

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

DIEYNE FERNANDA LOPES

# CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA DE FLUXOS <sup>1</sup>

Maringá - PR

2022

---

<sup>1</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA DE FLUXOS

DIEYNE FERNANDA LOPES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre José Santana.

Maringá-PR

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

L864c      Lopes, Dieyne Fernanda  
            Conjugação topológica de fluxos / Dieyne Fernanda  
            Lopes. -- Maringá, 2022.  
            152 f. : il.

            Orientador: Prof°. Dr°. Alexandre José Santana.  
            Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
            Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
            Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
            Geometria e Topologia, 2022.

            1. Conjugação topológica. 2. Matrizes  
            hiperbólicas. 3. Equações diferenciais lineares. 4.  
            Sistemas de tempo discreto. 5. Expoentes de  
            Lyapunov. I. Santana, Alexandre José, orient. II.  
            Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências  
            Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática -  
            Área de Concentração: Geometria e Topologia. III.  
            Título.

CDD 22.ed. 515.352

Edilson Damasio CRB9-1.123

# **DIEYNE FERNANDA LOPES**

## **CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA DE FLUXOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

### **COMISSÃO JULGADORA:**

Prof. Dr. Alexandre José Santana - UEM (Presidente)

Prof. Dr. João Augusto Navarro Cossich - UTFPR

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2022.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (<https://meet.google.com/baw-ceno-dav>)

Aos meus amados pais e irmão.

# Agradecimentos

O presente trabalho requer o agradecimento de algumas pessoas, pois foram elas que o tornaram possível.

Primeiramente agradeço a Deus pela força que tens me dado, sempre sendo meu alicerce e enviando palavras encorajadoras para prosseguir nos momentos mais difíceis da minha vida.

Agradeço aos meus pais, Valdir e Eliane, pelo amor que me deram e por todas as orações. Agradeço ao meu irmão, Raphael, pelo carinho e gracejo. Agradeço a minha família que sempre torceu por mim, e sempre me estimulou a lutar pelos meus sonhos.

Agradeço ao professor Alexandre José Santana, primeiramente pela atenção, dedicação e excelente orientação para o desenvolvimento deste trabalho, e também pela paciência no decorrer de nossos estudos, onde mesmo com situações adversas me deu apoio para prosseguir e conseguir. Agradeço ao professor Ronan Antonio dos Reis que me orientou na graduação, e se faz presente até os dias atuais. Agradeço a todos os professores e servidores ligados ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UEM e Departamento de Matemática da UNESP de Presidente Prudente.

Agradeço a todos os meus amigos do mestrado, em especial Daniele e Rebeca que proporcionaram momentos inesquecíveis durante o mestrado. Agradeço minha amiga e companheira de apartamento Vanessa pelas conversas e risos. Agradeço a todos os meus amigos que sempre estiveram comigo e entenderam meu distanciamento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“Aqueles que passam por nós,  
não vão sós, não nos deixam  
sós. Deixam um pouco de si,  
levam um pouco de nós.”*

---

Antoine de Saint-Exupéry.

# Resumo

Neste trabalho, apresentaremos resultados relacionados à conjugação e equivalência topológica para alguns tipos de sistemas dinâmicos. Começaremos com o sistema dinâmico contínuo em  $\mathbb{R}^n$ , depois passaremos pelo discreto em  $\mathbb{R}^n$  e por fim, um tipo de sistema dinâmico contínuo em um grupo de Lie. Como resultado principal deste estudo, provaremos que, se  $A$  e  $B$  são matrizes hiperbólicas, então os fluxos associados a  $x_{n+1} = Ax_n$  e  $x_{n+1} = Bx_n$  são topologicamente conjugados se, e somente se, os subespaços estáveis de  $A$  e  $B$  possuem as mesmas dimensões.

No caso contínuo, o principal resultado mostra que se  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  são matrizes hiperbólicas, então os fluxos de  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{y} = Bx$  são topologicamente conjugados se, e somente se, os subespaços estáveis de  $A$  e  $B$  tem as mesmas dimensões.

No caso discreto, provamos que se  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  são contrações na mesma componente conexa do conjunto de contrações, então os fluxos de  $x_{k+1} = Ax_k$  e de  $y_{k+1} = By_k$  são topologicamente conjugadas.

Por fim, no contexto de grupos de Lie, mostramos que sistemas dinâmicos contínuos em um grupo de Lie, nilpotente e simplesmente conexo, dados por campos em sua álgebra, tem sempre domínio fundamental, estes os quais são sempre homeomorfos, e assim, provamos que seus fluxos são sempre topologicamente conjugados.

**Palavras-chave:** conjugação topológica, matrizes hiperbólicas, equações diferenciais lineares, tempo discreto, expoentes de Lyapunov.

# Abstract

In this work, we will present results related to conjugation and topological equivalence for some types of dynamical systems. We will start with the continuous dynamical system in  $\mathbb{R}^n$ , then we will go through the discrete dynamical system in  $\mathbb{R}^n$ , and finally, a type of continuous dynamical in a Lie group. As the main result of this study, we will prove that, if  $A$  and  $B$  are hyperbolic matrices, then the flows associated with  $x_{n+1} = Ax_n$  and  $x_{n+1} = Bx_n$  are topologically conjugate, if and only if, the stable subspaces of  $A$  and  $B$  have the same dimensions.

In the continuous case, the main result shows that  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  are hyperbolic matrices, then the flows  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{y} = Bx$  are topologically conjugated, if and only if, the stable subspaces of  $A$  and  $B$  has the same dimensions.

In the discrete case, we prove that if  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  are contractions in the same connected component of the set of contractions, then the flows of  $x_{k+1} = Ax_k$  and of  $y_{k+1} = By_k$  are topologically conjugated.

Finally, in the context of Lie groups, we show that continuous dynamical systems in a Lie group, nilpotent and simply connected, given by fields in their algebra, always have fundamental domains, which are always homeomorphic, and thus, we prove that their flows are always topologically conjugated.

**Keywords:** topological conjugacy, hyperbolic matrices, linear difference equation, discrete-time, Lyapunov exponents.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Álgebra Linear . . . . .	4
1.2 Grupos e Álgebras de Lie e E.D.O. . . . .	9
<b>2 Fórmulas de Solução</b>	<b>23</b>
2.1 Forma Real de Jordan . . . . .	23
2.2 Campo Vetorial . . . . .	30
2.3 Solução para Equações do tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ . . . . .	56
<b>3 Estabilidade e Sistemas Dinâmicos</b>	<b>66</b>
3.1 Espaços de Lyapunov . . . . .	66
3.2 Estabilidade em Sistemas Dinâmicos em $\mathbb{R}^d$ . . . . .	73
3.3 Classificação dos Sistemas Lineares Hiperbólicos no Plano . . . . .	77
<b>4 Equações Diferenciais Lineares em Tempo Discreto</b>	<b>86</b>
4.1 Equações Diferença . . . . .	86
4.2 Fórmulas de Solução para $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{Ax}_n$ . . . . .	87
4.3 Espaços de Lyapunov e Estabilidade . . . . .	95
<b>5 Conjugação e Equivalência de Fluxos Lineares no Espaço Euclidiano</b>	<b>100</b>
5.1 Fluxos Lineares em $\mathbb{R}^d$ . . . . .	100

5.2	Conjugação e Equivalência de Fluxos Lineares no Espaço Euclidiano em Tempo Contínuo . . . . .	104
5.3	Conjugação e Equivalência de Fluxos Lineares no Espaço Euclidiano em Tempo Discreto . . . . .	131
5.4	Classificação de Sistemas Dinâmicos no caso de grupos de Lie Nilpotentes	146
5.4.1	Caso nilpotente . . . . .	148
	<b>Bibliography</b>	<b>151</b>

# Introdução

Nesta dissertação nosso objetivo principal é estudar a classificação de sistemas dinâmicos em tempo discreto com espaço estado sendo o  $\mathbb{R}^d$ . Para isso nós estudamos os resultados semelhantes no caso contínuo. Também estudamos o mesmo tipo de classificação para sistemas cujo espaço estado são grupos de Lie de matrizes nilpotentes.

Ideias primitivas da teoria de sistemas dinâmicos apareceram no século XVI em trabalhos de mecânica celeste. A mecânica clássica, a partir dos trabalhos de Isaac Newton, deu um grande impulso para a jovem teoria de sistemas dinâmicos. Mas foram nos anos de 1960 que a teoria de sistemas dinâmicos alcançou a maturidade e expandiu muito com o advento dos computadores. No entanto, o matemático francês Henri Poincaré é considerado como um dos pais da teoria moderna de sistemas dinâmicos. De fato, foi ele que introduziu grande parte dos conceitos do estudo qualitativo das equações diferenciais que permitiram estudar propriedades assintóticas das soluções, estabilidade, periodicidade, etc. A partir disso tal teoria alcançou um grande desenvolvimento no mundo e em especial no Brasil.

Na nossa dissertação estamos interessados em estudar um tipo de classificação para alguns casos de sistemas dinâmicos. A saber, a classificação que estamos interessados neste trabalho é via conjugação topológica e os sistemas que abordaremos serão de três tipos. Os dois primeiros tipos são os sistemas dinâmicos definidos por sistemas de equações lineares (ordinárias) a tempo contínuo e a tempo discreto, ambas agindo em espaços euclidianos. E o terceiro tipo será um estudo inicial de sistemas dinâmicos formados por campos invariantes em grupos de Lie de matrizes nilpotentes. Os dois primeiros tipos foram estudados basicamente a partir do livro [CK]. Já o terceiro tipo de sistemas foram

estudados a partir do artigo [KRS]. Para a primeira parte, tem uma referência também muito interessante pois os autores detalham bastantes a teoria, veja [AR].

