UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)[1]

NATHALIA DEON

Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias e aplicações em teoria de controle

Maringá

2023

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

NATHALIA DEON

Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias e aplicações em teoria de controle

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria - Geometria e topologia.

Orientador: Ryuichi Fukuoka.

Maringá
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Deon, Nathalia
D418e
Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias e aplicações em teoria de controle / Nathalia Deon. -- Maringá, 2023.
103 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Ryuichi Fukuoka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas,Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2023.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Condições de Carathéodory. 3. Variedades diferenciáveis. 4. Forma simplética. 5. Princípio do máximo de Pontryagin. I. Fukuoka, Ryuichi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 515.352

Edilson Damasio CRB9-1.123

NATHALIA DEON

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES EM TEORIA DE CONTROLE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk - UFPR/Jandaia do Sul
Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria - UEM

Aprovada em: 25 de agosto de 2023.
Local de defesa: Bloco F67 – Auditório do Departamento de Matemática.

À Deus e à minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, desejo expressar minha mais profunda gratidão a Deus, cuja presença em minha vida tem sido uma fonte constante de força, sabedoria e inspiração. Sua graça e orientação me acompanharam ao longo desta jornada, tornando possível a conclusão deste trabalho.

Aos meus amados pais Rogério e Neiva, cujo amor incondicional e apoio inabalável foram fundamentais para que eu pudesse trilhar esse caminho acadêmico. Suas palavras de incentivo e encorajamento sempre foram um farol nas horas mais desafiadoras.

À minha querida irmã Samara e amigos Edinei e Fabiano, que de longe permaneceram ao meu lado, acreditando em mim e sendo amigos verdadeiros. Sou imensamente grata por tê-los ao meu lado e por todo o carinho que sempre dispensaram a mim.

Aos meus amigos Camila, Marcos e Maria, que me deram apoio de todas as formas nessa etapa de minha vida. Obrigada por todo cuidado e preocupação que sempre tiveram por mim. Hoje posso chama-los de família.

À minha terapeuta Neili Woitilaki que me ajudou a concluir essa caminhada.

Ao meu orientador Ryuichi Fukuoka que sempre me orientou com muita sabedoria. Minha gratidão pela dedicação e zelo que teve em nosso trabalho e pela paciência e gentileza que sempre teve comigo.

Não posso deixar de agradecer também ao meus colegas de departamento que sempre estiveram a disposição para oferecer apoio emocional e informacional, à Universidade Estadual de Maringá (UEM), pela oportunidade de estudar em uma instituição de ensino de excelência, e à CAPES pelo auxílio financeiro.

”Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre
ombros de gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

O objetivo principal desse trabalho é enunciar o princípio do máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis. Iremos começar nosso trabalho nos concentrando em condições para garantir a existência e unicidade de soluções no problema de valor inicial de uma equação diferencial ordinária. Depois disso introduziremos problemas variacionais em espaços vetoriais de dimensão finita, e mostraremos como as equações de Hamilton impõem uma restrição limitando as funções a serem candidatas à solução do problema variacional. Por fim apresentamos as variedades diferenciáveis e objetos como a 1-forma tautológica e a forma simplética em seu fibrado cotangente para que possamos, através do formalismo Hamiltoniano, enunciar o princípio do máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, condições de Carathéodory, variedades diferenciáveis, forma simplética, princípio do máximo de Pontryagin.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present the Pontryagin's maximum principle on smooth manifolds. We will start our work focusing on conditions to guarantee the existence and uniqueness of solutions in the problem of initial value of an ordinary differential equation. After that, we will introduce variational problems in finite dimensional vector spaces, and show how the Hamilton equations will impose a restriction on the functions that are candidates for solving the variational problem. Finally we present the differentiable manifold and objects like the tautological 1-form and the symplectic form on their cotangent bundle so that we can, through Hamiltonian formalism, present the Pontryagin maximum principle on smooth manifolds.

Keywords: ordinary differential equation, Carathéodory condition, smooth manifolds, symplectic form, Pontryagin maximum principle.

CONTEÚDO

Introdução **11**

1 Preliminares **14**

1.1 Análise funcional 14

1.2 Teoremas de ponto fixo 23

1.2.1 Teorema do ponto fixo de Brouwer 31

1.2.2 Teorema do ponto fixo de Schauder 38

1.3 Medida e integração 45

2 Equações diferenciais ordinárias **48**

2.1 Problemas de valor inicial 49

2.2 Extensão de soluções 53

2.3 Propriedades de continuidade e unicidade 57

2.4 Extensão do conceito de equação diferencial 65

3 Princípio do máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis **76**

3.1 Dinâmica Hamiltoniana 76

3.1.1 Equações de Euler-Lagrange 77

3.1.2 Equações de Hamilton 79

3.2 Variedades Diferenciáveis 82

3.2.1 Conceitos iniciais 83

3.2.2 Diferenciabilidade 84
3.2.3 Fibrados vetoriais em variedades diferenciáveis 87
3.3 O princípio do máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis . . 91
3.3.1 Forma Simplética 92
3.3.2 Sistema de controle em variedades 95
3.3.3 Princípio do máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis 98

INTRODUÇÃO

O Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP) é um teorema importante no estudo de problemas de maximização e minimização de funcionais utilizando-se a teoria de controle. Para que o enunciado deste teorema fique bem posto é necessário uma generalização do teorema de existência e unicidade de problemas de valor incial (PVI) de equações diferenciáis ordinárias: Em vez das hipóteses iniciais de uma função ser Lipschitz local em relação a variável de estado, utilizamos as chamadas condições de Carathéodory. Neste trabalho, desenvolveremos esta teoria de existência e unicidade de um PVI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

com f satisfazendo as condições de Carathéodory. Um segundo objetivo é enunciar o PMP em variedades diferenciáveis em vez de fazê-lo somente no espaço Euclidiano. Para isso introduziremos os objetos necessários na teoria de variedades diferenciáveis incluindo as estruturas simpléticas no fibrado cotangente.

Apresentaremos a organização do trabalho a seguir.

Começaremos o capítulo 1 introduzindo conceitos de análise essenciais para o desenvolvimento do trabalho. Em especial, apresentaremos ferramentas necessárias para estudarmos soluções de equações diferenciais ordinárias. Na seção 1.1 apresentaremos noções básicas de análise funcional em espaços de Banach e diferenciabilidade. Na seção 1.2 iremos discorrer sob a existência e unicidade de pontos fixos de aplicações em espaços de Banach sobre determinadas condições. Dentro desse assunto apresentaremos os teoremas de ponto fixo de Banach, Brouwer e Schauder, os quais serão muito significativos no estudo de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias. Na seção 1.3 relembraremos a definição e algumas propriedades fundamentais de diferenciabilidade e integrabilidade de funções absolutamente contínuas.

No capítulo 2 apresentaremos na seção 2.1 condições para que haja existência de soluções para uma equação diferencial com o teorema de Peano. Na seção 2.2 nos ocuparemos em estudar o domínio dessa solução e mostrar que existe um intervalo máximo para o qual essa solução pode ser estendida de forma que essa extensão ainda seja solução da equação. Depois disso nos ocuparemos em incluir mais hipóteses a fim de garantir a unicidade da solução para a equação diferencial na seção 2.3 através do teorema de Picard Lindelöff. Para finalizar esse capítulo, na seção 2.4 generalizaremos a teoria vista até a seção 2.3 introduzindo as condições de Carathéodory. A solução do problema de valor inicial se torna absolutamente contínua. Mostramos novas condições para existência e unicidade de soluções para esse novo problema.

A dinâmica Hamiltoniana será abordada no capítulo 3.1. Esse capítulo apresenta o conceito de sistemas dinâmicos e cálculo variacional. Também investiga relações entre as soluções do problema variacional, equações de Euler- Lagrange e equações de Hamilton na seção 3.1.1.

No capítulo 3.2 abordaremos a teoria básica de variedades diferenciáveis. A seção 3.2.1 esta dedicada à definição de variedades diferenciáveis e sua topologia. A seção 3.2.2 concentra-se nos estudos do espaço tangente de um ponto na variedade e diferenciabilidade de uma função entre variedades. Na seção 3.2.3 estudaremos o fibrado tangente, cotangente e o fibrado de tensores, que são importantes no enunciado do PMP em variedades diferenciáveis.

No capítulo 3.3 abordaremos o teorema principal dessa dissertação. Para isso faremos o estudo de k-formas e derivada exterior na seção 3.3.1 para definir a 1-forma tautológica e a forma simplética canônica, que serão utilizadas para caracterizar um campo Hamiltoniano na última seção. Por fim, na seção 3.3.3 reformularemos a dinâmica Hamiltoniana vista no capítulo 3.1 para variedades diferenciáveis e enunciaremos o Princípio do Máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo detalha os assuntos do capítulo 0 de [10] que serão necessários para esse trabalho. Serão estudados temas como análise funcional, espaços de Banach, teoremas de ponto fixo e teoria da medida. Esses conceitos fornecem o embasamento teórico essencial para o desenvolvimento e compreensão dos resultados apresentados nos capítulos subsequentes. O leitor pode consultar [10], [13], [5] e [18].

1.1 Análise funcional

Nessa seção, apresentaremos os principais resultados e definições de Análise Funcional referente a transformações lineares e funções. Um foco especial será dado à teoria dos espaços de Banach, que desempenham um papel fundamental no restante desta dissertação.

Definição 1.1. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todo $m, n > N$.*

Definição 1.2. *O espaço vetorial X normado é dito* ***espaço de Banach*** *se toda sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X converge para algum elemento $x \in X$.*

Exemplo 1.3. *Seja $\mathbb{R}^n$ com as normas*

i) $\|x\|_M = \|(x_1, ..., x_n)\|_M = \max_{i=1,...,n} |x_i|$

ii) $\|x\|_S = \|(x_1, ..., x_n)\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

iii) $\|x\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$,

*que são respectivamente a **norma do máximo**, a **norma da soma** e a **norma euclidiana**. Todas essas normas são equivalentes, como será mostrado no próximo exemplo. Sendo assim, se uma sequência converge no espaço $\mathbb{R}^n$ com uma dessas normas, então ela também converge nas demais. Logo o espaço $\mathbb{R}^n$ com qualquer uma dessas normas é um espaço de Banach.*

Lema 1.4. *Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço vetorial normado X (de qualquer dimensão). Então existe um número $c > 0$ tal que para toda escolha de escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geqslant c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \tag{1.1}$$

Demonstração. Seja $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Se $s = 0$, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, e assim (1.1) vale para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Se $s > 0$, então a desigualdade (1.1) é equivalente à desigualdade

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geqslant c, \tag{1.2}$$

com $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$. Portanto é suficiente provar a existência de $c > 0$ tal que (1.2) é satisfeita para todos os $\beta_1, \dots, \beta_n$ com $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$.

Suponhamos por absurdo que a desigualdade (1.2) é falsa. Então para qualquer $m > 0$, existem $\beta_{1,m}, \dots, \beta_{n,m} \in \mathbb{R}$, com $\sum_{i=1}^{n} |\beta_{i,m}| = 1$, tais que

$$\|\beta_{1,m} x_1 + \cdots + \beta_{n,m} x_n\| < \frac{1}{m}.$$

Sendo assim a sequência $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em X dada por

$$y_m = \beta_{1,m} x_1 + \cdots + \beta_{n,m} x_n,$$

satisfaz que $\sum_{i=1}^{n} |\beta_{i,m}| = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\|y_m\| \to 0$ quando $m \to \infty$.

Como $\sum_{i=1}^{n} |\beta_{i,m}| = 1$, então $|\beta_{i,m}| \leqslant 1$ para quaisquer $i = 1, \dots, n$ e $m \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada i fixado, a sequência $(\beta_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada. Consequentemente, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, $(\beta_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(\beta_{i,m_{i_1}})_{i_1\in\mathbb{N}}$ convergente. Observe que a sequência $(y_{m_{i_1}})_{i_1\in\mathbb{N}}$ dada por

$$y_{m_{i_1}} = \beta_{1,m_{i_1}} x_1 + \cdots + \beta_{n,m_{i_1}} x_n$$

é uma subsequência de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Pelo mesmo argumento $(y_{m_{i_1}})_{i_1\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(y_{m_{i_2}})_{i_2\in\mathbb{N}}$ tal que $(\beta_{2,m_{i_2}})_{i_2\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência convergente de $(\beta_{2,m_{i_1}})_{i_1\in\mathbb{N}}$. Seguindo dessa forma, depois de n passos, obtemos uma subsequência $(y_{m_{i_n}})_{i_n\in\mathbb{N}}$ de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ cujos termos são da forma

$$y_{m_{i_n}} = \beta_{1,m_{i_n}} x_1 + \cdots + \beta_{n,m_{i_n}} x_n.$$

Tome β_i sendo o limite de $(\beta_{i,m_{i_n}})_{i_n\in\mathbb{N}}$. Portanto $y_{m_{i_n}} \to y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$, onde $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$, e com isso nem todo β_i pode ser zero. Como $\{x_1, \dots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente, devemos ter que $y \neq 0$. Por outro lado, como $y_{m_{i_n}} \to y$, a continuidade da norma implica que $\|y_{m_{i_n}}\| \to \|y\|$. Mas por hipótese $\|y_m\| \to 0$, e como $(y_{m_{i_n}})_{i_n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, devemos ter $\|y_{m_{i_n}}\| \to 0$. Consequentemente $\|y\| = 0$, o que é um absurdo, provando o lema. ■

Proposição 1.5. *Se X é um espaço vetorial n-dimensional e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ são normas em X, então existem $m, M > 0$ tais que $m\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|_2$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de X. Então todo $x \in X$ tem uma única representação

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

com $x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n$. Como o conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ é linearmente independente, pelo lema 1.4 existe $c > 0$ tal que

$$c\left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right) \leqslant \|x\|_1.$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular, temos

$$\|x\|_2 \leqslant \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\|_2 \leqslant k \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

onde $k = \max\{\|e_j\|, j = 1, \ldots, n\}$. Portanto, para $m = \frac{c}{k} > 0$, temos

$$m\|x\|_2 \leqslant \frac{c}{k} k \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right) \leqslant c \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right) \leqslant \|x\|_1.$$

Seguindo o mesmo procedimento com as normas trocadas, obtemos que existe $\bar{m} > 0$ tal que

$$\bar{m}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2.$$

Tomando $M = \frac{1}{\bar{m}}$ temos

$$m\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|_2.$$

■

Exemplo 1.6. *Seja D um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Denotemos por $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas em D com valores em $\mathbb{R}^n$ munido com a norma do máximo $\|f\|_\infty = \max_{x \in D} \|f(x)\|$. Com isso, a topologia de $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ é a topologia da convergência uniforme.*

Lema 1.7. *Se uma sequência $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ converge uniformemente a $\phi : D \to \mathbb{R}^n$, então $\phi \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Tome a sequência uniformemente convergente $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. Então para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi_i(x) - \phi(x)\| < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.3}$$

para todo $i \geqslant N$ e todo $x \in D$. Como ϕ_N é contínua para todo $x \in D$ e D é compacto, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.4}$$

sempre que $\|x - y\| < \delta_x$. Então, por (1.3) e (1.4) temos que, para todo $\epsilon > 0$ e cada $x \in D$

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|\phi(x) - \phi_N(x)\| + \|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| + \|\phi_N(y) - \phi(y)\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

sempre que $\|x - y\| < \delta_x$. Sendo assim $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $\phi \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. ■

Proposição 1.8. *Seja D um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Então $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demonstração. De fato, tome uma sequência de Cauchy $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. Veja que, se $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi_n(x) - \phi_m(x)\| = \|(\phi_n - \phi_m)(x)\| \leqslant \max_{x\in D} \|(\phi_n - \phi_m)(x)\| = \|\phi_n - \phi_m\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.5}$$

sempre que $n, m > N$.

Sendo assim a sequência $(\phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach, $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ define uma função $\phi : D \to \mathbb{R}^n$. Tomando $m \to \infty$ na equação (1.5) temos

$$\|\phi_n(x) - \phi(x)\| < \epsilon$$

sempre que $n > N$ e para todo $x \in D$. Sendo assim, temos que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente. Dessa forma, pelo lema 1.7, temos que $\phi \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. ■

Definição 1.9. *Uma sequência de funções $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência uniformemente limitada** em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ se existe $M > 0$ tal que $\|\phi_j\| < M$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.10. *Um subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ é dito **uniformemente limitado** em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ se existe $M > 0$ tal que $\|\phi\| < M$ para todo $\phi \in \mathcal{A}$.*

Definição 1.11. *Uma sequência de funções $(\phi_j)_{j\in\mathbb{R}}$ é dita **equicontínua** em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\phi_j(x) - \phi_j(y)\| < \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $x, y \in D$ satisfazendo $\|x - y\| < \delta$.*

Definição 1.12. *Uma função $\phi \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ é uma **função Lipschitziana** se existe uma constante $k > 0$ tal que $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leqslant k\|x - y\|$ para todo $x, y \in D$.*

As sequências de funções equicontínuas mais utilizadas em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ são as sequências $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções Lipschitzianas com constante de Lipschitz independente de n.

Lema 1.13 (Arzelà-Ascoli)**.** *Seja D um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Então uma sequência uniformemente limitada e equicontínua de funções em $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ possui uma subsequência que converge uniformemente em D.*

Demonstração. Seja D um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Enumeremos o conjunto dos racionais m-dimensionais como

$$\mathbb{Q}^m = \{\widehat{q}_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Para cada $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, considere $\widehat{x}_{i,j} \in B_{\frac{1}{j}}(\widehat{q}_i) \cap D$ se $B_{\frac{1}{j}}(\widehat{q}_i) \cap D \neq \emptyset$. Observe que o conjunto

$$W = \{\widehat{x}_{i,j} :\ (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ e\ \widehat{x}_{i,j} \in B_{\frac{1}{j}}(\widehat{q}_i) \cap D \neq \emptyset\}$$

é denso em D. De fato, para cada $x_0 \in D$ e $r \in \mathbb{R}$ tome $j, i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{j} < \frac{r}{2}$ e $\|\widehat{q}_i - x_0\| < \frac{1}{j}$. Sendo assim $x_0 \in B_{\frac{1}{j}}(\widehat{q}_i) \cap D$, $B_{\frac{1}{j}}(\widehat{q}_i) \cap D \neq \emptyset$ e $\widehat{x}_{i,j} \in W$. Veja que

$$\|\widehat{x}_{i,j} - x_0\| = \|\widehat{x}_{i,j} - \widehat{q}_i\| + \|\widehat{q}_i - x_0\| < \frac{1}{j} + \frac{1}{j} < r.$$

Portanto W é denso em D.

Re-enumeremos agora o conjunto $\{\widehat{x}_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ por

$$W = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Como a sequência $(\phi_j(x_1))_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em um espaço euclidiano, pelo teorema de Bolzano Weierstrass sabemos que existe uma subsequência $(\phi_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $(\phi_{1,j}(x_1))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}^n$. De modo análogo obtemos uma subsequência $(\phi_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\phi_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $(\phi_{2,j}(x_2))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}^n$. Prosseguindo esse processo obtemos um conjunto enumerável de subsequências da sequência original, onde $(\phi_{l,j}(x_k))_{j\in\mathbb{N}}$ converge se $k \leqslant l$. Portanto $(\phi_{j,j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(\phi_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para todo $x \in W$.

Por outro lado, segue pela equicontinuidade de $(\phi_{j,j})_{j\in\mathbb{N}}$ que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\phi_{j,j}(x) - \phi_{j,j}(y)\| < \frac{\epsilon}{6} \tag{1.6}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e sempre que $\|x - y\| < \delta$. Agora tome uma cobertura aberta $\{B_\delta(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ de D. Como D é compacto, a cobertura $\{B_\delta(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ admite uma subcobertura finita, que denotaremos sem perda de generalidade por $\{B_\delta(x_i)\}_{i=1,\ldots,k}$. Dessa forma, para cada $x \in D$ temos que $x \in B_\delta(x_i)$ para algum $i = 1, \ldots, k$, e assim

$$\|x - x_i\| < \delta. \tag{1.7}$$

Note também que $(\phi_{j,j}(x_i))_{j\in\mathbb{N}}$ converge para $i = 1, \ldots, k$. Assim existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi_{j,j}(x_i) - \phi_{s,s}(x_i)\| < \frac{\epsilon}{6}$$

sempre que $j, s \geqslant n_i$. Tomando então $N = \max_{i=1,\ldots,k}\{n_i\}$, temos que

$$\|\phi_{j,j}(x_i) - \phi_{s,s}(x_i)\| < \frac{\epsilon}{6} \tag{1.8}$$

sempre que $j, s \geqslant N$ para todo x_i com $i = 1, \ldots, k$.

Assim, por (1.6), (1.7) e (1.8), temos que para todo $x \in D$,

$$\|\phi_{j,j}(x) - \phi_{s,s}(x)\| \leqslant \|\phi_{j,j}(x) - \phi_{j,j}(x_i)\| + \|\phi_{j,j}(x_i) - \phi_{s,s}(x_i)\| + \|\phi_{s,s}(x_i) - \phi_{s,s}(x)\|$$

$$< \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} < \epsilon,$$

sempre que $j, s \geqslant N$ para todo x_i com $i = 1, \ldots, k$.

Dessa forma, temos que $\|\phi_{j,j}(x) - \phi_{s,s}(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in D$ e $i, j > N$. Assim, se $\phi(x) = \lim_{i\to\infty} \phi_{i,i}(x)$, temos que $\|\phi_{i,i}(x) - \phi(x)\| < \epsilon$ para $x \in D$ e $i > N$. Portanto $(\phi_{i,i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a ϕ em D e $\phi \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ pelo lema 1.7. ■

Definição 1.14. *Sejam X e Y espaços topológicos. Um **homeomorfismo** entre X e Y é uma bijeção contínua $f : X \to Y$, cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua. Diz-se então que X e Y são **homeomorfos**.*

Definição 1.15. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Uma transformação $T : X \to Y$ é dita **limitada** se existe uma constante $k > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leqslant k\|x\|_X$ para todo $x \in X$.*

Lema 1.16. *Suponha que X e Y são espaços vetoriais normados. Uma transformação linear $T : X \to Y$ é limitada se, e somente se, é contínua.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que $T : X \to Y$ é limitada. Então T é Lipschitz e portanto contínua.

($\Leftarrow$) Suponha que $T : X \to Y$ é contínua. Pela continuidade na origem, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x)\| < 1$$

sempre que $\|x\| < \delta$. Agora, para cada $y \in X$ tal que $\|y\| \neq 0$, consideremos

$$x = \frac{\delta}{2\|y\|}y.$$

Note que

$$\|x\| = \frac{\|\delta y\|}{2\|y\|} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Logo,

$$1 > \|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right\| = \frac{\delta}{2\|y\|}\|T(y)\|.$$

Portanto

$$\|T(y)\| \leqslant \frac{2}{\delta}\|y\|,$$

mostrando que T é um operador linear limitado. ■

Sejam X e Y espaços vetoriais normados. A norma $\|\cdot\|$ de uma transformação linear contínua $T : X \to Y$ é definida por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X = 1}\{\|T(x)\|_Y\}.$$

É fácil ver que $\|T\|$ é uma norma. Observe também que se $x \neq 0$, então

$$\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leqslant \sup_{x\in X}\left\{\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_Y\right\} = \|T\|.$$

Com isso $\|T(x)\|_Y \leqslant \|T\|\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Exemplo 1.17. *Seja X um espaço vetorial normado, Y um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço vetorial dos operadores lineares limitados $T : X \to Y$. Então $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach com a norma definida acima. De fato, considere $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X,Y)$. Então, para todo $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leqslant \|T_m - T_n\|\|x\| < \epsilon$$

sempre que $m, n > N$. Com isso $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em Y para todo $x \in X$ e podemos considerar $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Para demonstrar a linearidade de T, veja que para todo $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$T(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n(x) + T_n(y))$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \alpha T(x) + T(y),$$

o que mostra que T é linear.

Para mostrar que T é contínua (e portanto $T \in \mathcal{L}(X,Y)$), note que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e portanto uma sequência limitada. Logo

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T\|\|x\| \leqslant C\|x\|$$

para algum $C > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leqslant C\|x\|,$$

o que implica que T é uma transformação linear limitada e portanto contínua. Dessa forma $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Por fim, seja $\epsilon > 0$ e considere $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m - T_n\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $m, n > N$. Se x é tal que $\|x\| \leqslant 1$, então existe $n_x \in \mathbb{N}$ com $n_x > N$ tal que $\|T_{n_x}(x) - T(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Com isso, se $n > N$, então

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \|T_n(x) - T_{n_x}(x)\| + \|T_{n_x}(x) - T(x)\| < \|T_n - T_{n_x}\|\|x\| + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

sempre que $\|x\| \leqslant 1$. Portanto $\|T_n - T\| < \epsilon$ se $n > N$ e T_n converge a T em $\mathcal{L}(X,Y)$, o que prova que $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach.

Exemplo 1.18. *Defina $T : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ por*

$$T(\phi) := \int_0^1 \phi(s)ds.$$

A função T é linear e contínua com $\|T\| = 1$.

De fato, tome $\phi, \psi \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^n)$ e $a \in \mathbb{R}$. Então

$$T(a\phi + \psi) = \int_0^1 (a\phi + \psi)(s)ds = \int_0^1 a\phi(s) + \psi(s)ds$$

$$= a\int_0^1 \phi(s)ds + \int_0^1 \psi(s)ds = aT(\phi) + T(\psi),$$

e T é uma transformação linear.

Agora, veja também que

$$\|T(\phi)\| = \left\|\int_0^1 \phi(s)ds\right\| \leqslant \int_0^1 \|\phi(s)\|ds \leqslant \int_0^1 \max_{s\in[0,1]} \|\phi(s)\|ds = \|\phi\|.$$

Com isso temos que T é Lipschitziana, sendo assim contínua.

