaux de  $\varphi$  em  $x$ .*

**Demonstração:** Ver [83] página 81. ■

**Proposição 1.16** *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $A$  um subconjunto coercivo e maximal monótono de  $X \times X^*$ . Então  $A$  é sobrejetor, isto é,  $\mathcal{R}(A) = X^*$ .*

**Demonstração:** Ver [12] página 45. ■

**Teorema 1.17** *Seja  $X$  um espaço de Banach real. Se  $\varphi$  é um função s.c.i própria e convexa em  $X$ , então  $\partial\varphi$  é um operador maximal monótono de  $X$  em  $X^*$ .*

**Demonstração:** Ver [13] página 54. ■

**Teorema 1.18** *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $B : X \rightarrow X^*$  um operador monótono e hemicontínuo. Então,  $B$  é maximal monótono em  $X \times X^*$ .*

**Demonstração:** Ver [12] página 45. ■

**Teorema 1.19** *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e sejam  $A$  e  $B$  operadores maximais monótonos de  $X \times X^*$  tais que  $\text{int}(\mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{D}(B) \neq \emptyset$ . Então,  $A + B$  é maximal monótono em  $X \times X^*$ .*

**Demonstração:** Ver [12] página 54. ■

**Lema 1.6** *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^d$ . Se  $w \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$  são tais que  $w(x)u(x) \geq -|h(x)|$  q.s. em  $\Omega$  para alguma função  $h \in L^1(\Omega)$ , então  $wu \in L^1(\Omega)$  e*

$$\langle w, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} w(x)u(x)dx.$$

**Demonstração:** Ver [12] página 89. ■

Seja  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  um operador maximal monótono no espaço de Hilbert  $H$ . Denotamos o produto interno de  $H$  por  $(\cdot, \cdot)$  e a norma correspondente por  $\|\cdot\|$ . Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$u_t + Au + Bu \ni f \text{ e } u(0) = u_0 \in H. \quad (1.7)$$

onde  $B : H \rightarrow H$  é um operador localmente Lipschitz, isto é,

$$\|Bu - Bv\| \leq L(K)\|u - v\|$$

desde que  $\|u\|, \|v\| \leq K$ .

Então, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.20** *Suponha que  $A$  é um operador maximal monótono e que  $A0 \ni 0$ . Assumindo que  $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ ,  $f \in W^{1,1}(0, t; H)$  para todo  $t > 0$  e que a aplicação  $B : H \rightarrow H$  é localmente Lipschitz, existe  $t_{\max} \leq \infty$  tal que o problema (1.7) admite uma única solução forte  $u$  no intervalo  $[0, t_{\max})$ , ou seja,  $u \in W^{1,\infty}(0, t_{\max}; H)$  e  $u(t) \in \mathcal{D}(A)$  para todo  $t > 0$ . Além disso, se  $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$  obtemos uma única solução generalizada  $u \in C([0, t_{\max}; H)$  para o problema (1.7). Em ambos os casos, temos que  $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty$  desde que  $t_{\max} < \infty$ .*

**Demonstração:** Ver [35]. ■

**Lema 1.7** *Seja  $p$  uma função positiva, crescente tal que  $p(0) = 0$ . Então, a função  $q$  definida por  $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$  é crescente. Seja  $s_m$  uma seqüência de números positivos satisfazendo*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então,  $s_m \leq S(m)$  onde  $S(t)$  é uma solução da EDO

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

Mais ainda, se  $p(x) > 0$  para  $x > 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ .

**Demonstração:** Ver [55]. ■

**Teorema 1.21** *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador dissipativo com  $\text{Im}(I - A) = X$ . Se  $X$  é reflexivo então  $\overline{D(A)} = X$ .*

**Demonstração:** Ver [71] página 16. ■

Dizemos que  $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$  satisfaz a condição de ser localmente Lipschitz em  $u$ , uniformemente em  $t$  sobre intervalos limitados se para cada  $t' \geq 0$  e cada  $c \geq 0$  existe uma constante  $L(c, t')$  tal que  $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L(c, t')\|u - v\|$  é válido para todo  $u, v \in X$  com  $\|u\| \leq c, \|v\| \leq c$  e  $t \in [0, t']$ .

**Teorema 1.22** *Seja  $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$  contínua em  $t$  para  $t \geq 0$  e localmente Lipschitz em  $u$ , uniformemente em  $t$  em intervalos limitados. Se  $-A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $T(t)$  em  $X$  então para cada  $u_0 \in X$  existe um  $t_{max} \leq \infty$  tal que o problema*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

tem uma única solução mild  $u$  em  $[0, t_{max}[$ . Mais ainda, se  $t_{max} < \infty$  então  $\lim_{t \rightarrow t_{max}} \|u(t)\| = \infty$ .

**Demonstração:** Ver [71] página 185. ■

Dizemos que uma função  $F : X \rightarrow X$  é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de  $X$  se para todo  $M > 0$  existe uma constante  $L(M)$  tal que  $\|F(y) - F(x)\| \leq L(M)\|y - x\|$ , para todo  $x, y \in X$  tais que  $\|x\| \leq M, \|y\| \leq M$ .

**Teorema 1.23** *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $-A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $T(t)$  em  $X$  e  $F : X \rightarrow X$  uma função Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de  $X$ . Considere  $T > 0$  e  $x \in X$  e  $u \in C([0, T], X)$  uma função satisfazendo  $u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds$  para cada  $t \in [0, T]$ . Se  $x \in D(A)$  então  $u$  é solução do*

problema

$$\begin{cases} u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X) \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(t, u(t)), \quad t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.9)$$

**Demonstração:** Ver [34] página 60. ■

## 1.9 Análise Microlocal

Iniciamos esta seção anunciando alguns resultados devido a Burq e Gérard em [21] e Gérard em [48].

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.13** *Seja  $m \in \mathbb{R}$ . Definimos um **símbolo de ordem**  $m$  em  $\Omega$  como uma função  $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$ , com suporte em  $K \times \mathbb{R}^n$ , onde  $K$  é um subconjunto compacto de  $\Omega$ , que satisfaz a seguinte estimativa: para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^n$ , existe uma constante  $C_{\alpha, \beta} > 0$  tal que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}.$$

Denotamos por  $S_c^m(\Omega)$  o espaço vetorial dos símbolos de ordem no máximo  $m$  em  $\Omega$ .

**Proposição 1.17** *Se  $a \in S_c^m(\Omega)$ , a fórmula*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad (1.10)$$

define, para todo  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , um elemento  $Au$  de  $C_0^\infty(\Omega)$ .

A fórmula (1.10) define uma aplicação linear  $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C_0^\infty(\Omega)$ , a qual chamaremos de **operador pseudodiferencial** de símbolo  $a$ . Dizemos que o operador pseudodiferencial  $A$  admite um símbolo principal, denotado por  $\sigma_m(A)$ , se existe uma função  $a_m = \sigma_m(A) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$  com suporte, na primeira variável, compacto em  $K \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  e

homogênea de ordem  $m$ , na segunda variável, tal que, se  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  valendo 0 em uma vizinhança da origem e 1 fora de um compacto suficientemente grande, segue que,

$$a(x, \xi) = a_m(x, \xi)\chi(\xi) + r(x, \xi),$$

onde  $r \in S_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ . Nestas condições,  $a_m = \sigma_m(A)$  é chamado de símbolo principal de  $A$ .

Observe que, no caso em que  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$  a aplicação  $a \mapsto A$  não é injetora, isto é, um operador pseudodiferencial não é definido unicamente por um símbolo, por outro lado, é possível provar a unicidade do símbolo principal.

Apesar de termos definido operadores pseudodiferenciais sobre o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ , é possível estender a ação de operadores pseudodiferenciais a espaços de Sobolev. Considerando  $K$  um subconjunto compacto contido em  $\Omega$  e  $s \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $H_K^s(\Omega)$  o espaço das distribuições com suporte compacto em  $K$ , onde o prolongamento com 0 fora de  $\Omega$  está em  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . Denotamos por  $H_{comp}^s(\Omega) = \bigcup_K H_K^s(\Omega)$ , onde  $K$  é tomado sobre todos os compactos de  $\Omega$ .

**Teorema 1.24** *Seja  $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$  e seja  $K$  a projeção sobre  $\Omega$  do suporte de  $a$ . Então, para todo real  $s$ , o operador definido em (1.10) se prolonga de forma única em uma aplicação linear e contínua de  $H_{comp}^s(\Omega)$  em  $H_K^{s-m}(\Omega)$ .*

Vamos introduzir, agora, o conceito de medida microlocal de defeito, para tal, seja  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência limitada em  $L_{loc}^2(\Omega)$ , i.e.,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_K |u_k(x)|^2 dx < +\infty,$$

para todo subconjunto compacto  $K$  contido em  $\Omega$ .

Dizemos que  $u_k$  converge fracamente para  $u \in L_{loc}^2(\Omega)$  quando, para todo  $f \in L_{comp}^2(\Omega)$  tem-se

$$\int_\Omega u_k(x) f(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_\Omega u(x) f(x) dx.$$

**Teorema 1.25** *Seja  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma seqüência limitada em  $L^2_{loc}(\Omega)$  que converge fracamente para zero em  $L^2_{loc}(\Omega)$ . Então existe uma subseqüência  $\{u_k\}$  e uma medida positiva de Radon  $\mu$  sobre  $T^1\Omega := \Omega \times S^{n-1}$  tal que para todo operador pseudodiferencial  $A$  de ordem 0 sobre  $\Omega$  que admite um símbolo principal  $\sigma_0(A)$  e para todo  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$ , tem-se*

$$(A(\chi u_k), \chi u_k)_{L^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times S^{n-1}} \sigma_0(A)(x, \xi) d\mu(x, \xi). \quad (1.11)$$

**Definição 1.14** *Sob as circunstâncias do Teorema 1.25,  $\mu$  é chamada de **medida de defeito microlocal** (m.d.m.) da seqüência  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .*

**Observação 1.4** *O Teorema 1.25 assegura, para toda seqüência limitada  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  em  $L^2_{loc}(\Omega)$  que converge fracamente para zero, a existência de uma subseqüência admitindo uma medida de defeito microlocal. Observamos que de (1.11), em particular quando  $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$ ,*

$$\int_{\Omega} f(x) |u_k(x)|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} f(x) d\mu(x, \xi), \quad (1.12)$$

*assim  $u_k$  converge fortemente para 0 se, e somente se,  $\mu = 0$ .*

**Observação 1.5** *Observe que dadas duas seqüências  $(y^k)$  e  $(x^k)$  limitadas em  $L^2_{loc}(\Omega)$  convergindo fraco para zero, podemos associar a estas seqüências, mesmo passando a uma subseqüência, medidas microlocais de defeito  $\mu_y$  e  $\mu_x$ , respectivamente. Afirmamos que, se  $y^k - x^k \rightarrow 0$  em  $L^2_{loc}(\Omega)$ , então  $\mu_y = \mu_x$ .*

De fato, dado  $A$  um operador pseudodiferencial de ordem zero e  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$  uma função nas condições do Teorema 1.25, temos

$$\begin{aligned} (A(\chi x^k), \chi x^k) &\rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_x, \\ (A(\chi y^k), \chi y^k) &\rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_y, \end{aligned}$$

com  $\sigma_0(A)$  sendo o símbolo principal de  $A$ . Isto nos leva a

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y). \quad (1.13)$$

Por hipótese temos que  $x^k - y^k \rightarrow 0$  em  $L^2_{loc}(\Omega)$  e, como  $A\chi$  é um operador contínuo em  $L^2_{loc}(\Omega)$  pelo Teorema 1.24, obtemos

$$A(\chi(x^k - y^k)) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) &= (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi x^k) \\ &\quad + (A(\chi y^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \\ &= (A(\chi(x^k - y^k)), \chi x^k) + (A(\chi y^k), \chi(x^k - y^k)) \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Logo, pela unicidade do limite, de (1.13) e (1.14) segue que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y) = 0 \text{ para todo } A,$$

o que nos leva a concluir que  $\mu_x - \mu_y = 0$  e, portanto,  $\mu_x = \mu_y$ .

**Teorema 1.26** *Seja  $P$  um operador diferencial de ordem  $m$  sobre  $\Omega$  e seja  $\{u_k\}$  uma sequência limitada em  $L^2_{loc}(\Omega)$  que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m.  $\mu$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $Pu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$  fortemente em  $H^{-m}_{loc}(\Omega)$  ( $m > 0$ ).
- (ii)  $\text{supp}(\mu) \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times S^{n-1} : \sigma_m(P)(x, \xi) = 0\}$ .

**Teorema 1.27** *Seja  $P$  um operador diferencial de ordem  $m$  sobre  $\Omega$ , verificando  $P^* = P$ , e seja  $\{u_k\}$  uma sequência limitada em  $L^2_{loc}(\Omega)$  que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m.  $\mu$ . Vamos assumir que  $Pu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$  fortemente em  $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$ . Então, para toda função  $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n) \setminus \{0\})$  de grau  $1 - m$  que é homogênea na segunda variável e com suporte compacto na primeira variável, tem-se*

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \{a, p\}(x, \xi) d\mu(x, \xi) = 0. \tag{1.15}$$

**Teorema 1.28** *Seja  $X$  um espaço localmente compacto e de Hausdorff e  $\mu$  uma medida de Radon positiva em  $X$ .*

a) Seja  $N$  a união de todos os conjuntos abertos  $U \subset X$  tais que  $\mu(U) = 0$ . Então  $N$  é aberto e  $\mu(N) = 0$ . O complementar de  $N$  é chamado de suporte de  $\mu$ .

b)  $x \in \text{supp } \mu$  se, e somente se,  $\int_X f d\mu > 0$  para toda  $f \in C_0(X)$  com  $f(x) > 0$ .

**Demonstração:** a) Segue do fato que  $\mu(N) = \sup\{\mu(K) : K \subset N, K \text{ compacto}\}$ .

Para provar b), suponha que  $x \in \text{supp } \mu = N^c$ . Seja  $f \in C_c(X, [0, 1])$  tal que  $f(x) > 0$ . Por continuidade, existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  tal que  $f(y) > \frac{1}{2}f(x)$  para todo  $y \in U$ . Se  $\mu(U) = 0$ , então como  $U$  é aberto teríamos que  $U \subset N$ , o que contradiz fato que  $x \in N^c$ . Assim,  $\mu(U) > 0$ . Daí,  $\int_X f d\mu \geq \int_U f d\mu \geq \frac{1}{2}f(x)\mu(U) > 0$ .

Agora, suponha que  $x \notin \text{supp } \mu$  e seja  $F = \text{supp } \mu$ . Então, existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  tal que  $\mu(U) = 0$  e  $U \cap F = \emptyset$ . Seja  $K$  um conjunto compacto tal que  $x \in K \subset U$ . Do Teorema de Urysohn, existe uma função  $f \in C_0(X, [0, 1])$  tal que  $f = 1$  em  $K$  e  $f = 0$  fora de um subconjunto compacto de  $U$ . Em particular,  $f(x) = 1 > 0$  e

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_U f d\mu + \int_{X \setminus U} f d\mu \\ &= \int_U f d\mu + \int_{X \setminus U} 0 d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.29** *Seja  $\{u_n\}_n$  uma sequência limitada em  $L^2_{loc}(\Omega)$  a qual converge para zero e admite uma medida microlocal de defeito  $\mu$ . Então,  $(x_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$  se, e somente se, existe  $A \in \Psi_c^0(\Omega)$  essencialmente homogêneo tal que  $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) \neq 0$  e  $A(\chi u_n) \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega)$  para todo  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ .*

**Demonstração:** Se  $(x_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$ , então existem subconjuntos abertos  $U \subset \Omega$ ,  $V \subset S^{d-1}$  tais que  $(x_0, \xi_0) \in U \times V$  e  $U \times V \cap \text{supp } \mu = \emptyset$ . Seja  $K$  uma vizinhança compacta de  $\xi_0$ , tal que  $K \subset V$ . Considere  $\psi \in C^\infty(S^{d-1})$  tal que  $\text{supp } \psi \subset K$  e  $\psi = 1$  em uma vizinhança de  $\xi_0$  contida em  $K$ . Considere  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\phi = 1$  em uma vizinhança de  $x_0$  e

$\text{supp } \phi \subset U$ . Tome  $\eta \in C^\infty(\Omega)$  tal que  $\eta = 0$  próximo de 0 e  $\eta = 1$  no infinito. Defina  $a(x, \xi) = \eta(\xi)\phi(x)\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$ . Seja  $A$  o operador definido por  $a(\cdot, \cdot)$ . Note que  $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) = 1$  e para todo  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|A(\chi u_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (A(\chi u_n), A(\chi u_n)) \\ &= (A(\chi u_n), A(\chi_1 \chi u_n)) \\ &= (A_{\chi_1}^* \circ A(\chi u_n), \chi u_n) \\ &\rightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)(x, \xi)|^2 d\mu, \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde  $\chi_1 = 1$  em uma vizinhança  $\text{supp } \chi$ . Como  $\text{supp } \sigma_0(A) \subset \text{supp } \phi \times \text{supp } \psi \subset \Omega \times S^{d-1} \setminus \text{supp } \mu$ , temos

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2 d\mu = 0.$$

Portanto,  $\|A(\chi u_n)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega)$ .

Reciprocamente, se existe  $A \in \Psi_c^0(\Omega)$  essencialmente homogêneo tal que  $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) \neq 0$  e  $A(\chi u_n) \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega)$ , de (1.16) e da unicidade do limite obtemos

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} |\sigma_0(A)|^2 d\mu = 0.$$

Utilizando o Teorema 1.28, deduzimos que  $(x_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$ . ■

O campo vetorial sobre  $\Omega \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  definido por

$$H_p(x, \xi) = \left( \frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x, \xi), \dots, \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(x, \xi); -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x, \xi), \dots, -\frac{\partial p}{\partial x_n}(x, \xi) \right)$$

será chamado de campo Hamiltoniano de  $p$ , e será denotado por  $H_p$ .

A derivada de Lie de uma função  $f$  com respeito ao campo  $H_p$  é definida por  $H_p(f) = \{p, f\}$ , onde

$$\{p, f\}(x, \xi) = \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right).$$

Uma curva Hamiltoniana de  $p$  é uma curva integral do campo  $H_p$ , a qual é uma solução maximal  $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$  das equações de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \dot{x} = p_\xi(x, \xi) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi), & \dot{\xi} = -p_x(x, \xi) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Uma bicaracterística nula é uma curva integral de  $H_p$  sobre a qual  $p = 0$ .

**Observação 1.6** Como  $H_p p = 0$ ,  $p$  é constante ao longo das curvas integrais de  $H_p$ . De fato, seja  $\alpha(t) = (H_p)_t(x_0, \xi_0)$  uma curva integral de  $H_p$  começando em  $(x_0, \xi_0)$ . Então,

$$\begin{aligned} 0 &= H_p p(\alpha(t)) \\ &= d(p)_{\alpha(t)} H_p(\alpha(t)) \\ &= d(p)_{\alpha(t)} \alpha'(t) \\ &= (p \circ \alpha)'(t). \end{aligned}$$

Agora, da conexidade do domínio de  $\alpha$ , a observação segue.

**Lema 1.8** Assuma que  $p(x_0, \xi_0) = 0$  e  $\lambda$  é uma função de classe  $C^\infty$  em  $T^0\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^d$  a valores reais que nunca se anula. Então, para todo  $t \in (T_0, T_1)$  existe  $s_t \in \mathbb{R}$  tal que  $(H_p)_t(x_0, \xi_0) = (H_{\lambda p})_{s_t}(x_0, \xi_0)$ . Mais ainda, existem  $S_0 < 0 < S_1$  para os quais a aplicação  $t \mapsto s_t$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  de  $(T_0, T_1)$  em  $(S_0, S_1)$ .

**Demonstração:** Vamos escrever  $b = \frac{1}{\lambda}$  e  $a = \lambda p$ . Como  $p = ab$ , pela Observação 1.6 temos que  $(ab)((H_p)_t(x_0, \xi_0)) = 0$ . Já que  $b$  nunca se anula, obtemos  $a((H_p)_t(x_0, \xi_0)) = 0$  para todo  $t \in (T_0, T_1)$ . Assim,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \xi} b + \frac{\partial b}{\partial \xi} a = b \frac{\partial a}{\partial \xi}(x(t), \xi(t)), \\ \dot{\xi}(t) = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial x} b - \frac{\partial b}{\partial x} a = -b \frac{\partial a}{\partial x}(x(t), \xi(t)). \end{cases}$$

Escrevendo  $f(t) = b(x(t), \xi(t))$ , temos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t) \frac{\partial a}{\partial \xi}(x(t), \xi(t)), \\ \dot{\xi}(t) = -f(t) \frac{\partial a}{\partial x}(x(t), \xi(t)), \end{cases}$$

com  $x(0) = x_0$  e  $\xi(0) = \xi_0$ . Agora, seja  $(y(t), \eta(t)) = (H_a)_t(x_0, \xi_0) = (H_{\lambda p})_t(x_0, \xi_0)$  e defina

$$s(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Em virtude do Teorema do Valor Médio e o fato que  $f$  nunca se anula, temos que  $f > 0$  ou  $f < 0$ . Vejamos que  $s$  é injetiva. De fato, sejam  $t_1, t_2 \in (T_0, T_1)$  tais que  $t_1 \neq t_2$  e suponha por contradição que  $s(t_1) = s(t_2)$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $t_1 < t_2$ . Então,

$$\int_0^{t_1} f(s)ds = \int_0^{t_2} f(s)ds = \int_0^{t_1} f(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} f(s)ds.$$

Portanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(s)ds = 0.$$

Do mesmo modo, se  $f > 0$ , então  $\int_{t_1}^{t_2} f(s)ds > 0$  e se  $f < 0$ , então  $\int_{t_1}^{t_2} f(s)ds < 0$ , o que nos dá uma contradição em ambos os casos. Consequentemente,  $s(t_1) = s(t_2)$ . Mais ainda, temos que  $s'(t) = f(t) \neq 0$  para todo  $t \in (T_0, T_1)$ . Daí,  $s$  é um difeomorfismo local de classe  $C^\infty$  e injetor. Como  $s(0) = 0$ , existe uma vizinhança aberta de 0,  $(S_0, S_1)$ , tal que  $s$  é um difeomorfismo de  $(T_0, T_1)$  sobre  $(S_0, S_1)$ . Seja  $(z(t), \gamma(t)) = (y(s(t)), \eta(s(t)))$  e note que

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \dot{y}(s(t))s'(t) = f(t) \frac{\partial a}{\partial \xi}(y(s(t)), \eta(s(t))) = f(t) \frac{\partial a}{\partial \xi}(z(t), \gamma(t)), \\ \dot{\gamma}(t) = \dot{\eta}(s(t))s'(t) = -f(t) \frac{\partial a}{\partial x}(y(s(t)), \eta(s(t))) = -f(t) \frac{\partial a}{\partial x}(z(t), \gamma(t)), \end{cases}$$

com  $z(0) = y(s(0)) = y(0) = x_0$  e  $\gamma(0) = \eta(s(0)) = \eta(0) = \xi_0$ . Pela unicidade das soluções, obtemos que  $(x(t), \xi(t)) = (y(s(t)), \eta(s(t)))$ . Portanto, as bicaracterísticas de  $\lambda p$  e  $p$  coincidem a menos de um reparametrização. ■

Podemos agora traduzir os Teoremas 1.26 e 1.27 em termos geométricos.

**Teorema 1.30** *Seja  $P$  um operador diferencial autoadjunto de ordem  $m$  sobre  $\Omega$  que admite um símbolo principal  $p$ . Seja  $\{u_k\}_k$  uma sequência limitada em  $L^2_{loc}(\Omega)$  que converge fracamente para zero, com uma m.d.m.  $\mu$ . Vamos assumir que  $Pu_k$  converge para 0 em  $H^{-m-1}_{loc}$ . Então o suporte de  $\mu$ ,  $\text{supp}(\mu)$ , é uma união de curvas do tipo  $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$ , onde  $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$  é uma bicaracterística de  $p$ .*

**Proposição 1.18** *A menos de uma mudança de variáveis, as bicaracterísticas do símbolo principal do operador de ondas*

$$p(t, x, \tau, \xi) = -\rho(x)\tau^2 + K(x)\xi \cdot \xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (1.18)$$

são curvas da seguinte forma

$$t \mapsto \left( t, x(t), \tau, -\tau \left( \frac{K(x(t))}{\rho(x(t))} \right)^{-1} \dot{x}(t) \right),$$

onde  $t \mapsto x(t)$  é uma geodésica de métrica  $G = \left( \frac{K}{\rho} \right)^{-1}$  sobre  $\Omega$ , parametrizada pelo comprimento de arco.

## Capítulo 2

# Decaimento Exponencial Para O Sistema Klein-Gordon Acoplado Por Velocidades

Neste capítulo vamos estudar a estabilidade exponencial de um sistema de equações de onda semilinear posto em um meio não homogêneo e sujeito a dissipações lineares localmente distribuídas:

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + v^2u + a(x)u_t - \gamma(x)v_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + u^2v + b(x)v_t + \gamma(x)u_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \mathbb{R}_+), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , é um domínio limitado com fronteira suficientemente regular  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  são funções de classe  $C^\infty$  tais que para todo  $x \in \Omega$  e  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \quad (2.2)$$

onde  $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$  são constantes positivas e  $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$  é uma matriz simétrica positiva definida. Denotamos por  $\omega$  a interseção de  $\Omega$  com uma vizinhança de  $\partial\Omega$  em  $\mathbb{R}^d$ .

**Observação 2.1** Na equação (2.1) consideramos  $\nabla u$  como um sendo um vetor coluna.

**Hipótese 2.1** As funções não-negativas  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$ , responsáveis pelo efeito dissipativo localizado, satisfazem as seguintes condições:

$$a(\cdot), b(\cdot) \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ com } a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega \subset \Omega \text{ e } b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \omega \subset \Omega. \quad (2.3)$$

Além disso, assumimos que  $\gamma \in W^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaz

$$0 \leq \gamma(x) \leq a(x) \text{ e } 0 \leq \gamma(x) \leq b(x) \text{ q.s. em } \Omega. \quad (2.4)$$

Vamos assumir também que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

**Hipótese 2.2**  $\omega$  controla  $\Omega$  geometricamente, isto é, existe  $T_0 > 0$ , tal que toda geodésica da métrica  $G(x)$ , onde  $G(x) = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$  viajando com velocidade constante igual a 1 e partindo de  $t = 0$ , encontra o conjunto  $\omega$  em um tempo  $t < T_0$ .

**Hipótese 2.3** Para todo  $T \geq T_0$ , a única solução  $u, v \in C([0, T[; L^2(\Omega)) \cap C([0, T[, H^{-1}(\Omega))$  para o sistema

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + V_1(x, t)u = V_3(x, t)v & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla v] + V_2(x, t)v = V_3(x, t)u & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

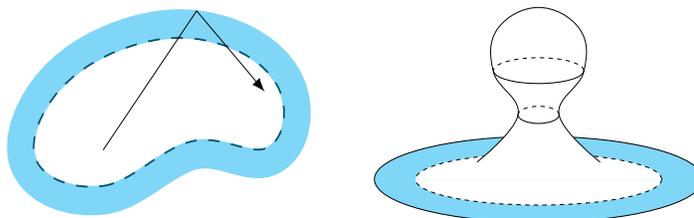
onde  $V_1(x, t)$ ,  $V_2(x, t)$  e  $V_3(x, t)$  são elementos de  $L^\infty([0, T[, L^{\frac{d+1}{2}}(\Omega))$ , é a solução trivial  $u = v = 0$ .

A Hipótese 2.2 é chamada de Condição Geométrica de Controle (C.G.C.). É sabido que a C.G.C. é uma condição necessária e suficiente para o controle e estabilização da equação da onda linear (veja [14], [20], [27], [30], [40], [74] e suas referências). Nessa direção, vale mencionar o trabalho de Betelú, Gulliver e Littman [58] onde os autores discutem a questão das geodésicas fechadas no interior da região  $\Omega$ . Tais geodésicas fechadas tornam o controle impossível já que as bicaracterísticas nunca encontram a região onde o controle é posto. Neste artigo, os autores mostram, no caso bidimensional, que a não existência de geodésicas fechadas no interior é também uma condição suficiente para o controle. Por essa razão, neste capítulo e pelo fato de não termos nenhum controle sobre as geodésicas já que estamos em um meio não-homogêneo consideramos  $\omega$  uma vizinhança de todo o bordo  $\partial\Omega$  e damos condições sobre a métrica  $G = (K/\rho)^{-1}$  de forma que todas as geodésicas desta métrica encontrem o conjunto  $\omega$  em um tempo  $t < T_0$ . No caso geral, devemos assumir que  $a, b \in C^0(\bar{\Omega})$  e que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

(i)  $\forall x \in \partial\Omega, a(x), b(x) > 0$ ,

(ii) Para toda geodésica  $t \in I \mapsto x(t) \in \Omega$  da métrica  $G = (K/\rho)^{-1}$ , com  $0 \in I$ , existe  $t \geq 0$  tal que  $a(x(t)), b(x(t)) > 0$ .