Para entender melhor nosso trabalho, considere dois sistemas dinâmicos, ou melhor, seus fluxos  $\Phi$  e  $\Psi$  nos espaços métricos  $M$  e  $N$  respectivamente. Num contexto mais geral, conjugação topológica pretende estabelecer condições nestes fluxos para que exista um homeomorfismo entre  $M$  e  $N$  que leva  $\Phi$ -trajetórias em  $\Psi$ -trajetórias, preservando a parametrização por tempo. Para sistemas de equações diferenciais o resultado principal estudado nesta dissertação diz que no caso de sistemas hiperbólicos, dois sistemas são topologicamente conjugados se e somente se as dimensões dos subespaços (do espaço estado) coincidem. Mais especificamente, considere dois sistemas  $\dot{x} = Ax$ ,  $\dot{x} = Bx$  com  $A, B \in \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ . Recorde que os fluxos lineares  $e^{At}x$  e  $e^{Bt}x$  são ditos topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Para provar este resultado clássico, a existência de domínios fundamentais homeomorfos, um para  $e^{At}x$  e outro para  $e^{Bt}x$ , é essencial para construir a conjugação  $h$ . E neste caso os domínios fundamentais são esferas.

No caso discreto, a abordagem tem certa semelhança com o caso contínuo. Primeiro note que dois sistemas dinâmicos  $\Phi_A$  e  $\Phi_B$  em tempo discreto, gerados pelas matrizes  $A, B \in Gl(d, \mathbb{R})$ , respectivamente ( $x_{n+1} = Ax_n$  e  $x_{n+1} = Bx_n$ ), são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo

$$h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

tal que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  tem-se

$$h(Ax) = B(h(x)).$$

Mostraremos então o principal teorema desta parte, ou seja, que se  $A, B \in Gl(d, \mathbb{R})$  são contrações lineares na mesma componente conexa por caminhos do conjunto das contrações lineares, então seus correspondentes sistemas discretos são topologicamente conjugados. Onde temos que uma matriz  $C \in Gl(d, \mathbb{R})$  é chamada de contração linear se para cada autovalor  $\mu$  de  $C$  temos  $|\mu| < 1$ . No caso discreto, no entanto, os domínios fundamentais são regiões anulares, o que torna a demonstração mais difícil.

Na terceira parte, estudamos este mesmo tipo de classificação mas para um ambiente mais sofisticado, ou seja, para sistemas invariantes em grupos de Lie de matrizes nilpotentes e neste caso mostramos que o domínio fundamental são hiperplanos no grupo nilpotente, para isso usamos o isomorfismo entre o grupo e a álgebra com o produto de Baker-Campbell-Hausdorff.

Para desenvolvermos bem nosso trabalho, fizemos um longo estudo de álgebra linear, sendo assim grande parte dos conceitos relativos à esta teoria podem ser encontrado nos livros [EL] e [HK]. É claro que os conceitos básicos de equações diferenciais foram essenciais e as referências principais usadas aqui foram os livros [SW], [KH] e [CR] e o artigo [MS] para o estudo de exponencial no caso de grupos de Lie de matrizes. Também foram consultados os artigos [ACK], [CS], [CS2], [KRS] e [RSV] para conhecer algumas das generalizações dos estudos desta dissertação. Os tópicos necessários da teoria de grupos e álgebras de Lie foram consultados no livro [SM].

Sobre a estrutura deste trabalho, no Capítulo 1 estudamos alguns conceitos e tópicos de álgebra linear, de equações diferenciais e grupos e álgebras de Lie de matrizes necessários para o desenvolvimento desta dissertação. No Capítulo 2 abordamos o estudo de soluções de equações. No Capítulo 3 estudamos a teoria e classificação de sistemas lineares a tempo contínuo. Já no Capítulo 4 fizemos o estudo dos sistemas lineares a tempo discreto. No Capítulo 5 estudamos a classificação dos sistemas abordados no capítulo anterior. E por fim na última seção do Capítulo 5 fizemos a classificação para o caso de sistemas invariantes nos grupos de Lie de matrizes nilpotentes.

# Chapter 1

## Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão sobre os conceitos que serão empregados ao longo desse trabalho. Relembraremos algumas definições, propriedades e resultados de álgebra linear, tais como forma canônica de Jordan e exponencial de uma matriz. Depois faremos uma breve introdução aos grupos e álgebras de Lie de matrizes, assim como também de equação diferencial, onde projetaremos alguns retratos de fase para nortear o comportamento das soluções dessas equações. Neste momento, por simplicidade, trabalharemos em  $\mathbb{R}^2$ . Também revisaremos um pouco da descrição de soluções de uma equação diferencial linear via a forma real de Jordan, e suas expressões.

### 1.1 Álgebra Linear

Embora abordadas em cursos básicos de Álgebra Linear, optamos por apresentar algumas definições, resultados e propriedades para que o trabalho fique mais completo. Nesta seção apresentaremos os pontos mais relevantes e importantes para o nosso trabalho, sendo assim, alguns detalhes serão omitidos.

O conceito de espaço vetorial é a base para o desenvolvimento de toda a Álgebra Linear.

**Definição 1.1** *Denomina-se espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  o conjunto não vazio  $\mathbb{V}$ , de*

modo que

1. *Existe uma adição:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (u, v) &\rightarrow u + v \end{aligned}$$

*satisfazendo as propriedades:*

**Associativa:**  $\forall u, v, w \in \mathbb{V}, u + (v + w) = (u + v) + w$

**Comutativa:**  $\forall u, v \in \mathbb{V}, u + v = v + u$

**Elemento neutro:**  $\exists 0 \in \mathbb{V} \mid \forall u \in \mathbb{V}, u + 0 = 0 + u = u$

**Elemento oposto:**  $\forall u \in \mathbb{V}, \exists (-u) \in \mathbb{V} \mid u + (-u) = (-u) + u = 0$

2. *Existe uma multiplicação por escalar:*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (\alpha, u) &\rightarrow \alpha u \end{aligned}$$

*satisfazendo as propriedades:*

•  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, u \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

•  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, u \in \mathbb{V} \Rightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

•  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

•  $\exists 1 \in \mathbb{K} \mid \forall u \in \mathbb{V} \Rightarrow 1(u) = u$

**Notação:** Denotaremos um espaço vetorial por  $\langle \mathbb{V}, +, \cdot \rangle$  ou simplesmente por  $V$  quando as operações estiverem claras no contexto.

**Observação 1.2**  $\mathbb{F}$  é corpo.

Determinamos o subconjunto  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$  como subespaço vetorial de  $\mathbb{V}$  desde que o mesmo seja um espaço vetorial considerando as operações restritas a ele.

Ao nos depararmos com um espaço vetorial  $\langle \mathbb{V}, +, \cdot \rangle$  e  $\emptyset \neq \mathbb{U}, \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$  dois subespaços vetoriais de  $\mathbb{V}$ , de modo que  $\mathbb{U} + \mathbb{W} = \mathbb{V}$  e  $\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$ , dizemos que  $\mathbb{V}$  é a soma direta de  $\mathbb{U}$  e  $\mathbb{W}$  e os chamamos de suplementares. Notamos por  $\mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$ .

A base de um espaço vetorial finitamente gerado é um subconjunto finito  $B \subset \mathbb{V}$  que gera  $\mathbb{V}$ , além de ser um conjunto de vetores linearmente independentes. Aos espaços finitamente gerados, chamamos de dimensão de  $\mathbb{V}$  os números de vetores associados a base  $B$ .

Uma transformação linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  entre dois espaços vetoriais  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  é uma correspondência que associa a cada vetor  $v \in \mathbb{V}$  um vetor  $T(v) = T \cdot v = Tv \in \mathbb{W}$  de modo que valham para quaisquer  $u, v \in \mathbb{V}$ , e  $\alpha \in \mathbb{F}$  as relações:

$$\begin{aligned} T(u + v) &= Tu + Tv, \\ T(\alpha \cdot v) &= \alpha \cdot Tv. \end{aligned}$$

Quando o domínio e o contradomínio coincidem, chamamos de operador linear.

De agora em diante, para nós,  $\mathbb{V}$  será um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $L(\mathbb{V})$  será o conjunto de todos os operadores lineares de  $\mathbb{V}$ .

Recordemos os conceitos de autovalor e autovetor.

**Definição 1.3** *Seja  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  um operador linear.  $\lambda$  é dito autovalor de  $T$  se  $\exists v \neq 0 \in \mathbb{V}$  tal que  $T(v) = \lambda v$ . O vetor  $v$  associado a  $\lambda$  é chamado autovetor de  $T$ .*

Denominamos por autoespaço de  $T$  o subespaço  $A(\lambda)$  de  $\mathbb{V}$  tal que

$$A(\lambda) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) = \lambda v\}.$$

Tratando-se  $\lambda$  de um autovalor referente ao operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ . O subconjunto definido por

$$\mathbb{W}_\lambda : \left\{ v \in \mathbb{V} : (T - \lambda I)^k(v) = 0_{n \times n} \right\}$$

é nomeado autoespaço generalizado, para algum  $k > 0$ .