Por fim, veja que

$$\|T\| = \sup_{\|\phi\|=1} \{\|T(\phi)\|\} = \sup_{\|\phi\|=1} \left\{\left\|\int_0^1 \phi(s)ds\right\|\right\} \leqslant \sup_{\|\phi\|=1} \left\{\int_0^1 \|\phi(s)\|ds\right\} \leqslant 1$$

e a igualdade vale para $\phi \equiv 1$. Portanto $\|T\| = 1$.

1.2 Teoremas de ponto fixo

As definições de ponto fixo e de diferenciabilidade que serão apresentadas nessa seção serão fundamentais para o capítulo 2, uma vez que garantiremos a existência de uma solução para uma equação diferencial com certas condições através da existência do ponto fixo de um funcional que definiremos na seção 2.1. Dessa forma, nessa seção nos ocuparemos em apresentar condições suficientes para garantir a existência e unicidade de pontos fixos de uma função em um espaço vetorial.

Definição 1.19. *Seja X um conjunto não vazio. Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Definição 1.20. *Sejam X e Y espaços de Banach e $\mathcal{F} \subset X$. A função $f : \mathcal{F} \to Y$ é chamada de **contração** em $\mathcal{F}$ se existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \lambda\|x - y\|$$

*para todo $x, y \in \mathcal{F}$. A constante λ é chamada de **constante de contração** de f em $\mathcal{F}$.*

Teorema 1.21 (Princípio da Contração de Banach-Cacciopoli)**.** *Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto fechado de um espaço de Banach X e $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ uma contração. Então f admite um único ponto fixo $\bar{x}$ em $\mathcal{F}$. Ainda, para $x_0 \in \mathcal{F}$ tomado arbitrariamente, se tomarmos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, teremos que $\bar{x}$ é o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e*

$$\|\bar{x} - x_n\| \leqslant \frac{\lambda^n \|x_1 - x_0\|}{(1-\lambda)},$$

onde $\lambda \in [0, 1)$ é a constante de contração de f em $\mathcal{F}$.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada na pagina 5 de [10]. ■

Proposição 1.22. *Sejam X um espaço de Banach, $T : X \to X$ uma transformação linear contínua com $\|T\| < 1$ e I a função identidade. Então $I - T$ tem inversa limitada. Em outras palavras, a equação*

$$(I - T)(x) = y \tag{1.9}$$

tem solução única $x \in X$ que depende continuamente de $y \in X$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina a função $S_n(x) = x + T(x) + \cdots + T^n(x)$. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e sem perda de generalidade suponha que $n < m$. Então

$$\|S_n(x) - S_m(x)\| = \|x + T(x) + \cdots + T^n(x) - x - T(x) - \cdots - T^n(x) - T^{n+1}(x) - \cdots - T^m(x)\|$$

$$= \|T^{n+1}(x) + \cdots + T^m(x)\| \leqslant (\|T^{n+1}\| + \cdots + \|T^m\|)\|x\|.$$

Logo, se $\|x\| \leqslant 1$, temos

$$\|S_n(x) - S_m(x)\| \leqslant \|T^{n+1}\| + \cdots + \|T^m\| \leqslant \|T\|^{n+1} + \cdots + \|T\|^m$$

$$= \|T\|^{n+1}(1 + \|T\| + \cdots + \|T\|^{m-n-2} + \|T\|^{m-n-1}) = \|T\|^{n+1}\frac{(1 - \|T\|^{m-n})}{1 - \|T\|} \leqslant \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Pelo fato de $\|T\| < 1$, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\|T\|^{N+1}}{1-\|T\|} < \epsilon$. Sendo assim,

$$\|S_n(x) - S_m(x)\| \leqslant \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|} < \frac{\|T\|^{N+1}}{1 - \|T\|} < \epsilon \tag{1.10}$$

sempre que $m > n > N$ e $\|x\| \leqslant 1$.

Como T^n é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$, então S_n também é, sendo assim $S_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy por (1.10) e $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço de Banach, existe uma função $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. Ainda, veja que

$$(I - T)S_n(x) = S_n(I - T)(x)$$

$$= I(x) - T(x) + T(x) - T^2(x) + T^2(x) + \cdots - T^{n-1}(x) + T^n(x) - T^{n+1}(x)$$

$$= (I - T^{n+1})(x).$$

Dessa forma, como $\|T\| < 1$, temos que

$$\lim_{n \to \infty} \|T^n\| \leqslant \lim_{n \to \infty} \|T\|^n = 0.$$

Portanto

$$(I - T)S = S(I - T) = \lim_{n \to \infty} (I - T)S_n = \lim_{n \to \infty} S_n(I - T) = \lim_{n \to \infty} (I - T^{n+1}) = I,$$

e concluímos que $S = (I - T)^{-1}$. ■

Definição 1.23. *Sejam X e Y espaços de Banach e D um subconjunto aberto de X. Uma função $f : D \to Y$ é dita **Fréchet diferenciável** no ponto $x \in D$ se existe um operador linear limitado $A : X \to Y$ tal que*

$$\|f(x + h) - f(x) - A(x)h\| \leqslant \rho(\|h\|, x),$$

para todo $h \in X$ tal que $x + h \in D$, onde $\rho(\|h\|, x)$ satisfaz $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\rho(\|h\|, x)}{\|h\|} = 0$. O operador linear $A(x)$ é chamado de derivada de f em x.

Proposição 1.24. *Sejam X e Y espaços de Banach, A um aberto de X, $f : A \to Y$ e suponha que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \omega(x_0)h \tag{1.11}$$

exista para todo $x_0 \in A$ e $h \in X$. Suponha que $\omega(x_0)$ é uma função linear contínua para todo $x_0 \in A$ e ω uma função contínua de A em $\mathcal{L}(X, Y)$. Então f é Fréchet diferenciável com derivada $\omega(x_0)$ em $x_0 \in A$.

Demonstração. Vide proposição 3.2.15 de [7]. ■

Exemplo 1.25. *Uma transformação linear contínua $\omega(x_0)$ que satisfaz a equação (1.11) pode existir para todo $h \in X$ e não ser a derivada Fréchet de f em $x_0 \in A$.*

De fato, considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \ se \ y = x^2 \ e \ (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \ caso \ contr\acute{a}rio. \end{cases}$$

Note que se r é uma reta que passa pela origem, então $f|_r$ sempre se anula em uma vizinhança de $(0,0)$. Logo se $w_r(0,0)$ é a derivada de f em x_0 na direção de r, então $\omega_r(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a transformação linear nula. Entretanto f não é contínua em $(0,0)$. Logo f não é (Fréchet) diferenciável em $(0,0)$.

Exemplo 1.26. *Seja $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, com as operações de soma e multiplicação por escalar canônicas. Considere*

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} \|x(t)\| + \sup_{t\in[0,1]} \|\dot{x}(t)\|$$

onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Então $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.

De fato, tome uma sequência de Cauchy $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^n)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi_n - \phi_m\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \|\phi_n(t) - \phi_m(t)\| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \|\phi_n(t) - \phi_m(t)\| + \sup_{t\in[0,1]} \|\dot{\phi}_n(t) - \dot{\phi}_m(t)\|$$

$$= \|\phi_n - \phi_m\|_\infty < \epsilon$$

sempre que $m, n > N$. Sendo assim, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Da mesma forma, como $\dot{\phi}_n$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $(\dot{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ com respeito a $\|\cdot\|_\infty$. Como vimos na proposição 1.8, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Então existem $\phi, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \dot{\phi}_n = g. \tag{1.12}$$

Então $\int_0^t \dot{\phi}_n(\tau)d\tau$ converge uniformemente a $\int_0^t g(\tau)d\tau$. Mas $\phi_n(t) = \int_0^t \dot{\phi}_n(\tau)d\tau$. Com isso $\phi_n(t)$ converge uniformemente a $\phi(t) = \int_0^t \dot{\phi}(\tau)d\tau$. Portanto $g(t) = \dot{\phi}(t)$, ou seja, $\dot{\phi}_n$ converge *uniformemente a $\dot{\phi}$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[0,1]} \|\phi_n(t) - \phi(t)\| + \sup_{t\in[0,1]} \|\dot{\phi}_n(t) - \dot{\phi}(t)\| \right) = 0.$$

Portanto $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^m)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$..

Definição 1.27. *Sejam X e Y espaços de Banach, $\mathcal{F} \subset X$, $\mathcal{G} \subset Y$ e $\{T_y, y \in \mathcal{G}\}$ uma família de operadores tomados em $\mathcal{F}$ com valores em X. O operador T_y é chamado de* ***contração uniforme*** *em $\mathcal{F}$ se $T_y : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ e existe λ satisfazendo $0 \leqslant \lambda < 1$ tal que*

$$\|T_y x - T_y \bar{x}\| \leqslant \lambda \|x - \boldsymbol{\alpha} x\|$$

para todo $y \in \mathcal{G}$ e $x, \bar{x} \in \mathcal{F}$.

Lema 1.28. *Sejam $\mathcal{F}$ um subconjunto fechado e limitado de um espaço de Banach X, $\mathcal{G}$ um subconjunto de um espaço de Banach Y, $f_y : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ uma contração uniforme em $\mathcal{F}$ para cada $y \in \mathcal{G}$ e $y \longmapsto f_y(x)$ contínua para cada $x \in \mathcal{F}$ fixo. Então a função dada pelo único ponto fixo $g(y)$ de f_y é contínua em y.*

Demonstração. Como $f_y : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ é contração uniforme, existe $\lambda \in [0,1)$ tal que $\|f_y(x) - f_y(\tilde{x})\| \leqslant \lambda \|x - \tilde{x}\|$ para todo $y \in \mathcal{G}$ e $x, \tilde{x} \in \mathcal{F}$. Seja $g(y)$ a função que nos dá a relação de y com o único ponto fixo da função f_y. Por $y \longmapsto f_y(x)$ ser contínua para todo $x \in \mathcal{F}$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$\|f_{y+h}(g(y)) - f_y(g(y))\| < (1-\lambda)\epsilon \tag{1.13}$$

sempre que $\|h\| < \tilde{\delta}$. Como $g(y)$ é ponto fixo de f_y para cada $y \in \mathcal{G}$, obtemos

$$\|g(y+h) - g(y)\| = \|f_{y+h}(g(y+h)) - f_y(g(y))\|$$

$$\leqslant \|f_{y+h}(g(y+h)) - f_{y+h}(g(y))\| + \|f_{y+h}(g(y)) - f_y(g(y))\|$$

$$\leqslant \lambda \|g(y+h) - g(y)\| + \|f_{y+h}(g(y)) - f_y(g(y))\|.$$

Isso implica que

$$\|g(y+h) - g(y)\| \leqslant (1-\lambda)^{-1} \|f_{y+h}(g(y)) - f_y(g(y))\| < (1-\lambda)^{-1}(1-\lambda)\epsilon = \epsilon.$$

para todo h satisfazendo $\|h\| < \tilde{\delta}$. Portanto $y \longmapsto g(y)$ é contínua. ■

Corolário 1.29. *Sejam X e Y espaços de Banach, $\mathcal{G} \subset Y$, $A_y : X \to X$ operador linear contínuo para cada $y \in \mathcal{G}$, satisfazendo $\|A_y\| \leqslant \delta < 1$ para todo $y \in \mathcal{G}$ e $y \longmapsto A_y x$ é contínua para cada $x \in X$. Então o operador $I - A_y$ tem inversa limitada satisfazendo $\|(I - A_y)^{-1}\| \leqslant (1-\delta)^{-1}$ e $(y,z) \longmapsto (I - A_y)^{-1}(z)$ é contínua.*

Demonstração. Temos que $(Id - A_y)$ é um operador com inversa limitada para cada $y \in \mathcal{G}$ devido a proposição 1.22.

Note que $z = (Id - A_y)(x)$ se, e somente se, $x = (Id - A_y)^{-1}(z)$ e

$$\|z\| = \|(Id - A_y)(x)\| = \|x - A_y(x)\| \geqslant \|x\| - \|A_y(x)\| \geqslant \|x\| - \delta\|x\| = (1-\delta)\|x\|,$$

ou seja,

$$\|(Id - A_y)^{-1}(z)\| = \|x\| \leqslant (1-\delta)^{-1}\|z\|,$$

o que implica $\|(Id - A_y)^{-1}\| \leqslant (1-\delta)^{-1}$.

Provemos que $(y,z) \longmapsto (Id - A_y)^{-1}(z)$ é contínua. Denote $T_{y,z}$ como sendo

$$\begin{aligned} T_{y,z} : X &\to X \\ x &\longmapsto A_y(x) + z \end{aligned}$$

e $g(y,z)$ sendo o ponto fixo de $T_{y,z}$ em X. Então

$$g(y+h, z+k) = A_{y+h} g(y+h, z+k) + (z+k) \quad e \quad g(y,z) = A_y g(y,z) + z$$

o que implicam

$$g(y+h, z+k) = (Id - A_{y+h})^{-1}(z+k) \quad e \quad g(y,z) = (Id - A_y)^{-1}(z).$$

Considere $\epsilon > 0$. Então

$$\begin{aligned} g(y+h, z+k) - g(y,z) &= g(y+h, z+k) - g(y+h, z) + g(y+h, z) - g(y,z) \\ &= (Id - A_{y+h})^{-1}(k) + g(y+h, z) - g(y,z). \end{aligned}$$

Se $\|k\| < \frac{\epsilon(1-\delta)}{2}$ e $\tilde{\delta}$ é tal que

$$\|g(y+h,z) - g(y,z)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $\|h\| < \tilde{\delta}$, então

$$\|g(y+h,z+k) - g(y,z)\| < \epsilon$$

sempre que $\|k\|, \|h\| < \min\left\{\frac{\epsilon(1-\delta)}{2}, \tilde{\delta}\right\}$. Logo $(y,z) \longmapsto g(y,z) = (Id - A_y)^{-1}(z)$ é contínua. ■

Teorema 1.30. *Suponha que estejamos nas condições do lema* 1.28*. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são os fechos dos conjuntos abertos $\mathcal{F}^o$ e $\mathcal{G}^o$ respectivamente e $f_y(x)$ tem derivadas contínuas $A(x,y), B(x,y)$ em relação a y e x respectivamente, então $g(y)$ tem derivada contínua com respeito a $y \in \mathcal{G}$.*

Demonstração. Faremos essa demonstração em 3 partes:

Parte 1: Suponha que $f_y(x)$ tem derivadas contínuas $A(x,y)$ e $B(x,y)$ com respeito a $y \in \mathcal{G}^0$ e $x \in \mathcal{F}^0$. Se g for Fréchet diferenciável, então $dg_y = [z - B(g(y),y)]^{-1}(A(g(y),y))$ e $(y,h) \longmapsto dg_y(h)$ é contínua. De fato, consideremos a equação

$$g(y) = f_y(g(y)). \tag{1.14}$$

Vamos supor que g é diferenciável e determinar a derivada dg_y de g em y.

Usando a regra da cadeia em (1.14) temos que

$$dg_y(h) = A(g(y),y)(h) + B(g(y),y)dg_y(h),$$

onde h é um elemento arbitrário de Y (Veja [6]). Com isso, se g for diferenciável, $dg_y(h)$ deverá ser a solução z da equação

$$z = A(g(y),y)h + B(g(y),y)z. \tag{1.15}$$

Como f_y é uma contração uniforme,

$$\|B(x,y)\| = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f_y(x+h) - f_y(x)\|}{\|h\|} \leqslant \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\lambda\|h\|}{\|h\|} = \lambda < 1$$

para todo $x \in \mathcal{F}^0$ e $y \in \mathcal{G}^0$. Dessa forma, o corolário 1.29 implica que $(I - B(g(y),y))^{-1}$ é um operador linear limitado para cada $y \in \mathcal{G}^o$ e podemos escrever

$$z(y,h) = [I - B(g(y),y)]^{-1}(A(g(y),y))(h).$$

onde $(y,h) \longmapsto z(y,h)$ é contínua. Note que $[I-B(g(y),y)]^{-1}(A(g(y)),y))$ é linear. Logo $dg_y = [I - B(g(y),y)]^{-1}(A(g(y),y)$, onde $(y,h) \longmapsto dg_y(h)$ é contínua.

Parte 2: Tome $\omega = g(y+h) - g(y)$, $B(g(y),y) = B(y)$ e $A(g(y),y) = A(y)$. Então ω satisfaz a equação

$$\omega - B(y)\omega - A(y)h + \psi(\omega,h,y) = 0, \tag{1.16}$$

onde para cada $\epsilon > 0$ e $y \in \mathcal{G}^0$, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $\|\psi(\omega,h,y)\| < \epsilon(\|\omega\| + \|h\|)$ para cada $\|h\| < \tilde{\delta}$.

De fato, $(x,y) \longmapsto f_y(x)$ tem derivadas $A(x,y)$ e $B(x,y)$ em relação a y e x respectivamente. Então, pela diferenciabilidade de $(x,y) \longmapsto f_y(x)$,

$$g(y+h) - g(y) = f_{y+h}g(y+h) - f_y g(y) = B(g(y),y)(g(y+h) - g(y)) + A(g(y),y)h$$

$$+\epsilon(\|g(y+h) - g(y)\| + \|h\|),$$

se

$$\|g(y+h) - g(y)\|, \|h\| < \widehat{\delta} \tag{1.17}$$

para $\widehat{\delta} > 0$ suficientemente pequeno. Mas existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que se $\|h\| < \tilde{\delta}$, então (1.17) é satisfeito devido a continuidade de g, o que conclui a parte 4.

Parte 3: $[I - B(g(y)),y)]^{-1}(A(g(y),y))$ é a derivada de $g(y)$. De (1.16) podemos escrever ω como

$$\omega = [I - B(y)]^{-1}\left(A(y)h - \psi(\omega,h,y)\right).$$

Pelo corolário 1.29, ω também satisfaz a equação

$$\omega - [I - B(y)]^{-1}A(y)h + F(\omega,h,y) = 0 \tag{1.18}$$

onde $\|F(\omega,h,y)\| < \epsilon(1-\lambda)^{-1}(\|\omega\|+\|h\|)$ para $\|h\|<\delta$ e $y\in\mathcal{G}^0$. De fato,

$$\|\omega-[I-B(y)]^{-1}A(y)h\| \leqslant \|[I-B(y)]^{-1}\|\|(\psi(\omega,h,y)\| \leqslant \epsilon(1-\lambda)^{-1}(\|\omega\|+\|h\|),$$

sempre que $\|h\|<\delta$ devido à parte 4 e ao corolário 1.29. Sendo assim, g é diferenciável em $\mathcal{G}^0$ e

$$dg_y(h) = [I-B(y)]^{-1}A(y)h.$$

Finalmente $(y,h)\longmapsto dg_y(h)$ é contínua devido ao corolário 1.29. ■

1.2.1 Teorema do ponto fixo de Brouwer

O teorema do ponto fixo de Brouwer é um resultado fundamental da matemática, estabelecido pelo matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer. O teorema de Brouwer tem utilidades importantes em várias áreas da matemática e além. Por exemplo, ele é amplamente utilizado na teoria dos jogos, na economia e em problemas de otimização (veja [3], [9], [13] e [15]). Nesta dissertação nós o utilizaremos para a demonstração do teorema do ponto fixo de Schauder.

Esse teorema afirma que toda função contínua de uma bola unitária fechada no espaço euclidiano em si mesma possui pelo menos um ponto fixo. Claramente uma função $f:[0,1]\to[0,1]$ contínua admite pelo menos um ponto fixo. Nosso objetivo agora é generalizar esse teorema para subespaços topológicos de $\mathbb{R}^n$ homeomorfos à bola fechada unitária.

Proposição 1.31. *Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e*

$$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Se $\|f(x)\|=1$ para todo $x\in\Omega$, então seu Jacobiano será identicamente nulo.

Demonstração. Represente $f=(f_1,\ldots,f_n)$ em termos de suas funções coordenadas. Então

$$(f_1(x))^2+(f_2(x))^2+\cdots+(f_n(x))^2=1. \tag{1.19}$$

Calculando as derivadas de (1.19) em relação a cada uma das variáveis x_i, para $i=$

$1, \ldots, n$, temos o sistema linear

$$\begin{cases} 2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) f_1(x) + \cdots + 2\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) f_n(x) = 0 \\ \vdots \\ 2\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) f_1(x) + \cdots + 2\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) f_n(x) = 0. \end{cases}$$

Dividindo as equações por 2 e representando-as sob a forma de matriz teremos

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim $\det(A) = 0$, pois se $\det(A) \neq 0$ teríamos que A admite inversa, resultando em

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que é um absurdo, pois se $\|f(x)\| = 1$ então $f(x)$ é um vetor não nulo. Logo $\det(A) = 0$. Como $\det(A^T) = \det(A)$ e A^T é a matriz Jacobiana de F, então o Jacobiano de F é igual a zero. ■

Utilizaremos o termo suave como sinônimo de infinitamente diferenciável.

Lema 1.32. *Seja S uma bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$, com $n > 1$. Então qualquer função $\phi : S \to S$ suave possui ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Considere $\phi : S \to S$ uma função suave e suponha por absurdo que $\phi(x) \neq x$ para todo $x \in S$. Seja $a = a(x) \in \mathbb{R}$ a maior raiz da equação quadrática

$$\|x + a(x)(x - \phi(x))\|^2 = 1 \tag{1.20}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& \langle x+a(x)(x-\phi(x)), x+a(x)(x-\phi(x))\rangle &=& \ 1 \\
\Rightarrow \quad & \langle x,x\rangle + 2a(x)\langle x, x-\phi(x)\rangle + a^2(x)\langle x-\phi(x), x-\phi(x)\rangle &=& \ 1 \\
\Rightarrow \quad & \|x-\phi(x)\|^2 a^2(x) + 2\langle x, x-\phi(x)\rangle a(x) + (\|x\|^2-1) &=& \ 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, as raízes de (1.20) são

$$a(x) = \frac{-2\langle x, x-\phi(x)\rangle \pm \sqrt{4\langle x, x-\phi(x)\rangle^2 - 4\|x-\phi(x)\|^2(\|x\|^2-1)}}{2\|x-\phi(x)\|^2}.$$

Mostraremos que o discriminante será sempre positivo, para concluir que existe raiz para (1.20), e que a maior raiz dessa equação é

$$\frac{-2\langle x, x-\phi(x)\rangle + \sqrt{4\langle x, x-\phi(x)\rangle^2 - 4\|x-\phi(x)\|^2(\|x\|^2-1)}}{2\|x-\phi(x)\|^2}, \tag{1.21}$$

ou seja,

$$a(x)\|x-\phi(x)\|^2 = -\langle x, x-\phi(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x-\phi(x)\rangle^2 - \|x-\phi(x)\|^2(\|x\|^2-1)}.$$

De fato, se tomarmos $\|x\| < 1$ temos que $(\|x\|^2 - 1) < 0$ e como ϕ não possui ponto fixo, $\|x-\phi(x)\|^2 > 0$ para todo $x \in S$. Dessa forma, quando $\|x\| < 1$ o discriminante será estritamente positivo. Se $\|x\| = 1$, então $(1 - \|x\|^2) = 0$ e o discriminante será $\langle x, x-\phi(x)\rangle^2 \geqslant 0$. Garantimos a existência da raiz para a equação (1.20), mas para que (1.21) seja de fato a maior raiz é necessário que $\langle x, x-\phi(x)\rangle > 0$. Suponha que $\langle x, x-\phi(x)\rangle = 0$. Então $\langle x, x\rangle = \langle x, \phi(x)\rangle = 1$, $\phi(x) \neq 0$ e $\|x\|\|\phi(x)\|\cos(\theta) = 1$, onde θ é o ângulo entre x e $\phi(x)$. Mas para que a igualdade seja satisfeita, devemos ter $\|\phi(x)\| = 1$ e $\theta = 0$, pois $\|\phi(x)\| \leqslant 1$. Logo $x = \phi(x)$, o que é um absurdo. Portanto $\langle x, x-\phi(x)\rangle > 0$ e o discriminante em (1.21) é positivo e nunca se anula.

Observe ainda que se $\|x\| = 1$ e $a(x)$ é a maior raiz da equação (1.20) então $a(x) = 0$.

Agora, para cada $t \in \mathbb{R}$, considere

$$f(t,x) = x + ta(x)(x-\phi(x)).$$

Pelo fato de que a função $y \longmapsto y^{\frac{1}{2}}$ com $y \in \mathbb{R}^+$ é suave, então f é $\mathcal{C}^\infty$ nas $n+1$ variáveis $(t, x_1, \dots, x_n)$ e assume valores em S.

É válido fazer algumas observações sobre a função f. Para $i = 1, \dots, n$ usaremos a notação

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t} \quad e \quad f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Derivando a função $f(t, x)$ em relação a variável t temos

$$f_t(t, x) = a(x)(x - \phi(t)).$$

$f(0, x) = x$ para todo $x \in S$, e pela definição de $a(x)$ em (1.20) temos que $\|f(1, x)\| = 1$ para todo $x \in S$. Ainda, considerando x satisfazendo $\|x\| = 1$, teremos $a(x) = 0$ e como consequência disso $f(t, x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $f_t(t, x) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por uma questão de conveniência, denote $x_0 = t$,

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f^1, \dots, f^n). \end{array}$$

e $\mathcal{M}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, sendo a matriz Jacobiana de f com a coluna da derivada parcial em relação a x_i omitida, ou seja

$$\mathcal{M}_i(x_0, x) = \begin{bmatrix} f^1_{x_0}(x_0, x) & \cdots & f^1_{x_{i-1}}(x_0, x) & f^1_{x_{i+1}}(x_0, x) & \cdots & f^1_{x_n}(x_0, x) \\ f^2_{x_0}(x_0, x) & \cdots & f^2_{x_{i-1}}(x_0, x) & f^2_{x_{i+1}}(x_0, x) & \cdots & f^2_{x_n}(x_0, x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^n_{x_0}(x_0, x) & \cdots & f^n_{x_{i-1}}(x_0, x) & f^n_{x_{i+1}}(x_0, x) & \cdots & f^n_{x_n}(x_0, x) \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

e chamemos o determinante de $\mathcal{M}_i(x_0, x)$ de $\mathcal{D}_i(x_0, x)$.