Observamos que se  $G = I_d$  a condição (i) implica que (ii) também é válida, já que as geodésicas são linhas retas. Por outro lado, quando estamos com um métrica arbitrária, a condição (i) pode ser válida sem que (ii) se verifique, por exemplo, se  $G$  admite uma geodésica presa, conforme Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Exemplos de geodésicas.

**Observação 2.2** *É importante notar que a Hipótese 2.2 não é trivialmente satisfeita para toda matriz  $G = (K/\rho)^{-1}$ . Veja em [10] exemplos em que essa situação ocorre. Quando  $G = I_d$  então as geodésicas são linhas retas, e neste caso, elas vão necessariamente encontrar a região  $\omega$ .*

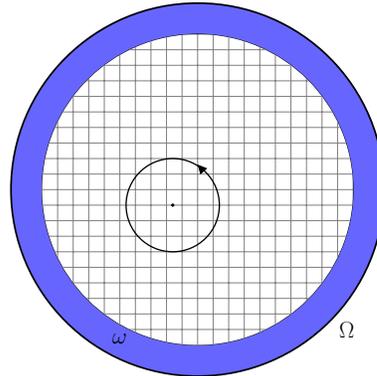
Por razões já discutidas, para uma métrica geral  $G = (K/\rho)^{-1}$ , sem nenhuma condição adicional sobre a densidade  $\rho(x)$ , a região  $\omega$  estar localizada em uma vizinhança da fronteira de  $\Omega$  pode não ser suficiente para a estabilização. Uma maneira de superar essa dificuldade, isto é, minimizar o máximo possível a região onde o efeito dissipativo atua, é seguir as ideias introduzidas por Cavalcanti et al. em [30] e [27]. Nesses artigos, os autores mostram que dada uma variedade Riemanniana  $(\Omega, G)$  com métrica  $G = (K/\rho)^{-1}$  e  $\omega$  uma vizinhança da fronteira de  $\Omega$ , existe uma família finita  $\{V_i\}_{i=1, \dots, k}$  de conjuntos abertos com fronteira suaves tais que seus fechos são dois a dois disjuntos e  $V = \cup_{i=1}^k V_i$  satisfaz

- $\text{med}(V) \geq \text{med}(M \setminus \omega) - \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ ,
- $V$  pode ser deixado sem dissipação.

Assim, se considerarmos uma dissipação agindo em  $\omega$  e em  $(\Omega \setminus \omega) \setminus V$ , então toda geodésica da métrica  $G = (K/\rho)^{-1}$  irá intersectar a região onde a dissipação atua. Assim,

não existirão geodésicas presas dentro dos conjuntos  $V_i$  para todo  $i = 1, \dots, k$  os quais estão livre de dissipação, e assim, a Hipótese 2.2 é satisfeita. Mais ainda,  $(\Omega \setminus \omega) \setminus V$  pode ser arbitrariamente pequeno, fazendo com que o volume da região onde a dissipação atua seja tão pequeno quanto possível para uma métrica geral  $G = (K/\rho)^{-1}$ .

Na Figura 2.2, a região  $\omega$  (em azul) em torno da fronteira  $\partial\Omega$  e  $(\Omega \setminus \omega) \setminus V$  (uma malha em cinza claro) ilustram a região onde a dissipação atua na variedade  $(\Omega, G)$ ,  $G = (K/\rho)^{-1}$ , a qual pode ser considerada com medida arbitrariamente pequena, entretanto totalmente distribuída sobre  $\Omega$ . A região  $V := \bigcup_{i=1}^k V_k$  (em branco) ilustra a região sem dissipação com medida arbitrariamente grande e também totalmente distribuída em  $\Omega$ .



**Figura 2.2:** Malha.

**Observação 2.3** A Hipótese 2.3 é chamada de *Princípio de Continuação Única*. Conforme o trabalho [39], este tipo de condição é geralmente assumido em resultados de controle/estabilização e a possibilidade de superá-la parece ser uma questão em aberto. Na seção 2.1, aplicamos as estimativas de Carleman de Dos Santos Ferreira [41] e Koch e Tataru [61] para exibir certas situações onde o Princípio de Continuação Única dado na Hipótese 2.3 é válido pelo menos localmente.

## 2.1 Propriedade de Continuação Única

Vamos relembrar alguns resultados sobre a propriedade de continuação única para operadores diferenciais. Para isto, utilizaremos as notações de Dos Santos Ferreira [41] e

Koch-Tataru [61].

Seja  $P(x, D)$  um operador diferencial de segunda ordem do tipo principal real com coeficientes de classe  $C^\infty$  e  $u$  a solução da equação diferencial

$$P(x, D)u + V(x)u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (2.6)$$

onde  $V \in L_{loc}^{\frac{d}{2}}$  e seja  $S$  uma hipersuperfície de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^d$  localmente definida por

$$\begin{aligned} S_+ &= \{x \in \Omega : \psi(x) > \psi(x_0)\} \\ S_- &= \{x \in \Omega : \psi(x) < \psi(x_0)\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dizemos que a solução de (2.6) tem a propriedade de continuação única através da hipersuperfície  $S$  se quando  $u$  se anula em  $S_-$  então ela também se anula em uma vizinhança de  $x_0$ .

**Definição 2.1** *A hipersuperfície  $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$  é dita ser (estritamente) pseudo-convexa em  $x_0 \in \Omega$  com respeito ao operador diferencial do tipo principal real  $P$  de ordem 2 cujo símbolo principal é  $p$  sempre que*

$$p(x_0, \xi) = H_p \phi(x_0, \xi) = 0 \Rightarrow H_p^2(x_0, \xi) < 0 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Usando estimativas de Carleman do tipo  $(L^p - L^q)$ , o seguinte resultado é provado por Dos Santos Ferreira em [41]:

**Proposição 2.1** *Seja  $P(x, D)$  um operador diferencial de ordem 2, definido em um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d > 2$ . Suponha que exista  $M \geq 1$ , uma vizinhança  $\Omega_0$  de  $x_0$  e uma função  $\phi \in C^\infty$  verificando  $\{x \in \Omega_0 : x \neq x_0, \phi(x) \leq \phi(x_0)\} \subset S_-$  tal que a estimativa de Carleman*

$$\|e^{-\tau\phi}v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \leq C \|e^{-\tau\phi}P(x, D)v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \quad (2.8)$$

é válida para toda  $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$  e  $\tau \geq M$ . Então, se  $u \in H^1$  é a solução da equação (2.6) em  $\Omega$  onde  $V \in L_{loc}^{\frac{d}{2}}$  e  $u$  se anula em  $S_-$ , então existe uma vizinhança de  $x_0$  na qual  $u$  se anula.

Inspirados na Proposição 2.1, obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 2.2** *Seja  $P_1(x, D)$  e  $P_2(x, D)$  dois operadores diferenciais de ordem 2, definidos em um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d > 2$ . Suponha que exista  $M \geq 1$ , uma vizinhança  $\Omega_0$  de  $x_0$  e uma função  $\phi \in C^\infty$  verificando  $\{x \in \Omega_0 : x \neq x_0, \phi(x) \leq \phi(x_0)\} \subset S_-$  tais que as seguintes estimativas de Carleman*

$$\|e^{-\tau\phi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \leq C\|e^{-\tau\phi}P_1(x, D)u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \quad (2.9)$$

e

$$\|e^{-\tau\phi}v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \leq C\|e^{-\tau\phi}P_2(x, D)v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \quad (2.10)$$

são válidas para todo  $u, v \in C_0^\infty(\Omega_0)$  e  $\tau \geq M$ . Então, a propriedade de continuação única é válida para as soluções do sistema

$$\begin{cases} P_1(x, D)u + V_1u = & V_3v, \\ P_2(x, D)v + V_2v = & V_3u, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são elementos de  $L_{loc}^{\frac{d}{2}}$ .

**Demonstração:** Suponha que  $x_0 = 0$  e  $\psi(0) = 0$  e seja  $\chi \in C_0^\infty(\Omega_0)$  igual a 1 em uma vizinhança  $\Omega_1$  de 0. Aplicando a desigualdade de Carleman para as funções  $w_1 = \chi u$ ,  $w_2 = \chi v$  e observando que  $L^{\frac{d}{2}} \cdot L^{\frac{2d}{d-2}} \subset L^{\frac{2d}{d+2}}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{-\tau\phi}w_1\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} &\lesssim \|e^{-\tau\phi}P_1(x, D)w_1\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \\ &\lesssim \|e^{-\tau\phi}P_1(x, D)(\chi u)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \\ &\lesssim \|e^{-\tau\phi}(\chi P_1(x, D)u + [P_1, \chi]u)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \\ &\lesssim \|V_3e^{-\tau\phi}\chi v - V_1e^{-\tau\phi}\chi u + e^{-\tau\phi}[P_1, \chi]u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \\ &\lesssim \|V_3\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|V_1\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \\ &\quad + \|e^{-\tau\phi}[P_1, \chi]u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}}, \end{aligned}$$

onde  $K = \text{supp}(\chi)$ . Isto é,

$$\begin{aligned} \|e^{-\tau\phi}w_1\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} &\lesssim \|V_3\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|V_1\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \\ &\quad + \|e^{-\tau\phi}[P_1, \chi]u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \|e^{-\tau\phi}w_2\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} &\lesssim \|V_3\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|V_2\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \\ &\quad + \|e^{-\tau\phi}[P_2, \chi]v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Somando as desigualdades (2.12), (2.13) e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} &\lesssim (\|V_1\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)} + \|V_3\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)})\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \\ &\quad + (\|V_2\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)} + \|V_3\|_{L^{\frac{d}{2}}(K)})\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \\ &\quad + \|e^{-\tau\phi}[P_1, \chi]u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} + \|e^{-\tau\phi}[P_2, \chi]v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Então, escolhemos  $\chi$  com o suporte suficientemente pequeno de forma que os dois primeiros termos do lado direito da desigualdade (2.14) possam ser absorvidos no lado esquerdo, assim

$$\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \lesssim \|e^{-\tau\phi}[P_1, \chi]u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} + \|e^{-\tau\phi}[P_2, \chi]v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}}. \quad (2.15)$$

Como  $[P_1(x, D), \chi]u$  e  $[P_2(x, D), \chi]v$  são operadores diferenciais clássicos de ordem 1 suportados em  $\text{supp } u \cap \overline{\Omega_0 \setminus \Omega_1} \subset \{\phi > 0\}$  e  $\text{supp } v \cap \overline{\Omega_0 \setminus \Omega_1} \subset \{\phi > 0\}$  onde temos que  $\phi > c > 0$ , segue que

$$\begin{aligned} \|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} &\lesssim e^{-\tau c}(\|[P_1(x, D), \chi]u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} + \|[P_2(x, D), \chi]v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}}) \\ &\lesssim e^{-\tau c}(\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|e^{-\tau(\phi-c)}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|e^{-\tau(\phi-c)}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \lesssim \|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1},$$

isto é,  $\|e^{-\tau(\phi-c)}\chi u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} + \|e^{-\tau(\phi-c)}\chi v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}$  é limitado, o que é impossível a menos que  $u = v = 0$  onde  $\phi < c$ . Isto completa a prova da continuação única.  $\blacksquare$

Argumentos análogos podem ser aplicados para provar a propriedade de continuação única para sistemas hiperbólicos acoplados de segunda ordem com coeficientes não suaves e potenciais em  $L^{\frac{d+1}{2}}$ . De fato, em [61] podemos encontrar o seguinte resultado:

**Teorema 2.1** *Seja  $P$  um operador hiperbólico com coeficientes de classe  $C^2$ . Seja  $\phi$  uma função estritamente pseudo-convexa com respeito a  $P$ . Então, para toda função compactamente suportada  $u$  temos*

$$\|e^{\tau\phi}u\|_{L^{\frac{2(d+1)}{d-1}} \cap \tau^{-\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{2}}} \lesssim \|e^{\tau\phi}P(x, D)u\|_{L^{\frac{2(d+1)}{d+3}} + \tau^{\frac{1}{4}}H\tau^{-\frac{1}{4}}}, \quad \tau > \tau_0. \quad (2.16)$$

Sejam  $X = L^{\frac{2(d+1)}{d-1}}$  e  $Y = \tau^{-\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{2}}$ , então a desigualdade (2.16) pode ser reescrita como:

$$\|e^{\tau\phi}u\|_{X \cap Y} \lesssim \|e^{\tau\phi}P(x, D)u\|_{X^* + Y^*}, \quad \tau > \tau_0. \quad (2.17)$$

Note que  $X \cap Y \hookrightarrow X$ , o que implica em  $X^* \hookrightarrow X^* + Y^*$ . Da desigualdade (2.17) deduzimos que,

$$\|e^{\tau\phi}u\|_X \lesssim \|e^{\tau\phi}P(x, D)u\|_{X^*}, \quad \tau > \tau_0. \quad (2.18)$$

Assim, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.3** *Sejam  $P_1(x, D)$  e  $P_2(x, D)$  dois operadores hiperbólicos de segunda ordem com coeficientes de classe  $C^2$ . Seja  $\phi$  uma função estritamente pseudo-convexa com respeito a  $P_1$  e  $P_2$ . Então a propriedade de continuação única é válida para soluções do sistema acoplado*

$$\begin{cases} P_1(x, D)u + V_1u = V_3v \\ P_2(x, D)v + V_2v = V_3u, \end{cases} \quad (2.19)$$

onde  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são elementos de  $L^{\frac{d+1}{2}}$ .

## 2.2 Existência e Unicidade de Soluções

Consideremos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o qual está munido do produto interno

$$\langle (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \nabla u_1^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla v_2 + \rho u_3 v_3 + \rho u_4 v_4 \, dx.$$

Denotando  $W(t) = (u, v, u_t, v_t)$  podemos reescrever o problema (2.1) como o seguinte problema de Cauchy em  $\mathcal{H}$

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t}(t) = \mathcal{A}W(t) + \mathcal{F}(W(t)) \\ W(0) = (u_0, v_0, u_1, v_1), \end{cases} \quad (2.20)$$

onde o operador linear não-limitado  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$  é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla(\cdot)) & 0 & -\frac{1}{\rho}a(x)I(\cdot) & +\frac{1}{\rho}\gamma(x)I(\cdot) \\ 0 & \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla(\cdot)) & -\gamma(x)I(\cdot) & -\frac{1}{\rho}b(x)I(\cdot) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v, w, z) & \quad (2.22) \\ &= \left( w, z, \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla u) - \frac{1}{\rho}a(x)w + \frac{1}{\rho}\gamma(x)z, \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla v) - \frac{1}{\rho}b(x)z - \frac{1}{\rho}\gamma(x)w \right), \end{aligned}$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \quad (2.23)$$

e  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é o operador não linear

$$\mathcal{F}(u, v, w, z) = \left( 0, 0, -\frac{1}{\rho}v^2u, -\frac{1}{\rho}u^2v \right). \quad (2.24)$$

Agora, estamos em condições de estabelecer o resultado de boa-colocação para o problema (2.20), o qual assegura que o problema (2.1) é globalmente bem posto.

**Teorema 2.2** *Assuma que as hipóteses sobre  $\rho$  e  $K$  são satisfeitas e que  $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in \mathcal{H}$ . Então, o problema (2.20) possui uma única solução mild  $W \in C([0, T]; \mathcal{H})$ . Mais ainda, se  $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in D(\mathcal{A})$ , então a solução é regular.*

**Demonstração:** Primeiramente vamos mostrar que o operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definido por (2.23) e (2.24) gera um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $e^{\mathcal{A}t}$  no espaço de energia  $\mathcal{H}$ . De fato, é fácil ver que para todo  $(u, v, w, z) \in D(\mathcal{A})$ , temos

$$(\mathcal{A}U, U) = - \int_{\Omega} (a(x)|w|^2 + b(x)|z|^2) dx \leq 0, \quad (2.25)$$

o que mostra que o operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo. A seguir, provaremos que  $I - \mathcal{A} = \mathcal{H}$ , provando a boa-colocação do problema linear associado utilizando o bem conhecido Teorema de Lumer-Phillips. De fato, para qualquer  $(f, g, h, k) \in \mathcal{H}$ , resolvemos a equação  $(I - \mathcal{A})(u, v, w, z) = (f, g, h, k)$  a qual pode ser reformulada da seguinte forma:

$$\begin{cases} u - w = f \in H_0^1(\Omega), \\ v - z = g \in H_0^1(\Omega), \\ w - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + \frac{1}{\rho}a(x)w - \frac{1}{\rho}\gamma(x)z = h \in L^2(\Omega), \\ z - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + \frac{1}{\rho}b(x)z + \frac{1}{\rho}\gamma(x)w = k \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.26)$$

De (2.26) obtemos

$$\begin{cases} w = u - f, \\ z = v - g. \end{cases} \quad (2.27)$$

Substituindo as equações de (2.27) nas duas últimas equações de (2.26), segue que

$$\begin{cases} u - f - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + \frac{1}{\rho}a(x)(u - f) - \frac{1}{\rho}\gamma(x)(v - g) = h, \\ v - g - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + \frac{1}{\rho}b(x)(v - g) + \frac{1}{\rho}\gamma(x)(u - f) = k. \end{cases} \quad (2.28)$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \rho u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + a(x)u - \gamma(x)v = a(x)f + \gamma(x)g + \rho(f + h), \\ \rho v - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + b(x)v + \gamma(x)u = b(x)g + \gamma(x)f + b(x)q + \rho(g + k). \end{cases} \quad (2.29)$$

Definamos

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned} a((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= \int_{\Omega} \rho u_1 u_2 + (\nabla u_1)^\top K(x) \nabla u_2 \, dx + \int_{\Omega} \rho a u_1 u_2 \, dx - \int_{\Omega} \rho \gamma v_1 u_2 \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho v_1 v_2 + (\nabla v_1)^\top K(x) \nabla v_2 \, dx + \int_{\Omega} \rho b u_2 v_2 \, dx + \int_{\Omega} \rho \gamma u_1 v_2 \, dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Então,  $a(\cdot, \cdot)$  é bilinear, contínua e coerciva. Do Teorema de Lax-Milgram, dado

$$(a_0, b_0) = (a(x)f + \gamma(x)g + \rho(f + h), b(x)g + \gamma(x)f + b(x)q + \rho(g + k)),$$

existe um único  $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$a((u, v), (\chi, \eta)) = \langle a_0, \chi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle b_0, \eta \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \text{ para todo } (\chi, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Tomando  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$  e  $\eta = 0$  deduzimos que

$$\rho u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) = a_0 - au + \gamma v \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

e conseqüentemente,

$$\rho u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) = a_0 - au + \gamma v \text{ em } L^2(\Omega).$$

Procedendo da mesma forma, deduzimos que

$$\rho v - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) = b_0 - bv - \gamma u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Da regularidade do problema elítico, segue que  $(u, v) \in (H^2(\Omega))^2$ , e, conseqüentemente,  $(u, v, w, z) \in D(\mathcal{A})$ , o que nos dá a solução desejada. Pelo Teorema 1.21 obtemos  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ . Assim,  $\mathcal{A}$  gera um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $\mathcal{H}$  pelo Teorema de Lumer-Phillips.

Agora, vamos mostrar que o operador não-linear  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado em (2.24) é localmente Lipschitz. Dado um conjunto limitado  $B$  em  $\mathcal{H}$ , existe  $R > 0$  tal que  $\|U\| \leq R$  para todo  $U \in B$ . Sejam  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  e  $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  elementos de  $B$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}U - \mathcal{F}V\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \left( 0, 0, -\frac{1}{\rho}(u_2^2 u_1 - v_2^2 v_1), -\frac{1}{\rho}(u_1^2 u_2 - v_1^2 v_2) \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \left\| \frac{1}{\rho}(v_2^2 v_1 - u_2^2 u_1) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\rho}(v_1^2 v_2 - u_1^2 u_2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left\| \frac{1}{\rho}(v_2^2 v_1 - u_2^2 v_1 + u_2^2 v_1 - u_2^2 u_1) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\rho}(v_1^2 v_2 - u_1^2 v_2 + u_1^2 v_2 - u_1^2 u_2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left\| \frac{1}{\rho}((v_2^2 - u_2^2)v_1 + u_2^2(v_1 - u_1)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\rho}((v_1^2 - u_1^2)v_2 + u_1^2(v_2 - u_2)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\lesssim \left\| \frac{1}{\rho}(v_2^2 - u_2^2)v_1 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\rho}(v_1^2 - u_1^2)v_2 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left\| \frac{1}{\rho}u_2^2(v_1 - u_1) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\rho}u_1^2(v_2 - u_2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Vamos mostrar que cada um dos termos em (2.31) é limitado por uma constante positiva que depende de  $R$  multiplicado por  $\|U - V\|_{\mathcal{H}}$ . Para isto, sejam  $i, j \in \{1, 2\}$  e considere  $i \neq j$ ,

então pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\rho}(v_i^2 - u_i^2)v_j \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} |v_i - u_i|^2 |v_i + u_i|^2 |v_j|^2 dx \\
&\lesssim \left( \int_{\Omega} |v_i - u_i|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left( \int_{\Omega} |v_i + u_i|^3 |v_j|^3 dx \right)^{\frac{2}{3}} \\
&\lesssim \left( \int_{\Omega} |v_i - u_i|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left[ \left( \int_{\Omega} |v_j|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v_i + u_i|^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} \\
&\lesssim \|v_j\|_{L^6(\Omega)}^2 \|v_i + u_i\|_{L^6(\Omega)}^2 \|v_i - u_i\|_{L^6(\Omega)}^2 \\
&\lesssim \|v_j\|_{L^6(\Omega)}^2 \left( \|v_i\|_{L^6(\Omega)}^2 + \|u_i\|_{L^6(\Omega)}^2 \right) \|v_i - u_i\|_{L^6(\Omega)}^2 \\
&\lesssim \|v_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left( \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \|v_i - u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&\lesssim 2R^3 \|U - V\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Do mesmo modo, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\rho} u_j^2 (v_i - u_i) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} |u_j|^4 |v_i - u_i|^2 dx \\
&\lesssim \left( \int_{\Omega} |u_j|^6 dx \right)^{\frac{2}{3}} \left( \int_{\Omega} |v_i - u_i|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\lesssim \|u_j\|_{L^6(\Omega)}^4 \|v_i - u_i\|_{L^6(\Omega)}^2 \\
&\lesssim \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^4 \|v_i - u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&\lesssim R^4 \|v_i - u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&\lesssim R^4 \|U - V\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

De (2.31), (2.32) e (2.33) segue que

$$\|\mathcal{F}U - \mathcal{F}V\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C(R) \|U - V\|_{\mathcal{H}}^2,$$

provando que  $\mathcal{F}$  é localmente Lipschitz. Daí, pelos Teoremas 1.22 e 1.23, o problema de Cauchy (2.1) tem uma única solução *mild*

$$W(t) = e^{At}W(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{F}(W(s)) ds, \text{ para todo } t \in [0, T_{\max}).$$

Vamos provar agora que  $T_{\max} = \infty$ . De fato, pelo funcional de energia definido em (0.2), temos

$$\frac{d}{dt} E_{u,v}(t) = - \int_{\Omega} a(x) |u_t(x, t)|^2 dx - \int_{\Omega} b(x) |v_t(x, t)|^2 dx,$$

o que mostrar que  $E_{u,v}(t)$  é não-crescente com  $E_{u,v}(t) \leq E_{u,v}(0)$  para todo  $t \in [0, T_{\max})$ . Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} E_{u,v}(t) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x) |u_t(x, t)|^2 + \rho(x) |v_t(x, t)|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u(x, t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u(x, t) + \nabla v(x, t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x, t) dx \\ &= \frac{1}{2} \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq E_{u,v}(t) \leq E_{u,v}(0), \text{ para todo } t \in [0, T_{\max}).$$

Portanto, as soluções locais não podem explodir em um tempo finito mostrando que  $T_{\max} = \infty$ .

■

## 2.3 Estabilidade Exponencial

Nessa seção, provaremos o principal resultado deste capítulo, a saber:

**Teorema 2.3** *Sob as Hipóteses 2.1, 2.2 e 2.3, dado  $R > 0$ , existem constantes positivas  $C$  e  $\gamma$  tal que a seguinte desigualdade é válida*

$$E_{u,v}(t) \leq Ce^{-\gamma t} E_{u,v}(0), \quad t > 0, \quad (2.34)$$

para toda solução fraca do problema (2.1) desde que  $E_{u,v}(0) \leq R$ .

**Observação 2.4** *Por argumentos padrões de densidade é suficiente trabalhar com soluções regulares, uma vez que a taxa de decaimento (2.34) pode ser recuperada para soluções fracas.*

A fim de provar o Teorema 2.3 e tendo em mente que o problema (2.1) satisfaz a propriedade do semigrupo, então, em vista da identidade da energia associada ao problema (2.1), a saber,

$$\begin{aligned} E_{u,v}(t_2) - E_{u,v}(t_1) &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x) |u_t(x, t)|^2 dx dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} b(x) |v_t(x, t)|^2 dx dt, \text{ para todo } 0 \leq t_1 \leq t_2, \quad (2.35) \end{aligned}$$

é suficiente provar a seguinte estimativa de observabilidade:

**Lema 2.1** *Para todo  $T \geq T_0$  e todo  $R > 0$ , existe uma contante positiva  $C > 0$  tal que a desigualdade*

$$E_{u,v}(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x)|u_t(x,t)|^2 + b(x)|v_t(x,t)|^2 dxdt, \quad (2.36)$$

é válida para toda solução regular  $u$  do problema (2.1) se os dados iniciais satisfazem

$$E_u(0) \leq R. \quad (2.37)$$

**Demonstração:** Argumentamos por contradição. Assuma que (2.36) não é válida. Então, existe uma sequência  $\{u^n, v^n\}$  de soluções regulares para o problema (2.1), de acordo com o Teorema 2.2, tal que os dados iniciais satisfazem

$$E_{u^n, v^n}(0) \leq L, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ e algum } L > 0, \quad (2.38)$$

e, além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{u^n, v^n}(0)}{\int_0^T \int_{\Omega} a(x)|u_t^n(x,t)|^2 + b(x)|v_t^n(x,t)|^2 dxdt} = +\infty. \quad (2.39)$$

De (2.39) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} a(x)|u_t^n(x,t)|^2 + b(x)|v_t^n(x,t)|^2 dxdt}{E_{u^n, v^n}(0)} = 0. \quad (2.40)$$

Levando (2.38) e (2.40) em consideração, deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)|u_t^n(x,t)|^2 + b(x)|v_t^n(x,t)|^2 dxdt = 0, \quad (2.41)$$

e como  $a(x) \geq a_0 > 0$  q.s. em  $\omega$  de (2.41) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega} |u_t^n(x,t)|^2 dxdt = 0, \quad (2.42)$$

e também, como  $b(x) \geq b_0 > 0$  q.s. em  $\Omega$  obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega} |v_t^n(x,t)|^2 dxdt = 0. \quad (2.43)$$

Como  $E_{u^n, v^n}(t)$  é não-crescente e  $\{E_{u^n, v^n}(0)\}$  é uma sequência limitada, obtemos uma subsequência, a qual ainda será denotada por  $\{(u^n, v^n)\}$  a qual verifica

$$(u^n, v^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) \text{ em } (L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)))^2, \quad (2.44)$$

$$(u_t^n, v_t^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t) \text{ em } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2. \quad (2.45)$$

Pelo Teorema de Aubin-Lions-Simon, deduzimos, para uma eventual subsequência, a qual será denotada pela mesma notação, que

$$(u^n, v^n) \rightarrow (u, v) \text{ em } (L^\infty(0, T; L^q(\Omega)))^2, \text{ para todo } q \in [2, 6). \quad (2.46)$$

De (2.46) inferimos

$$(v^n)^2 u^n \rightarrow v^2 u \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T)$$

e

$$(u^n)^2 v^n \rightarrow u^2 v \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T).$$

Mais ainda,  $((v^n)^2 u^n)$  e  $((u^n)^2 v^n)$  são limitadas em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |(v^n)^2 u^n|^2 dx dt &= \int_0^T \int_\Omega |v^n|^4 |u^n|^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \left( \int_\Omega |v^n|^6 dx \right)^{\frac{2}{3}} \left( \int_\Omega |u^n|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} dt \\ &= \int_0^T \|v^n\|_{L^6(\Omega)}^4 \|u^n\|_{L^6(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \|v^n\|_{L^8(0, T; L^6(\Omega))}^4 \|v^n\|_{L^4(0, T; L^6(\Omega))}^2 \\ &\lesssim \|v^n\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} \|u^n\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Analogamente obtemos a limitação de  $\{(u^n)^2 v^n\}$ . Pelo Lema de Lions, concluímos que

$$(v^n)^2 u^n \rightharpoonup v^2 u \text{ e } (u^n)^2 v^n \rightharpoonup u^2 v \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.47)$$

Neste ponto iremos dividir a prova em dois casos: (i)  $u \neq 0$  e  $v \neq 0$  e (ii)  $(u, v) = (0, 0)$ . Observemos que estes são os únicos casos que devem ser considerados. De fato, se  $u = 0$  então

necessariamente  $v = 0$  já que se tomarmos a seguinte sequência de problemas em consideração

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla u^n) + (v^n)^2u^n + a(x)u_t^n - \gamma(x)v_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)v_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla v^n) + (u^n)^2v^n + b(x)v_t^n + \gamma(x)u_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u^n(x, 0) = u_0^n(x), \quad u_t(x, 0) = u_1^n(x) & \text{em } \Omega, \\ v^n(x, 0) = v_0^n(x), \quad v_t(x, 0) = v_1^n(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.48)$$

e passando ao limite em (2.48) e levando (2.40), (2.42), (2.43) e (2.44)-(2.47), em consideração, tendo em mente que  $0 \leq \gamma(x) \leq a(x)$  e  $0 \leq \gamma(x) \leq b(x)$  obtemos, no sentido das distribuições,

$$\begin{cases} \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.49)$$

e para  $z = v_t$  de (2.49) inferimos

$$\begin{cases} \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ z = 0 & \text{em } \omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.50)$$

o que implica que  $z = v_t = 0$  e de (2.49) deduzimos que  $v = 0$ . Analogamente, se  $v = 0$  então  $u = 0$ .