Dada uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{M}_{(n \times n)}(\mathbb{K})$ , chamamos a matriz  $(tI_n - A)$  de matriz característica de  $A$ , onde  $t$  é uma indeterminada. Por sua vez, o polinômio em  $t$  fornecido pelo determinante dessa matriz é chamado de polinômio característico o qual denotamos por  $P_A(t)$ .

Seja  $T \in L(\mathbb{V})$ . Logo, existe um polinômio característico de grau  $n$  de modo que  $P_T(T) = 0$ . Tal ideia é expressa pelo teorema seguinte.

**Teorema 1.4** (*Teorema de Cayley-Hamilton*). *Sejam  $A \in \mathbb{M}_{(n \times n)}(\mathbb{K})$  e  $P_A(A)$  o polinômio característico. Então  $P_A(A) = 0_{(n \times n)}$ .*

Uma das consequências do teorema acima, é o fato de a potência  $A^n$  de uma matriz  $A \in \mathbb{M}_{(n \times n)}(\mathbb{K})$  poder ser escrita como combinação linear das potências de  $A$  com expoentes de grau menor do que  $n$ .

Considerando o ideal  $I(A) = \{p(t) \in \mathbb{K}[t] : p(A) = 0\}$ , definimos o polinômio mínimo de  $A$  como sendo o polinômio mônico  $m_A(t)$  de menor grau em  $I(A)$ .

De forma simples, uma matriz  $A \in \mathbb{M}_{(n \times n)}(\mathbb{K})$  é diagonalizável se, e somente se, existir uma matriz  $D \in \mathbb{M}_{(n \times n)}(\mathbb{K})$  inversível, tal que  $D^{-1}AD$  seja uma matriz diagonal. Temos por sua vez, que a matriz  $D$  é formada pelos autovetores da base de  $A$ .

Veremos o conceito de forma canônica de Jordan. Dado um operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  em um espaço complexo de dimensão finita, existe uma base de  $\mathbb{V}$  na qual a matriz  $T_i$  de  $T$  é formada por uma série de blocos de Jordan por toda a extensão da diagonal. Um bloco de Jordan é uma matriz triangular inferior onde os elementos diagonais são todos iguais a um mesmo autovalor de  $T$  e os elementos abaixo da diagonal são iguais a 1. Porém, quando  $\mathbb{V}$  possui a base formada por autovetores de  $T$ , a forma canônica de Jordan para  $T$  é uma matriz diagonal.

Dado um operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , dizemos que o mesmo é nilpotente se existe  $T^k = 0$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Isso, significa-nos que  $T^{k-1} \neq 0$ . Conseqüentemente, dizemos que uma matriz  $N$  é nilpotente se existe um inteiro  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $N^k = 0$ .

Dizemos que um subespaço vetorial  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$  é  $T$ -invariante quando  $T(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W}$ . Em ocasiões de o espaço vetorial  $\mathbb{V}$  possuir dimensão finita, a interpretação pode ser feita de forma simples através de matrizes.

**Exemplo 1.5** *Um exemplo simplório de matriz nilpotente é o fornecido por uma matriz  $n \times n$ , onde a  $n$ -ésima coluna é o vetor nulo, e para  $1 \leq j \leq n - 1$ , sua  $j$ -ésima coluna é*

$e_{j+1} \in \mathbb{R}^n$ . Para  $n = 5$ , tal matriz possui a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente tem-se  $A^5 = 0$  e  $A^{n-1} = A^4 \neq 0$ . Assim, o índice de nilpotência é igual a 5.

Para o operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , com  $v \in \mathbb{V}$  um vetor satisfazendo  $T^{n-1}v \neq 0$  e  $T^n v = 0$ , os vetores  $v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v$  são linearmente independentes. Na eminência de  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$  e o índice nilpotente ser  $n$ , há uma base de  $\mathbb{V}$  com a abaixo expressa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mais, existem inteiros  $k = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r > 0$ , de modo que  $T = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$ , onde cada  $E_i$  é um subespaço cíclico de dimensão  $k_i$ . De forma evidente,  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$ .

Claramente vemos que se  $\{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_p\}$  é uma base da imagem de  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , e  $\{w_1, w_2, \dots, w_q\}$  é uma base do núcleo de  $T$ , então  $\{v_1, v_2, \dots, v_p, w_1, w_2, \dots, w_q\}$  é uma base de  $\mathbb{V}$ .

Parte final desta revisão, gira em torno da existência da forma canônica de Jordan para um operador linear complexo de dimensão finita. A mesma é uma matriz triangular inferior, onde os autovalores que formam sua diagonal são repetidos consecutivamente de acordo com suas multiplicidades algébricas, sem deixar de lado o fato de os elementos abaixo da diagonal são iguais a 0 ou 1, com os demais sendo elementos nulos.

**Teorema 1.6** *Seja  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  um operador linear em um espaço vetorial  $\mathbb{K}$  de dimensão finita. Podemos decompor  $\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$  como soma direta de subespaços invariantes  $\mathbb{U}$*

e  $\mathbb{W}$ , de forma que  $T$  seja nilpotente em  $\mathbb{U}$  e inversível em  $\mathbb{W}$ . E mais, se  $n_0$  for a multiplicidade algébrica do autovalor 0 de  $T$ , implica que  $\dim(\mathbb{U}) = n_0$ . Além disso,  $\mathbb{U}$  é o núcleo e  $\mathbb{W}$  é a imagem de  $T^{n_0} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ .

Do teorema anterior nos é permitido concluir sobre a unicidade da decomposição de  $\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$ .

**Teorema 1.7** *Seja  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  os autovalores distintos de  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  com dimensão finita. Para cada  $i = 1, 2, \dots, r$ , sejam  $n_i$  a multiplicidade algébrica de  $\lambda_i$ , e  $\mathbb{V}_i = \ker[(T - \lambda_i I)^{n_i}]$ . Então  $\dim \mathbb{V}_i = n_i$  e  $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_r$ .*

É compreensível percebermos que os subespaços  $\ker[(T - \lambda_i I)^{n_i}]$  são invariantes para qualquer operador  $S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  que comute com  $T$ . e Consequentemente, que são invariantes por  $T$ .

Um bloco de Jordan  $n \times n$  é uma matriz triangular inferior do seguinte modo:

$$J_{\lambda}^{(n)} = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Os mesmos são agrupados consecutivamente  $J_{\lambda_i}^{(k_1)}, J_{\lambda_i}^{(k_2)}, \dots, J_{\lambda_i}^{(k_{p_i})}$ , em que  $k_1 + k_2 + \dots + k_{p_i} = n_i =$  multiplicidade algébrica do autovalor  $\lambda_i$  associado a matriz fornecida. Para todo operador linear de dimensão finita existe uma base onde a matriz pode ser expressa na forma canônica de Jordan.

## 1.2 Grupos e Álgebras de Lie e E.D.O.

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos referentes a teoria de grupos e álgebras de matrizes, e da existência de soluções de equações diferenciais lineares, fazendo

uso principalmente do conceito de exponencial de uma matriz. Além disso, sua dependência contínua no valor inicial.

Para o início, começaremos recordando um pouco sobre a teoria de exponencial de matrizes.

A norma do operador que usaremos é definida por

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

com  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , e  $|\cdot|$  sendo a norma euclidiana de  $\mathbb{R}^d$ . Temos que

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \tag{1.1}$$

e para cada  $m \in \mathbb{N}$  vale

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m.$$

As solução de equações diferenciais lineares é dada em função da exponencial da matriz. Deste modo, veremos a definição seguinte.

**Definição 1.8** *Para uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  a exponencial é definida como*

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k \in Gl(d, \mathbb{R}) \tag{1.2}$$

onde  $Gl(d, \mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes inversíveis  $d \times d$  com entradas reais.

Justificaremos a seguir alguns resultados importantes para nossa sequencia de estudos.

**Proposição 1.9** *A série 1.2 é absolutamente convergente.*

**Demonstração:**

De fato, seja  $m$  o maior  $|a_{1j}|$  em  $A$ . Então na série 1.2 temos que o

maior elemento no  $1^o$  termo é 1.

maior elemento no 2º termo é  $m$

$$\text{maior elemento no 3º termo é } \leq \frac{nm^2}{2!}$$

$$\text{maior elemento no 4º termo é } \leq \frac{n^2m^3}{3!}$$

e assim sucessivamente.

Assim, temos que qualquer  $ij$  sequência é limitada por  $1, m, \leq \frac{nm^2}{2!}, \leq \frac{n^2m^3}{3!}, \dots,$   
 $\leq \frac{n^{k-2}m^{k-1}}{(k-1)!}$ . Aplicando o teste da razão na sequência maximal temos

$$\frac{n^{k-1}m^k}{(k)!} \frac{(k-1)!}{n^{k-2}m^{k-1}} = \frac{nm}{k}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{k^n}{n!}} = \frac{k^{n+1} \cdot n!}{k^n \cdot [(n+1)]} = \frac{k^n}{k^n} \cdot \frac{k \cdot n!}{(n+1)!}$$

onde podemos ver que o limite converge para 0 quando  $k$  tende ao infinito, pois  $n$  e  $m$  são fixos. Logo, a série é absolutamente convergente.