Veja que as derivadas parciais da i-ésima coordenada da função f são

$$
\begin{aligned}
f^i_{x_0}(x_0,x) &= 0 + a(x)(x_i - \phi^i(x))\\
f^i_{x_1}(x_0,x) &= 0 + x_0\frac{\partial a(x)}{\partial x_1}(x_1 - \phi^i(x)) - x_0 a(x)\left(\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial x_1}\right)\\
&\vdots\\
f^i_{x_{i-1}}(x_0,x) &= 0 + x_0\frac{\partial a(x)}{\partial x_{i-1}}(x_{i-1} - \phi^i(x)) - x_0 a(x)\left(\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial x_{i-1}}\right)\\
f^i_{x_i}(x_0,x) &= 1 + x_0\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}(x_i - \phi^i(x)) + x_0 a(x)\left(1-\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial x_i}\right)\\
f^i_{x_{i+1}}(x_0,x) &= 0 + x_0\frac{\partial a(x)}{\partial x_{i+1}}(x_{i+1} - \phi^i(x)) - x_0 a(x)\left(\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial x_{i+1}}\right)\\
&\vdots\\
f^i_{x_n}(x_0,x) &= 0 + x_0\frac{\partial a(x)}{\partial x_n}(x_n - \phi^i(x)) - x_0 a(x)\left(\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial x_n}\right).
\end{aligned}
$$

Olhando para as derivadas acima podemos perceber que em $x_0 = 0$ a matriz $\mathcal{M}_0(x_0,x)$ é dada por

$$
\mathcal{M}_0(0,x) = \begin{bmatrix} f^1_{x_1}(0,x) & \cdots & f^1_{x_n}(0,x)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^n_{x_1}(0,x) & \cdots & f^n_{x_n}(0,x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},
$$

e portanto $\mathcal{D}_0(0,x) = 1$.

Voltemos à variável $t = x_0$ e considere a integral

$$
I(t) = \int_S \mathcal{D}_0(t,x)dx_1\dots dx_n. \tag{1.23}
$$

É fácil ver que $I(0)$ é o volume de S. De fato

$$
I(0) = \int_S \mathcal{D}_0(0,x)d_{x_1}\dots d_{x_n} = \int_S 1 d_{x_1}\dots d_{x_n} = V(S)
$$

e portanto $I(0) \neq 0$. Por outro lado $f(1,x)$ satisfaz $\|f(1,x)\| = 1$, sendo assim, segue pela proposição 1.31 que o Jacobiano $\mathcal{D}_0(1,x)$ é identicamente nulo e portanto $I(1) = 0$.

A contradição desejada será obtida mostrando que $I(t)$ é constante, isto é, que

$I'(t) = 0$. Para provar isto, derivamos sob a integral (1.23) e obtemos

$$I'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathcal{D}_0(t,x)dx_1 \ldots dx_n = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_0(t,x)dx_1 \ldots dx_n.$$

Afirmamos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_0 = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}_i.$$

Vejamos o que ocorre para $n = 2$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_0 = \frac{\partial}{\partial t}\det\begin{vmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2} \\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2}\end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} f^1_{x_1t} & f^1_{x_2} \\ f^2_{x_1t} & f^2_{x_2}\end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{x_2t} \\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2t}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\det\begin{vmatrix} f^1_{t} & f^1_{x_2} \\ f^2_{t} & f^2_{x_2}\end{vmatrix} - \det\begin{vmatrix} f^1_{t} & f^1_{x_2x_1} \\ f^2_{t} & f^2_{x_2x_1}\end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\det\begin{vmatrix} f^1_{x_1} & f^1_{t} \\ f^2_{x_1} & f^2_{t}\end{vmatrix} - \det\begin{vmatrix} f^1_{x_1x_2} & f^1_{t} \\ f^2_{x_1x_2} & f^2_{t}\end{vmatrix} \quad (1.24)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{D}_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{D}_2$$

pois a segunda e a quarta parcela de (1.24) diferem por uma permutação de colunas que se anulam. No geral, os termos de (1.24) que não são do tipo $(-1)^{j+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{D}_j$ são determinantes de matrizes com f_t na i-ésima coluna e $f_{x_ix_j}$ na j-ésima coluna, $j \neq i$, cuja soma com o determinante da matriz com f_t na j-ésima coluna e $f_{x_jx_i}$ na i-ésima coluna vai ser nula. Portanto (1.24) fica

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_0 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{D}_j.$$

Logo $I'(t)$ é a soma das integrais da forma

$$\pm\int_S \frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}_i(t,x)dx_1 \ldots dx_n.$$

Lembre-se que $\mathcal{D}_i(t,x)$ é o determinante da matriz quadrada $\mathcal{M}_i$ definida em (1.22). Seja S_i a bola fechada unitária no espaço de variáveis $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Defina $x_i^+ = \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_n^2)}$ e $x_i^- = -x_i^+$.

$$p_i^+ = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^+, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

e

$$p_i^- = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^-, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Daí

$$\int_S \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D}_i(t,x) dx_1 \ldots dx_n = \int_{S_i} \int_{x_i^-}^{x_i^+} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D}_i(t,x) dx_i dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, I' será a soma das integrais da forma

$$\pm \int_{S_i} \mathcal{D}_i(t, p_i^+) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n \mp \int_{S_i} \mathcal{D}_i(t, p_i^-) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Mas $\|p_i^+\| = \|p_i^-\| = 1$, e como $f_{x_0}(t,x) f_t(t,x) = 0$ para $\|x\| = 1$, segue da definição de D_i que o resultado destas integrais é zero, isto é, $I'(t) = 0$, o que contradiz a hipótese de que $\phi(x) \neq x$ para qualquer $x \in S$.

Portanto toda função suave possui ao menos um ponto fixo. ■

Teorema 1.33 (Teorema do Ponto fixo de Brouwer). *Seja S uma bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Então qualquer função contínua $f : S \to S$ possui ao menos um ponto fixo.*

Demonstração. Segue pelo teorema de aproximação de Weiertrass que toda função contínua $\phi : S \to S$ é o limite uniforme de uma sequência de funções $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ onde $\phi_k : S \to S$ é de classe C^∞ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Seja $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $\phi_k : S \to S$ de classe C^∞ para cada $k \in \mathbb{N}$ convergindo uniformemente para $\phi \in \mathcal{C}(S,S)$, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_1$, temos $\|\phi_k(x) - \phi(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in S$.

Como $\phi_k : S \to S$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$, pelo lema 1.32, cada $\phi_k(x)$ possui ao menos um ponto fixo. Desta forma, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in S$ tal que $\phi_k(x_k) = x_k$. Assim se $k > k_1$, temos, em particular,

$$\|x_k - \phi(x_k)\| = \|\phi_k(x_k) - \phi(x_k)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Observe também que como S é compacto, existem $k_2 > 0$, $x_0 \in S$ e uma subsequência de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\|x_j - x_0\| < \frac{\epsilon}{3}$$

para todo $j > k_2$. Ainda, como ϕ é contínua, então existe $k_3 > 0$ tal que

$$\|\phi(x_0) - \phi(x_k)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

sempre que $k > k_3$.

Considerando $k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_0) - x_0\| &= \|\phi(x_0) - \phi(x_{k_0+1}) + \phi(x_{k_0+1}) - x_{k_0+1} + x_{k_0+1} - x_0\| \\
&\leqslant \|\phi(x_0) - \phi(x_{k_0+1})\| + \|\phi(x_{k_0+1}) - x_{k_0+1}\| + \|x_{k_0+1} - x_0\| \\
&< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário e $\|\phi(x_0) - x_0\| < \epsilon$, então $\phi(x_0) = x_0$. Isso mostra que toda função contínua $\phi : S \to S$ tem ao menos um ponto fixo. ■

Corolário 1.34. *Sejam S a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$, A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a S e $f : A \to A$ contínua. Então f admite um ponto fixo em A.*

Demonstração. Seja h um homeomorfismo entre S e A. Então

$$h^{-1} \circ f \circ h : S \to S$$

é uma função contínua, e pelo teorema anterior admite um ponto fixo x em S. Então

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ f \circ h(x) &= x \\
\Rightarrow \quad h \circ h^{-1} \circ f \circ h(x) &= h(x) \\
\Rightarrow \quad f(h(x)) &= h(x).
\end{aligned}$$

Portanto $h(x) \in A$ é um ponto fixo de f em A. ■

1.2.2 Teorema do ponto fixo de Schauder

O teorema do ponto fixo de Schauder é um resultado importante na teoria dos espaços de Banach e é uma generalização do teorema do ponto fixo de Brouwer para espaços de dimensão infinita. Ele estabelece condições sob as quais uma função contínua definida em um espaço de Banach possui um ponto fixo. O teorema de Schauder estabelece que se a função f mapear conjuntos limitados em conjuntos pré-compactos, então ainda é possível garantir a existência de um ponto fixo.

Definição 1.35. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que A é um* ***retrato*** *de X se existir uma aplicação contínua $r : X \to A$, onde $r \equiv I$ sobre A. A função r é chamada de retração.*

Definição 1.36. *Diremos que um conjunto X tem a* ***propriedade do ponto fixo*** *se toda função contínua definida em X com valores em X admite um ponto fixo em X.*

Teorema 1.37. *Se X tem a propriedade do ponto fixo e A é um retrato de X, então A tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Seja $r : X \to A$ uma retração e $f : A \to A$ contínua. Logo $f \circ r : X \to A \subset X$ é uma função contínua. Assim, como X tem a propriedade do ponto fixo, existe $x_0 \in X$ tal que $(f \circ r)(x_0) = x_0$. Agora, como $x_0 = (f \circ r)(x_0) \in A$, segue que $r(x_0) = x_0$ e $f(x_0) = x_0$. ■

Teorema 1.38. *Se X tem a propriedade do ponto fixo e X é homeomorfo a Y, então Y tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do corolário 1.34. ■

Teorema 1.39. *Todo conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo, fechado e não vazio é um retrato de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Considere $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $u(x)$ tal que

$$\|x - u(x)\| = \min_{v \in K} \|x - v\|. \tag{1.25}$$

Considere os semi-espaços abertos $\pi_+ = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x - u(x), y - u(x)\rangle > 0\}$ e $\pi_- = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x, u(x), y - u(x)\rangle < 0\}$ e o hiperplano $\pi_0 = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x - u(x), y - u(x)\rangle = 0\}$. Suponha, por absurdo, que exista $z \in \pi_+ \cap K$. Então o segmento $[u(x), z]$ ligando z a $u(x)$ está contido em K. Considere $\lambda z + (1 - \lambda)u(x) \in [u(x), z]$, $\lambda \in [0, 1]$. Então $\|x - (\lambda z + (1 - \lambda)u(x))\|^2$ é a distância ao quadrado de x a $\lambda z + (1 - \lambda)u(x)$ e

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \|x - (\lambda z + (1 - \lambda)u(x))\|^2 = -2\langle z - u(x), x - u(x)\rangle < 0,$$

pois $z \in \pi_+$. Logo existem pontos em $[u(x), z] \subset K$ cuja distância a x é menor do que $\|x - u(x)\|$, o que contraria a definição de u. Portanto $K \subset \pi_0 \cup \pi_-$ e

$$\langle x - u(x), v - u(x)\rangle \leqslant 0 \tag{1.26}$$

para todo $v \in K$.

Defina $\mathcal{R} = \|u(x) - x\|$. Note que $u(x)$ que satisfaz (1.25) é único. De fato, considere $S_x(\mathcal{R}) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| = \mathcal{R}\}$. Se $\tilde{u}(x)$ é um ponto satisfazendo (1.25), então

(i) $\tilde{u}(x) \in S_x(\mathcal{R}) \subset \pi_+ \cup \pi_0$;

(ii) $K \subset \pi_- \cup \pi_0$, ou seja, $\tilde{u}(x) \in \pi_0$;

(iii) $S_x(\mathcal{R}) \cap \pi_0 = u(x)$.

Portanto $\tilde{u}(x) = u(x)$. Dizemos que $u(x)$ é a projeção de x sobre K.

Observe que $u(x)$ é contínua. De fato, como $u(x), u(y) \in K$, temos de (1.26) que

$$\langle x - u(x), u(y) - u(x)\rangle \leqslant 0$$

e

$$\langle y - u(y), u(x) - u(y)\rangle \leqslant 0.$$

Somando essas desigualdade temos

$$\begin{array}{rrcl} & \langle y - x + u(x) - u(y), u(x) - u(y)\rangle & \leqslant & 0 \\ \Rightarrow & \langle u(x) - u(y), u(x) - u(y)\rangle & \leqslant & \langle y - x, u(x) - u(y)\rangle \\ \Rightarrow & \|u(x) - u(y)\|^2 & \leqslant & \|x - y\|\|u(x) - u(y)\|\cos(\theta) \\ \Rightarrow & \|u(x) - u(y)\| & \leqslant & \|x - y\|. \end{array}$$

Portanto K é uma retração de $\mathbb{R}^n$. ■

Exemplo 1.40. *Todo conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo, fechado, limitado e não vazio tem a propriedade do ponto fixo.*

De fato, sendo K limitado, segue que $K \subset B[0, M]$ para algum $M > 0$ suficientemente grande. Sendo assim, como K é um retrato de $\mathbb{R}^n$ pelo teorema 1.39, temos que K é um retrato de $B[0, M]$, basta tomar a retração de $\mathbb{R}^n$ em K restrita a $B[0, M]$. Como $B[0, 1]$ e $B[0, M]$ são homeomorfas, segue do corolário 1.34 que $B[0, M]$ possui a propriedade do ponto fixo. Por fim como K é um retrato de $B[0, M]$ então K possui a propriedade do ponto fixo pelo teorema 1.37.

Observação 1.41. *É possível mostrar que todo subconjunto compacto e convexo em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo a uma bola fechada unitária, eventualmente com dimensão menor que n. Apesar disso, deixaremos o exemplo do jeito que está, pois a demonstração está mais no contexto da teoria apresentada.*

Definição 1.42. *Seja X um espaço de Banach e $Y \subset X$. O menor convexo que contém Y será chamado de* **envoltória convexa** *de Y e denotado por $conv(Y)$. O menor convexo fechado que contém Y será chamado de* **fecho convexo** *de Y.*

Observação 1.43. *É fácil ver que a interseção de convexos é convexo e é imediato ver que a interseção de fechados é fechado. Portanto a envoltória convexa de $Y \subset X$ é a interseção de todos os subconjuntos convexos de X que contém Y. De modo análogo, o fecho convexo é a inteseção de todos os subconjuntos fechados e convexos de X que contém Y.*

Proposição 1.44. *Seja X um espaço de Banach e Y um subconjunto convexo de X. Então $\overline{Y}$ é convexo.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \overline{Y}$. Considere uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em Y convergindo para x e uma sequência $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em Y convergindo para y. Como Y é conexo, para cada $t \in [0,1]$, temos que $tx_k - (1-t)y_k \in Y$. Sendo assim, $\lim_{k\to\infty} tx_k - (1-t)y_k = tx - (1-t)y \in \overline{Y}$ para cada $t \in [0,1]$. Portanto $\overline{Y}$ é convexo. ∎

Proposição 1.45. *Seja X um espaço de Banach e $Y \subset X$. O fecho da envoltória convexa de Y é o fecho convexo de Y.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ o fecho convexo de Y. Como $conv(Y)$ é o menor convexo que contém Y, $conv(Y) \subset \mathcal{B}$, sendo assim $\overline{conv(Y)} \subset \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$. Por outro lado, como $conv(Y)$ é convexo temos que $\overline{conv(Y)}$ é convexo pela proposição 1.44. Sendo assim $B \subset \overline{conv(Y)}$, pois $\mathcal{B}$ é o menor conexo fechado de contém Y. ∎

Teorema 1.46. *Em um espaço de Banach, o fecho da envoltória convexa de um conjunto compacto é compacto.*

Demonstração. A demonstração de uma generalização desse teorema se encontra na referência [2], teorema 5.35. ∎

Introduziremos agora algumas notações importantes para os próximos resultados. Seja X um espaço de Banach e $Y = \{u_1, \cdots, u_n\}$, com $u_i \in X$ para $i = 1, \cdots, n$. Para

$\epsilon > 0$ fixo, denotamos

$$Y_\epsilon = \cup_{i=1}^{n} B(u_i, \epsilon)$$

e definimos para $i = 1, \ldots, n$ a aplicação $\omega_i : Y_\epsilon \to \mathbb{R}$ por

$$\omega_i[u] := \max\{0, \epsilon - \|u - u_i\|\}.$$

Note que ω_i é contínua para cada $i = 1, \ldots, n$.

Seja agora $K \subset X$ compacto e convexo. Para $\epsilon > 0$ fixo, seja $Y = \{u_1, \ldots, u_{N\epsilon}\}$ um subconjunto de K tal que

$$K \subset \cup_{i=1}^{N\epsilon} B(u_i, \epsilon) = Y_\epsilon,$$

o que é possível pois K é compacto. Como K é convexo e $Y \subset K$, segue que $conv(Y) \subset K$.

A projeção de Schauder é a aplicação $P_\epsilon : K \to conv(Y)$ definida por

$$P_\epsilon[u] := \frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u] u_i}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u]}. \tag{1.27}$$

Notemos que a projeção de Schauder está bem definida, pois se $u \in Y_\epsilon$, então $u \in B(u_i, \epsilon)$ para algum $u_i \in Y$, e assim $\omega_i[u] = \epsilon - \|u - u_i\| > 0$. Portanto $\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u] > 0$. Notando que cada $P_\epsilon[u]$ é a combinação convexa de elementos de Y, segue que $P_\epsilon[u] \in conv(Y)$.

Lema 1.47. *Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto e convexo. A projeção de Schauder definida acima é contínua. Além disso, para todo $u \in K$ temos*

$$\|u - P_\epsilon[u]\| < \epsilon.$$

Demonstração. Como ω_i é contínua para cada $i = 1, \cdots, n$ e $\omega[u] = \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u] > 0$, então a projeção de Schauder é contínua. Tome $u \in K$. Então

$$\|u - P_\epsilon[u]\| = \left\| \frac{\omega[u]}{\omega[u]} u - \frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u] u_i}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u]} \right\|$$

$$= \frac{1}{\omega[u]} \left\| \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u] u - \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u] u_i \right\| = \frac{1}{\omega[u]} \left\| \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u](u - u_i) \right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega[u]} \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \omega_i[u] \|u - u_i\| < \frac{1}{\omega[u]} \omega[u] \epsilon = \epsilon.$$

■

Teorema 1.48 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)**.** *Seja X um espaço de Banach, $K \subset X$ compacto e convexo, e assuma que*

$$A : K \to K$$

é contínua. Então A possui um ponto fixo.

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. Como K é compacto e convexo conseguimos tomar $Y = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset K$ de forma que $conv(Y) \subset K \subset Y_\epsilon$. Considere a projeção de Schauder $P_\epsilon : K \to conv(Y)$ definida anteriormente em (1.27). Defina agora o operador $A_\epsilon : conv(Y) \to conv(Y)$ por

$$A_\epsilon[u] = P_\epsilon[A[u]] \quad (u \in conv(Y)).$$

Temos que A_ϵ é contínua pois é a composição das funções contínuas P_ϵ e A, onde P_ϵ é contínua pelo lema 1.47 e A é contínua por hipótese. Note que $conv(Y)$ é convexo, fechado e limitado, pois $conv(Y) \subset K$ com K compacto. Além disso, $conv(Y)$ é um subconjunto de um espaço vetorial de dimensão finita contido em $span\{u_1, \ldots, u_{N_\epsilon}\}$. Daí segue que $conv(Y)$ é homeomorfo a algum conjunto convexo, fechado e limitado $Z \subset \mathbb{R}^m$ para algum $m < \mathbb{N}_\epsilon$. Segue dos teoremas 1.38 e 1.40 que existe $u_\epsilon \in conv(Y)$ satisfazendo

$$A_\epsilon[u_\epsilon] = u_\epsilon. \tag{1.28}$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{k}$, temos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $u_k \in K$ satisfazendo (1.28). Isso define uma sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em K. Pela compacidade de K existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ e um ponto $u \in K$ com $u_{k_j} \to u$. Assim pelo lema 1.47 temos

$$\|u_{k_j} - A(u_{k_j})\| = \|A_{k_j}(u_{k_j}) - A(u_{k_j})\| = \|P_{k_j}(A(u_{k_j})) - A(u_{k_j})\| < \frac{1}{k_j}.$$

Como A é contínua segue que $A(u_{k_j}) \to A(u)$, e a desigualdade implica que $u = A(u)$.

■

Definição 1.49. *Sejam X, Y espaços de Banach e $f : X \to Y$. Então f é uma* ***função compacta*** *se para todo conjunto limitado $A \in X$ tivermos que $\overline{f(A)}$ é compacto. Se além disso f*

for contínua, a chamaremos de completamente contínua.

Corolário 1.50. *Seja A um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach X e $f : A \to A$ completamente contínua. Então f admite um ponto fixo em A.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ o fecho convexo de $f(A)$. Desde que A é fechado e convexo temos que $\overline{f(A)} \subset \mathcal{B} \subset A$. Ainda, pela proposição 1.45 e pelo teorema 1.46, temos que $\mathcal{B}$ é compacto. Se $\mathcal{B} \subset A$, então $f(\mathcal{B}) \subset f(A) \subset \mathcal{B}$. O teorema 1.48 implica que existe um ponto fixo de f em $\mathcal{B} \subset A$. ∎

Exemplo 1.51 (Retirando a hipótese de compacidade). *Se retirássemos a hipótese de compacidade do Teorema do Ponto Fixo de Schauder teríamos que a função*

$$\begin{array}{rcl} f : (0,1) & \to & (0,1) \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

admite um ponto fixo em $(0,1)$, o que é falso, pois se $x^2 = x$ então $x = 0$ ou $x = 1$, pontos que não estão no intervalo $(0,1)$.

Exemplo 1.52 (Retirando a hipótese de convexidade). *Seja S^1 a circunferência unitária em $\mathbb{R}^2$ centrada em $(0,0)$. Veja que $S = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi)\}$. Observe que S é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ porém não é convexo. Tomando f definida como*

$$\begin{array}{rcl} f : S & \to & S \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) & \longmapsto & (\cos(\theta+1), \sin(\theta+1)), \end{array}$$

f não admite ponto fixo em S, pois se admitisse teríamos que $\cos(\theta) = \cos(\theta+1)$ e $\sin(\theta) = \sin(\theta+1)$, o que não é verdade para nenhum $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Exemplo 1.53. *Um subconjunto compacto e convexo muito usado de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, onde I é um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, é obtido da seguinte maneira. Considere $\mu, \beta > 0$ e $\mathcal{A}$ um subconjunto de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que para toda função $\phi \in \mathcal{A}$ teremos que*

i) $\|\phi\| \leqslant \beta$,

ii) $\|\phi(t) - \phi(\bar{t})\| \leqslant \mu|t - \bar{t}|$ *para todo* $t, \bar{t} \in I$.

Observe que o conjunto $\mathcal{A}$ é convexo e fechado. De fato, se tomarmos duas funções quaisquer $\phi, f \in \mathcal{A}$, para cada $0 \leqslant t \leqslant 1$ a função $\psi_t = t\phi + (1-t)f$ é contínua pois é soma e produto *de funções contínuas. Além disso, temos que*

$$\|\psi\| = \|t\phi + (1-t)f\| \leqslant \|t\phi\| + \|(1-t)f\| = t\|\phi\| + (1-t)\|f\| \leqslant t\beta + (1-t)\beta = \beta$$

e

$$\|\psi(x) - \psi(\bar{x})\| = \|t\phi(x) + (1-t)f(x) - t\phi(\bar{x}) - (1-t)f(\bar{x})\|$$

$$\leqslant t\|\phi(x) - \phi(\bar{x})\| + (1-t)\|f(x) - f(\bar{x})\| = t\mu\|x-\bar{x}\| + (1-t)\mu\|x-\bar{x}\| = \mu\|x-\bar{x}\|,$$

pela definição de $\mathcal{A}$. Sendo assim, para toda função $f, \phi \in \mathcal{A}$ temos que $t\phi - (1-t)f \in A$ para $t \in [0,1]$ e $\mathcal{A}$ é convexo. Também observe que se ϕ é um ponto de acumulação de $\mathcal{A}$ então existe uma sequência $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ convergindo para ϕ. Note que ϕ é uma função contínua pois $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach. Ainda, veja que

$$\|\phi\| = \|\lim_{n\to\infty} \phi_k\| = \lim_{n\to\infty} \|\phi_k\| = \lim_{n\to\infty} \beta = \beta,$$

e para todo $x, \bar{x} \in I$ temos

$$\|\phi(x)-\phi(\bar{x})\| = \|\lim_{k\to\infty} \phi_k(x)-\phi_k(\bar{x})\| = \lim_{k\to\infty} \|\phi_k(x)-\phi_k(\bar{x})\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \mu\|x-\bar{x}\| = \mu\|x-\bar{x}\|.$$

Com isso temos que $\phi \in \mathcal{A}$, o que implica que $\mathcal{A}$ é fechado.

Além disso, segue direto da definição de $\mathcal{A}$ que toda sequência $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ é uniformemente limitada por β e todas as funções da sequência são Lipschitzianas com a mesma constante de Lipschitz μ, sendo assim $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é equicontínua.

Portanto, para cada sequência $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$, os lemas 1.7 e 1.13 implicam a existência de uma subsequência $(\phi_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $\phi \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \phi_k = \phi \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$. Mas $\mathcal{A}$ é fechado então $\phi \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto.