Caso (i):  $u \neq 0$  e  $v \neq 0$ .

Tomando a seguinte sequência de problemas em consideração

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla u^n) + (v^n)^2u^n + a(x)u_t^n - \gamma(x)v_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)v_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla v^n) + (u^n)^2v^n + b(x)v_t^n + \gamma(x)u_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u^n(x, 0) = u_0^n(x), \quad u_t(x, 0) = u_1^n(x) & \text{em } \Omega, \\ v^n(x, 0) = v_0^n(x), \quad v_t(x, 0) = v_1^n(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.51)$$

e passando ao limite o sistema (2.51) tendo em vista (2.40), (2.42), (2.43) e (2.44)-(2.47), e fato de  $0 \leq \gamma(x) \leq a(x)$  e  $0 \leq \gamma(x) \leq b(x)$ , obtemos, no sentido das distribuições,

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla u) + v^2u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla v) + u^2v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_t = v_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.52)$$

e para  $w = u_t$  e  $z = v_t$  de (2.52) inferimos

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + 2vuz + v^2w = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + 2uvw + u^2z = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w = z = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.53)$$

Definindo  $V_1(x, t) = v^2$ ,  $V_2(x, t) = u^2$  e  $V_3(x, t) = -2uv$ , o sistema (2.53) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + V_1(x, t)w = V_3(x, t)z & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + V_2(x, t)z = V_3(x, t)w & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w = z = 0 & \text{em } \omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.54)$$

Utilizando a Hipótese 2.3, concluímos que  $(w, z) = (0, 0)$ , e, conseqüentemente de (2.52) segue que  $u = v = 0$ , o que é uma contradição.

Caso (ii):  $(u, v) = (0, 0)$ .

Agora, definamos:

$$\alpha_n := [E_{u^n, v^n}(0)]^{1/2}, \quad w^n := \frac{u^n}{\alpha_n} \quad \text{e} \quad z^n := \frac{v^n}{\alpha_n}. \quad (2.55)$$

Vamos considerar a seguinte seqüência de problemas:

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla w^n) + \alpha_n^2(z^n)^2w^n + a(x)w_t^n - \gamma(x)z_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)z_{tt}^n - \operatorname{div}(K(x)\nabla z^n) + \alpha_n^2(w^n)^2z^n + b(x)z_t^n + \gamma(x)w_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_n = z_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ w^n(x, 0) = w_0^n(x) = \frac{u_0^n}{\alpha_n}, \quad w_t^n(x, 0) = w_1^n(x) = \frac{u_1^n}{\alpha_n} & \text{em } \Omega, \\ z^n(x, 0) = z_0^n(x) = \frac{v_0^n}{\alpha_n}, \quad z_t^n(x, 0) = z_1^n(x) = \frac{v_1^n}{\alpha_n} & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.56)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.56) por  $w_t^n$  e a segunda por  $z_t^n$  e realizando integração por partes deduzimos que

$$E_{w^n, z^n}(t) = \frac{1}{\alpha_n^2} E_{u^n, v^n}(t). \quad (2.57)$$

Não é difícil verificar que  $E_{w^n, z^n}(0) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A fim de obter uma contradição vamos provar que  $E_{w^n, z^n}(0)$  converge à zero. De fato, de (2.40) e (2.55) temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (2.58)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} b(x) |z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (2.59)$$

Já que  $a(x) \geq a_0 > 0$  q.s. em  $\omega$  de (2.58) inferimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega} |w_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0, \quad (2.60)$$

e também, como  $b(x) \geq b_0 > 0$  q.s. em  $\omega$ , de (2.59) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\omega} |z_t^n(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (2.61)$$

Além disso, da limitação  $E_{w^n, z^n}(0) \leq C$  deduzimos que para uma eventual subsequência de  $\{w^n, z^n\}$  que

$$(w^n, z^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (w, z) \text{ em } (L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)))^2, \quad (2.62)$$

$$(w_t^n, z_t^n) \overset{*}{\rightharpoonup} (w_t, z_t) \text{ em } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2. \quad (2.63)$$

Novamente, pelo Teorema de Aubin-Lions-Simon temos para uma eventual subsequência, a qual ainda será denotada pela mesma notação, que

$$(w^n, z^n) \rightarrow (w, z) \text{ em } (L^\infty(0, T; L^q(\Omega)))^2, \text{ para todo } q \in [2, 6). \quad (2.64)$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência de  $(\alpha_n)$  ainda denotada pela mesma notação, tal que  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in [0, +\infty)$ . Se  $\alpha = 0$ , como

$$\alpha_n w^n = u^n \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))^2, \quad (2.65)$$

$$\alpha_n z^n = v^n \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.66)$$

tomando (2.58), (2.59), (2.60), (2.62), (2.63), (2.65) e (2.66) em consideração, passando ao limite o sistema (2.56) obtemos

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_t = z_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.67)$$

Para  $\varphi = w_t$  e  $\psi = z_t$  de (2.67) inferimos

$$\begin{cases} \rho(x)\varphi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\varphi) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)\psi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla\psi) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.68)$$

o que implica que  $\varphi = \psi = 0$  e, conseqüentemente de (2.67),  $w = z = 0$ .

Agora, vamos considerar  $\alpha > 0$ . Então, passando ao limite o sistema (2.56) chegamos em

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + \alpha^2 z^2 w = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)z_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla z) + \alpha^2 w^2 z = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_t = z_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.69)$$

Para  $\varphi = w_t$  e  $\psi = z_t$ , de (2.69) inferimos

$$\begin{cases} \rho(x)\varphi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + 2\alpha^2 zw\psi + \alpha^2 z^2 \varphi = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)\psi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla \psi) + 2\alpha^2 wz\varphi + \alpha^2 w^2 \psi = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.70)$$

Denotando  $V_1(x, t) = \alpha^2 z^2$ ,  $V_2(x, t) = \alpha^2 w^2$  e  $V_3(x, t) = -2\alpha^2 zw$  podemos reescrever (2.70) como

$$\begin{cases} \rho(x)\varphi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla w) + V_1(x, t)\varphi = V_3(x, t)\psi & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho(x)\psi_{tt} - \operatorname{div}(K(x)\nabla \psi) + V_2(x, t)\psi = V_3(x, t)\varphi & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \varphi = \psi = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.71)$$

Empregando a Hipótese 2.3, de (2.71) segue que  $(\varphi, \psi) = (0, 0)$  e assim,  $w = z = 0$ . Portanto, em qualquer caso  $w = z = 0$ . Como consequência disso  $w = z = 0$  em todas as convergências em (2.62)-(2.64).

Procedendo da mesma maneira como em (2.47) e utilizando o fato que  $w = z = 0$ , obtemos

$$\alpha_n^2 (z^n)^2 w^n \rightharpoonup 0 \text{ e } \alpha_n^2 (w^n)^2 z^n \rightharpoonup 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.72)$$

Sejam

$$\begin{aligned} F^n &:= \alpha_n^2 (z^n)^2 w^n + a(x)w_t^n - \gamma(x)z_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ G^n &:= \alpha_n^2 (w^n)^2 z^n + b(x)z_t^n + \gamma(x)w_t^n = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

temos das convergências anteriores que  $F^n, G^n$  são limitadas em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Como consequência disso, as estimativas de Strichartz asseguram que

$$\|w^n\|_{L^4(0, T; L^{12}(\Omega))}, \|z^n\|_{L^4(0, T; L^{12}(\Omega))} \leq c = c(T), \text{ para todo } t \in [0, T],$$

de onde deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n^2 (z^n)^2 w^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &= \alpha_n^4 \int_0^T \int_{\Omega} |(z^n)^2 w^n|^2 dx dt \\
&\leq \alpha_n^4 \int_0^T \|z^n(t)\|_{L^8(\Omega)}^4 \|w^n(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 dt \\
&\lesssim \alpha_n^4 \|w^n\|_{C^0([0,T],L^4(\Omega))}^2 \int_0^T \|z^n(t)\|_{L^{12}(\Omega)}^4 dt \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.73}$$

não importando se  $\alpha_n \rightarrow 0$  ou se  $\alpha_n \rightarrow \alpha > 0$ . De fato, no primeiro caso

$$\|w^n\|_{C^0([0,T],L^4(\Omega))}^2 \|z^n\|_{L^4(0,T;L^{12}(\Omega))}^4$$

é limitada e no segundo caso temos que  $\|w^n\|_{C^0([0,T],L^4(\Omega))} \rightarrow 0$  em vista do Teorema de Aubin-Lions-Simon e o termo  $\alpha_n^4 \|z^n\|_{L^4(0,T;L^{12}(\Omega))}^4$  é limitado. Analogamente, deduzimos que

$$\|\alpha_n^2 (w^n)^2 z^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \rightarrow 0. \tag{2.74}$$

Lembremos que nosso objetivo é provar que  $E_{w^n, z^n}(0)$  converge a zero, onde

$$\begin{aligned}
E_{w^n, z^n}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |w_t^n(x, t)|^2 + \rho |z_t^n(x, t)|^2 + (\nabla w^n(x, t))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla w^n(x, t) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla z^n(x, t))^{\top} \cdot K(x) \cdot \nabla z^n(x, t) + \alpha_n^2 (w^n z^n)^2 dx.
\end{aligned}$$

Vamos utilizar a seguinte notação,

$$P := -\rho \partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} (K(x) \partial_{x_j}).$$

Então temos as seguintes convergências a zero: (2.58), (2.59), (2.64), (2.73) e (2.74). Tendo em mente que  $0 \leq \gamma(x) \leq a(x)$  e  $0 \leq \gamma(x) \leq b(x)$ , deduzimos

$$Pw_t^n \rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)) \tag{2.75}$$

e

$$Pz_t^n \rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)). \tag{2.76}$$

Vamos denotar por  $\mu_1$  e  $\mu_2$  as medidas microlocais de defeito associadas a  $\{w_t^n\}$  e  $\{z_t^n\}$  em  $L^2(\Omega \times (0, T))$ , as quais existem em virtude do Teorema 1.25. Então, da Hipótese 2.2, deduzimos dois fatos:

(i) Os suportes das medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  estão contidos no conjunto característico do operador de ondas  $\{\tau^2 - \frac{1}{\rho}\xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi = 0\}$ .

(ii)  $\mu_1$  e  $\mu_2$  se propagam ao longo do fluxo bicaracterístico deste operador, o que significa, em particular que se algum ponto  $\omega_0 = (x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$  não pertence a algum dos conjuntos  $\text{supp}(\mu_1)$  ou  $\text{supp}(\mu_2)$  então toda a bicaracterística partindo de  $\omega_0$  permanece fora de  $\text{supp}(\mu_1)$  ou  $\text{supp}(\mu_2)$ .

De fato, de (2.75), (2.76) e o Teorema 1.26 deduzimos o item (i).

Além disso, pela Proposição 1.18 e o Teorema 1.30, segue que  $\text{supp}(\mu_i) \subset (\Omega \times (0, T)) \times S^d$  é uma união de curvas do tipo

$$t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto m_\pm(t) = \left( t, x(t), \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + |G(x)\dot{x}|^2}}, \frac{\mp G(x)\dot{x}}{\sqrt{1 + |G(x)\dot{x}|^2}} \right), \quad (2.77)$$

onde  $t \in I \mapsto x(t) \in \Omega$  é uma geodésica da métrica  $G(x)$ , para  $i = 1, 2$ .

Como  $w_t^n \rightarrow 0$  e  $z_t^n \rightarrow 0$  em  $L^2(\omega \times (0, T))$ , temos pelo Teorema 1.29 que  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  em  $\omega$  e conseqüentemente  $\text{supp}(\mu_1) \subset (\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$  e  $\text{supp}(\mu_2) \subset (\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$ .

Por outro lado, seja  $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \text{supp}(\mu_1) \cup \text{supp}(\mu_2)$ . Como as geodésicas partindo de pontos dentro de  $\Omega \setminus \omega$ , entram necessariamente na região  $\omega$ , então para qualquer geodésica da métrica  $G$ , com  $0 \in I$  existe  $t > 0$  tal que  $m_\pm(t)$  não pertence a  $\text{supp}(\mu_1)$  e  $\text{supp}(\mu_2)$  e assim,  $m_\pm(t_0)$  também não pertence, o que mostra a validade do item (ii). Assim,  $\text{supp}(\mu_1)$  e  $\text{supp}(\mu_2)$  são vazios. Como conseqüência disso, temos que  $w_t^n \rightarrow 0$  e  $z_t^n \rightarrow 0$  em  $L^2_{loc}(\Omega \times (0, T))$ . Já que,  $v_t^n \rightarrow 0$  e  $z_t^n \rightarrow 0$  fortemente em  $L^2(\omega \times (0, T))$  deduzimos que

$$w_t^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.78)$$

e

$$z_t^n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.79)$$

Agora vamos mostrar que  $E_{w^n, z^n}(0)$  converge a zero. De fato, consideremos a seguinte função de corte

$$\theta \in C^\infty(0, T), \quad 0 \leq \theta(t) \leq 1, \quad \theta(t) = 1 \text{ em } (\varepsilon, T - \varepsilon).$$

Multiplicando a primeira equação de (2.56) por  $w^n\theta$ , a segunda por  $z^n\theta$  e integrando por partes, inferimos que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \rho(x) |w_t^n|^2 dx dt - \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \rho(x) w_t^n w^n dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla w^n)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla w^n dx dt + \alpha_n^2 \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (z^n)^2 (w^n)^2 dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} a(x) w_t^n w^n dx dt - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \gamma(x) z_t^n w^n dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

e

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \rho(x) |z_t^n|^2 dx dt - \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \rho(x) z_t^n z^n dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla z^n)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla z^n dx dt + \alpha_n^2 \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (z^n)^2 (w^n)^2 dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} b(x) z_t^n z^n dx dt + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} \gamma(x) w_t^n z^n dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Considerando as convergências (2.58), (2.59), (2.62)-(2.64), (2.72) e tendo em mente que  $w = z = 0$  de (2.80) e (2.81) deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla w^n)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla w^n dx dt = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} (\nabla z^n)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla z^n dx dt = 0,$$

o implica em

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla w^n)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla w^n dx dt = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla z^n)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla z^n dx dt = 0.$$

Também temos que

$$\alpha_n^2 \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (w^n z^n)^2 dx dt \rightarrow 0.$$

Combinando as convergências acima obtemos

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} E_{w^n, z^n}(t) dt \rightarrow 0.$$

Então, como a energia é não-crescente segue que

$$(T - 2\varepsilon)E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Pela identidade da energia segue que

$$E_{w^n, z^n}(T - \varepsilon) - E_{w^n, z^n}(\varepsilon) = - \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} a(x) |w_t^n(x, t)|^2 + b(x) |z_t^n(x, t)|^2 dx dt,$$

que combinado com (2.58), (2.59) e a arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$ , nos dá  $E_{w^n, z^n}(0) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , como desejávamos provar. ■

**Observação 2.5** *Observe que se ao invés de assumirmos que  $\gamma$  satisfaz a relação com  $a(x)$  e  $b(x)$  dada em (2.4), assumirmos que  $\text{supp } \gamma \subset \omega$ , o resultado no Lema 2.1 permanece válido e portanto o resultado de estabilidade dado no Teorema 2.3.*

# Capítulo 3

## Estabilidade Uniforme de um Modelo Linear Sujeito a Uma Dissipação Não-Linear

Seja  $(M, \mathbf{g})$  uma variedade Riemanniana compacta e com bordo onde  $\mathbf{g}$  denota a métrica Riemanniana de classe  $C^\infty$ . Neste capítulo, investigaremos a estabilidade do seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}u - \gamma(x)v_t + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } M \times (0, +\infty), \\ v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}v + \gamma(x)u_t = 0 & \text{em } M \times (0, +\infty), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial M \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } M, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) & \text{em } M. \end{cases} \quad (3.1)$$

Supomos que a função  $g$  satisfaz as seguintes hipóteses:

**Hipótese 3.1** *i)  $g(s)$  é contínua e monótona crescente*

*ii)  $g(s)s > 0$  para  $s \neq 0$ ,*

*iii)  $A|s| \leq g(s) \leq B|s|$  para  $|s| > 1$ ,*

onde  $A$  e  $B$  são duas constantes positivas.

Também assumimos as seguintes condições sobre os termos de amortecimento e o acoplamento:

**Hipótese 3.2**  *$a, \gamma \in L^\infty(M)$  são funções não negativas tais que*

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{quase sempre em } M_*, \quad (3.2)$$

onde  $M_*$  é um subconjunto aberto de  $M$  que contém  $M \setminus V$  e o subconjunto  $V$  é o conjunto construído no Teorema 6.6 de [30]. Existem duas constante positivas  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$a(x) \leq c_1\gamma(x) \quad \text{e} \quad \gamma(x) \leq c_2a(x), \quad \forall x \in M.$$

Definimos a energias das soluções do sistema (3.1) por

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_M (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dM}_{e_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_M (|v_t|^2 + |\nabla v|^2) dM}_{e_2(t)}.$$

Com o objetivo de provar o decaimento da energia para o problema (3.1), começamos estudando o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u = f & \text{em } M \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } M. \end{cases} \quad (3.3)$$

**Lema 3.1** *Sob as hipóteses acima, existe uma constante positiva  $C$ , tal que para todo  $(u_0, u_1) \in H_0^1(M) \times L^2(M)$ , toda  $f \in L^2((0, \infty); L^2(M))$  e todo  $T > 0$ , a solução de (3.3) satisfaz*

$$\int_0^T e(t) dt \leq C e(T) + C \left[ \int_0^T \int_M [|f|^2 + a(x)|u_t|^2] dM dt \right], \quad (3.4)$$

onde  $e(t) = \frac{1}{2} \int_M (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dM$ .

**Demonstração:** Primeiramente, lembramos o resultado do Teorema 6.6 em [30], a saber: Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um subconjunto aberto  $V \subset M$  e funções suaves  $\alpha, k : M \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\text{med}(V) \geq \text{med}(M) - \varepsilon$ ,  $\text{med}(V \cap \partial M) \geq \text{med}(\partial M) - \varepsilon$ ,  $\nabla \alpha|_V \equiv 0$  e tais que  $\alpha$  e  $k$  satisfazem

$$\begin{aligned} C \int_0^T \int_V [u_t^2 + |\nabla u|^2] dM dt &\leq \int_0^T \int_V \left( \frac{\Delta k}{2} - \alpha \right) u_t^2 dM dt \\ &+ \int_0^T \int_V \left[ \nabla^2 k(\nabla u, \nabla u) + \left( \alpha - \frac{\Delta k}{2} \right) |\nabla u|^2 \right] dM dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para alguma constante positiva  $C$  e além disso,

$$\langle \nabla k, \nu \rangle < 0 \quad \text{sobre } \partial M \cap V. \quad (3.6)$$

Utilizando a Proposição 4.1 e o Lema 4.2 de [30] com  $H = \nabla k$ , (3.5) e (3.6), inferimos que

$$\begin{aligned}
2C \int_0^T e(t) dt &\leq C^* \int_0^T \int_{M/V} [u_t^2 + |\nabla u|^2] dM dt \\
&+ \left| \left[ \int_M u_t \langle \nabla k, \nabla u \rangle dM \right]_0^T \right| + \left| \left[ \int_M u_t \alpha u dM \right]_0^T \right| \\
&+ \left| \int_0^T \int_M f \alpha u dM dt \right| + \left| \int_0^T \int_M f \langle \nabla k, \nabla u \rangle dM dt \right| \\
&+ \left| \int_0^T \int_{M \setminus V} \langle \nabla u, \nabla \alpha \rangle u dM dt \right| \\
&+ \frac{1}{2} \left| \int_0^T \int_{\partial M \cap (M \setminus V)} \langle \nabla k, \nu \rangle |\nabla u|^2 d\partial M dt \right|
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde  $C^* = C^*(C, \alpha, k)$ .

Denotemos

$$\chi = \left[ \int_M u_t \langle \nabla k, \nabla u \rangle dM \right]_0^T + \left[ \int_M u_t \alpha u dM \right]_0^T. \tag{3.8}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e de Young  $ab \leq \frac{a^2}{4v} + vb^2$ , onde  $v$  é um número positivo, obtemos

$$\left| \int_0^T \int_M f \langle \nabla k, \nabla u \rangle dM dt \right| \leq \frac{R_1^2}{v} \int_0^T \int_M |f|^2 dM dt + 2v \int_0^T e(t) dt, \tag{3.9}$$

e pelo mesmo argumento e a desigualdade de Poincaré, temos

$$\left| \int_0^T \int_M f \alpha u dM dt \right| \leq \frac{R_2^2 C_M}{16v} \int_0^T \int_M |f|^2 dM dt + 2v \int_0^T e(t) dt, \tag{3.10}$$

onde

$$R_1 = \max_{x \in M} |\nabla f(x)| \quad \text{and} \quad R_2 = \max_{x \in M} |\alpha(x)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\partial M \cap (M \setminus V)} \langle \nabla k, \nu \rangle |\nabla u|^2 d\partial M dt &\leq C \int_0^T \int_{M \setminus V} |\nabla u|^2 d\partial M dt \\
&\leq C \int_0^T \int_{\partial M} \langle H_\nu, \nu \rangle (\partial_\nu u)^2 d\partial M dt,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

para alguma constante positiva  $C$ .

Escolhendo  $v$  suficientemente pequeno e utilizando (3.8)-(3.11) em (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T e(t)dt &\leq |\mathcal{X}| + C_1 \int_0^T \int_M |f|^2 dM dt + C_1 \int_0^T \int_{M \setminus V} [a(x)u_t^2 + |\nabla u|^2] dM dt \\ &\quad + C_1 \int_0^T \int_{M \setminus V} |u|^2 dM dt, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $C_1$  é uma constante positiva que depende de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a_0$ ,  $k$  e  $\Omega$ .

Seja  $\tilde{M}$  uma extensão de  $M$  (veja Lema 6.4 em [30] para mais detalhes). Note que também podemos estender  $V$  e  $M_*$  para subconjuntos abertos  $\tilde{V}$  e  $\tilde{M}_*$  de  $\tilde{M}$ , respectivamente, de tal forma que  $\tilde{V}$  tem fronteira suave e  $\tilde{V} \subset \tilde{M}_*$ .

Agora seja  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\tilde{\omega}_\varepsilon := \{x \in \tilde{M}; \text{dist}(x, \partial\tilde{V}) < \varepsilon\} \subset\subset \tilde{M}_*$$

é uma vizinhança tubular de  $\partial\tilde{V}$  e  $\omega_\varepsilon = \tilde{\omega}_\varepsilon \cup M \setminus V$  está contido em  $M_*$ .

Procedendo como em (7.73)-(7.81) de [30], obtemos a existência de uma constante positiva  $C > 0$  dependendo de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a_0$ ,  $\varepsilon$  e  $\Omega$  tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T e(t)dt &\leq Ce(T) + C \left[ \int_0^T \int_M [|f|^2 + a(x)|u_t|^2] dM dt \right] \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 dM dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Agora, nosso objetivo é absorver o último termo do lado direito da desigualdade (3.13). Para fazer isso, trazemos as ideias de [7]. Fixe a variável  $t$  e considere a solução  $z$  do seguinte problema elítico no espaço:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{g}} z = \gamma(x)u & \text{em } M, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \quad (3.14)$$

Daí,  $z$  e  $z_t$  satisfazem as seguintes estimativas

$$\|z\|_{L^2(M)} \leq C \int_M \gamma(x)|u|^2 dM, \quad (3.15)$$

e

$$\|z_t\|_{L^2(M)} \leq C \int_M \gamma(x)|u_t|^2 dM. \quad (3.16)$$

Multiplicando a primeira equação de (3.3) por  $z$  e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_M \gamma(x) |u|^2 dM dt \\ &= \left[ \int_M u_t z dM \right]_0^T + \int_0^T \int_M (-u_t z_t - f z) dM dt. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando as estimativas (3.15)-(3.16) na relação acima, obtemos para todo  $\varepsilon' > 0$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 dM dt \leq \frac{1}{a_0} \int_0^T \int_{M_*} a(x) |u|^2 dM dt \\ & \leq C \int_0^T \int_M \gamma(x) |u|^2 dM dt \tag{3.17} \\ & \leq C(e(T) + e(0)) + \varepsilon' \int_0^T e(t) dt + \frac{C}{\varepsilon'} \int_0^T \int_M a(x) |u|^2 dM dt \\ & \quad + \frac{C}{\varepsilon'} \int_0^T \int_M |f|^2 dM dt \\ & = C(2e(T) + \int_0^T \int_M f u_t dM dt) + \varepsilon' \int_0^T e(t) dt + \frac{C}{\varepsilon'} \int_0^T \int_M a(x) |u|^2 dM dt \\ & \quad + \frac{C}{\varepsilon'} \int_0^T \int_M |f|^2 dM dt \\ & \leq 2\varepsilon' \int_0^T e(t) dt + Ce(T) + C_{\varepsilon'} \int_0^T \int_M |f|^2 dM dt + C_{\varepsilon'} \int_0^T \int_M a(x) |u_t|^2 dM dt. \end{aligned}$$

Inserindo (3.17) em (3.13) e escolhendo  $\varepsilon'$  suficientemente pequeno, obtemos a desigualdade desejada. ■

**Proposição 3.1** *Para  $T > 0$  suficientemente grande, a solução do sistema (3.1) satisfaz*

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_M [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] dM dt. \tag{3.18}$$

**Demonstração:** Aplicando o Lema 3.1 na primeira equação de (3.1) com  $f = \gamma(x)v_t - a(x)g(u_t)$  e  $e(t) = e_1(t)$ , inferimos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T e_1(t) dt \\ & \leq C_1 e_1(T) + C_1 \left[ \int_0^T \int_M [\gamma^2(x) |v_t|^2 + a^2(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] dM dt \right] \\ & \leq C_1 E(T) + C_1 \left[ \int_0^T \int_M [\gamma^2(x) |v_t|^2 + a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) |u_t|^2] dM dt \right]. \tag{3.19} \end{aligned}$$

De forma análoga, aplicando o Lema 3.1 na segunda equação de (3.1) com  $f = -\gamma(x)u_t$  e  $e(t) = e_2(t)$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_0^T e_2(t) dt &\leq C_2 e_2(T) + C_2 \left[ \int_0^T \int_M [\gamma^2(x)|u_t|^2 + a(x)|v_t|^2] dM dt \right] \\ &\leq C_2 E(T) + C_2 \left[ \int_0^T \int_M [a(x)|u_t|^2 + \gamma(x)|v_t|^2] dM dt \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde utilizamos sucessivamente que  $\gamma(x) \leq c_2 a(x)$  e  $a(x) \leq c_1 \gamma(x)$  para todo  $x \in M$ .