□

**Lema 1.10** Temos que  $e^A e^B = e^{A+B}$  se  $[A, B] = 0$  e consequentemente  $e^{A+(-A)} = e^A \cdot e^{-A}$ .

**Demonstração:** Pelo teorema da existência e unicidade de equações diferenciais, é suficiente provar que  $O(t) = e^{t(A+B)}$  e  $P(t) = e^{tA}e^{tB}$  satisfazem o mesmo problema de valor inicial. Não é difícil mostrar que  $O'(t) = (A+B)O(t)$  e que  $O(0) = I$ . Também temos que  $P(0) = I$  e, assim  $P'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)P(t)$  pois  $B$  com  $e^{tA}$  devido ao fato de comutar com  $A$ . □

**Lema 1.11** Temos que  $e^{A+(-A)} = e^A \cdot e^{-A}$  sempre que  $[A, -A] = 0$ .

**Demonstração:**

Como  $A$  e  $-A$  comutam, visto que seu comutador  $[A, -A] = A \cdot (-A) - (-A) \cdot A = 0$ , temos a seguinte proposição garantida.

□

**Lema 1.12**  $A$  inversa de  $e^A$  é  $e^{-A}$ .

**Demonstração:**

Para que duas matrizes sejam inversas, devemos ter

$$e^A \cdot e^{-A} = I = e^{-A} \cdot e^A$$

Assim sendo, segue que

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = I \quad e$$

$$e^{-A} \cdot e^A = e^{-A+A} = e^0 = I$$

Comprovando então, que a inversa de  $e^A$  é  $e^{-A}$ .

□

**Lema 1.13** As matrizes  $A$  e  $e^A$  são comutáveis, ou seja,  $A \cdot e^A = e^A \cdot A$ .

**Demonstração:**

Constataremos que de fato as matrizes comutam. Veja que

$$\begin{aligned} A \cdot e^A &= A \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) = A \cdot \left( \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) \\ &= A \cdot I + A \cdot A + A \cdot \frac{A^2}{2!} + A \cdot \frac{A^3}{3!} + \dots = \\ &= I \cdot A + A \cdot A + \frac{A^2}{2!} \cdot A + \frac{A^3}{3!} \cdot A \dots = \\ &= \left( \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) \cdot A = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \cdot A = e^A \cdot A \end{aligned}$$

□

**Lema 1.14** Para toda matriz  $S \in Gl(d, \mathbb{R})$ , temos  $e^{SAS^{-1}} = Se^AS^{-1}$ .

**Demonstração:**

Note que valem as seguintes propriedades

$$(SAS^{-1})^n = (SAS^{-1})(SAS^{-1}) \cdots (SAS^{-1})$$

$$S(C + D)S^{-1} = SCS^{-1} + SDS^{-1}.$$

Daí usando a definição de exponencial de matrizes podemos concluir o resultado.  $\square$

Tais propriedades são mantidas para as matrizes com entradas complexas.

Veremos alguns conceitos de grupos e álgebras de Lie necessários para a parte final desta dissertação. Denotamos por  $Gl(n, \mathbb{R})$ , como usual, o grupo das transformações lineares de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  (das matrizes quadradas de ordem  $n$ ), e inicialmente denotaremos por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem  $n$ .

**Definição 1.15** Um subgrupo  $G$  de  $Gl(n, \mathbb{R})$  o qual é subespaço fechado é chamado de grupo de Lie de matrizes, grupo linear ou simplesmente grupo de matrizes sobre  $\mathbb{R}$ .

Um exemplo de grupo de matrizes é o grupo das matrizes triangulares superiores com 1 na diagonal. Pode-se mostrar que este grupo é simplesmente conexo.

Agora recordamos a definição de álgebras de Lie.

**Definição 1.16** Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  munido de um produto, chamado de colchete ou comutador de Lie  $[ , ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  com as seguintes propriedades:

1. É bilinear
2. Anti-simétrica
3. Satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ , temos

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

A igualdade acima pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas:

- a)  $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ ;
- b)  $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$ .

O colchete ou comutador de Lie, em geral, não é associativo, pois em qualquer circunstância  $[[X, X], Y] = 0$  e no entanto,  $[X, [X, Y]]$  nem sempre se anula. De fato, se tomarmos

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então  $[X, X] = XX - XX = 0$ . Logo  $[[X, X], Y] = 0$ . Mas  $[X, [X, Y]] \neq 0$

**Exemplo 1.17** *Seja  $\mathfrak{g}$  um espaço vetorial com base  $\{X_1, Y_2, Z_3\}$  e sejam escalares  $\alpha, \beta, \gamma$ . Defina o colchete como:  $[W, W] = 0$  para qualquer  $W \in \mathfrak{g}$ ,  $[X_1, X_2] = 0$ ,  $[X_1, X_3] = \alpha X_1 + \beta X_2$ ,  $[X_2, X_3] = \gamma X_1 + \delta X_2$ . Com este colchete  $\mathfrak{g}$  torna-se uma álgebra de Lie.*

*De fato observemos inicialmente que a identidade de Jacobi será satisfeita em  $\mathfrak{g}$  se a mesma for satisfeita para os elementos da base.*

*Sejam  $A = \sum_{i=1}^3 a_i X_i$ ,  $B = \sum_{j=1}^3 b_j X_j$ ,  $C = \sum_{k=1}^3 c_k X_k$ , três elementos arbitrários de  $\mathfrak{g}$ .*

*Então*

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= [\sum a_i X_i, \sum b_j c_k [X_j, X_k]] + [\sum b_j X_j, \sum c_k a_i [X_k, X_i]] + \\ [\sum c_k X_k [\sum a_i b_j [X_i, X_j]]] &= [\sum a_i b_j c_k [X_i, [X_j, X_k]]] + [\sum b_j c_k a_i [X_j, [X_k, X_i]]] + \\ \sum c_k a_i b_j [X_k, [X_i, X_j]] &= \sum a_i b_j c_k ([X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]]). \end{aligned}$$

*Com a notação introduzida não é difícil verificar que  $[X_i, [X_j, X_k]] = 0$  para  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ . Como ilustração, tome  $i = 1, j = 2, k = 3$  daí  $[X_1, [X_2, X_3]] = [X_1, \alpha X_1 + \beta X_2] = \alpha [X_1, X_1] + \beta [X_1, X_2] = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ . E assim  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie.*

**Definição 1.18** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de  $\mathfrak{g}$  é um sub-espaço vetorial  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  que é fechado para o colchete, isto é  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$  se  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .*

**Exemplo 1.19** *Seja  $A$  uma álgebra associativa arbitrária, onde entende-se por álgebra um espaço vetorial com aplicação bilinear. Então  $A$  torna-se uma álgebra de Lie se definirmos o colchete da seguinte maneira:*

$$[x, y] = xy - yx, \text{ para quaisquer } x, y \in A.$$

*Para verificarmos nossa afirmação temos que mostrar que  $[ , ]$  satisfaz as três condições a seguir:*

1.  $[ , ]$  é bilinear. Para isto sejam  $x_1, x_2 \in A$  e  $\alpha$  escalar arbitrário, então para todo  $y \in A$  fixado, temos

$$\begin{aligned} [\alpha(x_1 + x_2), y] &= \alpha[x_1 + x_2, y] = \alpha(x_1 + x_2)y - y\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 y + \alpha x_2 y - \\ & y\alpha x_1 - y\alpha x_2 = \alpha x_1 y - y\alpha x_1 + \alpha x_2 y - y\alpha x_2 = \alpha x_1 y - \alpha y x_1 + \alpha x_2 y - \alpha y x_2 = \\ & \alpha(x_1 y - y x_1 + x_2 y - y x_2) = \alpha([x_1, y] + [x_2, y]) \end{aligned}$$

2.  $[ , ]$  é anti-simétrica. Sejam  $x$  e  $y \in A$ , então temos que

$$-[y, x] = -(yx - xy) = xy - yx = [x, y]$$

3.  $[ , ]$  satisfaz a identidade de Jacobi. Sejam  $x, y, z \in A$ , então

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] &= [x, (yz - zy)] + [z, (xy - yx)] + [y, (zx - xz)] = \\ & x(yz - zy) - (yz - zy)x + z(xy - yx) - (xy - yx)z + y(zx - xz) - (zx - xz)y = \\ & xyz - xzy - yzx + zyx + zxy - zyx - xyz + yxz + yzx + yzx - yxz - zxy + xzy = 0. \end{aligned}$$

Logo este colchete define em  $A$  uma estrutura de álgebra de Lie.

**Definição 1.20** Dizemos que uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é abeliana se

$$[X, Y] = 0 \text{ para quaisquer } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Neste caso a estrutura de álgebra de Lie não acrescenta nada a estrutura de espaço vetorial.

Um exemplo não trivial de álgebra de Lie é o conjunto das matrizes triangulares com zeros na diagonal principal. Este conjunto forma uma álgebra de Lie com o colchete dado por  $[A, B] = AB - BA$ .