1.3 Medida e integração

Nesta seção relembraremos algumas definições e propriedades de medida e integração.

Definição 1.54. *Seja $I = [a,b]$ um intervalo em $\mathbb{R}$. A função $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ é dita **absolutamente contínua** em I se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda coleção finita*

$\{[a_i, b_i]\}_{i=1,\ldots,m}$ *de intervalos disjuntos de I satisfazendo* $\sum_{i=1}^{m} |b_i - a_i| < \delta$, *temos que*

$$\sum_{i=1}^{m} \|\phi(b_i) - \phi(a_i)\| < \epsilon.$$

Definição 1.55. *Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. A função $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ é dita **localmente absolutamente contínua** se para todo ponto $t \in I$ existe uma vizinhança V_t de t tal que ϕ é absolutamente contínua em V_t.*

Observação 1.56. *Dizer que $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ é localmente absolutamente contínua é o mesmo que dizer que $\phi(t)$ é absolutamente contínua para todo intervalo compacto $[a, b] \subset I$. De fato,*

($\Rightarrow$) Seja $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ localmente absolutamente contínua e $[a, b]$ um intervalo compacto em I. Então para cada $t \in [a, b]$ temos que existe uma vizinhança V_t de t tal que $\phi(t)$ é absolutamente continua em V_t. Considere uma cobertura aberta $\{V_t\}_{t\in[a,b]}$ por intervalos de $[a, b]$ em que ϕ é absolutamente contínua em V_t para todo $t \in [a, b]$ e tome $\{V_i\}_{i=1,\ldots,k}$ uma subcobertura finita de $\{V_t\}_{t\in[a,b]}$. Podemos escolher esta cobertura de modo que:

(1) $V_1 = [c_1, d_1)$, $V_k = (c_k, d_k]$ e $V_i(c_i, d_i)$ para $i = 2, \ldots, k - 1$, onde $c_1 = a$ e $d_k = b$;

(2) $d_i < d_{i+1}$ e $c_i < c_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, k - 1$;

(3) $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k - 1$.

Não é difícil escolher $a_i \in V_i \cap V_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k - 1$, tais que $a_i < a_{i+1}$ para todo $i = 1, \ldots, k - 2$. Denote $a_0 = a$ e $a_k = b$. Com isso, ϕ é absolutamente contínua em cada $[a_{i-1}, a_i] \subset V_i$, $i = 1, \ldots, k$. Sendo assim, se $\phi_i = \phi\,\big|_{[a_i,a_{i+1}]}$ para todo $i = 0, \ldots, k - 1$, temos que

$$\phi_i(t) = \int_{a_i}^{t} f_i(s)ds$$

para alguma função integrável f_i definida em $[a_i, a_{i+1}]$ (ver teorema 14 de [18]). Com isso não é difícil ver que $\phi(t) = \int_a^t f(s)ds$ para alguma função integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Logo $\phi(t)$ absolutamente contínua em $[a, b]$.

($\Leftarrow$) Seja $\phi(t)$ absolutamente contínua para todo intervalo compacto em I. Para cada ponto $t \in I$ existem um compacto $U_t \subset I$ e um aberto V_t de I tal que $t \in V_t \subset U_t$. Então $\phi(t)$ é absolutamente contínua em V_t. Logo ϕ é localmente absolutamente contínua em I.

Proposição 1.57. *Se $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua, então ϕ é diferenciável quase sempre.*

Demonstração. Se $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : I \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua, então as funções coordenadas $\phi_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, são absolutamente contínuas. Logo ϕ_i é diferenciável quase sempre (corolário 12 do livro [18]) e com isso ϕ é diferenciável quase sempre. ∎

Teorema 1.58. *Uma função ϕ é uma integral indefinida se, e somente se, é absolutamente contínua. Neste caso ϕ é uma integral indefinida de sua derivada.*

Demonstração. A demonstração para funções a valores reais pode ser encontrada em [18]. A demonstração para valores no $\mathbb{R}^n$ segue diretamente da análise das funções coordenadas de ϕ, análoga àquela feita na proposição 1.57. ∎

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

As equações diferenciais ordinárias são ferramentas matemáticas fundamentais usadas para descrever uma ampla variedade de fenômenos naturais e científicos. Elas são utilizadas para modelar o comportamento de sistemas dinâmicos e prever seu desenvolvimento ao longo do tempo. Se você já se perguntou como calcular a trajetória de um foguete no espaço, entender a taxa de crescimento de uma população ou descrever a vibração de uma corda, as equações diferenciais ordinárias são importantes para obter respostas.

Nem sempre é possível determinar uma solução para uma equação diferencial e se for possível nem sempre podemos garantir que existe uma única solução para essa equação. Neste capítulo, não trataremos de métodos para resolver equações diferenciais explicitamente, mas de condições que garantirão a existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial ordinária. Esses resultados são encontrados em [10] e [17].

2.1 Problemas de valor inicial

Seja t um escalar real e D um aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e denote $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Uma equação diferencial é a relação da forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{2.1}$$

que também é escrito como $\dot{x} = f(t, x)$. Nós dizemos que x é solução de (2.1) em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se x é uma função continuamente diferenciável em I, $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ e x satisfaz a equação (2.1) em I.

Se $I = [a, b]$, então $\dot{x}(a)$ e $\dot{x}(b)$ significam derivada à direita e à esquerda respectivamente.

Exemplo 2.1. *Tome $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $f(t, x) = x^2$. Então a função $\phi(t) = -\frac{1}{t+c}$ é solução de*

$$\dot{x} = x^2$$

em $(-\infty, -c)$ ou em $(-c, \infty)$.

Exemplo 2.2. *Tome $D = \mathbb{R}^2$ e*

$$f(t, x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0\ . \end{cases}$$

A função

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4}, & t \in [c, \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, c) \end{cases}$$

é uma solução de

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Note que $x(t) = 0$ também é uma solução para esse problema.

Agora considere o ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n$. Um problema de valor inicial para a equação (2.1) consiste na definição do intervalo I com $t_0 \in I$ e uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de (2.1)

satisfazendo $x(t_0) = x_0$. Nós escrevemos esse problema simbolicamente como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad (t \in I) \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases} \tag{2.2}$$

Se existe um intervalo I com $t_0 \in I$ e x satisfazendo (2.2), nos referimos a x como uma solução de (2.1) satisfazendo $x(t_0) = x_0$.

Exemplo 2.3. *Para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) \\ x(0) = -\frac{1}{c} \end{cases} \tag{2.3}$$

do exemplo 2.1*, o intervalo* I *depende da constante* c*, pois necessitamos que a solução* $\phi(t) = -\frac{1}{t+c}$ *do problema seja continuamente diferenciável em* I*. Mas* ϕ *não é definida em* $-c$*, portanto o intervalo não deve conter a constante* $-c$*.*

Observação 2.4. *O exemplo* 2.3 *mostra que intervalo de existência da solução do problema de valor inicial* I *pode não ser a reta toda.*

Observação 2.5. *Pode existir mais de uma solução para um problema de valor inicial, conforme mostra o exemplo* 2.2*.*

Lema 2.6. *Seja* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *e* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *contínua. A função* x *é solução do problema* (2.2) *no intervalo* I *se, e somente se,* x *satisfaz a equação*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{2.4}$$

para todo $t \in I$*.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja x uma solução do problema (2.2). Então $\dot{x} = f(t, x(t))$ para todo $t \in I$. Como f é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

e com isso

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

($\Leftarrow$) Suponha que a função x possa ser definida como

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{2.5}$$

Então, derivando essa equação obtemos que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{2.6}$$

Ainda, pela definição de f temos que $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$. Por fim, $x(t_0) = x_0$ devido a (2.5). ■

Teorema 2.7 (Teorema de Peano)**.** *Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua. Então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe pelo menos uma solução de* (2.2).

Demonstração. Suponha que $\alpha, \beta > 0$ são escolhidos de forma que o "retângulo fechado" $B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{(t, x) : t \in I_\alpha, \|x - x_0\| \leqslant \beta\}$, onde $I_\alpha(t_0) = \{t : |t - t_0| \leqslant \alpha\}$, está contido em D. Tome

$$M = \max\{\|f(t, x)\|, (t, x) \in B(\alpha, \beta)\}.$$

Escolha $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0$ tais que $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$, $\bar{\beta} \leqslant \beta$, $M\bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta}$ e defina o conjunto

$$\mathcal{A} = \{\phi \in \mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n) : \phi(t_0) = x_0 \ \ e \ \ \|\phi(t) - x_0\| \leqslant \bar{\beta}, \ \ t \in I_{\bar{\alpha}}\}.$$

Afirmamos que o conjunto $\mathcal{A}$ é convexo, fechado e limitado. De fato, se tomarmos 2 funções arbitrárias $\phi, \psi \in \mathcal{A}$, então para todo λ satisfazendo $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ temos que $(1 - \lambda)\phi - \lambda\psi$ é contínua. Além disso

$$\begin{aligned} \|((1 - \lambda)\phi - \lambda\psi)(t) - x_0\| &= \|(1 - \lambda)\phi(t) - (1 - \lambda)x_0 - \lambda\psi(t) - \lambda x_0\| \\ &\leqslant (1 - \lambda)\|\phi(t) - x_0\| + \lambda\|(\psi(t) - x_0)\| \leqslant (1 - \lambda)\bar{\beta} + \lambda\bar{\beta} = \bar{\beta} \end{aligned}$$

para todo $t \in I_\alpha$ e é imediato que $((1 - \lambda)\phi - \lambda\psi)(t_0) = x_0$. Assim $\mathcal{A}$ é convexo.

Mostremos que $\mathcal{A}$ é fechado. Tome $\phi \in \partial\mathcal{A}$ e uma sequência de funções $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ convergindo para ϕ. Observe que como $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $\mathcal{A}$, então $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência no espaço de Banach $\mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$, com isso $\phi = \lim_{i\to\infty} \phi_i \in$

$\mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$. Além disso

$$\|\phi(t) - x_0\| = \| \lim_{i\to\infty} \phi_i(t) - x_0\| \leqslant \lim_{i\to\infty} \bar{\beta} = \bar{\beta}$$

para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$ e

$$\phi(t_0) = \lim_{i\to\infty} \phi_i(t_0) = x_0.$$

Assim $\phi \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é fechado.

Finalmente, para mostrar que $\mathcal{A}$ é limitado, para todo $\phi \in \mathcal{A}$ temos

$$\|\phi\| = \sup_{t\in I_{\bar{\alpha}}} \|\phi(t)\| \leqslant \sup_{t\in I_{\bar{\alpha}}} \|\phi(t) - x_0 + x_0\| \leqslant \bar{\beta} + \|x_0\|.$$

Portanto $\mathcal{A}$ é limitado por $\beta + \|x_0\|$, o que demonstra a afirmação.

Para todo $\phi \in \mathcal{A}$ defina a função $T\phi : I_{\bar{\alpha}} \to \mathbb{R}^n$ pela relação

$$T\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \qquad t \in I_{\bar{\alpha}}$$

Pelo lema 2.6, encontrar o ponto fixo de T é equivalente a encontrar uma solução para o problema de valor inicial (2.2). Sendo assim, nosso objetivo agora é mostrar a existência de um ponto fixo de T em $\mathcal{A}$ utilizando o corolário 1.50.

É fácil ver que a função $T\phi : I_{\bar{\alpha}} \to \mathbb{R}^n$ é contínua, pois $f : D \to \mathbb{R}^n$ e $\phi : I_{\bar{\alpha}} \to \mathbb{R}^n$ são contínuas, assim sua composta $f(s, \phi(s))$ também é. Como a integral de uma função contínua é contínua, $T\phi \in \mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$. É evidente que $(T\phi)(t_0) = x_0$ pela definição de $T\phi$. Além disso,

$$\|T(\phi)(t) - x_0\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds - x_0 \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \phi(s))\| ds \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \sup_{t\in I_{\bar{\alpha}}} \|f(s, \phi(s))\| ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right| = M|t - t_0| \leqslant M\bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta},$$

para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$. Então $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pode ser vista como uma aplicação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$.

Também veja que

$$\|T(\phi)(t) - T(\phi)(\bar{t})\| \leqslant \left| \int_{\bar{t}}^{t} \|f(s, \phi(s))\| ds \right| \leqslant M|t - \bar{t}| \tag{2.7}$$

para todo $t, \bar{t} \in I_{\bar{\alpha}}$. Isso implica que para todo $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $T(\mathcal{B})$ é uma família equicontínua.

Dessa forma, pelo lema 1.13, toda sequência $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $T(\mathcal{B})$ admite uma subsequência que converge uniformemente em $\mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$. Como $\overline{T(\mathcal{A})} \subset \mathcal{A}$ é fechado, o limite dessa subsequência está em $\overline{T(\mathcal{B})}$. Logo $\overline{T(\mathcal{B})}$ é compacto e T é uma função compacta.

Observe ainda que $f(t,x)$ é uniformemente contínua no compacto $B(\alpha,\beta)$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|\phi - \bar{\phi}\| < \delta$, então $\|f(s,\phi(s)) - f(s,\bar{\phi}(s))\| < \frac{\epsilon}{\bar{\alpha}}$ e

$$\|T(\phi)(t) - T(\bar{\phi})(t)\| = \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s,\phi(s)) - f(s,\bar{\phi}(s))\| ds\right| < \left|\int_{t_0}^{t} \frac{\epsilon}{\bar{\alpha}} ds\right| = \frac{\epsilon}{\bar{\alpha}}|t - t_0| \leqslant \epsilon$$

para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$. Em outras palavras

$$\|T\phi - T\bar{\phi}\| = \sup_{s\in I_{\bar{\alpha}}} \|T\phi(t) - T\bar{\phi}(t)\| < \epsilon$$

sempre que $\|\phi - \bar{\phi}\| \leqslant \delta$. Disso temos que T é uma função contínua. Portanto, pelo corolário 1.50, podemos afirmar que existe um ponto fixo em $\mathcal{A}$, provando que há uma solução para o problema de valor inicial (2.2). ■

Corolário 2.8. *Seja $U \subset D$ compacto e $V \subset D$ aberto satisfazendo $\overline{V} \subset D$ e $U \subset V$. Então existe $\alpha > 0$ tal que para todo $(t_0, x_0) \in U$, existe uma solução do problema de valor inicial* (2.1) *no intervalo* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $\overline{V}$ compacto. Para cada $(t_0,x_0) \in U$, considere o retângulo fechado $B(\alpha,\beta,t_0,x_0) = \{(t,x) : t \in I_\alpha, \|x - x_0\| \leqslant \beta\}$, onde $I_\alpha(t_0) = \{t : |t - t_0| \leqslant \alpha\}$, contido em V. Basta considerar $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0$ satisfazendo as condições da demonstração do teorema de Peano com $M = \max\{\|f(t,x)\|, (t,x) \in \overline{V}\}$. (tomar $\bar{\alpha} + \bar{\beta} < dist(U, \partial V)$, além das outras condições é o suficiente). ■

2.2 Extensão de soluções

A seção anterior nos apresenta condições que garantem a existência de soluções para (2.2) em um certo intervalo I. A presente seção procura estudar a possibilidade de estender essa solução além do intervalo I de forma que a extensão dessa função continue sendo solução de (2.2).

Definição 2.9. *Seja ϕ a solução do problema de valor inicial* (2.2) *no intervalo I. Nós dizemos* *que $\widehat{\phi}$ é uma* ***continuação*** *de ϕ se $\widehat{\phi}$ é definida em um intervalo $\widehat{I}$ que contêm I, $\widehat{\phi}$ coincide com ϕ em I e $\widehat{\phi}$ é solução do problema de valor inicial* (2.2) *em $\widehat{I}$.*

Lema 2.10. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua e limitada em D. Então para qualquer solução ϕ de* (2.1) *definida no intervalo (a, b) temos que $\lim_{t\to a^+} \phi(t)$ e $\lim_{t\to b^-} \phi(t)$ existem. Além disso, se $f(b, \lim_{t\to b^-} \phi(t))$ é ou pode ser definida de forma que $f(t, x)$ é contínua em $(b, \lim_{t\to b^-} \phi(t))$ então $\phi(t)$ é solução de* (2.1) *em $(a, b]$. O mesmo pode ser dito para $(a, \lim_{t\to a^+} \phi(t))$.*

Demonstração. Tome $t_0 \in (a, b)$. Como ϕ é solução em (a, b) temos que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

para $t \in (a, b)$. Para $a < t_1 \leqslant t_2 < b$, temos

$$\|\phi(t_1) - \phi(t_2)\| = \left\|x_0 + \int_{t_1}^{t} f(s, \phi(s))ds - x_0 - \int_{t_2}^{t} f(s, \phi(s))ds\right\|$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, \phi(s))\|ds \leqslant M(t_2 - t_1),$$

onde M é um limitante superior de $f(t, x)$ em D.

Portanto $\lim_{t_1,t_2\to a^+} \|\phi(t_2)-\phi(t_1)\| = 0$. Com isso temos que $\lim_{t\to a^+} \phi(t)$ existe. Com um argumento semelhante mostramos que $\lim_{t\to b^-} \phi(t)$ existe.

Ainda, considere $\widehat{\phi} : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ como

$$\widehat{\phi} = \begin{cases} \phi(t), & t \in (a, b) \\ \lim_{t\to b} \phi(t), & t = b. \end{cases}.$$

Se $f(t, x)$ é contínua ou estendível continuamente em $(b, \lim_{t\to b^-} \phi(t))$, então

$$\widehat{\phi}(t) = \phi(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds\right) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{\phi}(s))ds.$$

para $t \in (a, b)$ e

$$\widehat{\phi}(b) = \lim_{t\to b} \phi(t) = \lim_{t\to b} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds\right) = x_0 + \int_{t_0}^{b} f(s, \widehat{\phi}(s))ds$$

para $t = b$. Assim, $\widehat{\phi}$ é solução de 2.1 em $(a, b]$. O mesmo ocorre para uma extensão correspondente ao intervalo $[a, b)$. ■

Teorema 2.11. *Se D é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to R^n$ é contínua e $\phi(t)$ é solução de (2.2) em algum intervalo, então existe uma continuação para ϕ em um intervalo máximo de existência. Além disso, se (a, b) é o intervalo máximo de existência da solução $x(t)$ de (2.2) então temos que uma das afirmações abaixo é verdadeira:*
i) *$(t, x(t))$ tende para a fronteira de D quando $t \to b$ ($t \to a$);*
ii) *$(t, x(t))$ é ilimitada.*

Demonstração. Seja $x(t)$ uma solução do problema de valor inicial (2.2) em um intervalo I. Se I é o intervalo maximal não há o que demonstrar. Se I não é intervalo maximal, então x pode ser estendida para um intervalo $\widehat{I}$ que contém propriamente I. Sendo assim, pelo lema 2.10, podemos eventualmente estender I a uma de suas extremidades e assumir que I é fechado neste lado. Suponha para fixar ideias, que seja à direita. Mostraremos que x pode ser estendida a direita para um intervalo maximal. A prova da extensão a esquerda é similar. Observe que é possível assumir que $I = [a+\epsilon, b]$ para algum $\epsilon > 0$ e que x não pode ser estendida à direita a $[a + \epsilon, \infty)$.

Seja $U \subset D$ compacto tal que $(t, x(t)) \in U$ para todo $t \in [a + \epsilon, b]$, com $U \subset V$ para algum aberto V de forma que $\overline{V} \subset D$. Como $(b, x(b)) \in U$, pelo corolário 2.8 temos que existe uma solução passando por $(b, x(b))$, definida pelo menos em $[b-\alpha, b+\alpha]$, onde α é dada conforme o corolário 2.8. Logo existe uma extensão de x no intervalo $[a+\epsilon, b+\alpha]$. Desde que U é compacto, pode-se continuar esse processo um número finito de vezes para concluir que existe uma extensão de $x(t)$ para um intervalo $[a + \epsilon, b_U]$ tal que $(b_U, x(b_U))$ não pertence a U.

Agora, escolha a sequência $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos em D com fecho compacto tais que $\overline{V}_n \subset V_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = D$. Para cada V_n existe uma sequência monótona crescente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construída como acima, na qual a solução $x(t)$ de (2.2) em $[a + \epsilon, b]$ tenha uma extensão no intervalo $[a+\epsilon, b_n]$ e $(b_n, x(b_n))$ não está em $\overline{V}_n$. Se $b_n \to \infty$, então $(b_n, x(b_n))$ é ilimitado e o item (ii) é válido. Se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está limitada superiormente, considere $\omega = \lim_{n\to\infty} b_n$. É claro que x foi estendida para o intervalo $[a + \epsilon, \omega)$ e não pode ser estendida mais pois a sequência $(b_k, x(b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é ilimitada ou tem pontos de acumulação em ∂D. De fato, suponha por absurdo que $x : [a + \epsilon, \omega) \to \mathbb{R}^n$ admite uma extensão $\widehat{x} : [a + \epsilon, \omega] \to \mathbb{R}^n$. Com esse resultado temos que $x([a + \epsilon, \omega])$ é compacto e portanto limitado. Com isso também concluímos que o conjunto $\{(b_k, x(b_k)), k \in \mathbb{N}\}$ é limitado, então a sequência $(b_k, x(b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(b_{k_j}, x(b_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ convergente.

Tome a sequência $(b_{k_j}, x(b_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ convergindo para $(\omega, \bar{y}) \in D$. Como $D = \cup V_k$ então $(\omega, \bar{y}) \in V_l$ para algum $l \in \mathbb{N}$. Dessa forma $(b_{k_j}, x(b_{k_j})) \in V_l$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Mas se $k_j > l$ então $(b_{k_j}, x(b_{k_j})) \notin V_{k_j}$, o que nos dá uma contradição. Conclui-se aqui a demonstração da primeira parte do teorema.

Agora seja $x(t)$ definida no seu intervalo máximo de existência (a, b) (não necessariamente construida como na primeira parte da demonstração) tal que $(t, x(t))$ é limitada, ou seja, a afirmação **(ii)** do enunciado é falsa. Suponha por absurdo que $(t, x(t))$ não tende para a fronteira de D quando $t \to b$. Dessa forma existe $y \in \mathbb{R}^n$ e uma sequência $(t_j, x(t_j))_{j\in\mathbb{N}}$ convergindo $(b, y) \in B(\alpha, \beta, b, y) \subset D$ para algum $\alpha, \beta > 0$.

Como f é limitada em $B(\alpha, \beta, b, y)$ temos que toda solução $x(t)$ em $B(\alpha, \beta, b, y)$ satisfaz

$$\|x(t) - x(\tau)\| = \left\| \int_\tau^t f(s, x(s))ds \right\| \leqslant \int_\tau^t \|f(s, x(s))\|ds \leqslant M_U|t - \tau|. \qquad (2.8)$$

Em particular, para k suficientemente grande, temos que $\|t_k - b\| < \frac{\alpha}{2}$ e $\|x(t_k) - y\| < \frac{\beta}{2}$. Com isso, se $\|t - t_k\| < \frac{\alpha}{2}$, então

$$\|x(t) - y\| \leqslant \|x(t) - x(t_k)\| + \|x(t_k) - y\| < M_U \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < \beta, \qquad (2.9)$$

ou seja, $x(t) \in B(\alpha, \beta, b, y)$ se $t \in (t_k - \frac{\alpha}{2}, b) \subset (t_k - \frac{\alpha}{2}, t_k + \frac{\alpha}{2})$.

Portanto $\lim_{t\to b^-} x(t)$ existe pelo lema 2.10 e $x(t)$ pode ser estendida para $(a, b]$, o que é uma contradição. ■

A demonstração do teorema nos diz que se conseguirmos mostrar que uma solução é limitada no seu intervalo máximo de existência, então converge para a fronteira de D. Assim veremos no próximo exemplo que se $D = \mathbb{R}^{n+1}$ então a solução está definida em um intervalo ilimitado em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.12. *Seja $D = (t_1, \infty) \times B_\sigma(0)$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua, onde $B_\sigma(0)$ é a bola aberta em $\mathbb{R}^n$. Seja $x : (t_1, b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma solução do problema de valor inicial (2.2) que admite $\beta \in (0, \sigma)$ e $t_0 \in (t_1, b)$ tal que se $\widehat{x}$ é uma continuação de x, então $\|\widehat{x}(t)\| < \beta$ para todo $t > t_0$.*

Então x admite uma continuação em (t_1, ∞).

De fato, tome $T > t_0$ e $\gamma > 0$ tal que $\beta < \gamma < \alpha$ e o retângulo

$$D_1 = \{(t, x) : t_0 < t < T, \|x\| < \gamma\}$$

esteja contido em D. Observe que $f(t, x)$ é contínua em D_1. Seja $x(t)$ solução de (2.2) tal que $(t, x(t)) \in D_1$. Dessa forma a solução $x(t)$ é limitada e pelo teorema 2.11 ela pode ser continuada para à fronteira de D. Mas como qualquer continuação $\widehat{x}$ de x satisfaz $\|\widehat{x}\| < \beta$, temos que $(t, x(t))$ se aproxima da fronteira de D_1 quando $t \to T$. Portanto $\widehat{x}(t)$ está definida em $[t_0, T)$. Como T é qualquer temos que $x(t)$ pode ser continuada em $[t_0, \infty)$.

2.3 Propriedades de continuidade e unicidade

Definição 2.13. *Seja D um aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$. Uma função $f : D \to \mathbb{R}^n$ é dita ser **localmente Lipschitziana** em x se para todo subconjunto fechado e limitado U em D existe um $k = k_U$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant k_U \|x - y\|$$

para todo (t, x), $(t, y) \in U$.