Seja  $\delta > 0$  um número real a ser especificado. Multiplicando (3.20) por  $\delta$  e somando a equação resultante com (3.19), obtemos que para todo  $T > 0$  e  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T (e_1(t) + \delta e_2(t)) dt &\leq C(1 + \delta)E(T) + C(\gamma_+ + \delta) \int_0^T \int_M \gamma(x)|v_t|^2 dM dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_M a(x)[|g(u_t)|^2 + |u_t|^2] dM dt \end{aligned} \quad (3.21)$$

A seguir, vamos estimar o termo  $\int_0^T \int_M \gamma(x)|v_t|^2 dM dt$  através da relação de acoplamento. Multiplicando a primeira equação em (3.1) por  $v_t$  e a segunda por  $u_t$  e integrando a soma sobre  $M$ , tem-se

$$\int_0^T \int_M [v_t(u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}u - \gamma(x)v_t + a(x)g(u_t)) + u_t(v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}v + \gamma(x)u_t)] dx dt.$$

Após utilizar integração por partes e a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos para todo  $\varepsilon_2 > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_M \gamma(x)|v_t|^2 dM dt &= \left[ \int_{\Omega} (u_t v_t + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx \right]_0^T + \int_0^T \int_M a(x)g(u_t)v_t dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_M \gamma(x)|u_t|^2 dx dt \quad (3.22) \\ &\leq CE(T) + \varepsilon_2 \int_0^T \int_M |v_t|^2 dx dt + \frac{C}{\varepsilon_2} \int_0^T \int_M a(x)|g(u_t)|^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_M \gamma(x)|u_t|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Combinando (3.22), (3.21) e o fato que  $\gamma(x) \leq c_2 a(x)$  obtemos para todo  $0 < \delta \leq 1$  e todo

$\varepsilon_2 > 0$  que

$$\begin{aligned} & \int_0^T (e_1(t) + \delta e_2(t)) dt \\ & \leq C(1 + \delta + \gamma_+)E(T) + C \left( 1 + (\delta + \gamma_+) \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^T \int_M a(x) |g(u_t)|^2 dx dt \quad (3.23) \\ & + C(\delta + \gamma_+) \varepsilon_2 \int_0^T \int_M |v_t|^2 dx dt + C(1 + \delta + \gamma_+) \int_0^T \int_M a(x) |u_t|^2 dx dt, \end{aligned}$$

onde  $\gamma_+ = \|\gamma\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Finalmente, escolhendo  $\delta$  e  $\varepsilon_2$  de forma que

$$\delta - C(\delta + \gamma_+) \varepsilon_2 > \frac{\delta}{2},$$

podemos deduzir que

$$\begin{aligned} TE(t) \leq \int_0^T E(t) dt & \leq C(1 + \delta + \gamma_+)E(T) \\ & + C \left( 1 + (\delta + \gamma_+) \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^T \int_M a(x) |g(u_t)|^2 dx dt \\ & + C(1 + \delta + \gamma_+) \int_0^T \int_M a(x) |u_t|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Escolhendo  $T$  suficientemente grande, obtemos o resultado desejado. ■

Para obter o resultado de estabilidade, seguimos as ideias introduzidas por Lasiecka e Tataru [55]. Para este fim, definimos algumas funções auxiliares.

Seja  $h$  uma função côncava, estritamente crescente com  $h(0) = 0$ , satisfazendo

$$h(s h(s)) \geq s^2 + g^2(s), \text{ para } |s| < 1. \quad (3.24)$$

Note que tal função pode ser facilmente construída, em virtude das hipóteses sobre a função  $g$  dadas na Hipótese 3.1. Com essa função, definimos

$$r(\cdot) = h \left( \frac{\cdot}{\text{med}(Q_T)} \right), \quad Q_T = \Omega \times (0, T). \quad (3.25)$$

Como  $r$  é monótona crescente, então  $cI + r$  é invertível para todo  $c \geq 0$ . Para uma constante positiva  $L$ , definimos então

$$p(x) = (cI + r)^{-1}(Lx), \quad L := (C \text{med}(Q_T))^{-1}, \quad (3.26)$$

onde  $C$  é uma constante positiva a ser determinada posteriormente.

É fácil ver a função  $p$  é positiva, contínua e estritamente crescente com  $p(0) = 0$ . Finalmente, defina

$$q(x) = x - (I + p)^{-1}(x). \quad (3.27)$$

Seguindo os argumentos apresentados em [55], deduzimos a partir da desigualdade de observabilidade obtida na proposição anterior, o seguinte resultado de estabilidade para o problema (3.1).

**Teorema 3.1** *Assuma que as Hipóteses 3.1 e 3.2 são satisfeitas e considere a energia  $E(t)$  associada ao problema (3.1). Então, existe um  $T_0 > 0$  tal que*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0, \quad (3.28)$$

com  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ , onde o semigrupo de contrações  $S(t)$  é a solução para a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \quad (3.29)$$

onde  $q$  é dado em (3.27). Aqui, a constante  $c$  (na equação (3.26)) é dada por

$$c \equiv \frac{k_1^{-1} + k_2}{\text{med}(Q_T)(1 + \|a\|_\infty)}.$$

Vale mencionar que, explorando a desigualdade (3.24) e os resultados da seção 8 do artigo [31], é possível deduzir taxas de decaimento explícitas para as soluções do problema (3.1).

# Capítulo 4

## Estabilidade Uniforme Local para uma Equação da Onda Semi-linear em um Meio Não-homogêneo Sujeita a uma Dissipação Localmente Distribuída do tipo Kelvin-Voigt

Este capítulo é destinado ao estudo de uma equação da onda semilinear sujeita a uma dissipação localmente distribuída do tipo Kelvin-Voigt

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(K(x)\nabla u)u + f(u) - \operatorname{div}(a(x)\nabla\partial_t u) + b(x)\partial_t u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , é um domínio limitado com fronteira suficientemente regular  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $k_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  são funções de classe  $C^\infty$  tais que para todo  $x \in \Omega$  e  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \quad (4.2)$$

onde  $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$  são constantes positivas e  $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$  é uma matriz simétrica positiva definida. Denotamos por  $\omega$  a interseção de  $\Omega$  com uma vizinhança de  $\partial\Omega$  em  $\mathbb{R}^d$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função com crescimento sub-crítico, mais precisamente, a função  $f$  satisfaz as seguintes hipóteses:

**Hipótese 4.1** *A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  com crescimento sub-crítico, satisfazendo a condição de sinal  $f(s)s \geq 0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , e*

$$f(0) = 0, \quad |f^{(j)}(s)| \leq k_0(1 + |s|)^{p-j}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Em particular, de (4.3) obtemos

$$|f(r) - f(s)| \leq c (1 + |s|^{p-1} + |r|^{p-1}) |r - s|, \quad \text{para todo } s, r \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

para algum  $c > 0$ , com

$$1 \leq p < \frac{n}{n-2} \quad \text{se } n \geq 3 \quad \text{ou } p \geq 1 \quad \text{se } n = 1, 2. \quad (4.5)$$

Além disso,

$$0 \leq F(s) \leq f(s)s, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

onde  $F(\lambda) := \int_0^\lambda f(s) ds$ .

Por simplicidade, podemos assumir que  $\rho(x) = 1$  e  $K(x) = I_d$ , uma vez que os cálculos realizados no capítulo 2 podem ser repetidos neste caso.

As seguintes hipóteses são feitas sobre a função  $a(x)$ , responsável pelo efeito dissipativo do tipo Kelvin-Voigt:

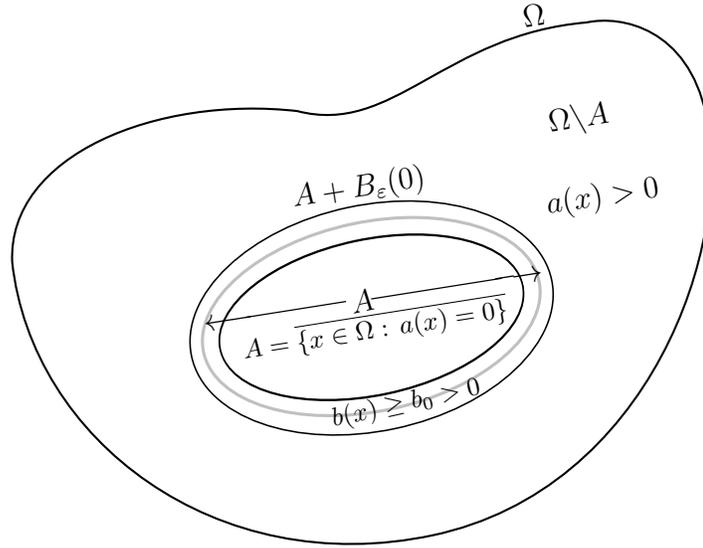
**Hipótese 4.2** *Assumimos que  $a(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$  é uma função não negativa. Além disso, existe um conjunto compacto e conexo  $A \subset \Omega$  com fronteira suave e interior não vazio verificando*

$$A := \{x \in \Omega : a(x) = 0\}.$$

*Também assumimos que  $a \in C^0(\bar{\omega})$ , onde  $\omega := \Omega \setminus A$ .*

Com respeito a função  $b(x)$ , responsável pelo efeito dissipativo localizado do tipo friccional, assumimos que:

**Hipótese 4.3** *Assumimos  $b \in C^0(\bar{\Omega})$  é uma função não negativa tal que  $b(x) \geq b_0 > 0$  em um vizinhança da fronteira  $\partial A$  do conjunto  $A := \{x \in \Omega : a(x) = 0\}$ , isto é,  $b(x) > b_0 > 0$  em  $V_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, y) < \varepsilon, y \in \partial A\}$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, de acordo com a Figura 4.1.*



**Figura 4.1:** Representação gráfica das dissipações.

**Hipótese 4.4**  $\omega$  controla  $\Omega$  geometricamente, isto é, existe  $T_0 > 0$ , tal que todo raio da ótica geométrica viajando com velocidade constante igual a 1 e partindo de  $t = 0$ , encontra o conjunto  $\omega$  em um tempo  $t < T_0$ .

**Hipótese 4.5** Para todo  $T \geq T_0$ , onde  $T_0$  é dado na Hipótese 4.4, a única solução  $v$  pertencente ao espaço  $C([0, T[; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T[, H^{-1}(\Omega))$ , do sistema

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v + q(x, t)v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{em } \omega \times (0, T), \end{cases} \quad (4.7)$$

onde  $q(t, x) \in L^\infty([0, T[, L^n(\Omega))$ , é a trivial  $v \equiv 0$ .

## 4.1 Existência e Unicidade de Soluções

Consideremos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

munido do produto interno

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + v_1 v_2 dx.$$

Escrevendo  $v = u_t$  podemos reescrever o problema (4.1) como o seguinte problema de Cauchy em  $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u, v) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{F}(u, v) \\ (u, v)(0) = (u_0, v_0), \end{cases} \quad (4.8)$$

onde o operador linear  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$  é dado por

$$\mathcal{A}(u, v) = (v, \operatorname{div}(\nabla u + a(x)\nabla v) - \frac{1}{\rho}b(x)v), \quad (4.9)$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in \mathcal{H} : v \in H_0^1(\Omega), \operatorname{div}(\nabla u + a(x)\nabla v) \in L^2(\Omega)\} \quad (4.10)$$

e  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é o operador não linear

$$\mathcal{F}(u, v) = (0, -f(u)). \quad (4.11)$$

Como em [65], é possível mostrar que o operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definido por (4.9) e (4.10) é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $e^{At}$  no espaço  $\mathcal{H}$  e que  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ .

Com essas informações em mãos, temos o seguinte resultado que assegura a boa colocação global do problema (4.1).

**Teorema 4.1** *Assuma que a Hipótese 4.1 seja satisfeita e que  $(u_0, v_0) \in \mathcal{H}$ . Então o problema (4.8) admite um única solução mild  $(u, v) \in C([0, T]; \mathcal{H})$ . Além disso, se  $(u_0, v_0) \in D(\mathcal{A})$ , a solução é regular.*

**Demonstração:** De acordo com os comentários anteriores, resta mostrar que o operador não linear  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado em (4.11) é localmente Lipschitz. De fato, dado um conjunto limitado  $B$  em  $\mathcal{H}$  e  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B$ . Então, por (4.4), a desigualdade de Hölder e o fato que  $H^1$  está continuamente imerso em  $L^{2q}(\Omega)$  para  $2q = \frac{22^*}{2^* - 2(p-1)} \leq 2^*$ , onde  $2^* = \frac{2n}{n-2}$ , temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u_1, v_1) - \mathcal{F}(u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(1 + \|u_1\|_{L^{2^*}}^{2(p-1)} + \|u_2\|_{L^{2^*}}^{2(p-1)})\|u_1 - u_2\|_{L^{2q}}^2 \\ &\leq C_0\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 \leq C_0\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Daí pelos Teoremas 1.22 e 1.23, o problema de Cauchy (4.8) admite uma única solução *mild*

$$(u(t), v(t)) = e^{\mathcal{A}t}(u_0, v_0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)} \mathcal{F}(u(s), v(s)) ds, \quad t \in [0, T_{\max}).$$

Vejam agora que  $T_{\max} = \infty$ . De fato, o funcional de energia definido em (0.15) satisfaz

$$\frac{d}{dt} E_u(t) = - \int_{\Omega} a(x) |\nabla u_t(x, t)|^2 + b(x) |\partial_t u|^2 dx,$$

o que mostra que  $E_u(t)$  é não crescente com  $E_u(t) \leq E_u(0)$  para todo  $t \in [0, T_{\max})$ . Por outro lado, de (4.6), deduzimos que

$$E_u(t) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \geq \frac{1}{2} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \|(u, u_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq E_u(t) \leq E_u(0), \quad \forall t \in [0, T_{\max}).$$

Portanto as soluções locais não podem explodir em um tempo finito e assim,  $T_{\max} = \infty$ .

## 4.2 Decaimento Exponencial para as Soluções do Problema (4.1)

Através dessa seção, consideramos  $T_0 > 0$  o número associado a condição geométrica de controle, isto é, todo raio da ótica geométrica encontra a região  $\omega := \Omega \setminus A$  em um tempo  $T^* < T_0$ .

Tendo em vista que a energia associada ao problema (4.1), a saber,

$$E_u(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 dx dt + \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx, \quad (4.12)$$

onde  $F(\lambda) = \int_0^{\lambda} F(s) ds$  satisfaz a identidade da energia dada por

$$E_u(t_2) - E_u(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x) |\nabla \partial_t u|^2 + b(x) |\partial_t u|^2 dx dt, \quad (4.13)$$

para todo  $0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$ , é suficiente provarmos a seguinte desigualdade de observabilidade para as soluções do problema (4.1):

**Lema 4.1** *Para todo  $T \geq T_0$  e todo  $R > 0$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que a correspondente solução  $u$  de (4.1) satisfaz*

$$E_u(0) \leq C \left( \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla \partial_t u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} b(x) |\partial_t u|^2 dx dt \right), \quad (4.14)$$

desde que  $E_u(0) < R$ .

**Demonstração:** A prova será feita por contradição. Assim, se (4.14) é falsa então existe  $T > T_0$  e existe  $R > 0$  tal que para cada constante  $C > 0$ , existe uma solução  $u_C$  tal que  $E_{u_C}(0) \leq R$  e viola a desigualdade (4.14).

Em particular, para  $C = m \in \mathbb{N}$ , obtemos a existência de uma solução  $u^m$  verificando  $E_{u^m}(0) \leq R$  verificando

$$E_{u^m}(0) > m \left( \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\nabla \partial_t u^m|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} b(x) |\partial_t u^m|^2 dx dt \right). \quad (4.15)$$

Então, obtemos uma sequência de soluções  $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  para o problema (4.1) tais que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} (a(x) |\nabla \partial_t u^m|^2 + b(x) |\partial_t u^m|^2) dx dt}{E_{u^m}(0)} = 0. \quad (4.16)$$

Já que  $\{E_{u^m}(0)\}_{m \in \mathbb{N}}$  é limitada, a equação (4.16) assegura que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (a(x) |\nabla \partial_t u^m|^2 + b(x) |\partial_t u^m|^2) dx dt = 0. \quad (4.17)$$

Além disso, existe uma subsequência de  $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , ainda denotada por  $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , satisfazendo as seguintes convergências:

$$u^m \rightharpoonup u \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (4.18)$$

$$\partial_t u^m \rightharpoonup \partial_t u \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (4.19)$$

$$u^m \rightarrow u \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \text{ para todo } q \in \left[ 2, \frac{2n}{n-2} \right), \quad (4.20)$$

onde a última convergência é obtida utilizando o Teorema de Aubin-Lions-Simon. Consequentemente,

$$f(u^m) \rightharpoonup f(u) \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.21)$$

A prova agora será dividida em dois casos:  $u \neq 0$  e  $u = 0$ .

Caso (i):  $u \neq 0$ .

Para  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $u^m$  a solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^m - \Delta u^m + f(u^m) - \operatorname{div}(a(x)\nabla \partial_t u^m) + b(x)\partial_t u^m = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u^m(x, 0) = u_{0,m}(x); \quad \partial_t u^m(x, 0) = u_{1,m}(x), & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Das convergências (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) e (4.21) obtemos

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_t u = 0 & \text{q.s. em } \Omega \setminus \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Definindo  $y = \partial_t u$ , do sistema (4.22) temos

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \Delta y + f'(u)y = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ y = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ y = 0 & \text{q.s. em } \Omega \setminus \mathcal{C}. \end{cases}$$

Empregando a Hipótese 4.5, concluímos que  $y = \partial_t u \equiv 0$ . Retornando ao problema (4.22) concluímos que  $u \equiv 0$  o que é uma contradição.

Caso (ii):  $u = 0$ .

Definindo

$$\alpha_m := \sqrt{E_{u^m}(0)}, \quad \text{e } v^m := \frac{u^m}{\alpha_m}, \quad (4.23)$$

de (4.16), obtemos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (a(x)|\nabla \partial_t v^m|^2 + b(x)|\partial_t v^m|^2) \, dx dt = 0. \quad (4.24)$$

De (4.23), a sequência  $\{v^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  é solução da seguinte sequência de problemas:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v^m - \Delta v^m + \frac{1}{\alpha_m} f(u^m) - \operatorname{div}(a(x)\nabla \partial_t v^m) + b(x)\partial_t v^m = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ v^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ v^m(x, 0) = \frac{u_{0,m}}{\alpha_m}; \quad \partial_t v^m(x, 0) = \frac{u_{1,m}}{\alpha_m} & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.25)$$

e o funcional de energia associado as soluções do problema (4.25) é dado por

$$E_{v^m}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t v^m|^2 + |\nabla v^m|^2) dx + \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\Omega} F(u^m) dx,$$

já que

$$\frac{1}{\alpha_m} \int_{\Omega} f(u^m) \partial_t v^m dx = \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u^m) dx.$$

Note que  $E_{v^m}(t) = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{u^m}(t)$  para todo  $t \geq 0$  e, em particular para  $t = 0$

$$E_{v^m}(0) = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{u^m}(0) = 1, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (4.26)$$

Para obter uma contradição, vamos provar que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_{v^m}(0) = 0. \quad (4.27)$$

De fato, inicialmente observamos que (4.26) assegura a existência de um subsequência de  $\{v^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , novamente reindexada por  $\{v^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$v^m \rightharpoonup v \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty, \quad (4.28)$$

$$\partial_t v^m \rightharpoonup \partial_t v \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty, \quad (4.29)$$

$$v^m \rightarrow v \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty, \quad \text{para todo } q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right). \quad (4.30)$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência de  $(\alpha_m)$  ainda denotada do mesmo modo, tal que  $\alpha_m \rightarrow \alpha \in [0, +\infty)$ .

Se  $\alpha > 0$ , seja  $A_\varepsilon := A + \overline{B_{\varepsilon/2}(0)}$  e  $\mathcal{C} := A \setminus A_\varepsilon = \{x \in A : d(x, y) > \varepsilon/2, y \in \partial A\}$ .

Passando ao limite a sequência de problemas (4.25) e considerando as convergências (4.24), (4.28) - (4.30) e o fato que  $\alpha_m v^m = u^m \rightarrow 0$  em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , deduzimos que

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_t v = 0 & \text{em } \Omega \setminus \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Escrevendo  $w = \partial_t v$  de (4.31) obtemos no sentido das distribuições,

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ w = 0 \text{ em } \Omega \setminus \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Daí, utilizando novamente a Hipótese 4.5, concluímos que  $w = \partial_t v \equiv 0$ . Portanto, retornando ao problema (4.31) obtemos que  $v \equiv 0$ .

Se  $\alpha = 0$ , como  $f \in C^2(\mathbb{R})$  temos pela Fórmula de Taylor que existe  $s_0 \in (0, s)$  tal que

$$f(s) = f'(0)s + \frac{1}{2}f''(s_0)s^2. \quad (4.33)$$

Para  $s = 0$  a equação (4.33) é obviamente válida e para o caso  $s < 0$  aplicamos a Fórmula de Taylor para a função  $g : [-s, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = f(-t)$  com  $s > 0$ . Em resumo, (4.33) é válida para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Defina

$$R_f(s) = \frac{1}{2}f''(s_0)s^2. \quad (4.34)$$

Assim, da Hipótese 4.1 obtemos que

$$\begin{aligned} |R_f(s)| &= \frac{1}{2}|f''(s_0)|s^2 \\ &\lesssim (1 + |s_0|)^{p-2}s^2 \\ &= \frac{(1 + |s_0|)^{p-1}}{(1 + |s_0|)}s^2 \\ &\lesssim (1 + |s_0|)^{p-1}s^2 \\ &\lesssim |s|^2 + |s|^{p+1} \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Portanto,

$$\frac{1}{\alpha_m}f(\alpha_m v^m) = f'(0)v^m + \frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \quad (4.36)$$

e

$$\left| \frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \right| \lesssim \alpha_m |v^m|^2 + |\alpha_m|^p |v^m|^{p+1} \text{ se } 1 \leq p < \frac{n}{n-2}. \quad (4.37)$$

Agora, vamos provar que

$$\frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \rightharpoonup 0 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ quando } m \rightarrow +\infty.$$

De fato, observe que  $R_f(s) = f(s) - f'(0)s$ , então de (4.4) obtemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &\lesssim \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \right|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |f'(0)v^m|^2 dxdt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_{\Omega} (|\alpha_m v^m| + |\alpha_m v^m|^p)^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |v^m|^2 dxdt \\ &\lesssim \|v^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + (\alpha_m)^{2(p-1)} \|v^m\|_{L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))}^{2p}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pelas imersões de Sobolev, a limitação da sequência  $\{v^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  e o fato que  $p \geq 1$ , obtemos a existência de uma constante  $C > 0$  tal que

$$\left\| \frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \quad (4.39)$$

e, conseqüentemente, existe  $r \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  tal que

$$\frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \rightharpoonup r \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.40)$$

Por outro lado, de (4.37) temos que

$$\left\| \frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \right\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega))}^2 \lesssim \alpha_m \|v^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + (\alpha_m)^p \|v^m\|_{L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega))}^{p+1} \rightarrow 0, \quad (4.41)$$

quando  $m \rightarrow \infty$ . De (4.40) e (4.41) e a imersão  $L^2(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0, T; L^1(\Omega))$  obtemos

$$\frac{R_f(\alpha_m v^m)}{\alpha_m} \rightharpoonup 0 \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.42)$$

Assim, de (4.36) e (4.42) obtemos que

$$\frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v^m) \rightharpoonup f'(0)v \text{ weakly in } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.43)$$

Utilizando as convergências (4.24), (4.28) - (4.30) e (4.43) e passando ao limite a sequência de problemas (4.25) quando  $m \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v + f'(0)v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_t v = 0 & \text{em } \Omega \setminus \mathcal{C}, \end{cases} \quad (4.44)$$

e definindo  $w = \partial_t v$ , temos que  $w$  satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w + f'(0)w = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ w = 0 & \text{em } \Omega \setminus \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4.45)$$

Utilizando a Hipótese 4.5 obtemos que  $w = \partial_t v \equiv 0$  e retornando ao problema (4.44) deduzimos que  $v \equiv 0$ .

Então, em ambos os casos,  $\alpha = 0$  e  $\alpha > 0$ , obtemos que  $v \equiv 0$ . Levando em consideração (4.30), (4.36) e (4.37) é fácil ver que temos uma convergência forte do termo não linear, a saber,

$$\frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v^m) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \quad (4.46)$$

Agora, considere o operador de d'Alambert  $\square = \partial_t^2 - \Delta$ . Da equação (4.25) temos

$$\square v^m = -\frac{1}{\alpha_m} f(u^m) + \operatorname{div}(a(x)\nabla \partial_t v^m) - b(x)\partial_t v^m,$$

e assim,

$$\partial_t \square v^m = \partial_t \left( -\frac{1}{\alpha_m} f(u^m) + \operatorname{div}(a(x)\nabla \partial_t v^m) - b(x)\partial_t v^m \right). \quad (4.47)$$

Vamos analisar separadamente cada um dos termos no lado direito de (4.47).

Análise de  $I_1^m := -\frac{1}{\alpha_m} f(u^m)$ .

Empregando a convergência (4.46), deduzimos que  $I_1^m \rightarrow 0$  fortemente em  $L^2(\Omega \times (0, T))$  quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Análise  $I_3^m := -b(x)\partial_t v^m$ .

Temos trivialmente de (4.24) que  $-b(x)\partial_t v^m \rightarrow 0$  fortemente em  $L^2(\Omega \times (0, T))$  quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Análise  $I_2^m := \operatorname{div}(a(x)\nabla \partial_t v^m)$ .

Lembrando da convergência (4.24), deduzimos que  $a(x)\nabla \partial_t v^m \rightarrow 0$  fortemente em  $L^2(\Omega \times (0, T))$  quando  $m \rightarrow +\infty$  e assim,  $\operatorname{div}(a(x)\nabla \partial_t v^m) \rightarrow 0$  fortemente em  $H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T))$  quando  $m \rightarrow +\infty$ .

As convergências acima asseguram que

$$\partial_t \left( -\frac{1}{\alpha_m} f(u^m) + \operatorname{div}(a(x)\nabla \partial_t v^m) - b(x)\partial_t v^m \right) \rightarrow 0 \text{ fortemente em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)),$$

isto é, de (4.47) concluímos que

$$\square \partial_t v^m \rightarrow 0 \text{ fortemente em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)), \quad (4.48)$$

quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Seja  $\mu$  a medida microlocal de defeito associada a  $\{\partial_t v^m\}$  em  $L_{loc}^2(\Omega \times (0, T))$ . A convergência (4.48) assegura que  $\text{supp}(\mu)$  está contido no conjunto característico do operador de d'Alamber, o qual é dado por  $\{\tau^2 = \|\xi\|^2\}$ .

Nosso objetivo é propagar a convergência da sequência  $\partial_t v^m$  de  $L^2((\Omega \setminus \mathcal{C}) \times (0, T))$  para todo o espaço  $L^2(\Omega \times (0, T))$ . Entretanto, a convergência (4.48) não é suficiente para termos tal propagação. Essa falta de regularidade vem da seguinte convergência:

$$\partial_t (\text{div}(a(x)\nabla \partial_t v^m)) \rightarrow 0 \text{ fortemente em } H_{loc}^{-2}(\Omega \times (0, T)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty.$$

Agora, a dissipação friccional agindo na vizinhança  $V_\varepsilon$  da fronteira  $\partial A$  do conjunto  $A := \{x \in \Omega : a(x) = 0\}$  desempenha um papel fundamental na obtenção da propagação da convergência acima mencionada. De fato, note que  $a(x)\nabla \partial_t v^m = 0$  em  $A \times (0, T)$ . Consequentemente, de (4.47) temos que

$$\square \partial_t v^m = \partial_t \left( -\frac{1}{\alpha_m} f(u^m) - b(x) \partial_t v^m \right) \rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\text{int } A \times (0, T)), \quad (4.49)$$

quando  $m \rightarrow +\infty$ .

A convergência acima assegura que  $\mu$  se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador de D'Alembert, o que significa que se existe  $\omega_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$  tal que  $\omega_0 \notin \text{supp}(\mu)$ , então toda bicaracterística partindo de  $\omega_0$  não pertence a  $\text{supp}(\mu)$ . Entretanto, como  $\text{supp}(\mu) \subset \mathcal{C} \times (0, T) \subset A \times (0, T)$  e a dissipação friccional age em uma vizinhança de ambos os lados do conjunto  $\partial A$ , podemos propagar a convergência a zero da energia cinética de  $(V_{\varepsilon/2} \cap A) \times (0, T)$  para dentro do conjunto  $\mathcal{C} \times (0, T)$ .