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Consideremos a seguinte sequência de subespaços desta

álgebra:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}^2 &= \mathfrak{g}' = \langle \{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\} \rangle \\
\mathfrak{g}^3 &= \langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}'\} \rangle \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^k &= \langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{k-1}\} \rangle \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observe que  $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ . Para mostrar que  $\mathfrak{g}^k$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$  precisamos do seguinte lema:

**Lema 1.21** *Para quaisquer números naturais  $i, j \geq 1$ , tem-se a inclusão  $\langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}^i, Y \in \mathfrak{g}^j\} \rangle \subset \mathfrak{g}^{i+j}$ .*

**Demonstração:** Utilizamos indução sobre o índice  $j$ . Como  $\mathfrak{g}^{j+1} = \langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^j\} \rangle$  a inclusão é válida para  $j = 1$ . Suponhamos que a inclusão é válida para  $j$  e mostremos que ela é válida para  $j + 1$ . Com efeito

$$\begin{aligned}
\langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}^i, Y \in \mathfrak{g}^{j+1}\} \rangle &= \langle \{[X, [Z, S]] : X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j, S \in \mathfrak{g}\} \rangle \\
&\subset \langle \{[[X, Z], S] : X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j, S \in \mathfrak{a}\} \rangle + \\
&+ \langle \{[Z, [X, S]] : X \in \mathfrak{g}^j, Z \in \mathfrak{g}^i, S \in \mathfrak{g}\} \rangle \\
&\subset \langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}^{i+j}, Y \in \mathfrak{g}\} \rangle + \langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}^j, Y \in \mathfrak{g}^{i+1}\} \rangle \\
&\subset \mathfrak{g}^{i+j+1}
\end{aligned}$$

□

**Proposição 1.22** *Tem-se que  $\mathfrak{g}^k$  é ideal de  $\mathfrak{g}$  para todo  $k > 1$ .*

**Demonstração:** Com efeito, inicialmente, mostraremos que  $\mathfrak{g}^k$  é o subespaço gerado por todos os possíveis colchetes que possuam  $k$  elementos de  $\mathfrak{g}$ . Para fazer isto, utilizaremos indução sobre  $k$ . Para  $k = 2$  é imediato a partir da definição de  $\mathfrak{g}^k$ . Suponhamos que

$\mathfrak{g}^{k-1}$  é o subespaço gerado por todos os possíveis colchetes que possuam  $k - 1$  elementos de  $\mathfrak{g}$ . Os elementos de  $\mathfrak{g}^{k-1}$  podem ser escritos como  $\sum_i \alpha_i Y_i$  sendo que  $Y_i$  é o produto de  $k - 1$  elementos de  $\mathfrak{g}$ . Logo,  $\mathfrak{g}^k$  é gerado por elementos da forma  $\sum_i [X_i, Y_i]$ , ou seja, por produtos de  $k$  elementos. Por outro lado, decorre do Lema 1.21 que todo elemento de  $\mathfrak{g}$  que pode ser escrito como produto de  $k$  elementos está em  $\mathfrak{g}^k$ . Agora, como o produto de  $k + 1$  elementos também é o produto de  $k$  elementos temos que,  $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$ . Portanto, se  $X \in \mathfrak{g}$  e  $Y \in \mathfrak{g}^k$ , temos que  $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$ .  $\square$

Como todo ideal é uma subálgebra, temos que  $\mathfrak{g}^k$  é uma subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Obtemos, assim, a seqüência decrescente

$$\dots \subset \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k \subset \dots \subset \mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{g}.$$

A seqüência definida acima é chamada de **série central descendente**.

**Definição 1.23** *Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é dita **nilpotente** se um dos termos de sua série central descendente se anula.*

Assim, uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é nilpotente se, e somente se, existir  $k_1 \geq 1$  tal que  $\mathfrak{g}^{k_1} = 0$ . Observe que neste caso  $\mathfrak{g}^k = 0$  para todo  $k \geq k_1$ .

É imediato que toda álgebra abeliana é nilpotente, uma vez que  $\mathfrak{g}$  é abeliana se, e somente se,  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^2 = 0$ .

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie de dimensão dois. Temos que  $\mathfrak{g}$  é abeliana ou existe uma base  $\{A, B\}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[A, B] = A$ . Se  $\mathfrak{g}$  é abeliana, temos pela proposição anterior que  $\mathfrak{g}$  é nilpotente. Se  $\mathfrak{g}$  não for abeliana  $\mathfrak{g}'$  é unidimensional e sua série central descendente se estabiliza no subespaço gerado por  $A$ , ou seja,  $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}$ . Portanto, a álgebra de Lie bidimensional que possui  $\{A, B\}$  como base não é nilpotente.

**Exemplo 1.24** *A álgebra de Heisenberg definida por*

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) : a, b, c, \in \mathbb{R} \right\}$$

é uma álgebra de Lie nilpotente. Com efeito,

$$\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

e  $\mathfrak{h}^3 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^2] = 0$ .

**Exemplo 1.25** O espaço das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\mathfrak{N}(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma álgebra de Lie Nilpotente.

De uma forma mais direta e simples podemos definir a álgebra de Lie de um grupo de Lie de matrizes.

**Definição 1.26** Seja  $G$  um grupo de matrizes. A álgebra de Lie de  $G$ , denotada por  $\mathfrak{g}$ , é o conjunto de todas as matrizes  $X$  tal que  $\exp tX$  esta em  $G$  para todo real  $t$ .

**Exemplo 1.27** Denote por  $H$  o grupo de Heisenberg e por  $\mathfrak{h}$  a álgebra de Heisenberg. Note que dado  $X \in \mathfrak{h}$ , temos que  $\exp tX \in H$ . Por outro lado se  $X$  é uma matriz tal que  $\exp tX \in H$ , então todas entradas de  $X = \frac{d}{dt}(\exp tX)_{t=0}$  que estão na diagonal ou abaixo dela devem ser zero, assim  $X \in \mathfrak{h}$ .

Na parte final desta seção, discutiremos um pouco de sistemas de equações diferenciais lineares.

**Definição 1.28** Uma equação diferencial linear autônoma (com coeficientes constantes), é uma equação dada por uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  via  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , onde  $\dot{x}$  representa a diferenciação com respeito a  $t$ .

O espaço  $gl(d, \mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes  $d \times d$  com entradas reais, o qual também é um espaço vetorial.

**Definição 1.29** Toda função diferenciável  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é chamada de uma solução de  $\dot{x} = Ax$

**Definição 1.30** Um problema de valor inicial para uma equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ , consiste em encontrar, para um dado valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , a solução de  $x(\cdot, x_0)$  que satisfaça a condição inicial  $x(0, x_0) = x_0$ .

Podemos também chamar uma equação diferencial linear autônoma de invariante no tempo, onde  $t \in \mathbb{R}$  é interpretado como tempo.

Veremos como fica a expressão da solução  $x(t) = e^{at}x_0$  da equação escalar  $\dot{x} = ax$  no caso matricial, ou seja,  $x(t) = e^{At}x_0$  como solução de  $\dot{x} = Ax$ . Neste momento, estamos considerando  $t \in \mathbb{R}$ .

Os resultados subsequentes são clássicos, assim não demonstraremos todos.

**Teorema 1.31** Para cada matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  as soluções de  $\dot{x} = Ax$  formam um subespaço vetorial  $d$ -dimensional  $Sol(A) \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$  sobre  $\mathbb{R}$  onde

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \mid f \text{ é infinitamente diferenciável}\}.$$

**Teorema 1.32** Para cada problema de valor inicial dado por  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , i.e.,  $\dot{x} = Ax$  com  $x(0, x_0) = x_0$ , a solução  $x(\cdot, x_0)$  é dada de forma única por  $x(t, x_0) = e^{At}x_0$ .

**Demonstração:**

Consideremos a expressão em série

$$e^{At}x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} x_0. \quad (1.3)$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{At}x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{A(t)}}{h} x_0 \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{At} \cdot e^{Ah} - e^{A(t)}}{h} x_0 \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{(e^{Ah} - I)}{h} x_0 \\
&= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} x_0
\end{aligned}$$

Resolvendo  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h}$  por meio de 1.3 segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I + Ah + \frac{A^2h^2}{2!} + \frac{A^3h^3}{3!} + \dots - I}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Ah}{h} = A.$$

De  $e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} x_0$  temos

$$\frac{d}{dt}e^{At}x_0 = e^{At}Ax_0$$

Consequentemente,  $e^{At}x_0$  é uma solução para o problema de valor inicial.

Vejamos que a solução é única.

Seja  $x(t)$  qualquer solução para o problema de valor inicial, e tomemos  $y(t) = e^{-tA}x(t)$ .

Pela regra do produto de derivação temos

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \left( \frac{d}{dt}e^{-At} \right) x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) \\
&= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\
&= e^{-At}(-Ax(t) + Ax(t)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto,  $y(t)$  é uma constante, i.e., para dado  $x$  uma solução qualquer, temos que  $x(t)$  é uma constante vezes  $e^{tA}$ , que por sua vez é a própria solução. Deste modo, qualquer solução é múltipla de  $e^{tA}$ .

Como  $y(0) = x_0 = x(0)$ , então  $y(t) = x(t)$ . Assim,  $y(t) = x(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Provando assim a unicidade.

□

**Teorema 1.33** Para uma base  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_d$  de  $\mathbb{R}^d$ , a função

$$x(\cdot, v_1), x(\cdot, v_2), x(\cdot, v_3), \dots, x(\cdot, v_d)$$

forma uma base do espaço solução.