Observação 2.14. *Se $f : D \to \mathbb{R}^n$ tem as primeiras derivadas parciais contínuas em relação a x então f é localmente Lipschitziana em x.*

Para cada fechado e limitado $U \subset D$, tome a cobertura de U dada por

$$\mathcal{C} = \{(\bar{s}_\alpha, \bar{t}_\alpha) \times (\bar{a}_{1\alpha}, \bar{b}_{1\alpha}) \times \cdots \times (\bar{a}_{n\alpha}, \bar{b}_{n\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda},$$

onde Λ é um conjunto de índices. Considere uma subcobertura finita

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(\bar{s}_i, \bar{t}_i) \times (\bar{a}_{1i}, \bar{b}_{1i}) \times \cdots \times (\bar{a}_{ni}, \bar{b}_{ni})\}_{i=1,\ldots,k}$$

de U.

Agora considere uma cobertura de U formada por

$$\mathcal{F} = \{E_i := [s_i, t_i] \times [a_{1i}, b_{1i}] \times \cdots \times [a_{ni}, b_{ni}]\}_{i=1,\ldots,k},$$

com $[s_i, t_i] \subset (\bar{s}_i, \bar{t}_i)$ *e* $[a_{li}, b_{li}] \subset (\bar{a}_{li}, \bar{b}_{li})$ *para todo* $l = 1, \ldots, n$. *Denote*

$$E = \cup_{i=1}^k E_i, \quad M_U = \max_{(t,x)\in U} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| \quad e \;\; d = \min_{i,j=1,\ldots,k} \{d(E_i, E_j), E_i \cap E_j = \varnothing\}$$

se existirem i, j *tais que* $E_i \cap E_j = \varnothing$. *Tome* $\theta = 2\max_{(t,x)\in E} \|f(t,x)\|$. *Defina* $k_U = \max\{2M_U, \frac{\theta}{d}\}$ *se existirem* $i, j = 1, \ldots, k$ *tais que* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *e* $k_U = 2M_U$ *caso contrário.*

Afirmação: $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant k_U \|x - y\|$ *para todo* $(t,x), (t,y) \in U$.

Tome $(t,x) \in E_i$, $(t,y) \in E_j$ *e subdividiremos a análise em dois casos. Considere o primeiro caso em que* $E_i \cap E_j = \varnothing$. *Então*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant \|f(t,x)\| + \|f(t,y)\| \leqslant 2 \max_{(t,x)\in U} \|f(t,x)\| = \theta = \frac{\theta}{d}.d \leqslant k_U \|x - y\|.$$

Já no segundo caso quando $E_i \cap E_j \neq \varnothing$ *temos* $E_i \cap E_j = [s,t] \times [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. *Note que se* $(t,x) = (t, x^1, \ldots, x^n)$ *e* $(t,y) = (t, y^1, \ldots, y^n)$ *então existe* $(t,z) = (t, z^1, \ldots, z^n) \in E_i \cap E_j$ *tal que* z^i *está entre* x^i *e* y^i *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Então*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant \|f(t,x) - f(t,z)\| + \|f(t,z) - f(t,y)\|$$

$$\leqslant \max_{(t,x)\in E_i} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| \|x - z\| + \max_{(t,x)\in E_j} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| \|z - y\| = M_U \|x - z\| + M_U \|y - z\|,$$

onde a segunda desigualdade ocorre pela desigualdade do valor médio. Logo

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant M_U(\|x - z\| + \|y - z\|). \tag{2.10}$$

Pela escolha de z *satisfazendo* $z_i \in (x_i, y_i)$ *temos que* $(x_i - z_i)$ *e* $(z_i - y_i)$ *tem o mesmo sinal ou um deles é zero. Assim* $\langle x - z, z - y \rangle \geqslant 0$. *Disso obtemos que*

$$\|x - y\|^2 = \langle (x - z) + (z - y), (x - z) + (z - y) \rangle$$

$$= \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - z, z - y \rangle$$

$$\geqslant \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2.$$

Então

$$\|x - y\| \geqslant \max\{\|x - z\|, \|y - z\|\}$$

e

$$2\|x-y\| \geqslant \|x-z\| + \|y-z\|.$$

Logo, por (2.10)*, temos* $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant 2M_U\|x-y\| \leqslant k_U\|x-y\|$*. Portanto* f *é Lipschitziana em relação a* x *com constante de Lipschitz* k_U*.*

Já vimos pelo teorema de Peano que se $f(t,x)$ é contínua em um domínio D então para cada $(t_0,x_0) \in D$ existe pelo menos uma solução x de (2.1) satisfazendo $x(t_0) = x_0$. Suponha que além disso, essa solução seja única. Tomando $(t_0,x_0) \in D$ denotaremos $x(t,t_0,x_0)$ a única solução de (2.1) satisfazendo $x(t_0) = x_0$, $(a(t_0,x_0), b(t_0,x_0))$ o intervalo maximal de existência de $x(t,t_0,x_0)$ e $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o domínio da definição de $t \longmapsto x(t,t_0,x_0)$ dado por

$$E = \{(t,t_0,x_0) : a(t_0,x_0) < t < b(t_0,x_0), (t_0,x_0) \in D\}.$$

Definição 2.15. *A* ***trajetória*** *da solução* x *do problema* (2.2) *é o conjunto de pontos em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dado por* $(t, x(t,t_0,x_0))$ *para* $t \in (a(t_0,x_0), b(t_0,x_0))$*.*

O conjunto E é chamado de domínio da definição de $x(t,t_0,x_0)$.

Teorema 2.16 (Picard Lindelöff)**.** *Seja* D *um aberto em* $\mathbb{R}^{n+1}$*,* $f(t,x)$ *contínua em* D *e localmente Lipschitziana com respeito a* x *em* D *e* E *o domínio de definição de* $x(t,\bar{t},\bar{x})$*. Então para todo* $(t_0,x_0) \in D$*, existe uma única solução* $x(t,t_0,x_0)$ *de* (2.1) *com* $x(t_0,t_0,x_0) = x_0$*. Além disso,* $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *é aberto e* $x(t,t_0,x_0)$ *é contínua em* E*.*

Demonstração. Para qualquer subconjunto fechado e limitado $U \subset D$ escolha $\alpha, \beta > 0$ tais que $B(\alpha,\beta,t_0,x_0) \subset D$ para cada (t_0,x_0) em U de forma que se

$$V = \cup_{(t_0,x_0)\in U} B(\alpha,\beta,t_0,x_0)$$

então $\overline{V} \subset D$.

Tome $M = \sup_{(t,x)\in V} \|f(t,x)\|$ e k a constante de Lipschitz de $f(t,x)$ com respeito a x em $\overline{V}$. Escolha $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0$ satisfazendo $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$, $\bar{\beta} \leqslant \beta$, $M\bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta}$ e $k\bar{\alpha} < 1$, e tome

$$\mathcal{F} = \{\phi \in \mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}(0), \mathbb{R}^n) : \phi(0) = 0, |\phi(t)| \leqslant \bar{\beta} \; para \; t \in I_{\bar{\alpha}}(0)\}.$$

Para cada $\phi \in \mathcal{F}$, defina a função $T\phi$ por

$$T\phi(t) = \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds$$

$t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$. Dividiremos a demonstração em 6 partes.

Parte 1: Para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução de (2.2) tal que $(t, x(t)) \in B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_0, x_0)$.

Considere T como a função $\phi \longmapsto T\phi$. Então os pontos fixos de T em $\mathcal{F}$ coincidem com a solução $x(t) = \phi(t-t_0) + x_0$ de (2.2) e são tais que $(t, x(t)) \in B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_0, x_0)$ para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$. De fato, veja que $x(t)$ é solução de (2.2) com $(t, x(t)) \in B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_0, x_0)$ se, e somente se,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

para $t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$. Mas como $x(t) = \phi(t-t_0) + x_0$, a igualdade acima é equivalente à igualdade

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds,$$

para $t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$. Ainda, note que

$$T\phi(0) = \int_{t_0}^{t_0} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds = 0$$

e

$$\begin{aligned} \|T\phi(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds \right\| \leqslant \int_{t_0}^{t+t_0} \|f(s, \phi(s-t_0)+x_0)\| ds \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t+t_0} M ds = Mt \leqslant \bar{\beta} \end{aligned} \tag{2.11}$$

para $t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$. Portanto, $T(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ e $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Além disso, observe que

$$\|T\phi(t) - T\bar{\phi}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0))ds - \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \bar{\phi}(s-t_0))ds \right\| \tag{2.12}$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0)) - f(s, \bar{\phi}(s-t_0))ds \right\| \leqslant \int_{t_0}^{t+t_0} \|f(s, \phi(s-t_0)) - f(s, \bar{\phi}(s-t_0))\| ds$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t+t_0} k\|\phi(s-t_0) - \bar{\phi}(s-t_0)\| ds \leqslant k \int_{t_0}^{t+t_0} \sup_{s \in I_{\bar{\alpha}}(0)} \|\phi(s-t_0) - \bar{\phi}(s-t_0)\| ds$$

$$\leqslant k \int_{t_0}^{t+t_0} \|\phi - \bar{\phi}\| ds = k\|\phi - \bar{\phi}\| t \leqslant k\bar{\alpha}\|\phi - \bar{\phi}\|.$$

Sendo assim, para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$ temos que $\|T\phi(t) - T\bar{\phi}(t)\| \leqslant k\bar{\alpha}\|\phi - \bar{\phi}\|$. Dessa forma

$$\|T\phi - T\bar{\phi}\| \leqslant k\bar{\alpha}\|\phi - \bar{\phi}\|. \tag{2.13}$$

Desde que $k\bar{\alpha} < 1$, T é uma contração de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}$.

Como $\mathcal{F}$ é fechado e T é uma contração de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}$, pelo Teorema do Ponto fixo de Banach temos que existe um único ponto fixo $\phi(t) = \phi(t, t_0, x_0)$ de T em $\mathcal{F}$, portanto existe uma única solução de (2.2) e tal que $(t, x(t))$ pertence a $B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_0, x_0)$.

Parte 2: Existe apenas uma solução da equação (2.2) com $(t, x(t)) \in U$. De fato, se existem duas soluções x, y de (2.1) com $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = x_0$ e $(s, x_s) \in U$ tal que $x(s) = y(s) = x_s$, mas para todo $\eta > 0$ existe $t_\eta \in I_\alpha(s)$ tal que $x(t_\eta) \neq y(t_\eta)$, então nós podemos considerar as trajetórias definidas por $x(t)$, $y(t)$, para $t \in I_{\bar{\alpha}}(s)$, de forma que $(t, x(t)), (t, y(t)) \in B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t_s, x_s)$. Neste caso $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}(s)$ devido à parte 1, o que é uma contradição.

Parte 3: Para cada $\phi \in \mathcal{F}$ considere a função $T_{(t_0,x_0)}\phi$ como

$$(t_0, x_0) \longmapsto \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s - t_0) + x_0) ds$$

para $t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$ e $(t_0, x_0) \in U$, e a função

$$\begin{array}{rcl} \phi : U & \rightarrow & \mathcal{F} \\ (t_0, x_0) & \longmapsto & \phi(t, t_0, x_0) \end{array},$$

onde $t \longmapsto \phi(t, t_0, x_0)$ é o único ponto fixo de $T_{(t_0,x_0)}(\phi)$ em $\mathcal{F}$. Mostremos que a função $(t, t_0, x_0) \longmapsto \phi(t, t_0, x_0)$ é contínua para $(t_0, x_0) \in U$ e $t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$.

Como (2.13) nos mostra que $\|T_{(t_0,x_0)}\phi - T_{(t_0,x_0)}\bar{\phi}\| \leqslant k\bar{\alpha}\|\phi - \bar{\phi}\|$ para todo $(t_0, x_0) \in U$ e $\phi \in \mathcal{F}$, então $T_{(t_0,x_0)}$ é uma contração uniforme em $\mathcal{F}$ para $(t_0, x_0) \in U$. Sendo assim podemos usar o teorema 1.30 para concluir que $(t_0, x_0) \longmapsto \phi(t, t_0, x_0)$ é contínua em U desde que a função $(t_0, x_0) \longmapsto T_{(t_0,x_0)}\phi(t)$ seja contínua em U, o que será verificado abaixo. Para isso, provaremos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tais que $\|T_{(t_0,x_0)}\phi(t) - T_{(t_1,x_1)}\phi(t)\| < \epsilon$ sempre que $\|(t_0, x_0) - (t_1, x_1)\| < \delta$ nos seguintes casos:

(i) $t_0 \geqslant t_1$ e $t \in [0, \bar{\alpha}]$;

(ii) $t_0 \geqslant t_1$ e $t \in [-\bar{\alpha}, 0]$;

(iii) $t_0 \leqslant t_1$ e $t \in [0, \bar{\alpha}]$;

(iv) $t_0 \leqslant t_1$ e $t \in [-\bar{\alpha}, 0]$.

Na verdade demonstraremos somente o caso (i). Nos outros casos indicaremos as adaptações de (i) que são necessárias para a demonstração.

Caso (i): Considere $U_{t_0} = \{(t_1, x_1) \in U : t_1 \leqslant t_0\}$. Para todo $(t_1, x_1) \in U_{t_0}$ tal que $t_0 - t_1 \leqslant \bar{\alpha}$, $\phi(s - t_0)$ está definida em $s = t + t_1$ para $t \in [0, \bar{\alpha}]$. Sendo assim, para $t \in [0, \bar{\alpha}]$ temos que, como ϕ é contínua, para cada $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|\phi(s - t_0) - \phi(s - t_1)\| < \frac{\epsilon_1}{8\bar{\alpha}} \tag{2.14}$$

sempre que $|(s - t_0) - (s - t_1)| = |t_1 - t_0| < \delta_1$. Veja também que pelo fato de $f(t, x)$ ser localmente Lipschitziana em relação a x com constante de Lipschitz k, então

$$\int_{t_1}^{t+t_1} \|f(s, \phi(s - t_0) + x_0) - f(s, \phi(s - t_1) + x_1)\| ds$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t+t_1} k\|\phi(s - t_0) + x_0 - \phi(s - t_1) - x_1\| ds$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t+t_1} k\|\phi(s - t_0) - \phi(s - t_1)\| ds + \int_{t_1}^{t+t_1} k\|x_0 - x_1\| ds$$

$$\leqslant \frac{\epsilon_1}{8\bar{\alpha}} t + k\bar{\alpha}\|x_0 - x_1\| \leqslant \frac{\epsilon}{8} + k\bar{\alpha}\|x_0 - x_1\|. \tag{2.15}$$

sempre que $|(s - t_0) - (s - t_1)| = |t_1 - t_0| < \delta_1$, onde a terceira desigualdade se dá por (2.14). Então de (2.15), se tomarmos $\delta_0 = \min\left\{\delta_1, \frac{\epsilon_1}{8M}, \frac{\epsilon_1}{8k\bar{\alpha}}\right\}$ teremos

$$\left\|T_{(t_0,x_0)}\phi(t) - T_{(t_1,x_1)}\phi(t)\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s - t_0) + x_0) ds - \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s - t_1) + x_1) ds\right\|$$

$$= \left\|\int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi(s - t_0) + x_0) ds + \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s - t_0) + x_0) ds \right. \tag{2.16}$$

$$\left. + \int_{t+t_1}^{t+t_0} f(s, \phi(s - t_0) + x_0) - \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s - t_1) + x_1) ds\right\|$$

$$\leqslant \left\|\int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi(s - t_0) + x_0) ds\right\| + \left\|\int_{t+t_1}^{t+t_0} f(s, \phi(s - t_0) + x_0)\right\|$$

$$+ \left\|\int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s - t_0) + x_0) - \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s - t_1) + x_1) ds\right\|$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_0} \|f(s,\phi(s-t_0)+x_0)\|ds + \int_{t+t_1}^{t+t_0} \|f(s,\phi(s-t_0)+x_0)\|ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t+t_1} \|f(s,\phi(s-t_0)+x_0) - f(s,\phi(s-t_1)+x_1)\|ds$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_0} Mds + \int_{t+t_1}^{t+t_0} Mds$$

$$+ \int_{t_1}^{t+t_1} k\|\phi(s-t_0)+x_0-\phi(s-t_1)-x_1\|ds$$

$$\leqslant M(t_0-t_1) + M(t_0-t_1) + \frac{\epsilon_1}{8} + k\bar{\alpha}\|x_0-x_1\|$$

$$\leqslant M\frac{\epsilon_1}{8M} + M\frac{\epsilon_1}{8M} + \frac{\epsilon_1}{8} + k\bar{\alpha}\frac{\epsilon_1}{8k\bar{\alpha}} \leqslant \frac{\epsilon_1}{2}$$

sempre que $\|(t_0,x_0)-(t_1,x_1)\| \leqslant \delta_0$, o que conclui o caso (i).

Para o caso (ii), observe que $\phi(s-t_1)$ está definida para $s = t+t_0$ se $t \in [-\bar{\alpha}, 0]$ e as integrais

$$\int_{t+t_0}^{t+t_1} f(s,\phi(s-t_1)+x_1)ds, \quad \int_{t_0}^{t+t_0} f(s,\phi(s-t_1)+x_1)ds \;\; e \;\; \int_{t_1}^{t_0} f(s,\phi(s-t_1)+x_1)ds$$

estão bem definidas. Decompondo as integrais

$$\int_{t_0}^{t+t_0} f(s,\phi(s-t_0)+x_0)ds - \int_{t_1}^{t+t_1} f(s,\phi(s-t_1)+x_1)ds$$

como

$$\int_{t_0}^{t+t_0} f(s,\phi(s-t_0)+x_0)ds - \int_{t_1}^{t_0} f(s,\phi(s-t_1)+x_1)ds$$

$$- \int_{t_0}^{t+t_0} f(s,\phi(s-t_1)+x_1)ds - \int_{t+t_0}^{t+t_1} f(s,\phi(s-t_1)+x_1)ds$$

em (2.16) e utilizando cálculos similares aos feitos no caso (i), conseguimos demonstrar o caso (ii). Para os casos (iii) e (iv), definimos $U^{t_0} = \{(t_1,x_1) \in U : t_1 \geqslant t_0\}$ e demonstramos utilizando um argumento análogo aos casos (i) e (ii). Portanto, pelo Lema da Colagem (teorema 18.3 de [14]) temos que $(t_0,x_0) \longmapsto T_{(t_0,x_0)}\phi(t)$ é contínua em (t_0,x_0) no conjunto $U = U_{t_0} \cup U^{t_0}$. Como (t_0,x_0) é arbitrário temos que $(t_0,x_0) \longmapsto T_{(t_0,x_0)}\phi(t)$ é contínua em U.

Parte 4: A função $(t,t_0,x_0) \longmapsto x(t,t_0,x_0)$ é contínua para $(t_0,x_0) \in U$ e $t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$.

Como a função $(t_0,x_0) \longmapsto \phi(\cdot,t_0,x_0)$ é contínua em U, então $(t_0,x_0) \longmapsto \phi(t,t_0,x_0)$

é uniformemente contínua em U. Sendo assim, para cada $(t_0, x_0) \in U$ e para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_1, x_1)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$ sempre que $\|(t_0, x_0) - (t_1, x_1)\| < \delta_2$.

Mas $t \longmapsto \phi(t, t_0, x_0)$ é obviamente contínua, pois é solução de (2.1). Assim para cada $\bar{t} \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$ existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\|\phi(\bar{t}, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

sempre que $|\bar{t} - t| < \delta_3$. Sendo assim, se $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$ então

$$\|\phi(\bar{t}, t_0, x_0) - \phi(t, t_1, x_1)\| = \|\phi(\bar{t}, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_0) + \phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_1, x_1)\|$$

$$\|\phi(\bar{t}, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_0)\| + \|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_1, x_1)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $|t - \bar{t}|, \|(t_0, x_0) - (t_1, x_1)\| < \delta$. Portanto $(t, t_0, x_0) \longmapsto \phi(t, t_0, x_0)$ é contínua. Com isso a função $x(t, t_0, x_0) = \phi(t - t_0, t_0, x_0) + x_0$ é uma função contínua em (t, t_0, x_0) para $t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$ e $(t_0, x_0) \in U$.

Parte 5: Existe apenas uma solução do problema (2.2) em todo conjunto D. De fato, suponha por absurdo que existem duas soluções diferentes x e y. Então existe $(s, x_s) \in D$ tal que $x(s) = y(s)$ mas para todo $\eta > 0$ existe t_η em $I_\eta(s)$ tal que $x(t_\eta) \neq y(t_\eta)$. Então nós podemos considerar as trajetórias definidas por $x(t)$, $y(t)$ tais que $(t, x(t))$ e $(t, y(t))$ estejam contidas no conjunto compacto $B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, s, x(s))$, o que é uma contradição pelo que mostramos na **parte 2** dessa demonstração.

Parte 6: E é aberto.

Mostremos que $(t, t_0, x_0) \longmapsto x(t, t_0, x_0)$ é contínua em E. Para isso tome algum ponto $(s, t_0, x_0) \in E$. Para fixar as ideias, tomaremos $s \geqslant t_0$. O caso $s \leqslant t_0$ é tratado da mesma maneira. Pela definição de E temos que s pertence ao intervalo maximal de existência de $x(t, t_0, x_0)$, isso implica que o conjunto fechado

$$U = \{(t, x(t, t_0, x_0)), t_0 \leqslant t \leqslant s\}$$

está contido em D. Tome uma cobertura de U dada por

$$V = \cup_{(t_0,x_0)\in U} B(\alpha,\beta,t_0,x_0)$$

satisfazendo $\overline{V} \subset D$. Seja $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 + (\rho - 1)\alpha \leqslant s < t_0 + \rho\alpha$. Queremos mostrar por indução que $(t, t_0, x_0) \longmapsto x(t, t_0, x_0)$ é contínua para $t \in [t_0, t_0 + \rho\alpha]$.

i) O resultado é válido para $\rho = 1$, ou seja, $x(t, t_0, x_0)$ é contínua em $[t_0, t_0 + \alpha]$.

ii) Suponha por hipótese que $(t, t_0, x_0) \longmapsto x(t, t_0, x_0)$ é contínua em $[t_0, t_0 + \eta\alpha]$ com $\eta \in \mathbb{N}$ e $\eta < \rho$.

iii) Tome $\xi \in [t_0 + \eta\alpha, t_0 + (\eta + 1)\alpha]$, ou seja, $\xi = t + t_0 + \eta\alpha$ com $t \in [0, \alpha]$. Pela unicidade da solução

$$x(\xi, t_0, x_0) = x(\xi, t_0 + \eta\alpha, x(t_0 + \eta\alpha, t_0, x_0)).$$

Como $(\xi, x(t_0 + \eta\alpha, t_0, x_0)) \longmapsto x(\xi, x(t_0 + \eta\alpha, t_0, x_0))$ é contínua para $\xi \in [t_0 + (\eta - 1)\alpha, t_0 + (\eta + 1)\alpha]$, então $(t, t_0, x_0) \longmapsto x(t, t_0, x_0)$ é contínua para $\xi \in [t_0, (\eta + 1)\alpha]$. Portanto, pelo processo de indução, temos que $(t, t_0, x_0) \longmapsto x(t, t_0, x_0)$ é contínua para $t \in [t_0, (\rho + 1)\alpha]$. Como ξ é qualquer, x é contínua em (s, t_0, x_0).

Note que existem $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$ tais que $intB(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, s, x(s, t_0, x_0)) \neq \emptyset$ é uma vizinhança de $(s, x(s, t_0, x_0))$ em D. Tomando

$$\begin{array}{rcl} \psi : E & \to & D \\ (t, t_1, x_1) & \longmapsto & (t, x(t, t_1, x_1)), \end{array}$$

temos que ψ é contínua em E, pois é composição de funções contínuas. Sendo assim $\psi^{-1}(intB(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, s, x(s, t_0, x_0)))$ é uma vizinhança de (s, t_0, x_0) e (s, t_0, x_0) é um ponto interior de E, o que implica que E é aberto pela arbitrariedade de (s, t_0, x_0). ∎

2.4 Extensão do conceito de equação diferencial

Considere D um aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. Nosso problema é encontrar uma função que é localmente absolutamente contínua em um intervalo I tal que $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ e

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \; q.s. \tag{2.17}$$

Se tal função x e intervalo I existirem, nós dizemos que x é uma solução de (2.17). Ainda, se x for uma solução de (2.17) que satisfaz $x(t_0) = x_0$ diremos que x é solução do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Nós omitiremos o termo "quase sempre" quando o mesmo estiver subentendido.

Definição 2.17. *Seja D é um aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$. Nós dizemos que $f : D \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as* ***condições de Carathéodory*** *em D se:*

i) *$t \longmapsto f(t, x)$ é mensurável para cada x fixo;*

ii) *$x \longmapsto f(t, x)$ é contínua para cada t fixo;*

iii) *para cada compacto U de D existe uma função integrável $m_U(t)$ tal que*

$$\|f(t, x)\| \leqslant m_U(t)$$

para todo $(t, x) \in U$.

Lema 2.18. *Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory. A função x é solução do sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.18}$$

em I se, e somente se x satisfaz a equação

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau,$$

para todo $t \in I$.

Demonstração. Esse resultado é consequência direta do teorema 1.58. ■

Teorema 2.19. *Sejam D um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory em D. Então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam α, β números reais positivos tais que o retângulo $B(\alpha, \beta, t_0, x_0) = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\}$ está contido em D. Tome $I_\alpha(t_0) = \{t : |t - t_0| \leqslant \alpha\}$, $m = m|_{B(\alpha,\beta,t_0,x_0)}$ e $M(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$, onde m é a função que satisfaz a terceira condição de Carathéodory. Escolha $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0$ tais que $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$, $\bar{\beta} \leqslant \beta$ e $|M(t)| \leqslant \bar{\beta}$ para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$.