Por outro lado, da desigualdade de Poincaré e as hipóteses sobre os coeficientes  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  temos que

$$\partial_t v^m \rightarrow 0 \text{ em } (\Omega \setminus \mathcal{C}) \times (0, T), \quad (4.50)$$

consequentemente, obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t v^m(x, t)|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty. \quad (4.51)$$

Vamos provar agora que  $E_{v^m}(0) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow +\infty$ . De fato, considere a seguinte função de corte

$$\theta \in C^\infty(0, T), \quad 0 \leq \theta(t) \leq 1, \quad \theta(t) = 1 \text{ em } (\varepsilon, T - \varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Multiplicando a equação (4.25) por  $v^m \theta$  e integrando por partes, inferimos que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} |\partial_t v^m|^2 dx dt - \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \partial_t v^m v^m dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} |\nabla v^m|^2 dx dt + \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} f(u^m) v^m dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} a(x) \nabla \partial_t v^m \cdot \nabla v^m dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} b(x) \partial_t v^m v^m dx dt = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Considerando as convergências (4.24), (4.28)-(4.30) e (4.51) e empregando o fato que  $v = 0$ , a identidade (4.52) assegura que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla v^m|^2 + \frac{1}{\alpha_m} f(u^m) v^m dx dt = 0. \quad (4.53)$$

Além disso, utilizando a propriedade (4.6), a convergência (4.53) assegura que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F(u^m) dx dt = 0. \quad (4.54)$$

Portanto, de (4.51), (4.53) e (4.54) estabelecemos que  $\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} E_{v^m}(t) dt \rightarrow 0$  e como o funcional de energia é não-crescente obtemos

$$(T - 2\varepsilon) E_{v^m}(T - \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty. \quad (4.55)$$

Pela identidade da energia temos que

$$E_{v^m}(T - \varepsilon) - E_{v^m}(\varepsilon) = - \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} a(x) |\nabla \partial_t v^m|^2 + b(x) |\partial_t v^m|^2 dx dt.$$

Em vista de (4.24), (4.55) e a arbitrariedade de  $\varepsilon > 0$ , temos que  $E_{v,m}(0) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Então, de acordo com (4.27), temos uma contradição o que finaliza a prova. ■

Agora, provaremos a estabilidade exponencial do problema (4.1).

De fato, da desigualdade (4.14) e a identidade da energia (4.13) e o fato que a aplicação  $t \mapsto E_u(t)$  é não crescente, temos que

$$\begin{aligned} E_u(T_0) &\leq C \int_0^{T_0} \int_{\Omega} (a(x)|\nabla \partial_t u|^2 + b(x)|\partial_t u|^2) \, dx \, dt \\ &= C (E_u(0) - E_u(T_0)), \end{aligned} \quad (4.56)$$

isto é,

$$E_u(T_0) \leq \left( \frac{C}{1+C} \right) E_u(0). \quad (4.57)$$

Repetindo o mesmo argumento para  $mT_0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ , deduzimos que

$$E_u(mT_0) \leq \frac{1}{(1+\hat{C})^m} E_u(0),$$

onde  $\hat{C} = C^{-1}$ . Considere  $t \geq T_0$  e  $t = mT_0 + r$ ,  $0 \leq r < T_0$ . Assim,

$$E_u(t) \leq E_u(t-r) = E_u(mT_0) \leq \frac{1}{(1+\hat{C})^m} E_u(0) = \frac{1}{(1+\hat{C})^{\frac{t-r}{T_0}}} E_u(0).$$

Definindo  $C := e^{\frac{r}{T_0} \ln(1+\hat{C})}$  e  $\lambda_0 := \frac{\ln(1+\hat{C})}{T_0} > 0$ , obtemos

$$E_u(t) \leq C e^{-\lambda_0 t} E_u(0) \text{ para todo } t \geq T_0, \quad (4.58)$$

o que prova o decaimento exponencial para o problema (4.1). Disto, temos o seguinte teorema:

**Teorema 4.2** *Sob as Hipóteses 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, dado  $R > 0$  existem constantes positivas  $C$  e  $\gamma$  tais que a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$E_u(t) \leq C e^{-\lambda_0 t} E_u(0), \text{ para todo } t \geq T_0. \quad (4.59)$$

para toda solução fraca do problema (4.1), desde que  $E_u(0) \leq R$ .

■

# Capítulo 5

## Taxas de Decaimento Uniforme para a Equação da Onda Semi-linear Sujeita a uma Dissipação Não-linear Localmente Distribuída

O objetivo deste capítulo é estudar a boa colocação e propriedades de decaimento para as soluções de uma equação da onda com não-linearidades sub-críticas e dissipação não-linear localmente distribuída. Mais precisamente, consideramos o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) é um domínio limitado com fronteira suave  $\partial\Omega$ ,  $f$  e  $g$  são funções a valores reais satisfazendo as seguintes hipóteses:

**Hipótese 5.1**  $f \in C^2(\mathbb{R})$  com

$$f(0) = 0, \quad |f^{(j)}(s)| \leq k_0(1 + |s|)^{p-j}, \quad j = 1, 2, \forall s \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

onde

$$1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2} \text{ se } n \geq 3 \text{ e } p \geq 1 \text{ se } n = 1, 2. \quad (5.3)$$

Além disso,

$$0 \leq F(s) \leq f(s)s, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

onde  $F(\lambda) := \int_0^\lambda f(s) ds$ .

**Observação 5.1** A equação (5.2) fornece

$$|f(r) - f(s)| \leq c(1 + |s|^{p-1} + |r|^{p-1})|r - s|, \quad \forall s, r \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

para algum  $c > 0$ .

**Hipótese 5.2** *Assumimos que a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, monótona crescente e satisfaz a seguinte propriedade:*

$$g(s)s > 0 \text{ para } s \neq 0, \text{ e } \tilde{m}s^{r+1} \leq g(s)s \leq \tilde{M}s^{r+1} \text{ para } |s| > 1, \quad (5.6)$$

onde  $\tilde{m}$  e  $\tilde{M}$  são constantes positivas. Além disso, assumimos que existe uma função  $h_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, côncava e estritamente crescente satisfazendo:

$$h_0(g(s)s) \geq s^2 + g(s)^2, \quad |s| \leq 1. \quad (5.7)$$

Não é difícil construir a função  $h_0$  utilizando a equação (5.6).

Classificaremos a taxa de crescimento da função  $g$  utilizando a noção de ordem polinomial do infinito:

**Definição 5.1** *Uma função monótona crescente  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(0) = 0$ , é de ordem  $r := \mathcal{O}(g) \geq 0$  no infinito se:*

$$|s|^{r+1} \sim g(s)s \quad \text{para } |s| \geq 1. \quad (5.8)$$

Se a ordem é maior, menor ou igual a 1 dizemos que a aplicação  $g$  é super-linear, sub-linear ou linearmente limitada no infinito, respectivamente.

Assumimos também que o coeficiente  $a(\cdot)$  satisfaz a seguinte hipótese:

**Hipótese 5.3** *A função  $a(x)$  é não-negativa e  $a \in C^0(\overline{\Omega})$ . Além disso,  $a(x) \geq a_0 > 0$  em uma vizinhança  $\omega$  da fronteira do conjunto  $\Omega$ .*

Assumimos também que a seguinte hipótese é satisfeita:

**Hipótese 5.4** *Dado  $T \geq T_0$ , a única solução*

$$u \in C(]0, T[; L^2(\Omega)) \cap C(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$$

do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + V(x, t)u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \omega, \end{cases} \quad (5.9)$$

onde  $V \in L^\infty(]0, T[, L^\infty(\Omega))$ , é a solução nula.

**Observação 5.2** Para  $V \equiv 0$ , a Hipótese 2.3 é satisfeita pelos resultados nas notas de Burq e Gérard (veja as equações (6.28) e (6.29) em [21]). O princípio de continuação única também é válido em certos casos onde o operador de Laplace admite coeficiente, por exemplo, veja seção 2.1.2 e Teorema 2.2 em [43].

Associamos o seguinte funcional de energia ao problema (5.1):

$$E_u(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx, \quad (5.10)$$

onde  $F$  é a primitiva de  $f$ .

## 5.1 Existência e Unicidade de Soluções

Essa seção é destinada a prova da existência e unicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) + a(x)g(\partial_t u) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

Consideraremos primeiramente a seguinte sequência de problemas aproximados com não-linearidades truncadas:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k + f_k(u_k) + a(x)g(\partial_t u_k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u_k(x, 0) = u_{0,k}(x), \quad \partial_t u_k(x, 0) = u_{1,k}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.12)$$

onde,  $\{u_{0,k}, u_{1,k}\}$  é uma sequência a ser definida posteriormente e para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$f_k(s) := \begin{cases} f(s), & |s| \leq k, \\ f(k), & s > k, \\ f(-k), & s < -k. \end{cases} \quad (5.13)$$

A seguir, provamos que para cada  $k \in \mathbb{N}$ , a função  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é globalmente Lipschitz.

Para isso, temos o seguinte:

**Lema 5.1** *A derivada distribucional  $f'_k$  da função definida em (5.13) é a função essencialmente limitada  $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$g_k(s) := \begin{cases} f'(s), & |s| \leq k, \\ 0, & s > k, \\ 0, & s < -k. \end{cases} \quad (5.14)$$

**Demonstração:** Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Como  $f_k \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  temos

$$\begin{aligned} \langle f'_k, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} &= - \int_{\mathbb{R}} f_k(s) \varphi'(s) ds \\ &= - \left[ \int_{-\infty}^{-k} f_k(s) \varphi'(s) ds + \int_{-k}^k f_k(s) \varphi'(s) ds + \int_k^{+\infty} f_k(s) \varphi'(s) ds \right] \\ &= - \left[ f(-k) \varphi(-k) + f(k) \varphi(k) - f(-k) \varphi(-k) - \int_{-k}^k f'(s) \varphi(s) ds - f(k) \varphi(k) \right] \\ &= \int_{-k}^k f'(s) \varphi(s) ds = \int_{\mathbb{R}} g(s) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

■

**Lema 5.2** *Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe uma constante positiva  $C_k$  tal que*

$$|f_k(r) - f_k(s)| \leq C_k |r - s|, \forall r, s \in \mathbb{R},$$

onde  $f_k$  é a função definida em (5.13).

**Demonstração:** Considere  $s, r \in \mathbb{R}$  com  $s < r$ . Aplicando o Teorema 1.5 para  $I = ]s, r[$ , segue que

$$f_k(r) - f_k(s) = \int_s^r f'_k(\xi) d\xi.$$

Assim, pelo Lema 5.1 temos a seguinte desigualdade:

$$|f_k(r) - f_k(s)| \leq \int_s^r |f'_k(\xi)| d\xi \leq \sup_{\xi \in [-k, k]} |g_k(\xi)| |r - s|, \quad (5.15)$$

o que conclui a prova. ■

### 5.1.1 Formulação Abstrata e Funcionais de Energia

Consideremos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o qual está munido do produto interno

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + u_2 v_2 \, dx.$$

Para estudar a boa colocação do problema (5.12), reescrevemos ele como um problema abstrato, a saber, definindo  $W_k(t) = (u_k, \partial_t u_k)$ , o sistema (5.12) pode ser reformulado como o seguinte problema de Cauchy em  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_k}{\partial t}(t) + \mathbb{A}W_k(t) + \mathbb{B}_k(W_k(t)) = 0 \\ W(0) = (u_{0,k}, u_{1,k}), \end{cases} \quad (5.16)$$

onde o operador não limitado  $\mathbb{A} : \mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é dado por

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & a(x)g(\cdot) \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

isto é,

$$\mathbb{A}(u, v) = (-v, -\Delta u + a(x)g(v)), \quad (5.18)$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \left\{ (u, v) \in \mathcal{H} : \begin{array}{l} v \in H_0^1(\Omega), \\ -\Delta u + a(x)g(v) \in L^2(\Omega), \\ a(x)g(v) \in L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega) \end{array} \right\}, \quad (5.19)$$

e  $\mathbb{B}_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é o operador não linear definido por

$$\mathbb{B}_k(u, v) = (0, f_k(u)). \quad (5.20)$$

Empregando argumentos padrão da teoria de semigrupos não-lineares descritos na seção 1.8 e o Teorema 1.20 temos o seguinte resultado:

**Teorema 5.1** *Se  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, monótona crescente e nula na origem e  $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ , então*

i) o problema (5.12) gera um semigrupo não-linear no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e assim, para cada dado inicial  $(u_{0,k}, u_{1,k}) \in \mathcal{H}$ , existe uma única solução fraca  $u_k \in C(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ .

ii) Se  $(u_{0,k}, u_{1,k}) \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$  então  $(u_k, \partial_t u_k) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ .

**Observação 5.3** Assuma que  $\mathcal{O}(g) = 1$ . Como  $\mathbb{B}_k$  é globalmente Lipschitz e  $\mathbb{B}_k(0) = 0$  temos

$$\|\mathbb{B}_k(W_k(t))\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|W_k(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|W_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})} < \infty. \quad (5.21)$$

Da equação (5.21) segue que  $\mathbb{B}_k(W_k) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ . Do item ii) do Teorema 5.1 deduzimos que  $\partial_t W_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ . Portanto, de (5.16)<sub>1</sub> obtemos que  $\mathbb{A}W_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \|a(\cdot)g(\partial_t u_k(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |a(x)g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\{x: |\partial_t u_k(x, t)| \leq 1\}} |g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx \\ &\quad + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\{x: |\partial_t u_k(x, t)| > 1\}} |g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_g \text{med}(\Omega) + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\partial_t u_k(x, t)|^2 dx \\ &\lesssim \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_g \text{med}(\Omega) + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\partial_t u_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\lesssim \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_g \text{med}(\Omega) + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\partial_t u_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))}^2, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde  $M_g = \max_{s \in [-1, 1]} |g(s)|$ . A estimativa (5.22) implica que

$$a(\cdot)g(\partial_t u_k) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \quad (5.23)$$

e de (5.18) temos que

$$u_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \quad (5.24)$$

Seja  $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Como  $\mathcal{D}(\mathbb{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ , existe uma sequência  $\{u_{0,k}, u_{1,k}\} \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$  tal que

$$\{u_{0,k}, u_{1,k}\} \rightarrow \{u_0, u_1\} \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (5.25)$$

Do Teorema 5.1 e da Observação 5.3, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , o problema (5.12) admite uma única solução regular  $u_k$  na classe

$$u_k \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

Multiplicando a primeira equação de (5.12) por  $\partial_t u_k$  e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_t u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F_k(u_k(x, t)) dx \\ + \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k(x, t))\partial_t u_k(x, t) dx = 0, \text{ para todo } t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde  $F_k(\lambda) = \int_0^\lambda f_k(s) ds$ .

Assim, de (5.26) obtemos a identidade da energia para o problema truncado (5.12), isto é,

$$E_{u_k}(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k(x, t))\partial_t u_k(x, t) dx dt = E_{u_k}(t_1) \quad (5.27)$$

para todo  $0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$ , onde

$$E_{u_k}(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u_k(x, t)|^2 + |\nabla u_k(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} F_k(u_k(x, t)) dx, \quad (5.28)$$

é a energia associada ao problema (5.12). Observamos que de (5.13) temos

$$F_k(s) := \begin{cases} \int_0^s f(\xi) d\xi, & |s| \leq k, \\ \int_0^k f(\xi) d\xi + f(k)[s - k], & s > k, \\ f(-k)[s + k] + \int_0^{-k} f(\xi) d\xi, & s < -k. \end{cases} \quad (5.29)$$

Como  $f$  satisfaz a condição de sinal  $f(s)s \geq 0$ , segue que  $F_k(s) \geq 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e todo  $k \in \mathbb{N}$ . Além disso, de (5.4) e (5.5), obtemos  $|f(s)| \leq c[|s| + |s|^p]$  e  $0 \leq F(s) \leq f(s)s$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , respectivamente. Disso, temos que

$$|F_k(s)| \leq c[|s|^2 + |s|^{p+1}] \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e todo } k \in \mathbb{N}. \quad (5.30)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F_k(u_{0,k})| dx &\leq c \int_{\Omega} [|u_{0,k}|^2 + |u_{0,k}|^{p+1}] dx \\ &\lesssim \|u_{0,k}\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Como  $p$  satisfaz a hipótese dada em (5.3), temos que para  $n \geq 1$  a imersão  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$  é válida, o que implica que o lado direito da equação (5.31) é limitado. Assim, a identidade (5.27), a convergência dada em (5.25) e a estimativa (5.31) asseguram a existência de uma subsequência de  $\{u_k\}$ , ainda denotada por  $\{u_k\}$  tal que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad (5.32)$$

$$\partial_t u_k \rightharpoonup \partial_t u \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad (5.33)$$

$$a(x)g(\partial_t u_k) \rightharpoonup \chi \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \text{ para todo } T > 0. \quad (5.34)$$

Pelo Teorema de Aubin-Lions-Simon, deduzimos que

$$u_k \rightarrow u \text{ fortemente em } L^\infty(0, T; L^{2^*-\varepsilon}(\Omega)); \text{ para todo } T > 0, \quad (5.35)$$

onde  $2^* := \frac{2n}{n-2}$  e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno. Mais ainda, da convergência (5.35), obtemos que

$$u_k \rightarrow u \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T), \text{ para todo } T > 0. \quad (5.36)$$

Portanto, de (5.3) e (5.5), da cadeia de imersões,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{n+2}{n-2}}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega), \quad (5.37)$$

(5.25), (5.27) e (5.31), a seguinte estimativa é válida:

$$\begin{aligned} \|f_k(u_k)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega \times (0, T))} &= \int_0^T \int_\Omega |f_k(u_k(x, t))|^{\frac{p+1}{p}} dx dt \\ &\lesssim \int_0^T \int_\Omega |u_k|^{\frac{p+1}{p}} dx dt + \int_0^T \int_\Omega |u_k|^{p+1} dx dt \\ &= \int_0^T \|u_k\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)}^{\frac{p+1}{p}} dt + \int_0^T \|u_k\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} dt \\ &\lesssim \int_0^T \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{p+1}{p}} dt + \int_0^T \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} dt \\ &\lesssim \|u_k\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^{\frac{p+1}{p}} + \|u_k\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^{p+1} \\ &\leq c < +\infty, \text{ para todo } t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

desde que  $1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}$ .

É fácil ver que

$$f(u) \in L^\infty(0, \infty; L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \quad (5.39)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u(x, t))|^{\frac{p+1}{p}} dx &\lesssim \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\frac{p+1}{p}} dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^{p+1} dx \\ &\lesssim \|u(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{p+1}{p}} + \|u(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} \\ &\lesssim \|u\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^{\frac{p+1}{p}} + \|u\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}^{p+1} \\ &< +\infty, \text{ para todo } t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

De (5.40) e da definição de supremo essencial obtemos (5.39).

Agora, (5.36) assegura que

$$f_k(u_k) \rightarrow f(u) \text{ q.s. em } \Omega \times (0, T), \text{ para todo } T > 0. \quad (5.41)$$

De fato, a convergência (5.36) assegura a existência de um conjunto  $Z_T \subset \Omega \times (0, T)$  com  $\text{med}(Z_T) = 0$  tal que  $u_k(x, t) \rightarrow u(x, t)$  para todo  $(x, t) \in \Omega \times (0, T) \setminus Z_T$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Portanto, para todo  $(x, t) \in \Omega \times (0, T) \setminus Z_T$  existe uma constante positiva  $L = L(x, t) > 0$  tal que  $|u_k(x, t)| < L$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Pela definição de  $f_k$ , obtemos

$$\text{se } |u_k(x, t)| < L, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ então } f_k(u_k(x, t)) = f(u_k(x, t)), \text{ para todo } k \geq L, \quad (5.42)$$

isto é,

$$f_k(u_k(x, t)) - f(u_k(x, t)) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ para todo } (x, t) \in \Omega \times (0, T) \setminus Z_T. \quad (5.43)$$

Por outro lado, a continuidade de  $f$  nos dá que

$$f(u_k(x, t)) - f(u(x, t)) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ para todo } (x, t) \in \Omega \times (0, T) \setminus Z_T. \quad (5.44)$$

De (5.43) e (5.44) segue a convergência (5.41).

Combinando (5.38), (5.40), e (5.41) e empregando o Lema de Lions, deduzimos que

$$f_k(u_k) \rightharpoonup f(u) \text{ fracamente em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega \times (0, T)). \quad (5.45)$$

Do Lema de Strauss segue que

$$f_k(u_k) \rightarrow f(u) \text{ fortemente em } L^r(\Omega \times (0, T)), \text{ para todo } 1 \leq r < \frac{p+1}{p}. \quad (5.46)$$

Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  e  $\theta \in C_0^\infty(0, T)$ . Multiplicando a primeira equação do problema (5.12) por  $\theta\varphi$  e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta'(t) \int_\Omega \partial_t u_k(x, t) \varphi(x) dx dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega \nabla u_k(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega f_k(u_k(x, t)) \varphi(x) dx dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega a(x) g(\partial_t u_k(x, t)) \varphi(x) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

e passando ao limite (5.47) levando em consideração as convergências (5.32), (5.33), (5.34) e (5.45), existe  $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,  $\partial_t u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  tal que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta'(t) \int_\Omega \partial_t u(x, t) \varphi(x) dx dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega f(u(x, t)) \varphi(x) dx dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega \chi \varphi(x) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  e  $\theta \in C_0^\infty(0, T)$ , de onde concluímos que

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) + \chi = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)). \quad (5.49)$$

Assumindo que  $n = 3$  e observando que

$$\chi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \Delta u \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ e } f(u) \in L^\infty(0, T; L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)),$$

temos

$$\partial_t^2 u = \Delta u - f(u) - \chi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (5.50)$$

Aplicando o Lema 1.3 e o Lema 1.4, deduzimos que

$$u \in C_s(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e } \partial_t u \in C_s(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.51)$$

onde  $C_s(0, T; Y)$  é o espaço das funções  $f \in L^\infty(0, T; Y)$  que são aplicações escalarmente contínuas, isto é, a aplicação  $t \mapsto \langle y', f(t) \rangle_{Y', Y}$  é contínua em  $[0, T]$  para todo  $y' \in Y'$ , onde  $Y'$  é o dual topológico de  $Y$ .

## 5.2 Recuperando a Regularidade para $1 \leq p < \frac{n+2}{n-2}$

Nessa seção assumimos que  $\mathcal{O}(g) = 1$ . O principal objetivo dessa seção é provar que se  $1 \leq p < \frac{n+2}{n-2}$  então

$$\chi = a(x)g(\partial_t u), \quad (5.52)$$

e as soluções do problema (5.11) estão na classe

$$u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t^2 u \in L^2([0, T]; H^{-1}(\Omega)). \quad (5.53)$$

Além disso, temos que

$$\{u_k, \partial_t u_k\} \rightarrow \{u, \partial_t u\} \text{ em } C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \times C^0([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (5.54)$$

Para trabalhar com o caso  $\frac{n}{n-2} \leq p < \frac{n+2}{n-2}$ , assumimos que  $n = 3$ . Observe primeiramente que de (5.21) e (5.27) temos

$$f_k(u_k) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ para todo } T > 0 \text{ e } \|f_k(u_k)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \lesssim E_{u_k}(0). \quad (5.55)$$

Mais ainda, a identidade (5.27) assegura que

$$\begin{aligned} \|a(\cdot)g(\partial_t u_k)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 &= \int_0^T \|a(\cdot)g(\partial_t u_k(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(\partial_t u_k(x, t))|^2 dx dt \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} E_{u_k}(0). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Assim, combinando (5.56), (5.55) e aplicando o Teorema 1.16 no problema (5.12), temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^5(0, T; L^{10}(\Omega))} &\lesssim \left[ \|u_{0,k}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_{01,k}\|_{L^2(\Omega)} + \|f_k(u_k)\|_{L^1 L^2} + \|a(\cdot)g(\partial_t u_k)\|_{L^1 L^2} \right] \\ &\lesssim (E_{u_k}(0) + T^{1/2} \|a\|_{L^\infty}^{1/2} [E_{u_k}(0)]^{1/2}) \\ &\leq C = C(\|a\|_{L^\infty}, T) < +\infty \end{aligned} \quad (5.57)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $L^1 L^2$  denota o espaço  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Assim,  $u_k \rightharpoonup u$  fracamente em  $L^5(0, T; L^{10}(\Omega))$  onde  $u$  é a solução do problema (5.11). Analogamente temos

$$\|u_k\|_{L^4(0, T; L^{12}(\Omega))} \leq C = C(\|a\|_{L^\infty}, T) < +\infty. \quad (5.58)$$

Como estamos assumindo que  $1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2} \leq 5$  para  $n > 2$ , então  $2p \leq 10$  e conseqüentemente, de (5.57), temos

$$\begin{aligned}
\|f(u_k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \left[ \int_{\Omega} |f(u_k(x,t))|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&\lesssim \int_0^T \left[ \int_{\Omega} (|u_k(x,t)|^2 + |u_k(x,t)|^{2p}) dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&\lesssim T^{4/5} |\Omega|^{\frac{2}{5}} \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} + \int_0^T \left[ \int_{\Omega} |u_k(x,t)|^{2p} dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&\lesssim T^{4/5} |\Omega|^{\frac{2}{5}} \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} + \int_0^T \left[ \int_{\Omega} |u_k(x,t)|^{10} dx \right]^{\frac{p}{10}} \left[ \int_{\Omega} dx \right]^{\frac{5-p}{10}} dt \\
&\lesssim T^{4/5} |\Omega|^{\frac{2}{5}} \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} + T^{(5-p)/5} |\Omega|^{\frac{5-p}{10}} \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^p \leq C_T
\end{aligned} \tag{5.59}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Agora, observando que  $|f_k(s)| \leq c[|s| + |s|^p]$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , temos também que

$$\|f_k(u_k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_T \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{5.60}$$

Para provar (5.53) e (5.54), devemos mostrar que

$$f_k(u_k) \rightarrow f(u) \text{ fortemente em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{5.61}$$

Observe primeiramente que

$$\begin{aligned}
&\|f_k(u_k) - f(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\lesssim \|f_k(u_k) - f(u_k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|f(u_k) - f(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Em vista de (5.5) temos

$$\begin{aligned}
|f(u_k) - f(u)| &\leq c(1 + |u_k|^{p-1} + |u|^{p-1})|u_k - u| \\
&= c(|u_k - u| + |u_k|^{p-1}|u_k - u| + |u|^{p-1}|u_k - u|).
\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades de Hölder e de interpolação, temos

$$\begin{aligned}
\||u_k|^{p-1}|u_k - u|\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \int_0^T \|u_k\|_{L^{2p}}^{p-1} \|u_k - u\|_{L^{2p}} dt \\
&\leq C \int_0^T \|u_k\|_{L^{2p}}^{p-1} \|u_k - u\|_{L^2}^{\theta} \|u_k - u\|_{L^{10}}^{1-\theta} dt
\end{aligned} \tag{5.63}$$

com  $\theta = \frac{5-p}{4p}$ . Daí, pela desigualdade de Hölder generalizada com  $q_1 = \frac{5}{p-1}$ ,  $q_2 = \frac{8p}{5-p}$  e  $q_3 = \frac{4p}{p-1}$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \| |u_k|^{p-1} |u_k - u| \|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ & \leq C(T) \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^{p-1} \|u_k - u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^\theta \|u_k - u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^{1-\theta} \\ & \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Note que em (5.64) devido a (5.57) e  $\|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}, \|u^k - u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \leq C$  para todo  $T > 0$  fixado, temos que  $\|u_k - u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow 0$  pelo Teorema de Aubin-Lions-Simon. Tratando os outros termos de forma análoga concluímos que

$$\|f(u_k) - f(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow 0. \tag{5.65}$$

De (5.62) e (5.65) resta provar que

$$\|f_k(u_k) - f(u_k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \tag{5.66}$$

De fato, para cada  $t \in [0, T]$  consideremos o conjunto

$$\Omega_k^t := \{x \in \Omega : |u_k(x, t)| > k\}.$$

Da definição de  $f_k$  em (5.13) temos

$$f_k(u_k) - f(u_k) = 0, \text{ se } |u_k(x, t)| \leq k. \tag{5.67}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\|f_k(u_k) - f(u_k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} = \|f_k(u_k) - f(u_k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_k^t))}.$$

Assim, em vista de (5.5) e  $1 \leq k < |u_k(x, t)|$  para todo  $x \in \Omega_k^t$  e  $t \in [0, T]$ , temos a seguinte estimativa para  $1 \leq p < 5$ :

$$\begin{aligned} |f_k(u_k) - f(u_k)|^2 & \lesssim [|f(u_k)|^2 + |f(-k)|^2 + |f(k)|^2] \\ & \lesssim [|u_k|^2 + |u_k|^{2p}] + [|k|^2 + |k|^{2p}] \\ & \lesssim [|u_k|^{2p} + |k|^{2p}], \\ & \lesssim |u_k|^{2p}. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Segue de (5.67), (5.68) e  $1 \leq p < 5$  que é suficiente provar que

$$\| |u_k|^p \|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_k^t))} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (5.69)$$

Antes de provarmos a convergência em (5.69) observamos que

$$\left( \int_{\Omega_k^t} k^{10} dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_{\Omega_k^t} |u_k|^{10} \right)^{1/2},$$

o que implica que  $(\text{med}(\Omega_k^t))^{1/2} \leq k^{-5} \|u_k(t)\|_{L^{10}(\Omega_k^t)}^5$ . Levando em consideração (5.57) concluímos que

$$\int_0^T (\text{med}(\Omega_k^t))^{1/2} dt \leq k^{-5} \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^5 \leq c(T)k^{-5}. \quad (5.70)$$

Procedendo como em (5.63), deduzimos que

$$\begin{aligned} \| |u_k|^p \|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_k^t))} &= \int_0^T \left( \int_{\Omega_k^t} |u_k|^{2p} dx \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^T \|u_k(t)\|_{L^{2p}(\Omega_k^t)}^p dt \\ &\lesssim \int_0^T \|u_k(t)\|_{L^{2p}(\Omega_k^t)}^{p-1} \|u_k(t)\|_{L^{2p}(\Omega_k)} dt \\ &\lesssim \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega_k^t))}^{p-1} \|u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_k^t))}^\theta \|u_k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega_k^t))}^{1-\theta}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Além disso, (5.70) assegura que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_k^t))}^\theta &\leq \left( \int_0^T (\text{med}(\Omega_k^t))^{1/2} dt \right)^{\frac{\theta}{2}} \left( \int_0^T \|u_k(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{\theta}{2}} \\ &\lesssim k^{\frac{-5}{2}\theta} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (5.72)$$

já que  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ . Portanto,  $\|u_k(t)\|_{L^4(\Omega)} \lesssim \|u_k(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \lesssim E_{u_k}(0)$ . Combinando (5.57), (5.71) e (5.72), temos a convergência (5.69) e consequentemente (5.66), como desejado.