**Demonstração:**

De acordo com o Teorema 1.31 já sabemos que o espaço vetorial  $Sol(A)$  é  $d$ -dimensional.

Assim, basta mostrarmos que  $x(\cdot, v_1), x(\cdot, v_2), x(\cdot, v_3), \dots, x(\cdot, v_d)$  gera  $Sol(A)$ .

Observe que para cada  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x_0 &\mapsto x(t, x_0) \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear, ou seja, toma o valor inicial e leva na solução com valor inicial.

Tomemos então no lugar de  $x_0$  a base de  $\mathbb{R}^d$ , de modo que

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto x(t, v_1) \\ v_2 &\mapsto x(t, v_2) \\ v_3 &\mapsto x(t, v_3) \\ &\vdots \\ v_d &\mapsto x(t, v_d) \end{aligned}$$

Deste modo, temos um isomorfismo linear que leva a base  $v$  em  $x(t, v)$ , implicando

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\rightarrow Sol(A) \\ x_0 &\mapsto x(\cdot, x_0) \end{aligned}$$

que também é um isomorfismo.

Desta forma, a aplicação é linearmente independente por conta do isomorfismo, e que gera, devido ao fato de a aplicação estar levando cada elemento da base de  $\mathbb{R}^d$ , em um elemento da base da solução  $Sol(A)$ .

□

**Observação 1.34** *A função matricial*

$$X(\cdot) := [x(\cdot, v_1), x(\cdot, v_2), x(\cdot, v_3), \dots, x(\cdot, v_d)]$$

*é chamada solução fundamental (ou matriz fundamental) de  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{X}(t) = AX(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .*

# Chapter 2

## Fórmulas de Solução

### 2.1 Forma Real de Jordan

A chave para encontrarmos explicitamente soluções de equações diferenciais lineares invariantes no tempo são os autovalores, autovetores e a Forma Real de Jordan da matriz do sistema. Nosso objetivo neste momento é deduzir a forma de Jordan Complexa.

Sabemos que toda matriz  $A \in gl(d, \mathbb{C})$  é semelhante a uma matriz na forma canônica de Jordan sobre os números complexos. Ou seja, existe uma matriz  $S \in Gl(d, \mathbb{C})$  satisfazendo  $J^{\mathbb{C}} = S^{-1}AS$  com forma diagonal de blocos do seguinte modo:  $J^{\mathbb{C}} = [J_1, J_2, \dots, J_s]$ . Os blocos  $J_i$  são fornecidos pelos autovalores  $\mu$  de  $A$

$$J_i = \begin{bmatrix} \mu & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \mu & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \mu & 1 \\ 0 & & & & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Para cada autovalor  $\mu$  de  $A$ , as dimensões dos blocos são únicas. E além disso, o autoespaço complexo generalizado associado ao autovalor  $\mu \in \mathbb{C}$  é caracterizado por

$\ker(A - \mu I)^n$ , com  $n$  sendo a dimensão do maior bloco de Jordan relacionado a  $\mu$ . Podemos também escrever  $\mathbb{C}^d$  como soma direta de todos esses autoespaços generalizados associado a matriz  $A$ .

Veremos a seguir um lema que trabalha semelhança sobre  $\mathbb{R}$  e sobre  $\mathbb{C}$ .

**Lema 2.1** *Dadas duas matrizes  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$ , suponha que exista  $S \in Gl(d, \mathbb{C})$  com  $B = S^{-1}AS$ . Neste caso, há também uma matriz  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$  tal que  $T^{-1}AT = B$ .*

**Demonstração:**

Por hipótese temos que existe  $S \in Gl(d, \mathbb{C})$  tal que  $B = S^{-1}AS$ . Por sua vez

$$B = S^{-1}AS \Rightarrow SB = \underbrace{SS^{-1}}_I AS = AS. \quad (2.1)$$

Façamos a decomposição de  $S$  de forma a separar as entradas reais e as entradas imaginárias. Assim,

$$S = S_1 + iS_2.$$

No entanto, por (2.1) temos que

$$S_1B = AS_1 \text{ e } S_2B = AS_2.$$

Logo,

$$(S_1 + xS_2)B = A(S_1 + xS_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nos resta provar então que existe  $x \in \mathbb{R}$  de modo que  $(S_1 + xS_2)$  é inversível. Tal fato ocorre devido ao fato de o polinômio de  $\det(S_1 + xS_2)$  em  $x$ , com coeficientes reais, cumpre em  $x = i$  que

$$\det S = \det(S_1 + iS_2) \neq 0.$$

Portanto, o polinômio não é nulo, havendo assim  $x \in \mathbb{R}$  com  $\det(S_1 + xS_2) \neq 0$ .

□

Uma consequência imediata do lema 2.1 é que se  $J^{\mathbb{C}}$  possuir apenas entradas reais, a matriz  $A$  será semelhante sobre os reais a  $J^{\mathbb{C}}$ . Por consequência teremos apenas de lidar com os autovalores complexos.

Para uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , sabemos que os autovalores complexos sempre aparecem em pares conjugados devido ao polinômio característico. Assim, sendo  $\mu = \lambda + iv$  um autovalor de  $A$ , segue que  $\bar{\mu} = \lambda - iv$  também será, para  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Vale lembrar que a representação matricial de um número complexo é da forma:

$$a + bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

A fim de determinar a forma Real de Jordan, consideraremos primeiro um bloco de Jordan complexo unidimensional para autovalores  $\mu, \bar{\mu}$  de  $A$ .

**Proposição 2.2** *Existe uma matriz  $S \in Gl(2, \mathbb{C})$  de forma que*

$$\begin{bmatrix} \lambda & -v \\ v & \lambda \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \lambda + iv & 0 \\ 0 & \lambda - iv \end{bmatrix} S^{-1}.$$

**Demonstração:**

$$\text{Definamos } S = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}.$$

Calculemos sua inversa  $S^{-1} = \frac{1}{\det S} \cdot \text{adj } S$ . Note que

$$\det S = (-i) \cdot i - (-1) = -(-1) + 1 = 2.$$

Como  $S_{11} = i, S_{12} = 1, S_{21} = -1, S_{22} = -i$  então

$$\text{cof}(S) = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$$

daí

$$\text{adj}(S) = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

Deste modo  $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ , e assim

$$\begin{aligned}
S \begin{bmatrix} \lambda + iv & 0 \\ 0 & \lambda - iv \end{bmatrix} S^{-1} &= \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + iv & 0 \\ 0 & \lambda - iv \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda + iv & 0 \\ 0 & \lambda - iv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda i - v}{2} & \frac{-\lambda - iv}{2} \\ \frac{\lambda - iv}{2} & \frac{i\lambda - v}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & -v \\ v & \lambda \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Podemos concluir do Lema 2.1 e da Proposição 2.2 que para toda matriz  $A \in gl(2, \mathbb{R})$ , há uma matriz  $T \in Gl(2, \mathbb{R})$  satisfazendo  $T^{-1}AT = J \in gl(2, \mathbb{R})$ , em que  $J$  ou é uma matriz com autovalores reais ou  $J = \begin{bmatrix} \lambda & -v \\ v & \lambda \end{bmatrix}$  para autovalores em pares conjugados.

O teorema que veremos a seguir é de fundamental importância, uma vez que descreve a forma real de Jordan  $J^{\mathbb{R}}$  para matrizes em  $gl(d, \mathbb{R})$ .

**Teorema 2.3** *Para cada matriz real  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , há uma matriz real inversível  $S \in Gl(d, \mathbb{R})$  de forma que  $J^{\mathbb{R}} = S^{-1}AS$  é uma matriz diagonal de blocos  $J^{\mathbb{R}} = [J_1, J_2, \dots, J_l]$ , os blocos de Jordan reais é dado em função de  $\mu \in \text{spec}(A) \cap \mathbb{R}$  e tem a forma*

$$J_i = \begin{bmatrix} \mu & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \mu & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \mu & 1 \\ 0 & & & & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

e por  $\mu, \bar{\mu} = \lambda \pm iv \in \text{spec}(A), v > 0$  da forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & -v & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ v & \lambda & 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -v & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \lambda & \cdots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda & -v & 1 & 0 \\ & & & & & v & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 0 & \lambda & -x \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 0 & v & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

**Demonstração:** A matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R}) \subset gl(d, \mathbb{C})$  define uma aplicação linear

$$F : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d.$$

Então para  $\mu \in \text{spec}(F) \cap \mathbb{R}$  pode-se encontrar uma base de modo que a restrição de  $F$  para o subespaço de um bloco de Jordan tem a representação matricial da forma (2.2). Consequentemente, é suficiente considerar os blocos de Jordan para os pares complexos conjugados  $\mu \neq \bar{\mu}$ . O primeiro passo a ser feito, é mostrar que as dimensões dos blocos relacionados a  $\mu$  e  $\bar{\mu}$  coincidem.

Com efeito, caso exista  $S \in gl(d, \mathbb{C})$  tal que  $J^{\mathbb{C}} = S^{-1}AS$ , logo as matrizes conjugadas satisfazem

$$\overline{J^{\mathbb{C}}} = \overline{S^{-1}AS} = \overline{S^{-1}}\overline{A}\overline{S}.$$

A unicidade da forma canônica de Jordan implica que  $J^{\mathbb{C}}$  e  $\overline{J^{\mathbb{C}}}$  se distinguem por no máximo pela ordem dos blocos.