Tome $\mathcal{A} = \{\phi(t) \in \mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}(t_0), \mathbb{R}^n) : \phi(t_0) = x_0, \|\phi(t) - x_0\| \leqslant \bar{\beta}\}$. Por uma demonstração muito similar a do exemplo 1.53 temos que $\mathcal{A}$ é conexo, fechado e limitado. Para $\phi \in \mathcal{A}$, defina a função $T\phi$ pela relação

$$T\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \qquad t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0).$$

Observe que $T\phi$ está bem definida para todo $\phi \in \mathcal{A}$. De fato, como $t \longmapsto f(t, x)$ é mensurável para todo x e $\phi(t)$ é mensurável pois é contínua, então a composta $f(t, \phi(t))$ é mensurável e assim $\|f(t, \phi(t))\|$ é mensurável. E como $m(t)$ é integrável e $\|f(t, \phi(t))\| \leqslant m(t)$, temos que $\|f(t, \phi(t))\|$ é integrável, portanto $f(t, \phi(t))$ é integrável.

Agora veja que se ϕ é ponto fixo de T então ϕ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0) \\ \phi(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.19}$$

pois ϕ é a integral indefinida de sua derivada (Veja o lema 2.18).

Note que $T\phi$ é contínua para cada $\phi \in \mathcal{A}$. Ainda, é imediato que $T\phi(t_0) = x_0$ e

$$\|T\phi(t) - x_0\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \phi(s))\| ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} m(s)ds \right| \leqslant |M(t)| \leqslant \bar{\beta}.$$

Sendo assim, $T\phi \in \mathcal{A}$, portanto, T pode ser considerado uma aplicação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$.

Também temos que o operador T é contínuo em $\mathcal{A}$. De fato, seja $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ uma sequência e $\phi \in \mathcal{A}$ tal que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ϕ uniformemente. Como $x \longmapsto f(t, x)$

é contínua para todo t temos que

$$f(t, \phi_n(t)) \to f(t, \phi(t)) \; q.s.$$

quando $n \to \infty$. Como $(f(t, \phi_n(t)))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $\|f(t, \phi_n(t))\| \leqslant m(t)$, onde $m(t)$ é integrável em $I_{\bar{\alpha}}(t_0)$, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos que

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \phi_n(s))ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

quando $n \to \infty$ para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$. Isso prova a afirmação.

Além disso, para todo $\phi \in \mathcal{A}$, temos que

$$\|T\phi(t) - T\phi(\tau)\| \leqslant \left\| \int_{\tau}^{t} f(s, \phi(s))ds \right\|$$

$$\leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \|f(s, \phi(s))\| ds \right| \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} m(s)ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} m(s)ds - \int_{t_0}^{\tau} m(s)ds \right| = |M(t) - M(\tau)|.$$

Assim

$$\|T\phi(t) - T\phi(\tau)\| \leqslant |M(t) - M(\tau)|. \tag{2.20}$$

Observe também que T é uma função compacta em $\mathcal{A}$. De fato, para todo subconjunto limitado $\mathcal{B}$ contido em $\mathcal{A}$, temos que a sequência $(T\phi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ em $T(\mathcal{B})$ é equicontínua por (2.20), visto que $M(t)$ é uniformemente contínua em $I_{\bar{\alpha}}(t_0)$. Como

$$\|T(\phi(t))\| = \|T(\phi(t)) - x_0\| + \|x_0\| < \bar{\beta} + \|x_0\|,$$

ela também é uniformemente limitada por $\bar{\beta} + |x_0|$. Pelo teorema de Arzela-Ascoli (1.13) segue que a sequência $(T\phi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(T\phi_{n_j}(t))_{j \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente em $\mathcal{C}(I_{\bar{\alpha}}, \mathbb{R}^n)$. Mas como $\overline{T(\mathcal{B})}$ é fechado temos que $(T\phi_{n_j}(t))_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em $\overline{T(\mathcal{B})}$. Sendo assim $\overline{T(\mathcal{B})}$ é compacto e T é completamente contínua.

Portanto, como $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é completamente contínua e $\mathcal{A}$ é convexo, fechado e limitado, temos que existe um ponto fixo de T em $\mathcal{A}$ pelo corolário 1.50. Logo o PVI admite uma única solução. ■

Lema 2.20. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ com fecho compacto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ admitindo uma extensão $\bar{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz as condições de Carathéodory. Então para qualquer solução ϕ de (2.17) definida no intervalo (a, b) temos que $\lim_{t\to a^+} \phi(t)$ e $\lim_{t\to b^-} \phi(t)$ existem. Além disso, definindo-se $\phi(a) = \lim_{t\to a^+} \phi(t)$ e $\phi(b) = \lim_{t\to b^-} \phi(t)$, $\phi(t)$ é solução de (2.17) em $[a, b]$ sempre que $(a, \phi(a)), (b, \phi(b)) \in D$.*

Demonstração. Tome $t_0 \in (a, b)$. Como ϕ é solução em (a, b) temos que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

para $t \in (a, b)$. Se $a < t_1 \leqslant t_2 < b$, então

$$\|\phi(t_1) - \phi(t_2)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^{t_2} f(s, \phi(s))ds\| \leqslant M(t_2) - M(t_1)$$

onde $M(t) = \int_{t_0}^{t} m_{\bar{D}}(s)ds$ é uniformemente contínua em $[a, b]$. Portanto $\lim_{t\to a^+} \phi(t)$ e $\lim_{t\to b^-} \phi(t)$ existem.

O restante da demonstração utiliza o lema 2.18 e é análogo à demonstração do lema 2.10. ∎

Teorema 2.21. *Seja D um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory e $\phi(t)$ a solução de (2.17) em algum intervalo I. Então existe uma continuação para ϕ em um intervalo maximal de existência. Além disso, se (a, b) é o intervalo maximal de existência da solução $x(t)$ de (2.17), temos que uma das afirmações abaixo é verdadeira:*
i) *$(t, x(t))$ tende para a fronteira de D quando $t \to b$ $(t \to a)$;*
ii) *$(t, x(t))$ é ilimitada.*

Demonstração. A demonstração da primeira parte do teorema é análoga a do teorema 2.11. A segunda parte é análoga também. Em vez da desigualdade (2.8), teremos que

$$\|x(t) - x(\tau)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds) \right\| = |M(t) - M(\tau)|$$

onde M é absolutamente contínua. Logo $x(t)$ é uniformemente contínua e o resultado segue. ∎

Da mesma forma que na seção anterior, queremos a definição para uma função que associe a cada $(t_0, x_0) \in D$, a solução $x(t)$ do $P.V.I.$ satisfazendo $x(t_0) = x_0$. Suponha que além de existir uma solução para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

para cada $(t_0, x_0) \in D$ tenhamos que essa solução seja única. Denotaremos por $x(t, t_0, x_0)$ a única solução de (2.17) satisfazendo $x(t_0) = x_0$, $(a(t_0, x_0), b(t_0, x_0))$ o intervalo maximal de existência de $x(t, t_0, x_0)$ e $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o domínio da definição de $t \longmapsto x(t, t_0, x_0)$ dado por

$$E = \{(t, t_0, x_0) : a(t_0, x_0) < t < b(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in D\}.$$

Definição 2.22. *A **trajetória** da solução x do problema (2.17) satisfazendo $x(t_0) = x_0$ é o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por $(t, x(t, t_0, x_0))$ para $t \in (a(t_0, x_0), b(t_0, x_0))$.*

Teorema 2.23. *Seja $f(t, x) : D \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory e tal que para cada compacto $U \subset D$, existe uma função integrável $k_U(t)$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant k_U(t)\|x - y\| \tag{2.21}$$

para todo $(t, x), (t, y) \in U$. Então para todo (t_0, x_0) em U, existe uma única solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t, t_0, x_0) = f(t, x(t, t_0, x_0)) \\ x(t_0, t_0, x_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Além disso, o domínio $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$ da definição da função $x(t, t_0, x_0)$ é aberto e $x(t, t_0, x_0)$ é contínua em E.

Demonstração. Para qualquer compacto $U \subset D$ escolha $\alpha, \beta > 0$ tais que $B(\alpha, \beta, t_0, x_0) \subset D$ para cada $(t_0, x_0) \in U$, e se

$$V = \cup\{B(\alpha, \beta, t_0, x_0); (t_0, x_0) \in U\},$$

então $\overline{V} \subset D$.

Tome $M(t) = \int_{t_0}^{t+t_0} m_{B(\alpha,\beta)}(s)ds$ e $K(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} k_{B(\alpha,\beta)}(s)ds$. Escolha $\bar{\alpha}, \bar{\beta} > 0$ satisfazendo $\bar{\alpha} \leqslant \alpha$, $\bar{\beta} \leqslant \beta$, $|M(t)| \leqslant \bar{\beta}$ e $|K(t)| < 1$ para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$. Denote $K = \max_{t \in I_{\bar{\alpha}}(0)} K(t)$ e tome $\mathcal{F}$ sendo o espaço das funções $\phi : I_{\bar{\alpha}}(0) \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas tais que $\phi(0) = 0$ e $\|\phi(t)\| \leqslant \bar{\beta}$ para $t \in I_{\bar{\alpha}}(0)$. Para cada $\phi \in \mathcal{F}$, defina a função $t \longmapsto T\phi(t)$ por

$$T\phi(t) = \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0) + x_0)ds, \ t \in I_{\bar{\alpha}}(0).$$

Dividiremos a demonstração em 6 partes

Parte 1: Segue de modo análogo à **parte 1** da demonstração do teorema 2.16. A diferença é que as condições $\|f(t,x)\| \leqslant M$ e $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant k\|z-y\|$ utilizadas nas desigualdades (2.11) e (2.12) são substituídas pelas desigualdades $\|f(t,x)\| \leqslant m_{B(\alpha,\beta)}(t)$ e $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant k_{B(\alpha,\beta)}\|x-y\|$ respectivamente.

Parte 2: É idêntica a demonstração da **parte 2** do teorema 2.16.

Parte 3: Vamos reescrever o caso (i) do teorema 2.16 adaptado ao nosso caso. O restante do argumento é análogo ao apresentado na demonstração do teorema 2.16.

Primeiramente mostremos que $(t_0, x_0) \longmapsto T_{(t_0,x_0)}\phi(t)$ é contínua em (t_0, x_0) no conjunto compacto $U_{t_0} = \{(t_1, x_1) \in U : t_1 \leqslant t_0\}$. Considere $(t_0, x_0) \in U$. Para todo $(t_1, x_1) \in U_{t_0}$ tal que $t_0 - t_1 \leqslant \bar{\alpha}$, $\phi(s - t_0)$ está definida em $s = t + t_1$ para $t \in [0, \bar{\alpha}]$. Sendo assim para $t \in [0, \bar{\alpha}]$ temos que, como ϕ é contínua, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \bar{\alpha}$ e

$$\|\phi(s-t_0) - \phi(s-t_1)\| < \frac{\epsilon}{8} \tag{2.23}$$

sempre que $\|(s-t_0) - (s-t_1)\| = \|t_1 - t_0\| < \delta_1$. Portanto se $\delta_2 = \min\{\frac{\epsilon}{8}, \delta_1\}$ então

$$\int_{t_1}^{t+t_1} \|f(s, \phi(s-t_0) + x_0) - f(s, \phi(s-t_1) + x_1)\| ds$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t+t_1} k(s)\|\phi(s-t_0) + x_0 - \phi(s-t_1) - x_1\| ds$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t+t_1} k(s)\|\phi(s-t_0) - \phi(s-t_1)\| ds + \int_{t_1}^{t+t_1} k(s)\|x_0 - x_1\| ds$$

$$\leqslant \left(\frac{\epsilon}{8} + \|x_0 - x_1\|\right) \int_{t_1}^{t+t_1} k(s)ds \leqslant \frac{\epsilon}{4}\left(\left|\int_{t_0}^{t_1} k(s)ds\right| + \left|\int_{t_0}^{t+t_1} k(s)ds\right|\right) \leqslant \frac{\epsilon}{4}2K < \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, como $M(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} m_U(s)ds$ é uniformemente contínua, existe $\delta_3 > 0$ tal que $|M(\tilde{t}) - M(\bar{t})| < \frac{\epsilon}{4}$ sempre que $\|\tilde{t} - \bar{t}\| < \delta_3$. Dessa forma, tomando $\delta_4 = \min\{\delta_2, \delta_3\}$

temos que

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds + \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t+t_1}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds - \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s-t_1)+x_1)ds \right\| \\
&\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds \right\| + \left\| \int_{t+t_1}^{t+t_0} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds \right\| \\
&\quad + \left\| \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s-t_0)+x_0)ds - \int_{t_1}^{t+t_1} f(s, \phi(s-t_1)+x_1)ds \right\| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t_1} \|f(s, \phi(s-t_0)+x_0)\| ds \right| + \int_{t+t_1}^{t+t_0} \|f(s, \phi(s-t_0)+x_0)\| ds \\
&\quad + \left| \int_{t_1}^{t+t_1} \|f(s, \phi(s-t_0)+x_0) - f(s, \phi(s-t_1)+x_1)\| ds \right| \\
&< \left| \int_{t_0}^{t_1} m_{B(\alpha,\beta)}(s)ds \right| + \left| \int_{t+t_1}^{t+t_0} m_{B(\alpha,\beta)}(s)ds \right| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leqslant |M(t_1)-M(t_0)| + |M(t+t_0)-M(t+t_1)| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

sempre que $\|(t_0, x_0) - (t_1, x_1)\| \leqslant \delta_0$. Sendo assim $(t_0, x_0) \longmapsto T_{(t_0,x_0)}\phi(t)$ é contínua em $(t_0, x_0) \in U_{t_0}$ se $t \geqslant 0$.

As partes **4**, **5** e **6** são idênticas às da demonstração do teorema 2.16. ■

Proposição 2.24. *Todo sistema linear*

$$\dot{x} = A(t)x + h(t),$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$, $h(t)$ é um vetor com n coordenadas, cujos elementos são integráveis em todo intervalo limitado, satisfaz as condições de Carathéodory. Além disso, para cada compacto $U \subset D$ existe uma função integrável $k_U(t)$ tal que

$$\|A(t)x + h(t) - A(t)y + h(t)\| \leqslant k_U(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in U.$$

Portanto o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite uma única solução.

Demonstração. Sejam $A(t)$, x e $h(t)$ como ditas no enunciado. Então

$$A(t)x + h(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \cdots & A_{1n}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \cdots & A_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \cdots & A_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + \cdots + A_{1n}(t)x_n + h_1(t) \\ A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + \cdots + A_{2n}(t)x_n + h_2(t) \\ \vdots \\ f_{n1}(t)x_1 + f_{n2}(t)x_2 + \cdots + f_{nn}(t)x_n + h_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j}(t)x_j + h_1(t) \\ \sum_{j=1}^n A_{2j}(t)x_j + h_2(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{nj}(t)x_j + h_n(t) \end{bmatrix}.$$

Para cada x fixo, como todas as entradas da função vetorial $A(t)x+h(t)$ são integráveis em intervalos compactos, então este é integrável e portanto mensurável. Dessa forma

i) Como todo intervalo é união de intervalos compactos, temos que para cada x fixo, $t \longmapsto A(t)x + h(t)$ é mensurável.

ii) $x \longmapsto A(t)x + h(t)$ com t fixo é contínua pois é uma função afim.

iii) Para cada compacto $U \subset D$ tome a função $m_U(t)$ como sendo

$$m_U(t) = M_U \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}(t)| + \sum_{i=1}^n |h_i(t)|.$$

onde $M_U = \max_{(t,x)\in U} \|x\|_S$, com $\|\cdot\|_S$ sendo a norma da soma definida em (1.3). Como $A_{ij}(t)$ e $h_i(t)$ são integráveis em U, então $m_U(t)$ é integrável. Ainda, veja que

$$\|A(t)x + h(t)\|_S = \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j}(t)x_j + h_1(t) \\ \sum_{j=1}^n A_{2j}(t)x_j + h_2(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{nj}(t)x_j + h_n(t) \end{bmatrix} \right\|_S = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n A_{ij}(t)x_j + h_i(t) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}(t)x_j|\right)+\sum_{i=1}^{n}|h_i(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}(t)|\,|x_j|\right)+\sum_{i=1}^{n}|h_i(t)|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}(t)M_U|\right)+\sum_{i=1}^{n}|h_i(t)|\,.$$

De **(i)**, **(ii)** e **(iii)** temos que $f(t,x)$ satisfaz as condições de Carathéodory em D.

Agora, observe que

$$\|A(t)x+h(t)-(A(t)y+h(t))\| = \|A(t)x-A(t)y\|_S = \|A(t)(x-y)\|_S$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \cdots & A_{1n}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \cdots & A_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \cdots & A_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{bmatrix} \right\|_S$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} A_{11}(t)(x_1-y_1) + A_{12}(t)(x_2-y_2) + \cdots + A_{1n}(t)(x_n-y_n) \\ A_{21}(t)(x_1-y_1) + A_{22}(t)(x_2-y_2) + \cdots + A_{2n}(t)(x_n-y_n) \\ \vdots \\ A_{n1}(t)(x_1-y_1) + A_{n2}(t)(x_2-y_2) + \cdots + A_{nn}(t)(x_n-y_n) \end{bmatrix} \right\|_S$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|A_{i1}(t)(x_1-y_1) + A_{i2}(t)(x_2-y_2) + \cdots + A_{in}(t)(x_n-y_n)|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}|A_{i1}(t)|\,|x_1-y_1| + |A_{i2}(t)|\,|x_2-y_2| + \cdots + |A_{in}(t)|\,|x_n-y_n|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}|A_{i1}(t)|\,\|x-y\|_S + |A_{i2}(t)|\,\|x-y\|_S + \cdots + |A_{in}(t)|\,\|x-y\|_S$$

$$\leqslant \|x-y\|_S\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}(t)|\right).$$

Como $A_{ij}(t)$ é integrável em U, então $|A_{ij}(t)|$ também é. Assim

$$\|A(t)x+h(t)-(A(t)y+h(t))\| \leqslant \|x-y\|_S\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}(t)|\right),$$

o que demonstra a proposição. ■

Finalizamos o capítulo com um teorema de existência global de soluções de um

P.V.I. A sua demonstração pode ser encontrada em [17], teorema II.3.2.

Teorema 2.25. *Seja* $f : D = (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função satisfazendo as condições do teorema* 2.23*. Além disso, suponha que*

$$\|f(t, x)\| \leqslant M(t)(1 + \|x\|),$$

onde $M : (a, b) \to \mathbb{R}$ *é uma função integrável. Então o P.V.I*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite uma única solução $x(t)$ *definida em todo o intervalo* (a, b)*.*

CAPÍTULO 3

PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE PONTRYAGIN EM VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

3.1 Dinâmica Hamiltoniana

A dinâmica Hamiltoniana é um formalismo matemático poderoso usado na descrição do movimento de sistemas físicos. Recebe esse nome em homenagem a William Rowan Hamilton, um matemático e físico irlandês que elaborou a mecânica Hamiltoniana no século XIX. A abordagem Hamiltoniana é uma alternativa à formulação Lagrangiana, oferecendo uma maneira diferente de analisar e resolver problemas de movimento. Enquanto as equações Lagrangianas nos oferecem informações sobre a solução de um problema variacional com uma equação de segunda ordem, as equações Hamiltonianas nos oferecem equações de primeira ordem. Para estudar esse assunto, embasamos nossos estudos em [8].

Nessa seção iremos introduzir métodos variacionais que posteriormente serão usados como motivação para o Princípio do Máximo de Pontryagin.

3.1.1 Equações de Euler-Lagrange

Suponha que nos seja dada uma função suave

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, v)$ que é chamada como Lagrangiano. Tome $T > 0$ e $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ dados. O problema básico do cálculo de variações é encontrar uma curva $x^* : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ suave que minimize o funcional

$$I[x] = \int_0^T \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))dt \tag{3.1}$$

entre todas as funções x satisfazendo $x(0) = x_0$ e $x(T) = x_1$.

Agora assuma que x^* resolve o problema variacional. A questão fundamental é encontrar uma forma de caracterizar x^*.

Notação: Nós escrevemos $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, v)$ e consideramos a variável x denotando a posição e a variável v denotando velocidade. As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \mathcal{L}_{x_i}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \mathcal{L}_{v_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

e escrevemos

$$\nabla_x \mathcal{L} = (\mathcal{L}_{x_1}, \ldots, \mathcal{L}_{x_n}), \quad \nabla_v \mathcal{L} = (\mathcal{L}_{v_1}, \ldots, \mathcal{L}_{v_n}).$$

Teorema 3.1 (Equações de Euler-Lagrange)**.** *Seja x^* a função suave que minimiza* (3.1) *e satisfaz $x(0) = x_0$ e $x(T) = x_1$. Então x^* resolve as equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left[\nabla_v \mathcal{L}(x^*(t), \dot{x^*}(t))\right] = \nabla_x \mathcal{L}(x^*(t), \dot{x^*}(t)). \tag{3.2}$$

Demonstração. **1)** Tome uma curva de classe $\mathcal{C}^1$ qualquer $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, satisfazendo $y(0) = y(T) = 0$. Usaremos x para representar x^* na demonstração para simplificar a notação.

Defina

$$i(\tau) = I[x + \tau y]$$

para $\tau \in \mathbb{R}$. Note que $x(0) + \tau y(0) = x_0$ e $x(T) + \tau y(T) = x_1$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Então $x + \tau y$ é candidata à solução do problema de variação para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Desde que x é minimizante, nós temos que

$$i(\tau) \geqslant I[x] = i(0).$$

Consequentemente i tem um mínimo em $\tau = 0$, e então $i'(0) = 0$.

2) Iremos agora calcular $i'(\tau)$. Note primeiramente que

$$i(\tau) = \int_0^T \mathcal{L}(x(t) + \tau y(t), \dot{x}(t) + \tau \dot{y}(t))dt,$$

e portanto $i'(\tau)$ é igual a

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i}(x(t) + \tau y(t), \dot{x}(t) + \tau \dot{y}(t)) y_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{v_i}(x(t) + \tau \dot{y}(t), \dot{x}(t) + \tau \dot{y}(t)) \dot{y}_i(t) \right) dt.$$

Tomando $\tau = 0$ temos

$$0 = i'(0) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i}(x(t), \dot{x}(t)) y_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{v_i}(x(t), \dot{x}(t)) \dot{y}_i(t) \right) dt.$$

3) Fixe $j \in \mathbb{N}$ com $0 \leqslant j \leqslant n$ e escolha y tal que $y_i(t) = 0$ para $i \neq j$ e $y_j = \psi(t)$, onde $\psi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ é uma função suave arbitrária. Usando y escolhido como acima obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{x_i}(x(t), \dot{x}(t)) y_i(t) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{v_i}(x(t), \dot{x}(t)) \dot{y}_i(t) \right) dt \\ &= \int_0^T \mathcal{L}_{x_j}(x(t), \dot{x}(t)) y_j(t) + \mathcal{L}_{v_j}(x(t), \dot{x}(t)) \dot{y}_j(t) dt. \end{aligned}$$

Integrando $t \longmapsto \mathcal{L}_{v_j}(x(t), \dot{x}(t)) \dot{y}_j(t)$ por partes e lembrando que $y_j(0) = y_j(T) = 0$ e $y_j(t) = \psi(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \mathcal{L}_{x_j}(x(t), \dot{x}(t)) y_j(t) dt + \left[\mathcal{L}_{v_j}(x(t), \dot{x}(t)) y_j(t) \right]_0^T - \int_0^T \frac{d\mathcal{L}_{v_j}}{dt} (x(t), \dot{x}(t))\, y_j(t) dt \\ &= \int_0^T \left[\mathcal{L}_{x_j}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d\mathcal{L}_{v_j}}{dt}(x(t), \dot{x}(t)) \right] \psi(t) dt. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como isso acontece para todo $\psi : [0, T] \to \mathbb{R}$ suave com $\psi(0) = \psi(T) = 0$, temos que

$$\mathcal{L}_{x_j}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{v_j}(x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

para todo $t \in [0, T]$ pelo lema 1.2.2 de [12]. ■

3.1.2 Equações de Hamilton

Definição 3.2. *Para toda curva x dada, defina*

$$p(t) = \nabla_v \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) \quad t \in I.$$

*Nós chamamos p de **momento generalizado**.*

Nossa intenção agora é reescrever as equações de Euler-Lagrange como um sistema de EDOs de primeira ordem em x e p.

Hipótese: Assuma que para todo $x, p \in \mathbb{R}^n$, nós podemos resolver a equação

$$p = \nabla_v \mathcal{L}(x, v) \tag{3.4}$$

para v em termos de x e p. Isto é, nós supomos que podemos resolver a identidade (3.4) para $v = v(x, p)$.

Definição 3.3. *Definamos o **Hamiltoniano** $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pela fórmula*

$$H(x, p) = p \cdot v(x, p) - \mathcal{L}(x, v(x, p)),$$

com a função v definida acima.