Os casos  $n = 1, 2$  não são difíceis de serem provados para  $p \geq 1$  e por este motivo serão omitidos.

Definindo  $z_{\mu,\sigma} = u_\mu - u_\sigma$ ,  $\mu, \sigma \in \mathbb{N}$ , de (5.12) temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|\partial_t z_{\mu,\sigma}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ & + \int_{\Omega} a(x) (g(\partial_t u_\mu) - g(\partial_t u_\sigma)) (\partial_t u_\mu - \partial_t u_\sigma) dx \\ & = - \int_{\Omega} (f_\mu(u_\mu) - f_\sigma(u_\sigma)) (\partial_t u_\mu - \partial_t u_\sigma) dx. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Integrando (5.73) sobre o intervalo  $(0, t)$  com  $t \in [0, T]$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \|\partial_t z_{\mu,\sigma}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} a(x) (g(\partial_t u_\mu) - g(\partial_t u_\sigma)) (\partial_t u_\mu - \partial_t u_\sigma) dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \left\{ \|u_{1,\mu} - u_{1,\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0,\mu} - \nabla u_{0,\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ & + \left| \int_0^t \int_{\Omega} (f_\mu(u_\mu) - f_\sigma(u_\sigma)) (\partial_t u_\mu - \partial_t u_\sigma) dx ds \right|. \end{aligned} \quad (5.74)$$

As convergências (5.25), (5.33) e (5.61) implicam na convergência a zero (quando  $\mu, \sigma \rightarrow +\infty$ ) dos termos do lado direito de (5.74). Assim, de (5.74) inferimos que

$$u_\mu \rightarrow u \text{ em } C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (5.75)$$

$$\lim_{\mu, \sigma \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (g(\partial_t u_\mu) - g(\partial_t u_\sigma)) (\partial_t u_\mu - \partial_t u_\sigma) dx ds = 0 \quad (5.76)$$

para todo  $T > 0$ , o que prova (5.53).

Resta provar que  $\chi = a(x)g(\partial_t u)$ . De (5.75) segue que  $\partial_t u_k \rightarrow \partial_t u$  q.s. em  $\Omega \times (0, T)$  quando  $k \rightarrow \infty$ . A continuidade da função  $g(\cdot)$  assegura que  $a(x)g(\partial_t u_k) \rightarrow a(x)g(\partial_t u)$  q.s. em  $\Omega \times (0, T)$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Do Lema de Strauss deduzimos que  $\chi = a(x)g(\partial_t u)$  como desejado.

A unicidade das soluções para  $1 \leq p < \frac{n+2}{n-2}$  segue a mesma ideia dada em [11] e consequentemente será omitida.

Nosso primeiro resultado é o seguinte:

**Teorema 5.2** *Assuma que  $a \in L^\infty(\Omega)$  é não negativa,  $f$  e  $p$  satisfazem as condições da Hipótese 5.1 com  $n = 3$ . Então, dado  $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , o problema (5.11) possui*

uma única solução global  $u$  a qual satisfaz

$$\begin{aligned} u &\in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad \partial_t^2 u \in C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \\ u &\in L^5(0, T, L^{10}(\Omega)) \cap L^4(0, T; L^{12}(\Omega)). \end{aligned}$$

### 5.3 Estimando $F_k(u_k)$

A desigualdade (5.30) nos dá  $|F_k(s)| \leq c[|s|^2 + |s|^{p+1}]$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{N}$ .

Agora, assumindo que  $1 \leq p < \frac{n+2}{n-2}$  para  $n > 2$ , então  $2 \leq p+1 < \frac{2n}{n-2} = 2^*$ . Assim, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $p+1+\varepsilon = 2^*$ , e consequentemente  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1+\varepsilon}(\Omega)$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F_k(u_{0,k})|^{\frac{p+1+\varepsilon}{p+1}} dx &\leq c \int_{\Omega} |u_{0,k}|^{\frac{2(p+1+\varepsilon)}{p+1}} + |u_{0,k}|^{p+1+\varepsilon} dx \\ &\lesssim \|u_{0,k}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1+\varepsilon} \leq C, \end{aligned} \quad (5.77)$$

de onde concluímos que  $\{E_{u_k}(0)\}$  é limitada. Analogamente,

$$\int_{\Omega} |F_k(u_k(x, t_0))|^{\frac{p+1+\varepsilon}{p+1}} dx \lesssim \|u_k(\cdot, t_0)\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1+\varepsilon} \leq CE_{u_k}(0)^{p+1+\varepsilon} \quad (5.78)$$

para todo  $t_0 \in [0, T]$ . A limitação de  $\{E_{u_k}(0)\}$  implica na existência de um  $\Xi \in L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega)$  tal que

$$F_k(u_k(\cdot, t_0)) \rightharpoonup \Xi \text{ fracamente em } L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega), \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (5.79)$$

A seguir, mostraremos que  $\Xi = F(u(\cdot, t_0))$ . De fato, de (5.75) obtemos que  $u_k(\cdot, t_0) \rightarrow u(\cdot, t_0)$  fortemente em  $L^2(\Omega)$ . Assim,

$$u_k(x, t_0) \rightarrow u(x, t_0) \text{ q.s. em } \Omega. \quad (5.80)$$

Note que

$$\begin{aligned} &|F_k(u_k(x, t_0)) - F(u(x, t_0))| \\ &\leq |F_k(u_k(x, t_0)) - F(u_k(x, t_0))| + |F(u_k(x, t_0)) - F(u(x, t_0))|. \end{aligned} \quad (5.81)$$

A convergência (5.80) e a continuidade de  $F$  asseguram que

$$F(u_k(x, t_0)) \rightarrow F(u(x, t_0)) \text{ q.s. em } \Omega. \quad (5.82)$$

Pela desigualdade (5.81), para provar que

$$F_k(u_k(x, t_0)) \rightarrow F(u(x, t_0)) \text{ q.s. em } \Omega, \quad (5.83)$$

é suficiente mostrarmos que

$$F_k(u_k(x, t_0)) \rightarrow F(u_k(x, t_0)) \text{ q.s. em } \Omega.$$

De (5.42), existe uma constante positiva  $L = L(x, t) > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |F_k(u_k(x, t_0)) - F(u_k(x, t_0))| &= \left| \int_0^{u_k(x, t_0)} f_k(s) ds - \int_0^{u_k(x, t_0)} f(s) ds \right| \\ &\leq \int_{-L}^L |f_k(s) - f(s)| ds = 0, \text{ se } k \geq L. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Portanto, combinando (5.81), (5.82) e (5.84), obtemos (5.83). Consequentemente,

$$F_k(u_k(\cdot, t_0)) \rightharpoonup F(u(\cdot, t_0)) \text{ fracamente em } L^{\frac{2^*}{p+1}}(\Omega), \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (5.85)$$

Além disso, aplicando o Lema de Strauss deduzimos que

$$F_k(u_k(\cdot, t_0)) \rightarrow F(u(\cdot, t_0)) \text{ fortemente em } L^r(\Omega), \text{ quando } k \rightarrow +\infty \quad (5.86)$$

para todo  $1 \leq r < \frac{2^*}{p+1}$ .

Assim, temos o seguinte resultado:

**Teorema 5.3** *Assuma que  $a \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\omega})$  é não negativa,  $\mathcal{O}(g) = 1$ ,  $f$  e  $p$  satisfazem as condições da Hipótese 5.1 com  $n = 3$ . Então, dado  $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  o problema (5.11) admite uma única solução global*

$$u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t^2 u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Além disso, a identidade da energia

$$E_u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u(x, t))\partial_t u(x, t) dx dt = E_u(t_2), \quad (5.87)$$

é válida, onde  $E_u$  é definido como em (5.10).

## 5.4 Decaimento Uniforme da Energia

Através dessa seção assumiremos que  $\mathcal{O}(g) = 1$ ,  $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$  para  $n > 3$  e  $p > 1$  se  $n = 1, 2$ . Entretanto, por simplicidade, trabalharemos apenas com o caso onde a dimensão é  $n = 3$ . Provaremos inicialmente a observabilidade para o problema auxiliar truncado (5.12). O funcional de energia associado ao problema (5.12) é dado por

$$E_{u_k}(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u_k(x, t)|^2 + |\nabla u_k(x, t)|^2 dx dt + \int_{\Omega} F_k(u_k(x, t)) dx, \quad (5.88)$$

e a identidade da energia associada ao problema (5.12) é dada por:

$$E_{u_k}(t_2) - E_{u_k}(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x)g(\partial_t u_k(x, t))\partial_t u_k(x, t) dx dt \quad (5.89)$$

para  $0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$ . Seja  $T_0 > 0$  associado com a condição geométrica de controle, isto é, todo raio da ótica geométrica encontra o conjunto  $\omega$  em um tempo  $T < T_0$ .

Nosso objetivo é provar que a desigualdade de observabilidade é válida para cada  $k \in \mathbb{N}$  (suficientemente grande) e  $T \geq T_0$ , onde a constante de observabilidade é independente de  $k$ . Primeiramente, note que o dado inicial  $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  no problema original (4.1) é nulo ou não nulo.

No primeiro caso, quando  $(u_0, u_1) = (0, 0)$  e observando (5.25), consideramos  $(u_{0,k}, u_{1,k}) = (0, 0)$  para todo  $k \geq 1$ , e a correspondente solução do problema auxiliar (5.12) será  $u_k \equiv 0$ . Então, a desigualdade de observabilidade da forma (5.91) abaixo será trivialmente satisfeita para qualquer escolha de  $C > 0$ .

No segundo caso, quando  $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$ , existem números  $r, R > 0$  tais que

$$0 < \|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} < R;$$

considere, por exemplo  $R = 2\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}$ .

Portanto, de (5.25), existe  $k_0 \geq 1$  tal que para cada  $k \geq k_0$ ,  $(u_{0,k}, u_{1,k})$  é válido que

$$0 < \|(u_{0,k}, u_{1,k})\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} < R. \quad (5.90)$$

Afirmamos o seguinte Lema:

**Lema 5.3** *Seja  $T \geq T_0$ . Existe  $C > 0$  independente de  $k$  tal que a correspondente solução  $u_k$  de (5.12) com  $(u_{0,k}, u_{1,k}) \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$  verificando (5.90) satisfaz a desigualdade*

$$E_{u_k}(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u_k|^2 + |g(\partial_t u_k)|^2) dxdt. \quad (5.91)$$

**Demonstração:**

Nossa prova se baseia em um argumento de contradição. Assim, se (5.91) é falso, então existe  $T \geq T_0$  tal que para cada constante  $C > 0$  independente de  $k$  existe um dado inicial  $(u_{0,k}^C, u_{1,k}^C) \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$  verificando (5.90) cuja correspondente solução  $u_k^C$  viola (5.91).

Em particular, para  $k \geq 1$  e  $C = m \in \mathbb{N}$ , obtemos a existência de um dado inicial  $(u_{0,k}^m, u_{1,k}^m)$  verificando (5.90) e cuja correspondente solução  $u_k^m$  satisfaz

$$E_{u_k^m}(0) > m \left( \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2) dxdt \right). \quad (5.92)$$

Então, obtemos uma sequência  $\{u_k^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de soluções para o problema (5.12) tais que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2) dxdt}{E_{u_k^m}(0)} = 0. \quad (5.93)$$

Como  $E_{u_k^m}(0) \leq R$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , de (5.93) inferimos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u_k^m|^2 + |g(\partial_t u_k^m)|^2) dxdt = 0. \quad (5.94)$$

Mais ainda, deduzimos que existe uma subsequência de  $\{u_k^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , a qual denotaremos pela mesma notação, tal que

$$u_k^m \rightharpoonup u_k \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (5.95)$$

$$\partial_t u_k^m \rightharpoonup \partial_t u_k \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (5.96)$$

$$u_k^m \rightarrow u_k \text{ fortemente em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \forall q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right), \quad (5.97)$$

onde a última convergência é devida ao Teorema de Aubin-Lions-Simon. Nesse ponto, consideraremos dois casos:  $u_k \neq 0$  e  $u_k = 0$ .

Caso (a):  $u_k \neq 0$ .

Passando ao limite o problema

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k^m - \Delta u_k^m + f_k(u_k^m) + a(x)g(\partial_t u_k^m) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u_k^m(x, 0) = u_{0,k}^m(x); \quad \partial_t u_k^m(x, 0) = u_{1,k}^m(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e levando (5.94) em consideração, obtemos

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_k - \Delta u_k + f_k(u_k) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ \partial_t u_k = 0 & \text{q.s. em } \omega, \end{cases} \quad (5.98)$$

e para  $y_k = \partial_t u_k$ , temos no sentido das distribuições que

$$\begin{cases} \partial_t^2 y_k - \Delta y_k + f'_k(u_k)y_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ y_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ y_k = 0 & \text{q.s. em } \omega. \end{cases}$$

Como  $f'_k(u_k) \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ , já que  $f_k$  é globalmente Lipschitz, então para cada  $k \in \mathbb{N}$ , deduzimos a partir da Hipótese 2.3 que  $y_k = \partial_t u_k \equiv 0$ . Retornando a (5.98), temos também que  $u_k \equiv 0$ , o que é uma contradição.

Caso (b):  $u_k = 0$ .

De (5.95), (5.96) e (5.97), temos agora as seguintes convergências:

$$u_k^m \rightharpoonup 0 \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (5.99)$$

$$\partial_t u_k^m \rightharpoonup 0 \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (5.100)$$

$$u_k^m \rightarrow 0 \text{ fortemente em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \forall q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right). \quad (5.101)$$

Definindo

$$\alpha_m := \sqrt{E_{u_k^m}(0)} \text{ e } v_k^m := \frac{u_k^m}{\alpha_m}, \quad (5.102)$$

o limite (5.93) assegura que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x) \left( |\partial_t v_k^m|^2 + \frac{1}{\alpha_m^2} |g(\partial_t u_k)|^2 \right) dx dt = 0. \quad (5.103)$$

Seja  $\{v_k^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  como em (5.102). Então temos a seguinte seqüência de problemas normalizados:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k^m - \Delta v_k^m + \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) + \frac{1}{\alpha_m} a(x) g(\partial_t u_k^m) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ v_k^m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ v_k^m(x, 0) = \frac{u_{0,k}^m}{\alpha_m}; \partial_t v_k^m(x, 0) = \frac{u_{1,k}^m}{\alpha_m} & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.104)$$

Temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_m} \int_{\Omega} f_k(u_k^m) \partial_t v_k^m dx &= \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\Omega} f_k(\alpha_m v_k^m) \partial_t (\alpha_m v_k^m) dx \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F_k(\alpha_m v_k^m) dx \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) dx, \end{aligned}$$

e deste modo,

$$E_{v_k^m}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t v_k^m|^2 + |\nabla v_k^m|^2) dx + \frac{1}{\alpha_m^2} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) dx.$$

Não é difícil verificar que  $E_{v_k^m}(t) = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{u_k^m}(t)$  para todo  $t \geq 0$ . Então, em particular,

$$E_{v_k^m}(0) = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{u_k^m}(0) = 1, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (5.105)$$

Para alcançar uma contradição, vamos provar que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_{v_k^m}(0) = 0. \quad (5.106)$$

Primeiramente, observamos que de (5.105) obtemos a existência de uma subsequência de  $\{v_k^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , ainda denotada por  $\{v_k^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , tal que:

$$v_k^m \rightharpoonup v_k \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (5.107)$$

$$\partial_t v_k^m \rightharpoonup \partial_t v_k \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (5.108)$$

$$v_k^m \rightarrow v_k \text{ fortemente em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \forall q \in [2, \frac{2n}{n-2}). \quad (5.109)$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência de  $(\alpha_m)$  ainda denotada pela mesma notação, tal que  $\alpha_m \rightarrow \alpha$  com  $\alpha \geq 0$ . Vamos agora considerar dois casos:

Caso (i):  $\alpha > 0$ .

Passando ao limite a sequência de problemas normalizados (5.104) quando  $m \rightarrow +\infty$  e levando em consideração (5.103), (5.107), (5.108) e (5.109) deduzimos que

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k - \Delta v_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ \partial_t v_k = 0 & \text{q.s. em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (5.110)$$

Pondo  $w_k = \partial_t v_k$  temos no sentido das distribuições que

$$\begin{cases} \partial_t^2 w_k - \Delta w_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ w_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ w_k = 0 & \text{q.s. em } \omega. \end{cases} \quad (5.111)$$

Pela observabilidade do problema linear, veja [14], temos que  $w_k = \partial_t v_k \equiv 0$ . Portanto, retornando a (5.110), temos também que  $v_k \equiv 0$ .

Caso (ii):  $\alpha = 0$ .

Observemos que o Lema 5.2 assegura que

$$\frac{1}{\alpha_m^2} |f_k(u_k^m)|^2 \leq c_k \frac{1}{\alpha_m^2} |u_k^m|^2 = \frac{c_k}{\alpha_m^2} \alpha_m^2 |v_k^m|^2,$$

de onde obtemos

$$\frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_{\Omega} |f_k(u_k^m)|^2 dx dt \leq c_k \int_0^T \int_{\Omega} |v_k^m|^2 dx dt. \quad (5.112)$$

Por outro lado, de (5.101) temos

$$u_k^m = \alpha_m v_k^m \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0, T; L^q(\Omega)) \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \forall q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right). \quad (5.113)$$

Agora, vamos mostrar que

$$\frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) \rightarrow f'(0)v_k \text{ fortemente em } L^1(0, T; L^2(\Omega)) \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (5.114)$$

Podemos escrever

$$\frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - f'(0)v_k = \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) + \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) - f'(0)v_k.$$

Vamos provar primeiramente que

$$\frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \rightarrow 0 \text{ fortemente em } L^1(0, T; L^2(\Omega)) \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (5.115)$$

De fato, seja

$$\Omega_m^t = \{x \in \Omega : |u_k^m(x, t)| > k\}.$$

Utilizando a definição de  $f_k$  dada em (5.13), temos  $|f_k(\alpha_m v_k^m) - f(\alpha_m v_k^m)| = 0$  em  $\Omega \setminus \Omega_m^t$ . Então, de (5.2) e (5.5) obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \\ &= \int_0^T \left( \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right|^2 dx \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^T \left( \int_{\Omega_m^t} \left| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right|^2 dx \right)^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \left( \int_{\Omega_m^t} |f_k(\alpha_m v_k^m) - f(\alpha_m v_k^m)|^2 dx \right)^{1/2} dt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \left( \int_{\Omega_m^t} [|f_k(\alpha_m v_k^m)|^2 + |f(\alpha_m v_k^m)|^2] dx \right)^{1/2} dt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \left( \int_{\Omega_m^t} [|f(k)|^2 + |f(-k)|^2 + |\alpha_m v_k^m|^2 + |\alpha_m v_k^m|^{2p}] dx \right)^{1/2} dt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \left( \int_{\Omega_m^t} [k^2 + |k|^{2p} + |\alpha_m v_k^m|^2 + |\alpha_m v_k^m|^{2p}] dx \right)^{1/2} dt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \left( \int_{\Omega_m^t} [|u_k^m|^2 + |u_k^m|^{2p} + |\alpha_m v_k^m|^2 + |\alpha_m v_k^m|^{2p}] dx \right)^{1/2} dt \\ &\lesssim \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \left( \int_{\Omega_m^t} |\alpha_m v_k^m|^{2p} dx \right)^{1/2} dt \\ &\lesssim \alpha_m^{p-1} \int_0^T \|v_k^m(t)\|_{L^{2p}(\Omega_m^t)}^p dt, \end{aligned} \quad (5.116)$$

já que  $p > 1$ ,  $k \geq 1$  e  $k < |u_k^m| = |\alpha_m v_k^m|$  em  $\Omega_m^t$ .

De (5.94), (5.107) e (5.112), vemos que as estimativas de Strichartz podem ser aplicadas a  $\{v_k^m\}$ . Portanto,

$$\int_0^T \|v_k^m(t)\|_{L^{2p}(\Omega_m^t)}^p dt \lesssim \|v_k^m\|_{L^5(0, T; L^{10}(\Omega_m^t))}^{p-1} \|v_k^m\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_m^t))}^\theta \|v_k^m\|_{L^5(0, T; L^{10}(\Omega_m^t))}^{1-\theta}. \quad (5.117)$$

Combinando (5.116) e (5.117) obtemos

$$\left\| \frac{1}{\alpha_m} f_k(\alpha_m v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) \right\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow \infty, \quad (5.118)$$

o que prova (5.115).

Por outro lado, como  $f \in C^2(\mathbb{R})$  podemos escrever

$$f(s) = f'(0)s + R(s), \text{ onde } |R(s)| \leq C(|s|^2 + |s|^p). \quad (5.119)$$

Daí, pela fórmula de Taylor temos que

$$\frac{1}{\alpha_m} f(\alpha_m v_k^m) = f'(0)v_k^m + \frac{R(\alpha_m v_k^m)}{\alpha_m}, \quad (5.120)$$

$$\frac{R(\alpha_m v_k^m)}{\alpha_m} \leq C(\alpha_m |v_k^m|^2 + \alpha_m^{p-1} |v_k^m|^p). \quad (5.121)$$

Agora, vamos estimar o resto  $\frac{R(\alpha_m v_k^m)}{\alpha_m}$ .

Pela desigualdade (5.121), temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R(\alpha_m v_k^m)}{\alpha_m} \right\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &\lesssim \alpha_m \|v_k^m\|_{L^2(0,T;L^4(\Omega))}^2 + |\alpha_m|^{(p-1)} \int_0^T \|v_k^m\|_{L^{2p}(\Omega)}^p dt \\ &\rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.122)$$

pelo mesmo argumento utilizado em (5.117) e (5.118).

De (5.122) temos que

$$\frac{R(\alpha_m v_k^m)}{\alpha_m} \rightarrow 0 \text{ em } L^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.123)$$

de onde concluímos que (5.114) é válido, em vista de (5.109), (5.115) e (5.120).

Passando ao limite a sequência de problemas (5.104) quando  $m \rightarrow +\infty$  e utilizando as convergências (5.103), (5.107), (5.108), (5.109) e (5.114), obtemos

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_k - \Delta v_k + f'(0)v_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ \partial_t v_k = 0 & \text{q.s. em } \omega, \end{cases} \quad (5.124)$$

e para  $w_k = \partial_t v_k$  temos no sentido das distribuições que

$$\begin{cases} \partial_t^2 w_k - \Delta w_k + f'(0)w_k = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ w_k = 0 & \text{q.s. em } \omega. \end{cases} \quad (5.125)$$

Pela Hipótese 2.3 temos que  $w_k = \partial_t v_k \equiv 0$ . Portanto, retornando ao problema (5.124), obtemos também que  $v_k \equiv 0$ . Finalmente, voltando a (5.112), considerando (5.109) e  $v_k = 0$ , obtemos que

$$\frac{1}{\alpha_m^2} \int_0^T \int_{\Omega} |f_k(u_k^m)|^2 dxdt \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \quad (5.126)$$

Seja  $\square = \partial_t - \Delta$  o operador de d'Alembert. Temos de (5.104) que

$$\square v_k^m = -\frac{1}{\alpha_m} f_k(v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} a(x)g(\partial_t u_k^m),$$

de onde obtemos, em ambos os casos  $\alpha > 0$  ou  $\alpha = 0$  (veja (5.103) e (5.126)), que

$$\partial_t \square v_k^m = \partial_t \left( -\frac{1}{\alpha_m} f_k(v_k^m) - \frac{1}{\alpha_m} a(x)g(\partial_t u_k^m) \right) \rightarrow 0 \text{ fortemente em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)). \quad (5.127)$$

Seja  $\mu$  a medida microlocal de defeito associada a  $\{\partial_t v_k^m\}_m$  em  $L_{loc}^2(\Omega \times (0, T))$ . Em vista de (5.127), temos:

(i) O suporte de  $\mu$ ,  $\text{supp}(\mu)$  está contido no conjunto característico do operador de ondas  $\{\tau^2 = \|\xi\|^2\}$  (veja Teorema 1.26).

Nosso desejo é propagar a convergência a zero de  $\partial_t v_k^m$  em  $L^2(\omega \times (0, T))$  para o conjunto  $L^2(\Omega \times (0, T))$ . De (5.127) temos que:

$$\square \partial_t v_k^m \rightarrow 0 \text{ em } H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, T)), \text{ quando } m \rightarrow +\infty, \quad (5.128)$$

o que assegura que

(ii) A medida  $\mu$  se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico deste operador, o que significa em particular, que se algum ponto  $\omega_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$  não pertence ao conjunto  $\text{supp}(\mu)$ , então toda bicaracterística partindo de  $\omega_0$  fica fora de  $\text{supp}(\mu)$ .

Entretanto, como  $\text{supp}(\mu) \subset (\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$  e o damping friccional age em  $\omega \times (0, T)$ , podemos propagar a convergência da energia cinética de  $\omega \times (0, T)$  para o conjunto  $(\Omega \setminus \omega) \times (0, T)$ .

De fato, do Teorema 1.30 e da Proposição 1.18, segue que  $\text{supp}(\mu)$  está contido em  $(0, T) \times \Omega \times S^n$  e é uma união de curvas do tipo

$$t \in I \cap (0, \infty) \mapsto m_{\pm}(t) = \left( t, x(t), \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + |\dot{x}|^2}}, \frac{\mp G(x)\dot{x}}{\sqrt{1 + |\dot{x}|^2}} \right), \quad (5.129)$$

onde  $t \in I \mapsto x(t) \in \text{int } \Omega$  é uma geodésica associada com a métrica  $G = (K/\rho)^{-1}$ , onde  $K = I_d$  e  $\rho = 1$ .

Da convergência forte de  $\partial_t v_k^m \rightarrow 0$  em  $L^2(\omega \times (0, T))$  quando  $m \rightarrow +\infty$  e do Teorema 1.29, segue que o suporte de  $\mu$  está contido no conjunto  $(0, T) \times \Omega \setminus \omega \times S^n$ . Afirmamos que  $\text{supp } \mu = \emptyset$ . Com efeito, seja  $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in \text{supp } \mu$  e  $x$  uma geodésica de  $G = I_d$  definida próxima de  $t_0$ . Como as geodésicas dentro de  $\Omega \setminus \omega$  entram necessariamente na região  $\omega$  deduzimos de (5.129) que  $m_{\pm}(t) \notin \text{supp } \mu$  e assim,  $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \notin \text{supp } \mu$ . Portanto,  $\text{supp}(\mu)$  é vazio.