Notação: As derivadas parciais de H são

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = H_{x_i}, \ \frac{\partial H}{\partial p_i} = H_{p_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

e nós denotamos

$$\nabla_x H = (H_{x_1}, \ldots, H_{x_n}), \ \nabla_p H = (H_{p_1}, \ldots, H_{p_n}).$$

Teorema 3.4. *Seja x uma solução das equações de Euler-Lagrange (E-L) e defina p como em*

(3.4). *Então o par* (x,p) *resolve as equações de Hamilton:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t),p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t)) \ . \end{cases} \tag{3.5}$$

Reciprocamente, se $(x(t),p(t))$ *satisfaz* (3.5), *então* $x(t)$ *satisfaz as equações de Euler-Lagrange.*

Além disso, nestes dois casos, a função $t \longmapsto H(x(t),p(t))$ *é constante.*

Demonstração. Veja que para todo $x,p \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla_x H(x,p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[p.v(x,p) - \mathcal{L}(x,v(x,p)\right], \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\left[p.v(x,p) - \mathcal{L}(x,v(x,p))\right] \right).$$

Sendo assim, para cada $i = 1,\ldots,n$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[p.v(x,p) - \mathcal{L}(x,v(x,p))\right] &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\cdot v(x,p)\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{L}(x,v(x,p))\right) \\ &= p\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}(x,p) - \mathcal{L}_{x_i}(x,v(x,p)) - \sum_{j=1}^{n}\mathcal{L}_{v_j}(x,v(x,p))\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x,p) \\ &= p\frac{\partial v}{\partial x_i}(x,p) - \mathcal{L}_{x_i}(x,v(x,p)) - \nabla_v\mathcal{L}(x,v(x,p))\frac{\partial v}{\partial x_i}(x,p). \end{aligned}$$

Mas $p = \nabla_v \mathcal{L}(x,v(x,p))$. Logo

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,p) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x,v(x,p))$$

e

$$\nabla_x H(x,p) = -\nabla_x \mathcal{L}(x,v(x,p)). \tag{3.6}$$

Agora pela hipótese (3.4), $p(t) = \nabla_v \mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t))$ se, e somente se, $\dot{x}(t) = v(x(t),p(t))$. Portanto (3.2) implica que

$$\dot{p}(t) = \nabla_x\mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t)) = \nabla_x\mathcal{L}(x(t),v(x(t),p(t))) = -\nabla_x H(x(t),p(t)).$$

Também temos para todo $x,p \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla_p H(x,p) = v(x,p) + p\cdot\nabla_p v(x,p) - \nabla_v\mathcal{L}\cdot\nabla_p v(x,p) = v(x,p).$$

Isto implica que

$$\nabla_p H(x(t), p(t)) = v(x(t), p(t)).$$

Mas como $p(t) = \nabla_v \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$, então $\dot{x}(t) = v(x(t), p(t))$ e temos

$$\dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t)).$$

Portanto $(x(t), p(t))$ satisfaz as equações de Hamilton.

Suponha agora que $(x(t), p(t))$ seja uma solução de (3.5). Então,

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t)) = \nabla_x \mathcal{L}(x(t), v(x(t), p(t))) \tag{3.7}$$

devido a (3.6). Por outro lado, derivando

$$p(t) = \nabla_v \mathcal{L}(x(t), v(x(t), p(t)))$$

em relação a t, obtemos

$$\dot{p}(t) = \frac{d}{dt}\left(\nabla_v \mathcal{L}(x(t), v(x(t), p(t)))\right) \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), segue-se que $x(t)$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange.

Finalmente, note que

$$\frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) = \nabla_x H(x(t), p(t))\dot{x}(t) + \nabla_p H(x(t), p(t))\dot{p}(t)$$

$$= \nabla_x H \dot{\nabla}_p H + \nabla_p H(-\nabla_x H) = 0.$$

■

Exemplo 3.5 (Um exemplo físico)**.** *Defina*

$$\mathcal{L}(x, v) = \frac{m|v|^2}{2} - V(x),$$

que interpretaremos como energia cinética $\frac{m\|v\|^2}{2}$ *menos a energia potencial* V*. Então*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, v) = -\nabla V(x), \ \nabla_v \mathcal{L}(x, v) = mv.$$

Portanto a equação de Euler-Lagrange é

$$m\ddot{x}(t) = -\nabla V(x(t)),$$

que é a lei de Newton. Além disso

$$p = \nabla_v \mathcal{L}(x, v) = mv$$

é o momento, e o Hamiltoniano é

$$H(x,p) = p \cdot \frac{p}{m} - \mathcal{L}\left(x, \frac{p}{m}\right) = \frac{|p|^2}{m} - \frac{m}{2}\left|\frac{p}{m}\right|^2 + V(x) = \frac{|p|^2}{2m} + V(x)$$

que é a soma da energia cinética e potencial. Para este exemplo, a equação de Hamilton é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{p(t)}{m} \\ \dot{p}(t) = -\nabla V(x(t)) \ . \end{cases}$$

3.2 Variedades Diferenciáveis

Nossa intenção a partir de agora é definir a dinâmica Hamiltoniana em espaços mais gerais do que o Euclidiano. Dessa forma estudaremos novos espaços para a definição dessa teoria, que são as variedades diferenciáveis.

Esses objetos matemáticos nos permitem estudar diferenciabilidade em espaços topológicos que possuem uma estrutura suave e se comportam localmente de maneira semelhante ao espaço euclidiano.

A compreensão dos conceitos básicos desses espaços nos ajudará compreender a definição formal da forma simplética cujas propriedades serão importantes para a formalização dos sistemas Hamiltonianos em variedades diferenciáveis. Para mais detalhes da teoria o leitor pode consultar [4] e [11].

Por fim, seguiremos a convenção utilizada em vários livros em que o termo "diferenciável" significa suave. assim, uma variedade diferenciável é, a rigor, uma variedade suave.

3.2.1 Conceitos iniciais

Definição 3.6. *Uma **variedade diferenciável** de dimensão n é um conjunto M e uma família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, com Λ sendo um conjunto de índices, onde $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \to M$ são aplicações injetoras de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ em M satisfazendo*

(1) $\cup_{\alpha\in\Lambda}\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) = M$;

(2) *Para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a aplicação $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha : \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W) \to \boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W)$ é um difeomorfismo suave;*

(3) *A família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é máxima em relação às condições (1) e (2).*

*O par $(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ é chamado **parametrização de M** e também pode ser denotado como $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \to M$. Se $p \in \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ então dizemos que $(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ é **parametrização de M em** p e $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado de **vizinhança coordenada de p**. Uma família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ satisfazendo as condições (1) e (2) da definição é chamada de **estrutura diferenciável em M**. Denotaremos as coordenadas em U_α por $(x^1, \ldots, x^n)$, que formam um sistema de coordenadas em $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$.*

Para qualquer estrutura diferenciável em M, podemos facilmente completá-la em uma máxima agregando a ela todas as parametrizações, que junto com as parametrizações da estrutura satisfazem a condição (2). Portanto, com certo abuso de linguagem podemos chamar um conjunto munido de uma estrutura diferenciável de variedade diferenciável.

Observação 3.7. *Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha \in \Lambda$. De fato, note que M é um aberto de M na topologia definida acima, pois*

$$\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(M \cup \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)) = \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha,$$

que é aberto em $\mathbb{R}^n$. Também temos que $\emptyset$ é aberto de M, pois

$$\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(\emptyset \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)) = \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

que é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Ainda, tome uma família qualquer $\{A_i\}_{i\in\Gamma}$ de abertos de M, com Γ sendo um conjunto de índices. Então

$$\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}\left((\cup_{i\in\Lambda}A_i) \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}\left(\cup_{i\in\Lambda}A_i \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \cup_{i\in\Lambda}\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}\left(A_i \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)\right).$$

Como $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A_i \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ é aberto de $\mathbb{R}^n$ para cada $i \in \Gamma$, temos que $\cup_{i\in\Gamma}\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A_i \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, assim $\cup_{i\in\Gamma}A_i$ é aberto em M pela topologia definida acima. Também teremos que

$$\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}\left((\cap_{i=1}^m A_i) \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \cap_{i=1}^m \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A_i \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$$

é uma interseção finita de abertos em $\mathbb{R}^n$, sendo assim, um aberto em $\mathbb{R}^n$. Com isso $\cap_{i=1}^m A_i$ é aberto em M.

Observe ainda que com a topologia definida dessa forma teremos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ aberto em M para todo $\alpha \in \Lambda$, pois $\mathbf{x}_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta))$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$ pela definição de variedades diferenciáveis. Uma consequência direta desse fato é que $\mathbf{x}_\alpha$ é um homeomorfismo.

Exemplo 3.8. *O espaço $\mathbb{R}^n$ com a estrutura dada por $(\mathbb{R}^n, Id)$ é uma variedade diferenciável, pois $Id(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, $Id^{-1}(\mathbb{R}^n)$ é aberto e $Id^{-1} \circ Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo.*

Exemplo 3.9. *Superfícies regulares são variedades diferenciáveis. Lembre que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para todo $p \in S$ existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\boldsymbol{x} : U \to V \cap S$ chamada de parametrização de S em p, com U sendo um aberto em $\mathbb{R}^2$, tais que*

***a)** $\boldsymbol{x} : U \to V \cap S$ é um homeomorfismo suave.*

***b)** A diferencial $(d\boldsymbol{x})_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.*

A família $\{\boldsymbol{x} : U_\alpha \to V_\alpha \cap S\}_{\alpha\in\Lambda}$ de todas as parametrizações é uma estrutura diferenciável de S. (Ver a observação 2.2 da referência [4]).

Se M é uma variedade diferenciável de dimensão n a denotaremos como M^n.

3.2.2 Diferenciabilidade

Definição 3.10. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. A função $\phi : M_1 \to M_2$ é **suave em** $p \in M_1$ se dada parametrização $(V, \boldsymbol{y})$ de M_2 em $\phi(p)$ existe uma parametrização $(U, \boldsymbol{x})$ de M_1 em p tal que $\phi(\boldsymbol{x}(U)) \subset \boldsymbol{y}(V)$ e a função*

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \phi \circ \boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é suave em $\boldsymbol{x}^{-1}(p)$. Dizemos que ϕ é suave em um conjunto aberto de M_1 se é suave em todos os pontos desse conjunto.

Observação 3.11. *A definição* 3.10 *é independente da parametrização que tomarmos na estrutura diferenciável. (Ver a referência [4], página 6)*

Definição 3.12. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma função suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada **curva suave em** M. Seja $\alpha(0) = p \in M$ e $\mathcal{D}$ o conjunto de funções de $f : M \to \mathbb{R}$ que são suave em p. O vetor tangente à curva suave α em $t = 0$ é o funcional linear $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \ f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente à alguma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ em $t = 0$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes de M em p será denotado por T_pM.

Chamaremos as curvas suaves simplesmente como curvas neste trabalho.

Observação 3.13. *Podemos dizer que α é diferenciável considerando $(-\epsilon, \epsilon)$ como uma variedade diferenciável, ou um aberto da variedade diferenciável $\mathbb{R}$.*

Introduziremos agora uma convenção notacional comum no estudo de variedades diferenciáveis chamada convenção de Einstein. Ela nos ajudará a simplificar o texto por conta do grande uso de somatórios no estudo que se segue.

Definição 3.14. *Se o mesmo índice aparece duas vezes em uma expressão, uma vez como índice superior e outra como índice inferior, a **convenção de Einstein** estabelece que ele seja entendido como o somatório de todos os possíveis valores de índices, geralmente de* 1 *à dimensão do espaço em questão. Se o índice estiver no denominador de algum termo, então índices superescritos no denominador são subescritos na expressão e vice-e-versa.*

Definição 3.15. *Seja M uma variedade diferenciável, $p \in M$ e $(U, \boldsymbol{x})$ uma parametrização de M em p. Então chamaremos de **curvas coordenadas** as curvas diferenciáveis*

$$\begin{aligned} x^j : I &\to M \\ t &\longmapsto \boldsymbol{x}(a^1, \ldots, a^{j-1}, t, a^{j+1}, \ldots, a^n), \end{aligned}$$

onde $j = 1, \ldots, n$ e $a^1, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^n$ são constantes reais fixas. Os vetores tangentes às curvas coordenadas serão denotados por $\frac{\partial}{\partial x^j}$ (o que é coerente com o caso $M = \mathbb{R}^n$).

Proposição 3.16. *Seja $p \in M$. Se $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ e $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ são curvas suaves tais que $\alpha(0) = \beta(0) = \rho$ e $c \in \mathbb{R}$, então $\alpha'(0) + \beta'(0)$ e $c\alpha'(0)$ definidos por*

$$(\alpha'(0) + \beta'(0))(f) = \alpha'(0)(f) + \beta'(0)(f)$$

e

$$(c\alpha'(0))(f) = c(\alpha'(0)(f))$$

para todo $f \in \mathcal{D}$ respectivamente são vetores tangentes em p. A família de vetores tangentes com esta soma e produto por escalar forma um espaço vetorial n-dimensional.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4]. ∎

Definição 3.17. *O espaço vetorial formado pelos vetores tangentes em p com soma e produto por escalar definidos na proposição 3.16 é o **espaço tangente** de M em p e será denotado por T_pM.*

Proposição 3.18. *Se $\boldsymbol{x} : U \to M$ é uma parametrização, então $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(q), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(q)\}$ é uma base de T_qM.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4]. ∎

Proposição 3.19. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e $\phi : M_1 \to M_2$ uma função suave. Para todo $p \in M_1$ e para cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Tome $\beta = \phi \circ \alpha$. A função*

$$\begin{aligned} d\phi_p : T_pM_1 &\to T_{\phi(p)}M_2 \\ v = \alpha'(0) &\longmapsto \beta'(0) \end{aligned}$$

é uma transformação linear que não depende da escolha de α.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4]. ∎

Definição 3.20. *A transformação linear $d\phi_p$ definida na proposição 3.19 é chamada **diferencial** de ϕ em p.*

Proposição 3.21. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e $\phi : M_1 \to M_2$ suave em $p \in M_1$. Então ϕ é contínua em p.*

Demonstração. Para cada ponto $p \in M_1$ e vizinhança V de $\phi(p)$, tome uma parametrização $(V, \mathbf{y})$ de $\phi(p)$ com $\mathbf{y}(V) \subset V'$. Como ϕ é suave, existe uma parametrização $(U, \mathbf{x})$ de p tal que $\phi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V) \subset V'$. Sendo assim ϕ é contínua. ■

Proposição 3.22. *Sejam M_1, M_2 e M_3 variedades diferenciáveis, $p \in M_1$, $\phi : M_1 \to M_2$ e $\psi : M_2 \to M_3$, onde ϕ e ψ são funções suaves em $p \in \phi(p)$ respectivamente. Então $d(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi(p)} \circ d\phi_p$.*

Demonstração. Tome um vetor $v \in T_pM$. Então existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $\alpha(0) = p$ tal que $\alpha'(0) = v$. Aplicando $d(\psi \circ \phi)_p$ em v temos que

$$d(\psi \circ \phi)_p(\alpha'(0)) = (\psi \circ \phi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ (\phi \circ \alpha))'(0) = d\psi_{\phi(p)}((\phi \circ \alpha)'(0)) = d\psi_{\phi(p)} d\phi_p(\alpha'(0)).$$

■

Definição 3.23. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. A função $\phi : M_1 \to M_2$ é um **difeomorfismo** se for suave, bijetiva e sua inversa ϕ^{-1} for suave. A função ϕ é dita um difeomorfismo local em $p \in M_1$ se existe uma vizinhança U de p e V de $\phi(p)$ tal que $\phi : U \to V$ é um difeomorfismo.*

Proposição 3.24. *Seja $(U, \boldsymbol{x})$ uma parametrização da variedade diferenciável M. Então $\boldsymbol{x} : U \to \boldsymbol{x}(U)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Tome $q \in U$ e as parametrizações (U, Id) de U em q e $(U, \mathbf{x})$ de M $p = \mathbf{x}(q)$. Então podemos expressar $\mathbf{x}$ por meio de parametrizações como $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} \circ Id = Id$. Como $Id : U \to U$ é um difeomorfismo, então $\mathbf{x} : U \to \mathbf{x}(U)$ é um difeomorfismo. ■

3.2.3 Fibrados vetoriais em variedades diferenciáveis

Fibrado tangente

Seja M uma variedade diferenciável. Denotamos como

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$$

o conjunto de todos os vetores tangentes a variedade M, onde cada elemento $(p, v) \in TM$ denota um ponto p na variedade (na primeira entrada do elemento) e um vetor v tangente a esse ponto (na segunda entrada do elemento).

Tome $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ sendo a estrutura diferenciável máxima de M. Denote por $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ as coordenadas em U_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right\}$ a base associada ao espaço tangente de $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. Para todo α, defina

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \to & TM \\ (x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha, u^1, \ldots, u^n) & \longmapsto & \left(\mathbf{x}_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha), \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}\right). \end{array}$$

Geometricamente isto significa que estamos tomando como coordenadas de um ponto $(p, v) \in TM$ a coordenada $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ de p juntamente com as coordenadas de v na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right\}$.

Proposição 3.25. $\{\boldsymbol{y}_\alpha : (U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}_\alpha) \to TM\}_{\alpha\in\Lambda}$ *é uma estrutura diferenciável em* TM.

Demonstração. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [4]. ■

Definição 3.26. TM *munido com a estrutura diferenciável* $\{\boldsymbol{y}_\alpha : (U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}_\alpha) \to TM\}_{\alpha\in\Lambda}$ *é chamado de* ***fibrado tangente*** *de* M.

Fibrado cotangente

Definição 3.27. *Seja* M *uma variedade diferenciável e* $p \in M$. *O espaço dual de* T_pM *é chamado como* ***espaço cotangente*** *de* M *em* p *e é denotado como* T^*_pM.

Denote $T^*M = \{(p, \xi) : p \in M, \xi \in T^*_pM\}$. Seja $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ a estrutura diferenciável maximal de M. Para cada parametrização $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ e $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ denotaremos a base dual da base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right\}$ de T_pM por $\{dx^1_\alpha, \ldots, dx^n_\alpha\}$. Isso dá origem a uma parametrização

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{z}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \to & T^*M \\ (x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha, \xi_1, \ldots, \xi_n) & \longmapsto & (\mathbf{x}_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha), \xi_i dx^i_\alpha) \end{array}$$

Proposição 3.28. *Seja* M *uma variedade diferenciável e* $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ *uma estrutura diferenciável de* M. *Então* $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \boldsymbol{z}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ *é uma estrutura diferenciável de* T^*M.

Demonstração. Para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ tais que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, tome

$$\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha(q_\alpha) = (x^1_\beta(q_\alpha), \ldots, x^n_\beta(q_\alpha))$$

para todo $q_\alpha = (x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha) \in \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta))$. Fixe $p \in M$. Considere as bases

$$\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha} \right\} \quad e \quad \mathcal{B}_\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1_\beta}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n_\beta} \right\}$$

de T_pM. A mudança de base é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^j_\beta} = \frac{\partial x^l_\alpha}{\partial x^j_\beta} \frac{\partial}{\partial x^l_\alpha}. \tag{3.9}$$

Note que $dx^k_\alpha = \frac{\partial x^k_\alpha}{\partial x^i_\beta}(q_\beta) dx^i_\beta$. De fato, basta observar que

$$dx^k_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^j_\beta} \right) = dx^k_\alpha \left(\frac{\partial x^l_\alpha}{\partial x^j_\beta} \frac{\partial}{\partial x^l_\alpha} \right) = \frac{\partial x^k_\alpha}{\partial x^j_\beta} = \frac{\partial x^k_\alpha}{\partial x^i_\beta} dx^i_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^j_\beta} \right)$$

para todo $j = 1, \ldots, n$ devido a (3.9).

Dessa forma, para todo $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha, \xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta)) \times \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\beta^{-1} \circ \mathbf{z}_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha, \xi_1, \ldots, \xi_n) &= \mathbf{z}_\beta^{-1} \left(\mathbf{x}_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha), \xi_i dx^i_\alpha \right) \\ &= \mathbf{z}_\beta^{-1} \left(\mathbf{x}_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha), \xi_i \left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}(q_\beta) dx^j_\beta \right) \right) \\ &= \mathbf{z}_\beta^{-1} \left(\mathbf{x}_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha), \left(\xi_i \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}(q_\beta) \right) dx^j_\beta \right) \\ &= \left(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha(x^1_\alpha, \ldots, x_{\alpha^n}), \xi_i \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^1_\beta}(q_\beta), \ldots, \xi_i \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^n_\beta}(q_\beta) \right) \end{aligned}$$

que é suave.

Pelo fato de que $\{dx^1_\alpha, \ldots, dx^n_\alpha\}$ é base de T^*_pM, então

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \longmapsto \xi_i dx^i_\alpha$$

definida em $\mathbb{R}^n$ cobre todo T^*_pM.

Portanto, como $\cup_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ temos que

$$\cup_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{z}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = T^*M$$

e $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \mathbf{z}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma estrutura diferenciável de T^*M. ■

Definição 3.29. *O Fibrado T^*M munido com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \boldsymbol{z}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é chamado **fibrado cotangente** de M.*

Fibrado de tensores

Generalizaremos agora a construção do fibrado tangente e cotangente. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e V^* o espaço vetorial dual de V. Um tensor de tipo (k,l) sobre V é uma aplicação multilinear

$$T : V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R},$$

onde temos k parcelas V^* e l parcelas V. A soma e produto por escalar de tensores de tipo (k,l) são definidos de maneira natural, de modo que se T_1 e T_2 são tensores de tipo (k,l) sobre V e $a \in \mathbb{R}$ então

$$(T_1 + T_2)(\alpha_1, \dots, \alpha_k, v_1, \dots, v_l) = T_1(\alpha_1, \dots, \alpha_k, v_1, \dots, v_n) + T_2(\alpha_1, \dots, \alpha_k, v_l, \dots, v_l)$$

e

$$(aT_1)(\alpha_1, \dots, \alpha_k, v_1, \dots, v_l) = a\,(T_1(\alpha_1, \dots, \alpha_k, v_1, \dots, v_l))$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$ e $v_1, \dots, v_n \in V$.

Denotaremos o espaço vetorial de tensores de tipo (k,l) sobre V por $V^{(k,l)}$.

Se T_pM é o espaço tangente de uma variedade diferenciável M, então os tensores de tipo (k,l) sobre T_pM serão denotados por $T_p^{(k,l)}M$. Note que $T_p^{(0,1)}M = T_p^*M$ e $T_p^{(1,0)}M$ é naturalmente identificado com T_pM.

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V e $\{e^1, \dots, e^n\}$ é sua base dual em V^*, então

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l} \in V^{(k,l)},\ i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$$

definidos por

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l}(e^{m_1}, \dots, e^{m_k}, e_{s_1}, \dots, e_{s_l}) = \delta_{i_1}^{m_1} \dots \delta_{s_l}^{j_l}.$$

formam uma base de $V^{(k,l)}$. Aqui, δ_j^i é a função delta de Kronecker. Em particular,

$\dim V^{(k,l)} = n^{k+l}$. Representaremos um tensor do tipo (k,l) como combinação linear

$$T = T^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l}.$$

O fibrado dos tensores de tipo (k,l) é dado pelo conjunto

$$T^{(k,l)}M := \{(x,T), x \in M, T \in T^{(k,l)}_x M\}$$

com estrutura diferenciável definida de modo similar ao de TM e T^*M: Dada uma estrutura $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de M, a família de aplicações $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}, \mathbf{z}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathbf{z}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}} \to T^{(k,l)}M$, definidos por

$$\mathbf{z}_\alpha((x_1, \ldots, x_n), (T^{1\ldots1}_{1\cdots1}, T^{1\ldots1}_{1\ldots2}, \cdots, T^{n\ldots n}_{n\ldots n})) = T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}$$

é uma estrutura diferenciável em $T^{(k,l)}M$ chamado de fibrado dos tensores de tipo (k,l) de M.

3.3 O princípio do máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis

O princípio do máximo de Pontryagin é um resultado fundamental na teoria de controle ótimo, que fornece uma condição necessária para determinar a trajetória ótima de um sistema dinâmico sujeito a restrições. Esse princípio foi desenvolvido por Lev Pontryagin, um matemático russo, na década de 1950.

Essa ferramenta nos auxilia na busca pela solução que maximize ou minimize um funcional predeterminado levando em consideração as restrições impostas ao sistema. Em vez de buscar diretamente a trajetória que otimiza o funcional, o princípio do máximo propõe que a solução ótima esteja relacionada a um sistema Hamiltoniano sujeito a um controle.

Nosso objetivo nessa seção é enunciar esse resultado em variedades diferenciáveis. Portanto iremos reformular o Hamiltoniano para variedades direfenciáveis. As referências para esse capítulo são [1], [4], [11] e [16].

3.3.1 Forma Simplética

Definição 3.30. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\pi : M \to N$ uma função suave. Uma* ***seção de*** *π é uma função suave $\theta : N \to M$ tal que $\pi \circ \theta = Id_N$.*

Uma ***seção local de*** *π é uma função suave $\theta : U \to M$ definida em um aberto $U \subset N$ satisfazendo $\pi \circ \theta = Id_U$.*

Definição 3.31. *Seja M uma variedade diferenciável, $T^{(k,l)}M$ o fibrado dos tensores de tipo (k, l) de M e $\pi : T^{(k,l)}M \to M$, $\pi(x, T) \longmapsto x$, a aplicação projeção. Um* ***campo de tensores de tipo*** *(k, l)* ***em*** *M é uma seção (global ou local) de π. Se $(k, l) = (0, 1)$, então T é uma 1-**forma**. Se $(k, l) = (0, l)$ e $T(x)$ é uma forma l-linear alternada para todo $x \in M$, então T é uma l-**forma**. Um campo de vetores é uma seção em TM.*

Se um campo de tensores é escrito em sistema de coordenadas por

$$x \longmapsto \left(x, T^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_l} \right),$$

então as funções coordenadas $T^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$, $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l = 1, \ldots, n$, são suaves.

Um campo de vetores X em M é caracterizado por sua ação em $f \in \mathcal{D}(M)$ como derivada direcional $X(f)$.

O **colchete** $[X, Y]$ de dois campos de vetores X e Y em M é definido por $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave. O colchete $[X, Y]$ também é um campo de vetores em M (Ver lema 8.25 de [11]).

Sejam $\phi : N \to M$ uma função suave e T uma l-forma em M. O **pull-back** de T com respeito a ϕ é a l-forma em N definida por

$$(\phi^* T)(p)(v_1, \ldots, v_l) = T(d\phi_p(v_1), \ldots, d\phi_p(v_l)).$$

Definição 3.32. *Seja M uma variedade diferenciável e $\pi : T^*M \to M$ a projeção canônica. A* ***1-forma tautológica*** *θ em T^*M é definida por*

$$\theta(x, \xi) = \pi^* \xi,$$

ou seja, θ é a $1 - forma$ de T^*M que satisfaz $\theta(x, \xi)(v, \eta) = \xi(d\pi_{(x,\xi)}(v, \eta)) = \xi(v)$.