Da Observação 1.4 segue que

$$\partial_t v_k^m \rightarrow 0 \text{ em } L^2_{loc}(\Omega \times (0, T)). \quad (5.130)$$

Mais ainda, afirmamos que:

$$\partial_t v_k^m \rightarrow 0 \text{ in } L^2(\Omega \times (0, T)). \quad (5.131)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt &= \int_0^T \int_{\omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt \\ &= L_1 + L_2, \end{aligned} \quad (5.132)$$

onde

$$L_1 = \int_0^T \int_{\omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt \text{ e } L_2 = \int_0^T \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt.$$

De (5.93) temos que  $L_1 \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Para  $L_2$ , considere a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_0^{\varepsilon} \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt + \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt + \int_{T-\varepsilon}^T \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt \\ &= J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \quad (5.133)$$

onde

$$J_1 = \int_0^\varepsilon \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt, \quad J_2 = \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt \quad \text{e} \quad J_3 = \int_{T-\varepsilon}^T \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt.$$

Note que

$$J_1 = \int_0^\varepsilon \int_{\Omega \setminus \omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt \leq \int_0^\varepsilon 2E_{v_k^m}(t) dx dt \leq 2\varepsilon E_{v_k^m}(0) \leq 2\varepsilon, \quad (5.134)$$

já que  $E_{v_k^m}(0) = 1$ . Conseqüentemente,  $\lim_{m \rightarrow \infty} J_1 \leq 2\varepsilon$  para todo  $T > \varepsilon > 0$ . Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, obtemos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} J_1 = 0$ . Do mesmo modo provamos que  $J_3 \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Finalmente, de (5.130) deduzimos que  $J_2 \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

Assim,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t v_k^m(x, t)|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad \text{quando } m \rightarrow +\infty. \quad (5.135)$$

Provaremos agora que  $E_{v_k^m}(0)$  converge a zero quando  $m \rightarrow \infty$ . De fato, consideremos a seguinte função de corte:

$$\theta \in C^\infty(0, T), \quad 0 \leq \theta(t) \leq 1, \quad \theta(t) = 1 \text{ em } (\varepsilon, T - \varepsilon).$$

Multiplicando a equação (5.104) por  $v_k^m \theta$  e integrando por partes inferimos que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} |\partial_t v_k^m|^2 dx dt - \int_0^T \theta'(t) \int_{\Omega} \partial_t v_k^m v_k^m dx dt \\ & + \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} |\nabla v_k^m|^2 dx dt + \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} f_k(u_k^m) v_k^m dx dt \\ & + \frac{1}{\alpha_m} \int_0^T \theta(t) \int_{\Omega} a(x) g(\partial_t u_k^m) v_k^m dx dt = 0. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Considerando as convergências (5.103), (5.107), (5.108), (5.109), (5.135) e tendo em mente que  $v_k = 0$ , temos de (5.136) que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (|\nabla v_k^m|^2 + \frac{1}{\alpha_m} f_k(u_k^m) v_k^m) dx dt = 0,$$

de onde obtemos também que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} F_k(u_k^m) dx dt = 0,$$

a qual implica juntamente com todas as convergências anteriores que  $\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} E_{v_k^m}(t) \rightarrow 0$ . Como o funcional de energia é não-crescente obtemos

$$(T - 2\varepsilon)E_{v_k^m}(T - \varepsilon) \rightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow +\infty.$$

Pela identidade da energia

$$E_{v_k^m}(T - \varepsilon) - E_{v_k^m}(\varepsilon) = -\frac{1}{\alpha_m} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} a(x) g(\partial_t u_k^m) \partial_t v_k^m \, dx dt$$

e (5.103) temos que  $E_{v_k^m}(0) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow +\infty$  para  $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ , como desejávamos provar. ■

## 5.5 Observabilidade Para o Problema Original

O principal resultado desta seção é o seguinte:

**Lema 5.4** *Assuma que  $\mathcal{O}(g) = 1$ . Então, para todo  $T \geq T_0$  e  $R > 0$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que toda solução  $u$  do problema (5.11) satisfaz*

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u|^2 + |g(\partial_t u)|^2) \, dx dt, \quad (5.137)$$

desde que  $E_u(0) < R$ .

**Demonstração:** De (5.91), temos que para todo  $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$  e toda solução  $u_k$  do problema (5.12), a seguinte desigualdade é válida:

$$E_{u_k}(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u_k|^2 + |g(\partial_t u_k)|^2) \, dx dt, \quad (5.138)$$

desde que  $E_{u_k}(0) < R$ , onde  $C$  é uma constante positiva que não depende de  $k$ .

De (5.75) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(\partial_t u_k(x, t))|^2 \, dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(\partial_t u(x, t))|^2 \, dx dt \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (5.139)$$

Das convergências (5.86), (5.138) e (5.139), obtemos a desigualdade de observabilidade para o problema (5.11), isto é,

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u|^2 + |g(\partial_t u)|^2) \, dx dt, \text{ para todo } T \geq T_0, \quad (5.140)$$

desde que  $E_u(0) < R$ . ■

## 5.6 Combinando Estimativas na Origem e no Infinito

Nessa seção, desenvolvemos nossos resultados baseados nos artigos [24], [28], [33], [37] e [56]. Como é bem conhecido, dissipações sub-lineares e super-lineares no infinito requerem mais regularidade das soluções. Assim, a hipótese de regularidade abaixo só será necessária quando  $\mathcal{O}(g) \neq 1$ .

**Hipótese 5.5 (Regularidade para dissipações sub e super-lineares no infinito)** *Tal hipótese é imposta quando  $g$  não é linearmente limitada no infinito:*

- Se  $g$  é sub-linear no infinito, i.e.  $\mathcal{O}(g) < 1$ , então assumimos que existe  $p_0 > 2$  tal que

$$\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))} < D_0.$$

- Se  $g$  é super-linear no infinito, i.e.  $\mathcal{O}(g) > 1$ , então assumimos que existe  $p_0 > 2r$  tal que

$$\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))} < D_0$$

para alguma constante positiva  $D_0$ .

**Observação 5.4** *Note que como o sistema é monótono dissipativo, a Hipótese 5.5 é satisfeita para dados regulares, controlando o tamanho de  $r$ . Assim, se a solução é **forte**, então para todo  $T > 0$ ,  $\|u_t(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$  para todo  $t \in (0, T)$  e alguma constante  $C > 0$  que não depende de  $T > 0$ . Daí,  $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))$  para qualquer  $p_0 < \frac{2n}{n-2}$  se  $n \geq 3$  e  $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))$  para todo  $p_0 < \infty$  se  $n \leq 2$ .*

Seja  $h_0$  definida como em (5.7) e defina

$$h = h_1 + h_0 \circ \frac{1}{\text{med}(Q_T)}, \quad (5.141)$$

onde  $h_1$  é definida por

- se  $g$  é sub-linear no infinito, isto é,  $r = \mathcal{O}(g) < 1$ , então seja  $h_1(s) := s^{\frac{p_0-2}{p_0-r-1}}$ ,
  - se  $g$  é super-linear no infinito, isto é,  $r = \mathcal{O}(g) > 1$ , então seja  $h_1(s) := s^{\frac{p_0-2r}{p_0-r-1}}$ ,
  - se  $g$  é linearmente limitada no infinito, isto é,  $r = \mathcal{O}(g) = 1$ , então seja  $h_1(s) := s$ .
- (5.142)

Definamos

$$q = I - (I + (I + h)^{-1} \circ (K^{-1} \cdot I))^{-1} \quad (5.143)$$

para alguma constante  $K > 0$  a ser definida posteriormente. Como  $h$  é uma função estritamente crescente e côncava com  $h(0) = 0$ ,  $q$  é uma função monótona crescente que se anula na origem.

**Teorema 5.4** *Suponha que a Hipótese 5.5 seja válida,  $\mathcal{O}(g) \neq 1$  e  $1 \leq p < \frac{n}{n-2}$ . Então, para todo  $T \geq T_0$  e  $R > 0$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que para cada solução forte de (5.11), a seguinte desigualdade é válida:*

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\Omega} a(x) (|\partial_t u|^2 + |g(\partial_t u)|^2) dx dt \quad (5.144)$$

para todo  $T \geq T_0$ , desde que  $E_u(0) < R$ .

Daqui em diante, utilizaremos a notação

$$\mathbf{D}_a^b(g(s); u_t) := \int_a^b \int_{\Omega} a(x) g(u_t) u_t dQ_T. \quad (5.145)$$

**Corolário 5.1** *Suponha que a Hipótese 5.5 seja válida. Seja  $T_0 > 0$  dado em (5.140) ou no Teorema 5.4. Sejam  $h$  e  $q$  as funções definidas em (5.141) e (5.143), respectivamente. Então,*

$$E(t) \leq S \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) \text{ para todo } t \geq T_0, \quad (5.146)$$

com  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ , onde  $S$  é a solução da seguinte EDO não-linear:

$$S_t + q(S) = 0, \quad S(0) = E(0), \quad (5.147)$$

onde

$$K = [C(T, a, \text{med}(Q_T))] \quad (5.148)$$

se  $g$  é linearmente limitado no infinito,

$$K = \left[ C(T, a, \text{med}(Q_T)) \cdot D_0^{\frac{p_0(r-1)}{p_0-r-1}} \right] \quad (5.149)$$

se  $g$  é super-linear no infinito, e

$$K = \left[ C(T, a, \text{med}(Q_T)) \cdot D_0^{\frac{p_0(1-\theta)}{p_0-r-1}} \right] \quad (5.150)$$

se  $g$  é sub-linear no infinito.

**Demonstração:** No que segue, procederemos como no trabalho [55] de Lasiecka e Tataru, adaptado ao nosso contexto. Seja

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha &= \{(x, t) \in Q_T := \Omega \times (0, T) : |\partial_t u(x, t)| > 1 \text{ q.s.}\}, \\ \Sigma_\beta &= Q_T \setminus \Sigma_\alpha.\end{aligned}$$

A prova irá requerer as seguintes desigualdades:

I) **Dissipação próxima da origem.** De (5.7) e do fato que  $h$  é côncava e crescente,  $a(x) \leq \|a\|_\infty + 1$ , e  $\frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty} < a(x)$ , deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_\beta} a(x) \left( [g(\partial_t u)]^2 + (\partial_t u)^2 \right) d\Sigma_\beta &\leq \int_{\Sigma_\beta} a(x) h(g(\partial_t u) \partial_t u) d\Sigma_\beta \quad (5.151) \\ &= \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) \frac{a(x)}{1 + \|a\|_\infty} h(g(\partial_t u) \partial_t u) d\Sigma_\beta \\ &\leq \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) h\left(\frac{a(x)}{1 + \|a\|_\infty} g(\partial_t u) \partial_t u\right) d\Sigma_\beta \\ &\leq \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) h(a(x) g(\partial_t u) \partial_t u) d\Sigma_\beta.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Jensen temos que

$$\begin{aligned}(1 + \|a\|_\infty) \int_{\Sigma_\beta} h(a(x) g(\partial_t u) \partial_t u) d\Sigma_\beta \quad (5.152) \\ \leq (1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T) h\left(\frac{1}{\text{med}(Q_T)} \int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dQ\right) \\ = (1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dQ\right),\end{aligned}$$

onde  $r(s) = h_0\left(\frac{s}{\text{med}(Q_T)}\right)$ .

$$\int_{\Sigma_\beta} a(x) \left( [g(\partial_t u)]^2 + (\partial_t u)^2 \right) d\Sigma_\beta \leq (1 + \|a\|_\infty) \text{med}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u dQ\right). \quad (5.153)$$

II) **Dissipação linearmente limitada no infinito.** Se  $\mathcal{O}(g) = 1$  então de acordo com a Definição (5.1) e a Hipótese 5.2, obtemos

$$\int_{\Sigma_\alpha} a(x) \left( |g(\partial_t u)|^2 + |\partial_t u|^2 \right) d\Sigma_\alpha \leq \left( \tilde{m}^{-1} + \tilde{M} \right) \int_{\Sigma_\alpha} a(x) g(\partial_t u) \partial_t u d\Sigma_\alpha. \quad (5.154)$$

III) **Dissipação super-linear no infinito.** Suponha que  $\mathcal{O}(g) = r > 1$ . De (5.6) obtemos que  $|g(s)| > \tilde{m}|s|$  para  $|s| > 1$  com  $\tilde{m} > 0$  independente de  $s$ , e trivialmente obtemos a estimativa

$$\int_{\Sigma_\alpha} a(x)|u_t|^2 d\Sigma_\alpha \leq \frac{1}{\tilde{m}^2} \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|g(u_t)|^2 d\Sigma_\alpha. \quad (5.155)$$

Agora, para  $\lambda \in ]0, 1[$ ,

$$\int_{\Sigma_\alpha} a(x)|g(u_t)|^2 d\Sigma_\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|g(u_t)|^{2\lambda}|g(u_t)|^{2(1-\lambda)} d\Sigma_\alpha =: J_1. \quad (5.156)$$

Escolhendo qualquer  $p_0 > 2r$  e estimando  $J_1$  utilizando a desigualdade de Hölder com expoentes conjugados  $\frac{p_0}{2\lambda r}$  e  $\frac{p_0}{p_0-2\lambda r}$  (decompondo  $a(x)$  com  $a(x)^{2\lambda r/p_0} \cdot a(x)^{(p_0-2\lambda r)/p_0}$ ), obtemos:

$$J_1 \leq \left( \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|g(u_t)|^{p_0/r} d\Sigma_\alpha \right)^{2\lambda r/p_0} \left( \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|g(u_t)|^{\frac{2(1-\lambda)p_0}{p_0-2\lambda r}} d\Sigma_\alpha \right)^{\frac{p_0-2\lambda r}{p_0}}. \quad (5.157)$$

Note que  $\mathcal{O}(g) = r$  implica que

$$g(s)s \sim s^{r+1} \sim g(s)^{(r+1)/r}, \quad |s| > 1. \quad (5.158)$$

Assim, para  $|g(u_t)|^{\frac{2(1-\lambda)p_0}{p_0-2\lambda r}}$  ser equivalente ao integrando  $g(u_t)u_t$ , resolvemos a equação

$$\frac{2(1-\lambda)p_0}{p_0-2\lambda r} = \frac{1+r}{r} \implies \lambda = \frac{p_0(r-1)}{2r(p_0-r-1)}.$$

Com essa escolha de  $\lambda$ , combinamos (5.155), (5.156) e (5.157) para concluir que

$$\int_{\Sigma_\alpha} a(x)(|u_t|^2 + |g(u_t)|^2) d\Sigma_\alpha \lesssim C_a \|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))}^{\frac{p_0(r-1)}{p_0-r-1}} \left( \int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t dQ_T \right)^{\frac{p_0-2\mathcal{O}(g)}{p_0-1-\mathcal{O}(g)}} \quad (5.159)$$

onde  $C_a = (\sup a(x))^{\frac{2\lambda r}{p_0}}$ .

IV) **Dissipação sub-linear no infinito.** Assuma  $\mathcal{O}(g) = r < 1$ . Em vista da Definição 5.1 e a Hipótese 5.2 obtemos que  $\tilde{M}|s| > |g(s)|$  para  $|s| > 1$  com  $\tilde{M} > 0$  independente de  $s$ :

$$\int_{\Sigma_\alpha} a(x)|g(u_t)|^2 d\Sigma_\alpha \leq \tilde{M} \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|g(u_t)||u_t| d\Sigma_\alpha = \tilde{M} \int_{\Sigma_\alpha} a(x)g(u_t)u_t d\Sigma_\alpha. \quad (5.160)$$

Para  $\lambda \in ]0, 1[$ ,

$$\int_{\Sigma_\alpha} a(x)|u_t| d\Sigma_\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|u_t|^{2\lambda}|u_t|^{2(1-\lambda)} d\Sigma_\alpha =: J_2. \quad (5.161)$$

Seja  $p_0 > 2$  para estimar  $J_2$  utilizamos a desigualdade de Hölder com expoentes  $\frac{p_0}{2\lambda}$  e  $\frac{p_0}{p_0-2\lambda}$  (decompondo  $a(x)$  como  $a(x)^{2\lambda/p_0} \cdot a(x)^{p_0-2\lambda/p_0}$ ):

$$J_2 \leq \left( \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|u_t|^{p_0} d\Sigma_\alpha \right)^{2\lambda/p_0} \left( \int_{\Sigma_\alpha} a(x)|u_t|^{\frac{2(1-\lambda)p_0}{p_0-2\lambda}} d\Sigma_\alpha \right)^{\frac{p_0-2\lambda}{p_0}}. \quad (5.162)$$

O valor de  $\lambda \in ]0, 1[$  é escolhido de forma que

$$|u_t|^{\frac{2(1-\lambda)p_0}{p_0-2\lambda}} = u_t^{r+1} \sim g(u_t)u_t \quad \text{para } |u_t| > 1, \quad (5.163)$$

a saber,

$$\frac{2(1-\lambda)p_0}{p_0-2\lambda} = 1+r \implies \lambda = \frac{p_0(1-r)}{2(p_0-1-r)}.$$

Combinando (5.160)-(5.162), temos:

$$\int_{\Sigma_\alpha} a(x)(|u_t|^2 + |g(u_t)|^2) d\Sigma_\alpha \lesssim C_a \|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))}^{\frac{p_0(1-r)}{p_0-r-1}} \left( \int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t dQ_T \right)^{\frac{p_0-2}{p_0-1-\mathcal{O}(g)}} \quad (5.164)$$

onde  $C_a = (\sup a(x))^{\frac{2\lambda}{p_0}}$ .

Agora, combinando as estimativas acima, a desigualdade de observabilidade (5.140), e (5.144) do Teorema 5.4 com as desigualdades (5.153), (5.154), (5.159) ou (5.164), dependendo de quando  $\mathcal{O}(g) = 1$ ,  $\mathcal{O}(g) > 1$ , ou  $\mathcal{O}(g) < 1$ , respectivamente. Utilizando a definição (5.145) e renomeando as constantes, obtemos

$$E_u(0) \leq K \left( I(\mathbf{D}_0^T(g(s); u_t)) + h_0 \left( \frac{1}{\text{med}(Q_T)} \mathbf{D}_0^T(g(s); u_t) \right) + h_1(\mathbf{D}_0^T(g(s); u_t)) \right),$$

onde  $h_1$  é dada por (5.142) e  $K = C(T, a, \text{med}(Q_T))$  se  $g$  é linearmente limitado no infinito,  $K = C(T, a, \text{med}(Q_T)) \cdot D_0^{\frac{p_0(r-1)}{p_0-r-1}}$  se  $g$  é super-linear no infinito e  $K = C(T, a, \text{med}(Q_T)) \cdot D_0^{\frac{p_0(1-\theta)}{p_0-r-1}}$  se  $g$  sub-linear no infinito.

Em todos os casos existe uma constante  $K > 0$  e uma função  $h$  tal que

$$E_u(0) \leq K(I + h)(\mathbf{D}_0^T(g(s); u_t)).$$

Utilizando a identidade da energia obtemos

$$(I + h)^{-1}(K^{-1}E_u(T)) \leq E_u(0) - E_u(T).$$

A propriedade de semigrupo de  $U(t) = (u(t), u_t(t))$  assegura que

$$E_u((m+1)T) + (I+h)^{-1}(K^{-1}E_u((m+1)T)) \leq E_u(T) \quad (5.165)$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Aplicando o Lema 1.7 com  $s_m = E_u(mT)$  resulta que

$$E_u(mT) \leq S(m), \quad m = 0, 1, \dots \quad (5.166)$$

Finalmente, como  $E_u(t)$  e  $S(\cdot)$  são funções não-crescentes, temos para  $t = mT + \tau$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ ,

$$E_u(t) \leq E_u(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right) \quad \text{para } t > T_0. \quad (5.167)$$

■

**Corolário 5.2** *Suponha que as hipóteses do Corolário 5.1 sejam satisfeitas e que a função  $h$  em (5.141) possa ser expressa como  $h = h_b + h_s$  onde  $h_b$  e  $h_s$  são funções côncavas, monótonas crescentes, valem zero na origem e além disso  $h_s = o(h_b)$ , isto é,*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h_s(x)/h_b(x) = 0$$

e  $h_b$  não tem limitante superior linear no intervalo  $[0, 1)$ . Então, dado qualquer número positivo  $\gamma < 1$ , existe  $t_0 = t_0(\gamma) \geq T$  tal que a seguinte estimativa é válida:

$$E(t) \leq \bar{S}\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \text{para todo } t \geq 2t_0, \quad (5.168)$$

onde  $\bar{S}$  é a solução da seguinte EDO não-linear:

$$\bar{S}_t + h_b^{-1}(\gamma K^{-1}\bar{S}) = 0, \quad \bar{S}(0) = E(0), \quad (5.169)$$

com  $K$  e  $T_0$  como no Corolário 5.1.

**Demonstração:** As hipóteses sobre  $h$  implicam que  $q \geq h_b^{-1} \circ (\gamma K^{-1}I)$  próximo da origem.

De fato, escrevendo  $\mathcal{F} = K(I + h)$  obtemos:

$$\begin{aligned}
q &= I - (I + \mathcal{F}^{-1})^{-1} \\
&= [(I + \mathcal{F}^{-1}) \circ (I + \mathcal{F}^{-1})^{-1}] - (I + \mathcal{F}^{-1})^{-1} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \circ (I + \mathcal{F}^{-1})^{-1} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}^{-1})^{-1} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \circ [(K(I + h)) \circ \mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}^{-1}]^{-1} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \circ [K\mathcal{F}^{-1} + Kh \circ \mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}^{-1}]^{-1} \\
&= \mathcal{F}^{-1} [(Kh + (K + 1)I) \circ \mathcal{F}^{-1}]^{-1} \\
&= \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} \circ (Kh + (K + 1)I)^{-1} \\
&= (Kh_b + Kh_s + (K + 1)I)^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.170}$$

Note que  $Kh_s + (K + 1)I = o(h_b)$  já que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{Kh_s(x) + (K + 1)x}{h_b(x)} = 0$ . Assim,  $q = (Kh_b + o(h_b))^{-1}$ . Mais ainda, se  $w = o(h_b)$  então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\frac{o(h_b)(x)}{Kh_b(x)} = \frac{w(x)}{Kh_b(x)} < \varepsilon$  sempre que  $x \in (0, \delta)$ . Portanto,  $o(h_b)(x) < (1 + \varepsilon)Kh_b(x) - Kh_b(x)$  para todo  $x \in (0, \delta)$ , o que implica em  $(1 + \varepsilon)Kh_b \geq Kh_b + o(h_b)$  no intervalo  $[0, \delta)$ . Consequentemente, se definirmos  $\gamma = (1 + \varepsilon)^{-1}$ , então  $h_b^{-1} \circ \gamma K^{-1}I \leq (Kh_b + o(h_b))^{-1} = q$  em  $[0, \delta)$ .

Seja  $\ell : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dado por  $\ell = (I + h^{-1}) \circ (K^{-1}I)$ . Do Corolário 5.1 sabemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ . Assim, existe  $t_0 \geq T_0$  tal que  $S(t_0) < \delta$ . Defina  $s_m = E_u(mt_0)$ . Vamos mostrar que

$$E(t) \leq \tilde{S} \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right), \text{ para todo } t \geq 2t_0, \tag{5.171}$$

onde

$$\tilde{S}_t + h_b^{-1}(\gamma K^{-1}(\tilde{S}(t))) = 0, \quad \tilde{S}(0) = E(t_0). \tag{5.172}$$

Para este fim, é suficiente provar que

$$s_{m+1} \leq \tilde{S}(m), \text{ para todo } m = 0, 1, 2, \dots \tag{5.173}$$

De fato, uma vez que  $t \geq 2t_0$  pode ser escrito como  $t = (m + 1)t_0 + \tau$  com  $m \geq 1$ , segue que  $E(t) \leq E((m + 1)t_0) \leq E(mt_0) \leq \tilde{S}(m + 1) = \tilde{S} \left( \frac{t - \tau}{t_0} \right) \leq \tilde{S} \left( \frac{t}{t_0} - 1 \right)$ .

Para  $m = 0$ , a estimativa (5.173) é óbvia. Assuma que  $s_{m+1} \leq \tilde{S}(m)$ . De (5.143) e (5.165) deduzimos que

$$s_{m+2} + \ell(s_{m+2}) \leq s_{m+1}, \text{ para todo } m \geq 1. \quad (5.174)$$

A desigualdade (5.174) é equivalente a

$$(I + \ell)s_{m+2} \leq s_{m+1}$$

e como  $(I + \ell)^{-1}$  é monótona crescente,  $s_{m+2} \leq (I + \ell)^{-1}s_{m+1} = s_{m+1} - q(s_{m+1})$ , e disto

$$s_{m+2} \leq s_{m+1} - q(s_{m+1}). \quad (5.175)$$

Integrando a equação (5.172) de  $m$  até  $m + 1$  obtemos

$$\tilde{S}(m+1) - \tilde{S}(m) = - \int_m^{m+1} h_b^{-1}(\gamma K^{-1}(\tilde{S}(t))) dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{S}(m+1) &= \tilde{S}(m) - \int_m^{m+1} h_b^{-1}(\gamma K^{-1}(\tilde{S}(t))) dt \\ &\geq \tilde{S}(m) - h_b^{-1}(\gamma K^{-1}(\tilde{S}(m))) \\ &\geq \tilde{S}(m) - q(\tilde{S}(m)) \\ &= (I + \ell)^{-1}(\tilde{S}(m)) \\ &\geq (I + \ell)^{-1}s_{m+1} \\ &= s_{m+1} - q(s_{m+1}) \\ &\geq s_{m+2}. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Se considerarmos a equação

$$\bar{S}_t + h_b^{-1}(\gamma K^{-1}(\bar{S}(t))) = 0, \bar{S}(0) = E(0), \quad (5.177)$$

então  $\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) \leq \bar{S}\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)$  para todo  $t \geq 2t_0$ .

Com efeito, note que  $\tilde{S}(t) = G^{-1}(-t)$  onde  $G(S) = \int_{E(t_0)}^S \frac{1}{h_b^{-1}(\gamma K^{-1}\tau)} d\tau$  e  $\bar{S}(t) = \bar{G}^{-1}(-t)$  onde  $\bar{G}(S) = \int_{E(0)}^S \frac{1}{h_b^{-1}(\gamma K^{-1}\tau)} d\tau$ . Assim,

$$\int_{E(t_0)}^{\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0}-1\right)} \frac{1}{h_b^{-1}(\gamma K^{-1}\tau)} d\tau = G\left(\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0}-1\right)\right) = -\left(\frac{t}{t_0}-1\right). \quad (5.178)$$

Já que  $\frac{t}{t_0} - 1 \geq 0$ ,  $\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) \leq \tilde{S}(0) = E(t_0) \leq E(0)$ , de (5.178) obtemos

$$\frac{t}{t_0} - 1 = \int_{\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0}-1\right)}^{E(t_0)} \frac{1}{h_b^{-1}(\gamma K^{-1}\tau)} d\tau \leq \int_{\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0}-1\right)}^{E(0)} \frac{1}{h_b^{-1}(\gamma K^{-1}\tau)} d\tau. \quad (5.179)$$

A desigualdade (5.179) assegura que

$$\frac{t}{t_0} - 1 \leq - \int_{E(0)}^{\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0}-1\right)} \frac{1}{h_b^{-1}(\gamma K^{-1}\tau)} d\tau = -\bar{G}\left(\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)\right). \quad (5.180)$$

Portanto, (5.180) implica que

$$\tilde{S}\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) \leq \bar{G}^{-1}\left(-\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)\right) = \bar{S}\left(\frac{t_0}{t} - 1\right), \text{ para todo } t \geq 2t_0. \quad (5.181)$$

Combinando (5.171) e (5.181), o resultado segue. ■

**Corolário 5.3** *Sob as mesmas hipóteses do Corolário 5.1 e suponha que a função  $g$  seja linearmente limitada no infinito.*

- a) *Se  $g$  é sub-linear na origem, isto é,  $m_0x^{\theta+1} \leq g(x)x \leq M_0x^{\theta+1}$  com  $\theta \in (0, 1)$  para  $|x| < 1$ , a função auxiliar  $h_0$  pode ser definida como  $h_0(x) = cx^{\frac{2\theta}{1+\theta}}$ , onde  $c = \frac{2(M_0^2+1)}{m_0^{\frac{2\theta}{1+\theta}}}$ . Então a EDO (5.147) pode ser substituída por*

$$S_t + \frac{1}{c^{\frac{1+\theta}{2\theta}}}(\gamma K^{-1}S(t))^{\frac{1+\theta}{2\theta}} = 0, \quad S(0) = E(0), \quad (5.182)$$

*e o decaimento da energia (5.146) é válido para todo  $t \geq 2t_0$  com  $t_0 > 0$  suficientemente grande.*

- b) *Se  $g$  é super-linear na origem, isto é,  $m_0x^{r+1} \leq g(x)x \leq M_0x^{r+1}$  com  $r > 1$  para  $|x| < 1$  e a função  $x \mapsto \sqrt{x}g(\sqrt{x})$  é convexa e super-linear (sem limitante linear inferior com inclinação positiva) no intervalo  $[0, \delta)$ , para algum  $\delta > 0$ , então a EDO (5.147) pode ser substituída por*

$$S_t + \sqrt{\gamma K^{-1}}S^{\frac{1}{2}}g[(\gamma K^{-1}S)^{\frac{1}{2}}] = 0, \quad S(0) = E(0), \quad (5.183)$$

*e a estimativa de energia (5.146) é válida sempre que  $t \geq 2t_0$  para algum  $t_0 > 0$  suficientemente grande.*

**Demonstração:**

- a) Por construção,  $h_0$  é estritamente sub-linear, enquanto que  $h_1$  é linear, e assim o resultado segue diretamente do Corolário 5.2.
- b) Para determinar  $h_0$ , resolvemos a equação  $h_0(g(x)x) = cx^2$  com  $c = 2(1 + M_0^2)$ , obtendo  $h_0^{-1}(x) = (\sqrt{(x/c)})g(\sqrt{(x/c)})$ . Assim,  $h_0$  é côncava e estritamente sub-linear em  $[0, \delta)$  pela hipótese. O Corolário 5.2 estabelece que podemos substituir  $q$  por  $h_0^{-1} \circ (\gamma K^{-1}I)$  na EDO (5.147), e o resultado segue pois o fator  $c^{-\frac{1}{2}} < 1$  pode ser incorporado em  $\gamma$ .

■

**Observação 5.5** Integrando a EDO (5.183) obtemos  $S(t) = G^{-1}\left(-\frac{\tilde{C}}{2}t, E(0)\right)$  onde

$$G(y, E(0)) = \int_{\sqrt{\tilde{C}E(0)}}^{\sqrt{\tilde{C}y}} \frac{1}{g(u)} du$$

com  $\tilde{C} = \gamma K^{-1}$ .

## 5.7 Calculando Taxas de Decaimento

Os exemplos dessa seção irão ilustrar os resultados da seção anterior. Levaremos em consideração várias configurações que incluem amortecimento sub e super-linear, tanto no infinito quanto na origem.

### 5.7.1 Caso linearmente limitado no infinito

Através dessa subseção assumimos que  $mx^2 \leq g(x)x \leq Mx^2$  para todo  $|x| \geq 1$ . Nos exemplos abaixo, a constante  $T_0$  vem do Lema 5.4 e a constante  $K$  de (5.148).

**Exemplo 5.1 (Dissipação linearmente limitada na origem)** Nesse caso, obtemos o decaimento exponencial das soluções. Suponha que  $m_0x^2 \leq g(x)x \leq M_0x^2$  para todo  $|x| < 1$ .

Então  $h_0(x) = (M_0 + m_0^{-1})x$  e a função  $q$  em (5.143) pode ser calculada explicitamente e a EDO (5.147) torna-se

$$S_t + \tilde{C}S = 0, \quad S(0) = E(0),$$

onde  $\tilde{C} = \frac{K^{-1} \text{med}(Q_T)}{\text{med}(Q_T)(2+K^{-1})+M_0+m_0^{-1}}$ . Isso nos dá  $S(t) = E_u(0)e^{-\tilde{C}t}$  e  $E(t) \leq E(0)e^{(-\tilde{C}(\frac{t}{T_0}-1))}$  para todo  $t \geq T_0$ .

**Exemplo 5.2 (Dissipação super-linear e polinomial próximo da origem)** *Suponha que  $m_0x^{p+1} \leq g(x)x \leq M_0x^{p+1}$  para todo  $|s| < 1$  e algum  $p > 1$ . Como a função  $s \mapsto \sqrt{s}g(\sqrt{s}) = s^{(p+1)/2}$  é convexa para  $p \geq 1$ , pelo Corolário 5.3 item b), o decaimento da energia é determinado pela solução da EDO*

$$S_t + \tilde{C}S^{\frac{p+1}{2}} = 0, \quad S(0) = E(0),$$

onde  $\tilde{C} = (\gamma K^{-1})^{\frac{p+1}{2}}$ . Essa equação pode ser integrada diretamente, entretanto, para ilustrar a fórmula geral obtemos

$$G(y, E(0)) = \int_{\sqrt{E(0)}}^{\sqrt{y}} u^{-p} du = \frac{1}{1-p} [y^{\frac{-p+1}{2}} - E(0)^{\frac{-p+1}{2}}].$$

Daí,  $G^{-1}(t) = [E(0)^{\frac{-p+1}{2}} + t(1-p)]^{\frac{2}{-p+1}}$ . Assim,

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) = G^{-1}\left(-\frac{\tilde{C}}{2}\left(\frac{t}{T_0} - 1\right)\right) = \left[E(0)^{\frac{-p+1}{2}} + \frac{(p-1)\tilde{C}}{2}\left(\frac{t}{T_0} - 1\right)\right]^{-\frac{2}{p-1}}$$

para todo  $t \geq T_0$ .

**Exemplo 5.3 (Dissipação sub-linear próximo da origem)** *Considere  $g(s) = s^\theta$  para todo  $|x| < 1$  e algum  $\theta \in (0, 1)$ . Pelo Corolário 5.3 item a), o decaimento da energia é determinado pela solução da EDO*

$$S_t + \tilde{C}S^{\frac{\theta+1}{2\theta}} = 0, \quad S(0) = E(0),$$

onde  $\tilde{C} = \left(\frac{\gamma K^{-1}}{c}\right)^{\frac{1+\theta}{2\theta}}$  com  $c = \frac{2(M_0^2+1)}{m_0^{1+\theta}}$ . Neste caso,

$$G(s, E(0)) = \frac{\sqrt{S}^{-\frac{1}{\theta}+1}}{-\frac{1}{\theta}+1} - \frac{\sqrt{E(0)}^{-\frac{1}{\theta}+1}}{-\frac{1}{\theta}+1}.$$

Portanto,  $G^{-1}(t) = \left[ \left(-\frac{1}{\theta} + 1\right)t + \sqrt{E(0)}^{-\frac{1}{\theta}+1} \right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}$ . Assim,

$$E(t) \leq \left[ \left( \frac{1-\theta}{2\theta} \right) \frac{\tilde{C}}{2} \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) + E(0)^{\frac{-1+\theta}{2\theta}} \right]^{-\frac{2\theta}{1-\theta}} \text{ para todo } t \geq T_0.$$

**Exemplo 5.4 (Dissipação do tipo exponencial próximo da origem)** Tomemos

$g(s) = s^3 e^{-1/s^2}$  para  $s$  próximo da origem. Como a função  $h^{-1}(s) = g(\sqrt{s})\sqrt{s} = s^2 e^{-1/s}$  é convexa  $[0, \delta)$  para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, o decaimento da energia é determinado pela solução da EDO

$$S_t + \tilde{C}^2 S^2 e^{-(\tilde{C}S)^{-1}} = S_t + \sqrt{\tilde{C}S} g[(\tilde{C}S)^{\frac{1}{2}}] = 0,$$

onde  $\tilde{C} = \gamma K^{-1}$ . Neste caso,  $G(y, E(0)) = -\frac{1}{2}[e^{1/(\tilde{C}y)} - e^{1/(\tilde{C}E(0))}] e$

$$G^{-1}(t, E(0)) = \tilde{C}^{-1}[\ln(e^{1/(\tilde{C}E(0))} - 2t)]^{-1}.$$

Daí,

$$E(t) \leq \tilde{C}^{-1} \left[ \ln \left( \tilde{C} \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) + e^{1/(\tilde{C}E(0))} \right) \right]^{-1} \text{ para todo } t \geq T_0.$$

**Exemplo 5.5** Consideremos  $g(s) = s|s|e^{-1/|s|}$  para  $s$  próximo da origem. Como a função  $g(\sqrt{s})\sqrt{s} = s^{3/2}e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$  é convexa em  $[0, \delta)$  para algum  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, o decaimento da energia é determinado pela solução da EDO

$$S_t + (\tilde{C}S)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\tilde{C}S}}} = 0, \quad S(0) = E(0),$$

onde  $\tilde{C} = \gamma K^{-1}$ . Neste caso,  $S(t) = \frac{1}{\tilde{C}} \ln^{-2} \left( \frac{1}{2}(\tilde{C}t + 2e^{\frac{1}{\sqrt{\tilde{C}E(0)}}}) \right)$ . Portanto,

$$E(t) \leq \frac{1}{\tilde{C}} \frac{1}{\ln^2 \left( e^{\frac{1}{\sqrt{\tilde{C}E(0)}}} + \frac{\tilde{C}}{2} \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) \right)} \text{ para todo } t \geq T_0.$$

## 5.7.2 Casos sub-linear e super-linear

**Exemplo 5.6 (Dissipação sub-linear no infinito)** Suponha que  $g$  é linearmente limitada próximo da origem 0, isto é,  $m_0 s^2 \leq g(s)s \leq M_0 s^2$  para todo  $|s| < 1$ , enquanto que no infinito

$\mathcal{O}(g) < 1$ , o que significa que existe um número positivo  $\theta < 1$  tal que,

$$ms^{\theta+1} \leq g(s)s \leq Ms^{\theta+1}, \text{ para todo } |s| > 1.$$

Então,  $h_0$  como no Exemplo 5.1 é linear:  $h_0(s) = (M_0 + m_0^{-1})s$ , enquanto que  $h_1(s) = s^{\frac{p_0-2}{p_0-\theta-1}}$  como em (5.142). Assumindo que existe  $p_0 > 2$  tal que  $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))$  obtemos  $\frac{h_0(x)}{h_1(x)} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0^+$ , e do Corolário 5.2 a equação (5.169) tem a forma

$$S_t + (\alpha S)^\rho = 0, \quad S(0) = E(0),$$

onde  $\rho = \frac{p_0-\theta-1}{p_0-2}$  e  $\alpha = \gamma K^{-1}$  para qualquer número positivo  $\gamma < 1$ .

Como estabelecido no Corolário 5.146, a constante  $K > 0$  é dada por

$$K = \left[ C(T, a, \text{med}(Q_T)) \cdot D_0^{\frac{p_0(1-\theta)}{p_0-r-1}} \right].$$

A solução desta EDO é dada por

$$S(t) = (\alpha^\rho(\rho-1)(t+c_0))^{-\frac{1}{\rho-1}}, \quad c_0 = \frac{E(0)^{1-\rho}}{\alpha^\rho(\rho-1)}.$$

Assim, para  $t$  suficientemente grande ( $t \geq 2t_0$ ), onde  $t_0$  é dado no Corolário 5.2, temos

$$E(t) \leq \left[ E(0)^{1-\rho} + \alpha^\rho(\rho-1) \left( \frac{t}{t_0} - 1 \right) \right]^{-\frac{p_0-2}{1-\theta}}.$$

**Exemplo 5.7 (Dissipação super-linear no infinito)** Suponha novamente que  $g$  é linearmente limitada próximo de 0, e no infinito  $\mathcal{O}(g) > 1$ , isto é, existe  $r > 1$  tal que

$$ms^{r+1} \leq g(s)s \leq Ms^{r+1}, \text{ para todo } |s| > 1.$$

Como no exemplo anterior  $h_0(x) = (M_0 + m_0^{-1})x$ , enquanto que  $h_1(s) = s^{\frac{p_0-2r}{p_0-r-1}}$  como definido em (5.142). Assumindo que existe  $p_0 > 2r$  tal que  $u_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega))$  obtemos  $\frac{h_0(x)}{h_1(x)} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0^+$ , e do Corolário 5.2 a equação (5.169) tem a forma

$$S_t + (\alpha S)^\rho = 0, \quad S(0) = E(0),$$

onde  $\rho = \frac{p_0-r-1}{p_0-2r}$  e  $\alpha = \gamma K^{-1}$  para qualquer constante positiva  $\gamma < 1$ .

Como estabelecido no Corolário 5.146, a constante  $K > 0$  é dada por

$$K = \left[ C(T, a, \text{med}(Q_T)) \cdot D_0^{\frac{p_0(r-1)}{p_0-r-1}} \right].$$

A solução desta EDO é dada por

$$S(t) = (\alpha^\rho(\rho - 1)(t + c_0))^{-\frac{1}{\rho-1}}, \quad c_0 = \frac{E(0)^{1-\rho}}{\alpha^\rho(\rho - 1)}.$$

Assim, para  $t$  suficientemente grande ( $t \geq 2t_0$ ), onde  $t_0$  é dado no Corolário 5.2, temos

$$E(t) \leq \left[ E(0)^{1-\rho} + \alpha^\rho \left( \frac{r-1}{p_0-2r} \right) \left( \frac{t}{t_0} - 1 \right) \right]^{-\frac{p_0-2r}{r-1}}.$$

Abaixo, resumimos os resultados obtidos na seção 5.7.1. Para as taxas de decaimento na Tabela 1 assumimos que  $g$  é linearmente limitada no infinito.

	Comportamento de $g$ próximo da origem ( $ s  < 1$ )				
	$s$	$s^{p>1}$	$s^{\theta<1}$	$s^3 e^{-1/s^2}$	$s s e^{-1/ s }$
Regularidade	Energia finita				
$S_t + y = 0$	$y = \tilde{C}S$	$y = \tilde{C}S^{\frac{p+1}{2}}$	$y = \tilde{C}S^{\frac{\theta+1}{2\theta}}$	$y = \tilde{C}^2 S^2 e^{-(\tilde{C}S)^{-1}}$	$y = (\tilde{C}S)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\tilde{C}S}}}$
$S(t)$	$c_0 e^{-\tilde{C}t}$	$[c_0 + c_1(p-1)t]^{-\frac{2}{p-1}}$	$[\left(\frac{1-\theta}{2\theta}\right) c_1 t + c_0]^{-\frac{2\theta}{1-\theta}}$	$c_1^{-1} \ln^{-1}(c_1 t + c_0)$	$c_1^{-1} \ln^{-2} \left( \frac{1}{2}(c_1 t + c_0) \right)$

**Tabela 5.1:** Taxas de decaimento da energia para um *feedback*  $g(s)$  linearmente limitado.

Para as taxas de decaimento na Tabela 2 assumimos que a função  $g$  tem ordem diferente de 1 no infinito, de acordo com a Definição 5.1. Neste caso, o decaimento uniforme em espaço de energia finito requer regularidade uniforme de soluções em topologia mais forte.

	Comportamento de $g$ para $ s  > 1$	
	$g(s) = s^{\theta < 1}$	$g(s) = s^{r > 1}$
Regularidade	$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega)), p_0 > 2$	$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^{p_0}(\Omega)), p_0 > 2r$
EDO	$S_t + (\alpha S)^{\frac{p_0 - \theta - 1}{p_0 - 2}} = 0$	$S_t + (\alpha S)^{\frac{p_0 - r - 1}{p_0 - 2r}} = 0$
$S(t)$	$(c_1 \frac{(1-\theta)}{p_0-2} (t + c_0))^{-\frac{p_0-2}{1-\theta}}$	$(c_1 \frac{(r-1)}{p_0-2r} (t + c_0))^{-\frac{p_0-2r}{r-1}}$

**Tabela 5.2:** Taxas de decaimento da energia para um *feedback*  $g(s)$  linearmente limitado próximo da origem (para  $|s| < 1$ ) e não linearmente limitado no infinito (para  $|s| \geq 1$ ).

# Referências Bibliográficas

- [1] AGARWAL, R. P.; O'REGAN, D.; SAHU, D. R. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications. *Topological Fixed Point Theory and Its Applications*, 6. Springer, New York, 2009. x+368 pp.
- [2] ALABAU-BOUSSOUIRA, F. Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, *Appl. Math. Optim.* 51(1), (2005), 61-105.
- [3] ALABAU-BOUSSOUIRA, F. A. Unified approach via convexity for optimal energy decay rates of finite and infinite dimensional vibrating damped systems with applications to semi-discretized vibrating damped systems. *J. Differential Equations* 248 (2010), no. 6, 1473-1517.
- [4] ALABAU-BOUSSOUIRA, F., CANNARSA, P.; GUGLIELMI R. Indirect stabilization of weakly coupled systems with hybrid boundary conditions. *Math. Control Relat. Fields* 1 (2011) 413-436.
- [5] ALABAU-BOUSSOUIRA, F.; CANNARSA, P.; KOMORNIK, V. Indirect internal damping of coupled systems. *J. Evol. Equ.* 2 (2002) 127-150.
- [6] ALABAU-BOUSSOUIRA, F.; LÉAUTAUD, M. Indirect stabilization of locally coupled wave-type systems. *ESAIM: COCV* 18 (2012) 548-582.
- [7] ALABAU-BOUSSOUIRA, F.; WANG, Z.; YU, L. A one-step optimal energy decay formula for indirectly nonlinearly damped hyperbolic systems coupled by velocities, *ESAIM: COCV* 23 (2017), 721-749.
- [8] ALABAU-BOUSSOUIRA, F.; PRIVAT, Y.; TRÉLAT, E. Nonlinear damped partial differential equations and their uniform discretizations. *J. Funct. Anal.* 273 (2017), no. 1, 352-403.

- [9] ANDRADE, D.; MOGNON, A. Global Solutions for a System of Klein-Gordon Equations with Memory. *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3) 21 (2003), no. 1-2, 127-138.
- [10] ASTUDILLO, M.; CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; PAMPU, A. B. Uniform decay rate estimates for the semilinear wave equation in inhomogeneous medium with locally distributed nonlinear damping. *Nonlinearity* 31 (2018), no. 9, 4031-4064.
- [11] ASTUDILLO, M.; CAVALCANTI, M. M.; FUKUOKA, R.; GONZALEZ MARTINEZ, V. H. Local uniform stability for the semilinear wave equation in inhomogeneous media with locally distributed Kelvin-Voigt damping, *Math. Nachr.*, (2018) DOI: 10.1002/mana.201700109.
- [12] BARBU, V. Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems. Mathematics in Science and Engineering, 190. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993. x+476 pp.
- [13] BARBU, V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, *Northhoff International Publishing*, Bucharest, Romania, 1976.
- [14] BARDOS, C.; LEBEAU, G.; RAUCH, J. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.* 30 (1992), no. 5, 1024-1065.
- [15] BLAIR, M. D.; SMITH, H. F.; SOGGE, C. D. Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 265 (2009), 1817-1829.
- [16] BORTOT, C. A.; CAVALCANTI, M. M.; CORRÊA, W. J.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. Uniform decay rate estimates for Schrödinger and plate equations with nonlinear locally distributed damping. *Journal of Differential Equations*, 254 (2013), no. 7, 3729-3764.

- [17] BOYER, F.; FABRIE, P. Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models. Applied Mathematical Sciences, 183. Springer, New York, 2013. xiv+525 pp.
- [18] BREZIS, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext. Springer, New York (2011).
- [19] BURQ, N.; CHRISTIANSON, H. Imperfect geometric control and overdamping for the damped wave equation, Commun. Math. Phys. **336**, 101-130 (2015).
- [20] BURQ, N.; GÉRARD, P. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. (French) [A necessary and sufficient condition for the exact controllability of the wave equation] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 (1997), no. 7, 749-752.
- [21] BURQ, N.; GÉRARD, P. Contrôle Optimal des équations aux dérivées partielles. 2001, Url:<http://www.math.u-psud.fr/~burq/articles/coursX.pdf>
- [22] CAVALCANTI, M. M. ; CORRÊA, W. J. ; ÖZSARI, T.; SEPÚLVEDA, M.; VÉJAR-ASEM, R. Exponential stability for the nonlinear Schrödinger equation with locally distributed damping. Comm. Partial Differential Equations 45 (2020), no. 9, 1134–1167.
- [23] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev. Maringá: Eduem, Brasil, 2009.
- [24] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; LASIECKA, I. Wellposedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *J. Differential Equations***236** (2007), 407-459.
- [25] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; MANSOURI, S.; GONZALEZ MARTINEZ, V. H.; HAJJEJ, Z.; ASTUDILLO ROJAS, M. R. Asymptotic stability for a strongly coupled Klein-Gordon system in an inhomogeneous medium with locally distributed damping. *Journal of Differential Equations*. 268 (2020), 447-489.

- [26] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A. Uniform stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping. *Methods Appl. Anal.* 15 (2008), no. 4, 405-425.
- [27] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A. Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping—a sharp result. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 9, 4561-4580.
- [28] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; TOUNDYKOV, D. Unified approach to stabilization of waves on compact surfaces by simultaneous interior and boundary feedbacks of unrestricted growth. *Appl Math Optim* **69**(1):83-122 2014.
- [29] CAVALCANTI, M. M.; DIAS SILVA, F. R.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. Uniform decay rates for the wave equation with nonlinear damping locally distributed in unbounded domains with finite measure. *SIAM J. Control Optim.* 52 (2014), no. 1, 545-580.
- [30] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A. Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197 (2010), no. 3, 925-964.
- [31] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; LASIECKA, I. Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction. *J. Differential Equations* 236 (2007) 407-459.
- [32] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; PRATES FILHO, J. S.; SORIANO, J. A. Existence and uniform decay of a degenerate and generalized Klein-Gordon system with boundary damping. *Commun. Appl. Anal.* 4 (2000), no. 2, 173-196.
- [33] CAVALCANTI, M. M.; LASIECKA, I.; TOUNDYKOV, D. Wave equation with damping affecting only a subset of static Wentzell boundary is uniformly stable. *Trans. Amer. Math. Soc.* 364 (2012), no. 11, 5693-5713.

- [34] CAZENAVE, T.; HARAUX, A. An introduction to semilinear evolution equations. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. xiv+186 pp.
- [35] CHUESHOV, I; ELLER, M.; LASIECKA, I. On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. *Comm. Partial Differential Equations* (**27**), no. 9-10, 1901-1951 (2002).
- [36] COUSIN, A. T.; FROTA, C. L.; LARKIN, N. A. On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 293 (2004), no. 1, 293-309.
- [37] DAOULATLI, M.; LASIECKA, I.; TOUNDYKOV, D. Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 2 (2009), no. 1, 67-94.
- [38] DEHMAN, B. Stabilisation pour l'équation des ondes semilinéaire, *Asymptotic Anal.* **27**, 171-181 (2001).
- [39] DEHMAN, B.; GÉRARD, P.; LEBEAU, G. Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface. *Math. Z.* 254 (2006), no. 4, 729-749.
- [40] DEHMAN, B.; LEBEAU, G.; ZUAZUA, E. Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation, *Anna. Sci. Ec. Norm. Super.* **36**, 525-551 (2003).
- [41] DOS SANTOS FERREIRA, D. Sharp  $L^p$  Carleman estimates and unique continuation. *Journées Équations aux Dérivées Partielles*, pages Exp. No. VI, 12. Univ. Nantes, Nantes, 2003.
- [42] DUISTERMAAT, J. J.; HÖRMANDER, L. Fourier integral operators. II. *Acta Math.*, **128**(3-4):183-269, 1972.

- [43] DUYCKAERTS, T.; ZHANG, X.; ZUAZUA, E. On the optimality of the observability inequalities for parabolic and hyperbolic systems with potentials, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **25**, 1-41 (2008).
- [44] FERREIRA, J. S. Asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear system of Klein-Gordon equations. *Nonlinear Anal.* 13 (1989), no. 9, 1115–1126.
- [45] FERREIRA, J. S. Exponential decay for a nonlinear system of hyperbolic equations with locally distributed dampings. *Nonlinear Anal.* 18 (1992), no. 11, 1015–1032.
- [46] FERREIRA, J. S. Exponential decay of the energy of a nonlinear system of Klein-Gordon equations with localized dampings in bounded and unbounded domains. *Asymptotic Anal.* 8 (1994), no. 1, 73-92.
- [47] FERREIRA, J.; MENZALA, G. P. Decay of solutions of a system of nonlinear Klein-Gordon equations. *Internat. J. Math. Math. Sci.* 9 (1986), no. 3, 471-483.
- [48] GÉRARD, P. Microlocal defect measures, *Comm. Partial Differential Equations* 16 (1991) 1761-1794.
- [49] GÉRARD, P. Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, *J. Funct. Anal.* **141**, 60-98 (1996).
- [50] HÖRMANDER, L. The analysis of linear partial differential operators. III, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [51] HÖRMANDER, L. The propagation of singularities for solutions of the Dirichlet problem. In Pseudodifferential operators and applications (Notre Dame, Ind., 1984), volume 43 of Proc. Sympos. Pure Math., pages 157-165. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [52] JOLY, R.; LAURENT, C. Stabilization for the semilinear wave equation with geometric control, *Analysis & PDE* **6**, 1089-1119 (2013).
- [53] KAPITONOV, B. Uniform stabilization and exact controllability for a class of coupled hyperbolic systems, *Comput. Appl. Math.*, 15 (1996), pp. 199-212.

- [54] KESAVAN, S. Topics in functional analysis and applications. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. xii+267 pp.
- [55] LASIECKA, I.; TATARU, D. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, *Differential and Integral Equations*, 6 (1993), 507-533.
- [56] LASIECKA, I.; TOUNDYKOV, D. Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms. *Nonlinear Anal.*, 64 (8):1757–1797, 2006.
- [57] LEBEAU, G. Equations des ondes amorties, *Algebraic Geometric Methods in Maths. Physics*, pp. 73-109, 1996.
- [58] BETELÚ, S.; GULLIVER, R.; LITTMAN, W. Boundary control of PDEs via curvature flows: the view from the boundary. II. *Appl. Math. Optim.*, 46(2-3):167-178, 2002. Special issue dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions.
- [59] JOST, J. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer Verlag, 2008.
- [60] MARTINEZ, P. A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping, *Rev. Mat. Complut.* 12 (1) (1999) 251-283.
- [61] KOCH, H.; TATARU, D. Dispersive estimates for principally normal pseudodifferential operators. *Commun. Pure Appl. Math.* 58(2), 217-284 (2005)
- [62] LIONS, J. L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires. Dunod, Guthier-Villars, 1969.
- [63] J. L. LIONS; E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. (French) Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17 Dunod, Paris 1968 xx+372 pp.
- [64] LIU, K.; LIU, K. Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping, *SIAM J. Control and Optim.* **36**, 1086-1098 (1998).

- [65] LIU, K.; RAO, B. Exponential stability for the wave equations with local Kelvin-Voigt damping, *Z. Angew. Math. Phys.* **57**, 419-432 (2006).
- [66] MEDEIROS, L. A. Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações. Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 16, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.
- [67] MEDEIROS, L. A.; MENZALA, G. P. On a mixed problem for a class of nonlinear Klein-Gordon equations. *Acta Math. Hungar.* 52 (1988), no. 1-2, 61-69.
- [68] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. Weak solutions for a system of nonlinear Klein-Gordon equations. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 146 (1987), 173-183.
- [69] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equations. *Funkcial. Ekvac.* 30 (1987), no. 1, 147-161.
- [70] MIRANDA, M. M. Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev, *Bol. So. Paran. Mat.* (2 série), vol 11, num 2 (1990), 131-137.
- [71] PAZY, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [72] PUCCI, P.; SERRIN, J. Asymptotic stability for nonautonomous dissipative wave systems, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 49 (1996), 177-216.
- [73] PUCCI, P.; SERRIN, J. Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy, *Journal of Differential Equations* 150 (1998), 203-214.
- [74] RAUCH, J.; TAYLOR, M. Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.* 28(4) (1975), 501-523.
- [75] RIVERA, J. E. M. Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.
- [76] RUIZ, A. Unique Continuation for Weak Solutions of the Wave Equation plus a Potential, *J. Math. Pures. Appl.* 71 (1992) 455-467.

- [77] SEGAL, I. E. Nonlinear partial differential equations in quantum field theory. 1965. *Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. XVII* pp. 210–226 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [78] SIMON, J. Compact Sets in the space  $L^p(0, T, B)$ . *Ann. Mat. Pura Appl.* 146 65-96 (1987).
- [79] STRAUSS, W. A. On weak solutions of semilinear hyperbolic equations, *Anais da Academis Brasileira de Ciências*, **71**, 1972, 645-651.
- [80] TATARU, D. The  $X_\theta^s$  spaces and unique continuation for solutions to the semilinear wave equation, *Comm. Partial Differential Equations* **2** (1996) 841-887.
- [81] TEBOU, L. Sharp observability estimates for a system of two coupled nonconservative hyperbolic equations. *Appl. Math. Optim.* 66 (2012), no. 2, 175–207.
- [82] TEBOU, L. Stabilization of some elastodynamic systems with localized Kelvin-Voigt damping, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 36 7117-7136 (2016).
- [83] SHOWALTER, R. E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. *Mathematical Surveys and Monographs*, 49. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [84] ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol 2A: Linear monotone operators*, Springer-Verlag, 1990.
- [85] ZHANG, X. Explicit observability estimates for the wave equation with lower order terms by means of Carleman inequalities, *SIAM J. Cont. Optim.* **3** (2000) 812-834.
- [86] ZUAZUA, E. Exponential decay for semilinear wave equations with localized damping, *Comm. Partial Differential Equations*, **15** 205-235 (1990).