Além disso, podemos escrever uma 1-forma θ em T^*M como uma seção $\theta : T^*M \to$

$T^*(T^*M)$ dada por

$$\theta(x,\xi) = \theta_i(x,\xi)dx^i + \theta^{i+n}(x,\xi)d\xi_i,$$

onde $\theta_i, \theta^{i+n} : T^*M \to \mathbb{R}$ são funções contínuas para $i = 1, \cdots, n$. As funções θ_i, θ^{i+n} são chamadas componentes de θ e elas são caracterizadas por

$$\theta_i(x,\xi) = \theta(x,\xi)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{(x,\xi)}\right) \ e \ \theta^{i+n}(x,\xi) = \theta(x,\xi)\left(\left.\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right|_{(x,\xi)}\right).$$

Também iremos denotar $\theta(x,\xi)$ por $\theta_{(x,\xi)}$.

Definição 3.33. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um tensor T de tipo $(0,k)$ em V é dito **alternado** se muda de sinal sempre que dois argumentos são trocados. Isso significa que para toda k-upla de vetores $v_1, \cdots, v_k \in V$ e para todo par distinto de índices i, j, temos que*

$$T(v^1, \ldots, v^i, \ldots, v^j, \ldots, v^k) = -T(v^1, \ldots, v^j, \ldots, v^i, \cdots, v^k).$$

O subespaço de todos os funcionais k-lineares alternados em V é denotado por $\Lambda^k(V) \subset T^{(0,k)}(V)$.

Definição 3.34. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Para cada $v \in V$, nós definimos uma transformação linear $i_v : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$, chamada **multiplicação interior por** v, por*

$$i_v\omega(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) = \omega(v, \omega_1, \ldots, \omega_{k-1}).$$

Em outras palavras, $i_v\omega$ é obtido de ω inserindo v na primeira entrada. Por convenção nós interpretamos $i_v\omega$ como sendo zero quando $\omega \in \Lambda^0(V)$ (isto é, um número).

Definição 3.35. *Uma forma bilinear ω em um espaço vetorial V de dimensão finita é dita **não degenerada** se a transformação linear $\widehat{\omega} : V \to V^*$ definido por*

$$\widehat{\omega}(v) = i_v\omega$$

é invertível.

Se T é uma l-forma em M, então a **derivada exterior** dT de T é uma $(l+1)$-forma em M definida por

$$dT(p)(v_1, \ldots, v_{l+1}) = \sum_{i=1}^{l+1} (-1)^{i+1} v_i (T(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{l+1}))$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} T([X_i, X_j](p), v_1, \ldots, \widehat{v}_i, \ldots, \widehat{v}_j, \ldots, v_{l+1}), \tag{3.10}$$

onde X_i, $i = 1, \ldots, l+1$, são campos de vetores suaves tais que $X_i(p) = v_i$ e $\widehat{v}_i$ implica que o vetor v_i está omitido da expressão. A expressão do lado direito de (3.11) não depende da escolha dos X_i. Em particular, se $(U, \mathbf{x})$ é uma parametrização de M e T é uma 1-forma, então

$$dT\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right), \tag{3.11}$$

pois colchete de campos coordenados é sempre nulo pelo Teorema de Clairaut-Schwarz.

Se uma $(l+1)$-forma S é derivada exterior de uma l-forma T, dizemos que S é uma $(l+1)$ **forma exata**. Se dT é a $(l+1)$-forma nula, dizemos que T é uma l-**forma fechada**.

Teorema 3.36. *Toda l-forma exata é uma l-forma fechada.*

Definição 3.37. *Seja M uma variedade diferenciável e θ a 1-forma tautológica em T^*M. A **forma simplética canônica** ω é a 2-forma em M definida por*

$$\omega = d\theta.$$

Definição 3.38. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma **estrutura simplética** em M é uma 2-forma não degenerada em M. Uma variedade diferenciável é chamada variedade simplética se ela estiver munida com uma forma simplética.*

Observação 3.39. *Tome U um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $(U, \boldsymbol{x})$ uma parametrização de x em M e $(x^1, \cdots, x^n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ o sistema de coordenadas correspondente em T^*M. Tomando um vetor qualquer $(v, \eta) \in T(T^*M)$ temos que*

$$(v, \eta) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Pela definição da 1*-forma tautológica* θ *temos que* $\theta(x,\xi)(v,\eta) = \xi(v)$ *e então*

$$\theta(x,\xi)(v,\eta) = \xi(v) = \xi_i dx_i \left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \xi_i v^i.$$

Portanto

$$\theta(x,\xi) = \xi_i dx^i, \tag{3.12}$$

pois

$$\theta(x,\xi)(v,\eta) = \xi_i dx^i \left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j} + v^j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) = \xi_i v^i.$$

Observação 3.40. *Se* θ_1 *e* θ_2 *são* 1*-formas em* M*, definimos* $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \otimes \theta_2 - \theta_2 \otimes \theta_1$*. Note que* $\theta_1 \wedge \theta_2$ *é uma* 2*-forma alternada em* M*.*

Considere a 2*-forma simplética canônica* $\omega = d\theta$ *em* T^*M*. Então, por* (3.11) *e* (3.12)

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = d\theta \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\theta \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\theta \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}(\xi_j) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\xi_i) = 0 \tag{3.13}$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\theta \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\theta \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\xi_i) = -\delta_{ji} \tag{3.14}$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) = 0; \tag{3.15}$$

Note que $d\xi_i \wedge dx^i$ *aplicado em pares de vetores coordenados dá o mesmo resultado de* ω*. Logo* $\omega = d\xi_i \wedge dx^i$*. Das equações* (3.13)*,* (3.14) *e* (3.15)*, não é difícil ver que* ω *é não degenerada. Logo* ω *é uma forma simplética, pois ela é exata e portanto fechada.*

3.3.2 Sistema de controle em variedades

Um sistema de controle em uma variedade diferenciável M consiste em um conjunto de controle

$$C \subset \mathbb{R}^m, \tag{3.16}$$

uma família de controles admissíveis

$$\mathcal{C} = \{u : I \to C\}, \tag{3.17}$$

que é composto por funções mensuráveis limitadas e uma família de campos de vetores suaves

$$\mathcal{X} : M \times C \to TM \tag{3.18}$$

parametrizados por C.

Seja $(x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas em um aberto U de M. Represente a família $\mathcal{X}$ por

$$\mathcal{X}_u = \mathcal{X}(x, u) = f^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.19}$$

Vamos supor que f^i e $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ são contínuas para todo $j = 1, \ldots, n$ em $M \times \overline{C}$. Essa hipótese será necessária para que o princípio de máximo de Pontryagin possa ser aplicado.

Seja $f^0 : M \times \overline{C} \to \mathbb{R}$ a função custo. Vamos supor que f^0 satisfaça as mesmas condições de f^i, para $i = 1, \ldots, n$. Dados $p, q \in M$ o objetivo é determinar o controle admissível $u(t)$ que minimize o funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt, \tag{3.20}$$

onde $x(t)$ é solução da EDO

$$x'(t) = \mathcal{X}(x(t), u(t)) \tag{3.21}$$

satisfazendo $x(t_0) = p$ e $x(t_1) = q$. Aqui t_1 não está fixo. Note que para $u(t)$ fixo, a EDO (3.21) satisfazendo a condição inicial $x(t_0) = p$ admite uma única solução. De fato, seja $x : I \to \mathbf{x}(U)$ uma solução de (3.21) e denote $\mathbf{x}^{-1} \circ x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Então

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.22}$$

Dessa forma, por (3.19) e (3.22), solucionar a EDO (3.21) é o mesmo que solucionar o problema

$$\left(\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t)\right) = \left(f^1(x(t), u(t)), \ldots, f^n(x(t), u(t))\right). \tag{3.23}$$

Agora queremos mudar o domínio de $(f^1(x(t), u(t)), \ldots, f^n(x(t), u(t)))$ para $U \times (-\epsilon, \epsilon)$ para que possamos utilizar o teorema 2.23. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : U \times C & \to & \mathbb{R}^n \\ (q, u) & \longmapsto & (f^1(\mathbf{x}(q), u), \ldots, f^n(\mathbf{x}(q), u)). \end{array} \tag{3.24}$$

"Restringindo"a função f ao controle admissível $u(t)$, podemos fazer a composição e denotar

$$\tilde{f}(q,t) = f(q,u(t)) = (f^1(\mathbf{x}(q),u(t)),\ldots,f^n(\mathbf{x}(q),u(t))). \tag{3.25}$$

$\tilde{f}(q,t)$ representa a função $f(t,q)$ da definição 2.17. Observe que para cada $i = 1,\ldots,n$ temos

(i) $t \longmapsto f^i(\mathbf{x}(q),u(t))$ é mensurável para q fixo pois é composição de função contínua com função mensurável. Logo $t \longmapsto \tilde{f}(q,t)$ é mensurável para q fixo;

(ii) $q \longmapsto f^i(\mathbf{x}(q),u(t))$ é contínua para todo t fixo, pois a restrição de uma função contínua é contínua. Logo $q \longmapsto \tilde{f}(q,t)$ é contínua para todo t fixo;

(iii) Seja $\pi : U \times I \to U$ a aplicação projeção. Para cada compacto $K \subset U \times I$, $\pi(K)$ é compacto. Defina $Im\{u(t)\} = \{u(t), t \in I\}$. Como $Im\{u(t)\} \subset \mathbb{R}^m$ é limitado, temos que $\overline{Im\{u(t)\}}$ é compacto. Como $|f^i(\mathbf{x}(q),u)|$ é contínua no compacto $\pi(K) \times \overline{Im\{u(t)\}} \subset \mathbb{R}^n \times \overline{C}$, então existe C_1 tal que $|f^i(\mathbf{x}(q),u)| \leqslant C_1$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Logo, temos que $\|\tilde{f}(q,t)\| \leqslant \sqrt{n}C_1$ para todo $(q,t) \in K$, pois se $(q,t) \in K$, então $q \in \pi(K)$, $u(t) \in \overline{Im\{u(t)\}}$ e $\|f(\mathbf{x}(q),u(t))\| \leqslant \sqrt{n}C_1$. Com isso, basta considerar $m_K(t) = \sqrt{n}C_1$ como a função de definição das condições de Carathéodory.

(iv) Note que $\tilde{f}$ é uma função que tem derivadas parciais em relação a x^i contínuas em $U \times I$. Logo, pela observação 2.14 existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|\tilde{f}(x,t) - \tilde{f}(y,t)\| \leqslant C_2\|x-y\| \tag{3.26}$$

para todo $(x,t) \in K$. Com isso, basta tomar $k_K(t) = C_2$.

De (i), (ii), (iii) e (iv) temos, pelo teorema 2.23 que existe uma única solução de

$$\dot{x}^i(t) = f^i(\mathbf{x}(x^1(t),\ldots,x^n(t)),u(t)), \tag{3.27}$$

$i = 1,\ldots,n$ em U. Mas (3.27) é a equação (3.21) no sistema de coordenadas $(x^1,\ldots,x^n)$. Logo $x(t)$ satisfaz (3.21) em $\mathbf{x}(U)$ se, e somente se, $(x^1(t),\ldots,x^n(t))$ satisfaz (3.27) em U (veja [4]), o que demonstra a unicidade de soluções de (3.21) em vizinhanças coordenadas $\mathbf{x}(U)$.

Mostremos a unicidade de soluções $x(t)$ de (3.21) que não estão necessariamente em vizinhanças coordenadas. Suponhamos por absurdo que para algum ponto $p \in M$

existam duas curvas $x(t)$ e $y(t)$ satisfazendo (3.21) e $x(0) = y(0) = p$, e que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_1) = y(t_1) = r$ mas $x(t) \neq y(t)$ para $t > t_1$. Dessa forma $x(t)$ e $y(t)$, com t pertencente a uma vizinhança $(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$ suficientemente pequena de t_1, é uma solução de (3.21) em uma vizinhança coordenada e devem coincidir em $(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$, o que nos leva a contradição. Portanto $x(t)$ e $y(t)$ coincidem na interseção de seus domínios.

3.3.3 Princípio do máximo de Pontryagin em variedades diferenciáveis

Defina $\widehat{M} = \mathbb{R} \times M$. Seja $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ a estrutura diferenciável máxima de M. Então $\{(\mathbb{R} \times U_\alpha, (Id, \mathbf{x}_\alpha))\}_{\alpha \in \Lambda}$, com

$$\begin{aligned} (Id, \mathbf{x}_\alpha) : \mathbb{R} \times U_\alpha &\rightarrow \mathbb{R} \times M \\ (x^0, x^1, \ldots, x^n) &\longmapsto (x^0, \mathbf{x}_\alpha(x^1, \ldots, x^n)), \end{aligned}$$

é uma estrutura diferenciável de $\mathbb{R} \times M$ (vide [4]).

Considere o sistema de coordenadas natural (x^0, x, ξ_0, ξ) do fibrado cotangente $T^*\widehat{M}$ (veja a proposição 3.28). Usaremos a variável x^0 do termo $\mathbb{R}$ da variedade diferenciável $\widehat{M} = \mathbb{R} \times M$ considerando

$$x^0(t) = \int_{t_0}^{t} f^0(x(s), u(s))ds,$$

ou seja, é o funcional J de (3.20) que pretendemos minimizar. Denotemos $\widehat{x}(t) = (x^0(t), x(t)) = (x^0(t), \ldots, x^n(t))$. Defina o sistema de controle em $\widehat{M}$ com os mesmos conjuntos de controle C e controles admissíveis $\mathcal{C}$ definidos respectivamente em (3.16) e (3.17), mas com a família de campo de vetores suaves

$$\widehat{\mathcal{X}}(x^0, x, u) = f^0(x, u)\frac{\partial}{\partial x^0} + \mathcal{X}(x, u).$$

Definamos o Hamiltoniano no fibrado cotangente $T^*\widehat{M}$ com respeito a $u \in C$ por

$$\widehat{H}_u(x, \widehat{\xi}) = \widehat{H}(x, \widehat{\xi}, u) = \xi_0 f^0(x, u) + \xi(\mathcal{X}(x, u)).$$

O campo Hamiltoniano com respeito a u é definido como

$$\widehat{\mathbf{H}}_u : T^*\widehat{M} \to T(T^*\widehat{M}),$$

onde $\widehat{\mathbf{H}}_u = (d\widehat{H}_u)^\#$ é o único campo de vetores em $T^*\widehat{M}$ tal que

$$d\widehat{H}_u = \omega(\,\dot{}\,, (d\widehat{H}_u)^\#).$$

Daqui em diante i irá variar de 0 a n na convenção de Einstein. Antes de enunciar o PMP em variedades, é instrutivo ver seu enunciado em sistema de coordenadas, que coincide com o caso onde M é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Em sistemas de coordenadas, se $\xi = \xi_i dx^i$, então

$$\widehat{\mathcal{X}}_u(x) = f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

e

$$\widehat{H}_u(x,\widehat{\xi}) = \xi_0 f^0(x,u) + \xi(\mathcal{X}(x,u)) = f^i(x,u)\xi_i.$$

Então

$$d\widehat{H}_u(x,\widehat{\xi}) = f^i(x,u)d\xi_i + \xi_i\frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j}dx^j.$$

Afirmamos que

$$\widehat{\mathbf{H}}_u(x,\widehat{\xi}) = f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} - \xi_i\frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

De fato, denote $v = \sum_{s=0}^n v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s} = v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s} \in T(T^*\widehat{M})$. Então

$$\omega(v,(d\widehat{H}_u)^\#) = (d\xi_k\wedge dx^k)\left(v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s}, (d\widehat{H}_u)^\#\right)$$

$$= \left(d\xi_k\otimes dx^k - dx^k\otimes d\xi_k\right)\left(v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s}, (d\widehat{H}_u)^\#\right)$$

$$= d\xi_k\left(v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s}\right)dx^k((d\widehat{H}_u)^\#) - dx^k\left(v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s}\right)d\xi_k((d\widehat{H}_u)^\#)$$

$$= d\xi_k\left(v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s}\right)dx^k\left(f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} - \xi_i\frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)$$

$$-dx^k\left(v^s\frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n}\frac{\partial}{\partial \xi_s}\right)d\xi_k\left(f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} - \xi_i\frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\right)$$

$$= v_{k+n}f^k(x,u) - v^k\left(-\xi_i\frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^k}\right)$$

$$= v_{k+n} f^k(x,u) + v^k \left(\xi_i \frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^k} \right). \tag{3.28}$$

Por outro lado, veja que

$$d\widehat{H}_u(v) = \left(f^i(x,u) d\xi_i + \xi_i \frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j} dx^j \right) \left(v^s \frac{\partial}{\partial x^s} + v_{s+n} \frac{\partial}{\partial \xi_s} \right)$$

$$= v_{i+n} f^i(x,u) + \xi_i v^j \frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j}. \tag{3.29}$$

Mudando alguns índices, note que (3.28) e (3.29) são iguais. Sendo assim $\omega(v, (d\widehat{H}_u)^{\#}) = d\widehat{H}_u(v)$ para todo $v \in T^*_{(x,\xi)}(T^*\widehat{M})$.

Considerar trajetórias de $\widehat{\mathbf{H}}_u(x, \widehat{\xi})$ é resolver o sistema Hamiltoniano

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x,u), \quad i = 0, \dots, n \tag{3.30}$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\xi_j \frac{\partial f^j(x,u)}{\partial x^i}, \quad i = 0, \dots, n. \tag{3.31}$$

Optamos por manter x nos argumentos de f em vez de $\widehat{x}$ pois f não depende de x^0. Tomando um controle $u : [t_0, t_1] \to C \in \mathcal{C}$ e uma condição inicial $\widehat{x}(t_0) = (x^0(t_0), x(t_0))$ para algum $x_0 \in \mathbf{x}(U)$, nós podemos encontrar a solução $\widehat{x}(t) = (x^0(t), x(t))$ da equação (3.30). Vamos supor que a solução está definida no intervalo $[t_0, t_1]$. Substituindo $u(t)$ e $x(t)$ no lado direito da equação (3.31), obtemos um sistema linear para as incógnitas ξ_i. Note que este sistema linear satisfaz as condições do teorema 2.25 e sua solução está definida em $[t_0, t_1]$. Toda solução $\xi(t) = (\xi_0(t), \xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ encontrada dessa forma será chamada de solução do sistema (3.31) que corresponde às funções $u(t)$ e $x(t)$. Lembre que as funções vetoriais $x(t)$ e $\widehat{\xi}(t)$ são absolutamente contínuas pois são soluções do sistema de equações diferenciais (3.30) e (3.31).

Para valores fixados de $\widehat{\xi}$ e x, a função $\widehat{H}$ se torna uma função de parâmetros $u \in C$. Denote

$$\mathcal{M}(x, \widehat{\xi}) = \sup_{u \in C} \widehat{H}(x, \widehat{\xi}, u).$$

Se $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são duas funções de t tomadas no intervalo $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, nós usamos o símbolo

$$\phi_1(t) (=) \phi_2(t)$$

para denotar que $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ coincidem quase sempre.

Com isso, podemos enunciar o princípio do máximo de Pontryagin em sistemas de coordenadas.

Teorema 3.41 (Princípio do máximo de Pontryagin). *Tome $u : [t_0, t_1] \to C$ um controle admissível de forma que a solução $\widehat{x}(t)$ da equação* (3.30) *para $u(t)$ está definida no intervalo $[t_0, t_1]$ e satisfaz $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$. Para que $x(t)$ seja ótima para o problema de minimização do funcional $J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt$, com $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$ (t_1 não fixo), é necessário que exista uma função vetorial $\widehat{\xi} = (\xi_0(t), \ldots, \xi_n(t))$ absolutamente contínua e diferente de zero correspondente a função $u(t)$ e $x(t)$ tal que*

1) *A função $\widehat{H}(x(t), \widehat{\xi}(t), u)$ da variável $u \in C$ atinge seu máximo no ponto $u(t)$ quase sempre no intervalo $[t_0, t_1]$, ou seja*

$$\widehat{H}(x(t), \widehat{\xi}(t), u(t))(=)\mathcal{M}(x(t), \widehat{\xi}(t)). \tag{3.32}$$

2) *No tempo final t_1 temos*

$$\xi_0(t_1) \leqslant 0 \quad e \quad \mathcal{M}(x(t_1), \widehat{\xi}(t)) = 0. \tag{3.33}$$

Além disso, se $\widehat{x}(t)$, $\widehat{\xi}(t)$ e $u(t)$ satisfazem os sistemas (3.30), (3.31) *e* (3.32), *então a função $\xi_0(t)$ e $\mathcal{M}(x(t), \widehat{\xi}(t))$ são constantes. Portanto* (3.33) *pode ser verificada em todo tempo t, com $t \in [t_0, t_1]$, e não somente em t_1.*

A demonstração deste teorema é longa e foge do escopo desta dissertação e pode ser encontrada em [16].

O princípio do máximo de Pontryagin em variedades é enunciado abaixo. Sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 3.42 (Princípio do máximo de Pontryagin em variedades). *Tome $u : [t_0, t_1] \to C$ um controle admissível de forma que $\widehat{x}(t)$ é a solução da equação*

$$\widehat{x}'(t) = \widehat{\mathcal{X}}_{u(t)}(\widehat{x}(t)),$$

e que $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$. Para que $x(t)$ seja ótima para o problema de minimização de J (t_1 não fixo) entre os caminhos $x(t)$ que ligam x_0 a x_1, é necessário que exista uma função *absolutamente contínua* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\xi}(\cdot)) : [t_0, t_1] \to T^*\widehat{M}$ *com* $\widehat{\xi}(\cdot)$ *não nula, satisfazendo*

$$(\widehat{x}'(t), \widehat{\xi}'(t)) = \widehat{\boldsymbol{H}}_{u(t)}(x(t), \widehat{\xi}(t)) \tag{3.34}$$

tal que

1) A função $\widehat{\mathbf{H}}((\widehat{x}(t), \widehat{\xi}(t)), u)$ *na variável* $u \in C$ *atinge o seu máximo no ponto* $u(t)$ *quase sempre no intervalo* $[t_0, t_1]$*, ou seja,*

$$\widehat{H}((x(t), \widehat{\xi}(t)), u(t))(=)\mathcal{M}(x(t), \widehat{\xi}(t)). \tag{3.35}$$

2) No tempo final t_1 *temos*

$$\xi_0(t_1) \leqslant 0 \text{ e } \mathcal{M}(x(t_1), \widehat{\xi}(t_1)) = 0. \tag{3.36}$$

Além disso, se $(\widehat{x}(t), \widehat{\xi}(t))$ *e* $u(t)$ *satisfazem* (3.34) *e* (3.35)*, então* $\xi_0(t)$ *e* $\mathcal{M}(x(t), \widehat{\xi}(t))$ *são constantes. Portanto* (3.36) *é satisfeita para todo* $t \in [t_0, t_1]$ *e não só para* t_1*.*

BIBLIOGRAFIA

[1] AGRACHEV A.A., SACHKOV Y.L. **Control Theory from the Geometric View point**. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[2] ALIPRANTIS C. D.; BORDER K.C. **Infinite Dimensional Analysis, A Hitchhiker's guide**. Third edition. New York: Springer-Verlag, 2006.

[3] ARAUJO, Valdenildo A. **Teoria clássica de pontos fixos - Recentes progressos e aplicações**. 2012. 35 páginas. Dissertação de mestrado - Universidade Federal do Amazonas, Manaus.

[4] CARMO, Manfredo Perdigão. **Riemannian Geometry**. Boston: Birkhäuser, 1992.

[5] CASTELLI, Marcos. **Teoremas de ponto fixo**. 2016. 72 páginas. Dissertação(Mestrado em Matemática) -Universidade Estadual de Maringá, Maringá,PR. Disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/bitstream/1/5514/1/000225120.pdf. Acesso em: 15 jun 2023.

[6] DORIA C.M. **Differentianility in Banach spaces, differential forms and applications**. Switzerland: Springer-Verlag, 2021.

[7] DRABEK P.; MILOTA J. **Methods of Non Linear Analysis**:Applications to Differential Equations Second Edition. Germany: Springer-Verlag, 2013.

[8] EVANS, Lawrence C. **An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory**. Version 02. Department of Mathematics. University of California, Berkeley.

Disponível em: file:///C:/Users/natha/DownloadsAnIntroductiontoMathematicalOptimalControlTheoryVersion0.2.pdf. Acesso em: 13 jul 2023.

[9] GUARNUERI, Felipe M.. **Teoremas de Ponto Fixo, Teoria dos Jogos e Existência do Equilíbrio de Nash em Jogos Finitos em Forma Normal**. 2018. 30 páginas. Dissertação de mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

[10] HALE, Jake K.. **Ordinary Differential Equations**. Second edition. Flórida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.

[11] LEE, John, M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Second edition. New York: Springer-Verlag, 2012.

[12] LEITÃO, Antonio. **Publicações matemáticas**: Cálculo Variacional e Controle Ótimo. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

[13] MARTINS, Patricia Reis; VASCONCELLOS, Carlos Frederico. Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. **CADERNOS DO IME-SÉRIE MATEMÁTICA**, 17 dez 2021. Disponível em: https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/cadmat/article/view/14210/11688. Acesso em: 15 jun 2023.

[14] MUNKRES, James R. **Topology. Second ediction**. United States of America: Prentice Hall, 2000.

[15] PATA, Vitorino. **Fixed Point Theorems and Applications**. Italy: Springer-Verlag, 2019.

[16] PONTRYAGIN, L.S.; BOLTYANSKII, V.G.; GAMKRELIDZE, R.V.; MISHCHENKO, E.F.. **The Mathematical Theory of Optimal Processes**. New York: Interscience Publishers, 1962.

[17] REID,W.T. **Ordinary Differential Equations**. Wiley, 1971.

[18] ROYDEN, H. L.. **Real Analysis**. Third ediction. New York: The Macmillan Company, 1988.