Caso  $J$  seja um bloco de Jordan  $m$ -dimensional da forma (2.2) que se corresponda com o autovalor  $\mu$ , teremos por consequência que  $\overline{J}$  será um bloco  $m$ -dimensional que se corresponde com  $\bar{\mu}$ .

Considere  $z_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}^m, j = 1, 2, \dots, m$  os vetores da base de  $J$ , com  $a_j, b_j, \in \mathbb{R}^m$ . Isso quer dizer que  $F(z_1)$  tem coordenada  $\mu$  com respeito a  $z_1$  e para  $j = 2, \dots, m$

a imagem  $F(z_j)$  tem coordenada 1 com respeito a  $z_{j-1}$  e  $\mu$  com respeito a  $z_j$ . Todas as outras coordenadas são nulas.

Assim sendo,  $F(z_1) = \mu z_1$  e  $F(z_j) = z_{j-1} + \mu z_j$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ . Logo,  $F(\bar{z}_1) = A\bar{z}_1 = \overline{Az_1} = \bar{\mu} \bar{z}_1$  e  $F(\bar{z}_j) = A\bar{z}_j = \overline{z_j - 1} + \bar{\mu} \bar{z}_j$ , com  $j = 2, \dots, m$ , implicando assim que  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m$  é uma base para  $\bar{J}$ .

Definamos para  $j = 1, 2, \dots, m$

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (z_j + \bar{z}_j) = \sqrt{2}a_j \in \mathbb{R}^m \quad e$$

$$y_j = \frac{1}{i} \sqrt{2} (z_j - \bar{z}_j) = \sqrt{2}b_j \in \mathbb{R}^m.$$

À vista disso, temos que estas são as partes reais e imaginárias dos autovetores generalizados  $z_j$ . Calculando assim então para  $j = 2, \dots, m$ , implicando assim que  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m$  segue que:

$$\begin{aligned} F(x_j) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (F(z_j) + F(\bar{z}_j)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mu z_j + \bar{\mu} \bar{z}_j + z_{j-1} + \bar{z}_{j-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mu + \bar{\mu}) \frac{(z_j + \bar{z}_j)}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2} (\mu + \bar{\mu}) \frac{(z_j + \bar{z}_j)}{i\sqrt{2}} + x_{j-1} \\ &= (Re \mu) x_j - (Im \mu) y_j + x_{j-1} = \lambda x_j - v_{y_j} + x_{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(y_j) &= \frac{1}{i\sqrt{2}} (F(z_j) - F(\bar{z}_j)) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\mu z_j - \bar{\mu} \bar{z}_j + z_{j-1} - \bar{z}_{j-1}) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} (\mu - \bar{\mu}) (z_j + \bar{z}_j) + \frac{1}{2} (\mu + \bar{\mu}) (z_j - \bar{z}_j) \right] + y_{j-1} \\ &= (Im \mu) x_j + (Re \mu) y_j + y_{j-1} = v_{x_j} + \lambda y_j + y_{j-1} \end{aligned}$$

Perceba que no caso em que  $j = 1$ , as últimas parcelas a direita podem ser ignoradas. Podemos identificar os vetores  $z_j, y_j \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$  com elementos de  $\mathbb{C}^{2m}$  simplesmente adicionando zeros abaixo e acima de forma respectiva. Note que tais vetores formam uma base para  $\mathbb{C}^{2m}$ , visto que são obtidos de  $z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$  através de uma transformação inversível.

Temos assim, mostrado que o subespaço correspondente a aplicação  $F$  pode ser representado matricialmente por (2.3) no que se refere a esta base. Assim sendo, temos que a matriz  $A$  é semelhante perante os complexos a matriz de blocos fornecida por (2.2) e (2.3). Enfim, pelo lema 2.1 mostramos que a mesma também é semelhante sobre os reais.  $\square$

**Observação 2.4** *O Teorema anterior não nos mostra a forma da matriz  $S$ , porém mostra que  $A$  é semelhante sobre os complexos a uma matriz dada por (2.2) e (2.3).*

**Observação 2.5** *O lema 2.1 garante que se resolvermos para os complexos, nós também resolvemos para os reais.*

Tenha a base de  $\mathbb{R}^d$  correspondente a forma real de Jordan. O autoespaço real generalizado pelos elementos da base correspondentes aos blocos de Jordan dado por  $\mu$ , i.e.,  $\ker(A - \mu I)^n$ , onde  $n$  é a dimensão do maior bloco de Jordan para  $\mu$ .

O autoespaço real generalizado por um par de autovalores complexos conjugados  $\mu, \bar{\mu}$  é o subespaço gerado pelos elementos da base correspondentes aos bloco real de Jordan para  $\mu$  e  $\bar{\mu}$ . De forma análoga, definimos os autoespaços reais.

**Definição 2.6** *Para  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , façam-se  $\mu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r_1$ , os autovalores de  $\mu$  e  $\bar{\mu}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r_2$  os pares de autovalores complexos conjugados de modo que  $r = r_1 + 2r_2 \leq d$ . Os autoespaços reais generalizados são denotados por  $E(A, \mu_k) \subset \mathbb{R}^d$  ou meramente por  $E_k$  para  $k = 1, 2, \dots, r$ .*

É usual chamarmos os elementos do autoespaço acima definido por autovetores generalizados.

**Observação 2.7** *Caso o autovalor  $\mu$  seja real, temos que a sua multiplicidade algébrica coincide com a sua dimensão do autoespaço real generalizado correspondente, i.e.,  $n_k = \dim E_k$ .*

**Observação 2.8** *Caso o autovalor seja complexo, a dimensão do autoespaço real generalizado correspondente é dado por  $n_k = \dim E_k = 2m$ , em que  $m$  é a multiplicidade algébrica de autovalor  $\mu$ .*

**Observação 2.9** *Toda matriz tem um conjunto de autovetores reais generalizados que formam uma base para  $\mathbb{R}^d$ , de outra forma,  $\bigoplus_{k=1}^r E_k = \mathbb{R}^d$ .*

## 2.2 Campo Vetorial

Antes de falarmos sobre campo vetorial, recordemos que dada uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  a curva  $e^{\lambda t}v$  é uma solução de  $\dot{x} = Ax$  se, e somente se,  $\lambda$  for um autovalor de  $A$  com autovetor  $v$ .

Campo vetorial nada mais é do que uma função onde em cada ponto nós "desenhamos" um vetor mostrando como que a "força" está atuando. De maneira formal, podemos definir do modo seguinte.

**Definição 2.10** *Um campo vetorial é uma função  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  com  $D \subset \mathbb{R}^m$  a qual a cada ponto  $x \in D$  associa um vetor  $F(x) \in \mathbb{R}^m$ .*

Para simplificar, vamos trabalhar em  $\mathbb{R}^2$ , desta forma, um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Note que neste caso, o campo vetorial pode ser escrito em termos de suas componentes  $P$  e  $Q$  da seguinte forma:

$$F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Veja que  $P$  e  $Q$  são campos escalares, i.e., funções de duas variáveis.

Vamos estudar o comportamento das soluções de uma equação diferencial linear por meio de seus campos vetoriais.

Consideremos  $A \in gl(2, \mathbb{R})$  e  $x = (x, y)$  na sua forma conjugada. Deste modo, temos três casos a considerar em relação a seus autovalores.

1. Duas raízes reais e distintas:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ;
2. Duas raízes reais e iguais:  $\lambda_1 = \lambda_2$ ;
3. Duas raízes complexas conjugadas:  $\mu = \lambda + iv$ ,  $\bar{\mu} = \lambda - iv$ .

- Analisando o primeiro caso:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  com  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Deste modo, temos que  $A$  em sua forma conjugada é do seguinte modo:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que o sistema é dado por:

$$Dx = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 x \mathbf{i} + \lambda_2 y \mathbf{j}.$$

Ou seja, para analisar a questão de campo vetorial de um sistema deste tipo, tomaremos a função

$$\boxed{F(x, y) = \lambda_1 x \mathbf{i} + \lambda_2 y \mathbf{j}}.$$

Vamos entender o comportamento da função via campo de vetores. Para tanto atribuiremos valores a  $x$  e  $y$ , além de analisar os sinais dos autovalores.

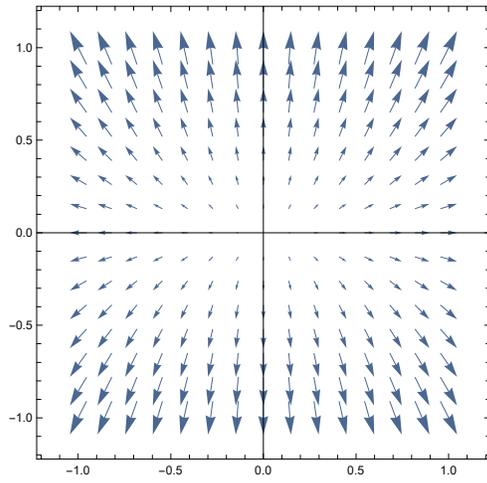


Figure 2.1:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  positivos, com  $\lambda_1 < \lambda_2$ . No exemplo  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ .

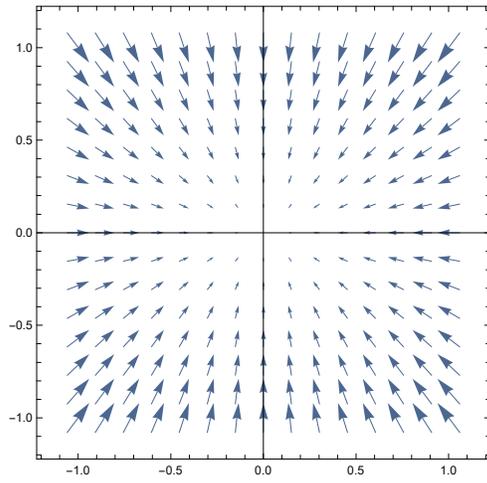


Figure 2.2:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  negativos, com  $\lambda_2 < \lambda_1$ . No exemplo  $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{-2}{3}$ .

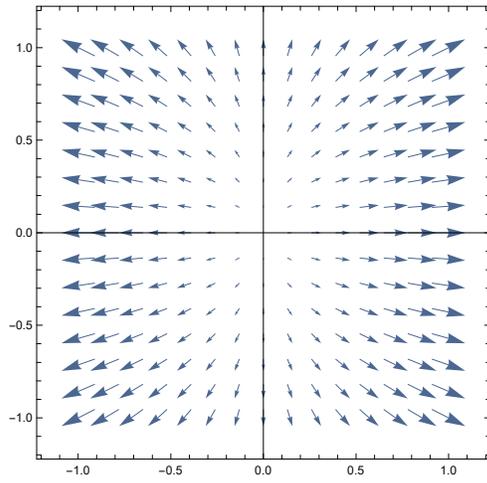


Figure 2.3:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  positivos, com  $\lambda_2 < \lambda_1$ . No exemplo  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$ .

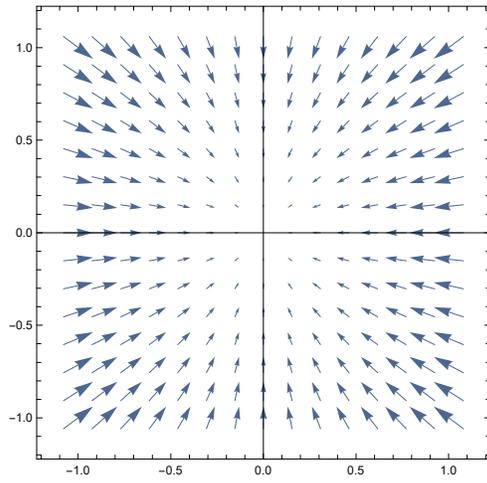


Figure 2.4:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  negativos, com  $\lambda_1 < \lambda_2$ . No exemplo  $\lambda_1 = \frac{-2}{3}$  e  $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$ .

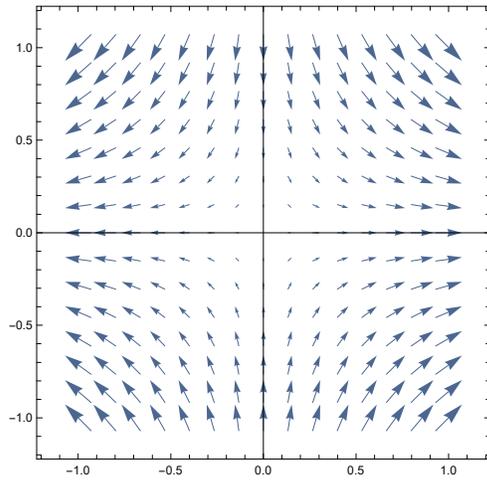


Figure 2.5:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  opostos, com  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . No exemplo  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$ .

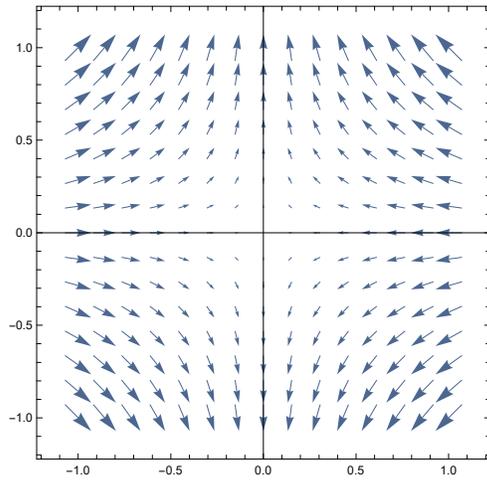


Figure 2.6:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  opostos, com  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . No exemplo  $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

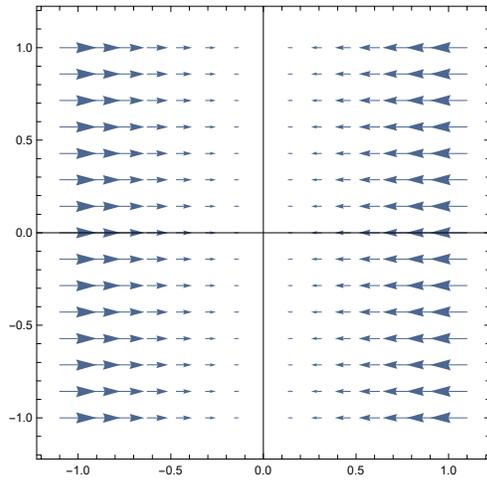


Figure 2.7:  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 = 0$ . No exemplo  $\lambda_1 = -1$ .

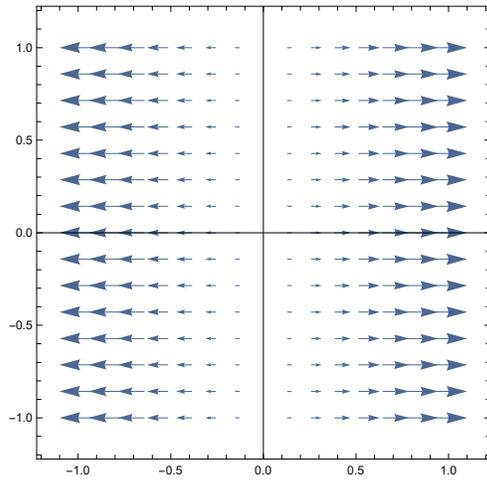


Figure 2.8:  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 = 0$ . No exemplo  $\lambda_1 = 1$ .

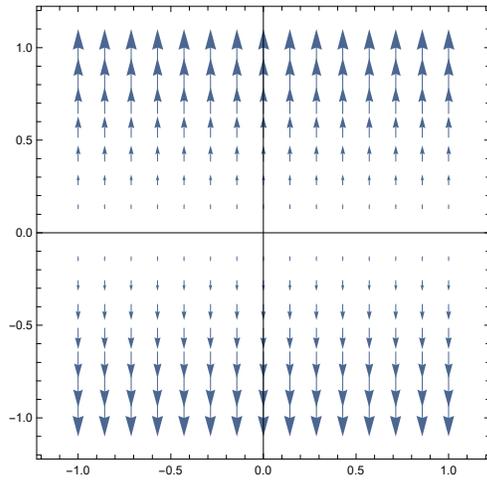


Figure 2.9:  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 > 0$ . No exemplo  $\lambda_2 = 1$ .

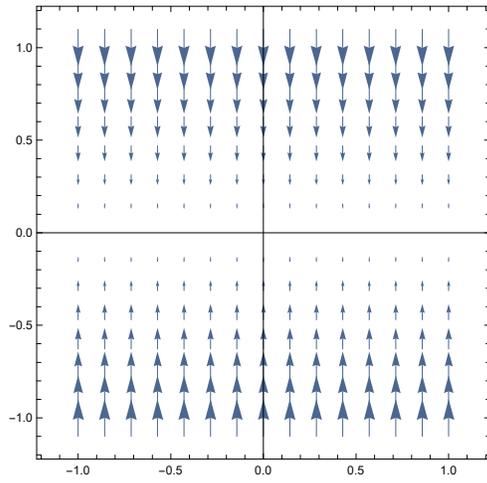


Figure 2.10:  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 < 0$ . No exemplo  $\lambda_2 = -1$ .

- Analisando o segundo caso:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Deste modo, temos que  $A$  em sua forma de Jordan é do seguinte modo:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que o sistema é dado por:

$$Jx = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\lambda x + y)\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j}.$$

Ou seja, para analisar a questão de campo vetorial de um sistema deste tipo, tomaremos

$$\boxed{F(x, y) = (\lambda x + y)\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j}}.$$

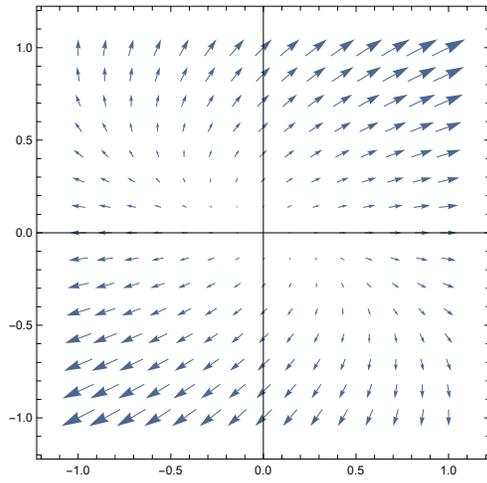


Figure 2.11:  $\lambda > 0$ . No exemplo  $\lambda = 1$ .

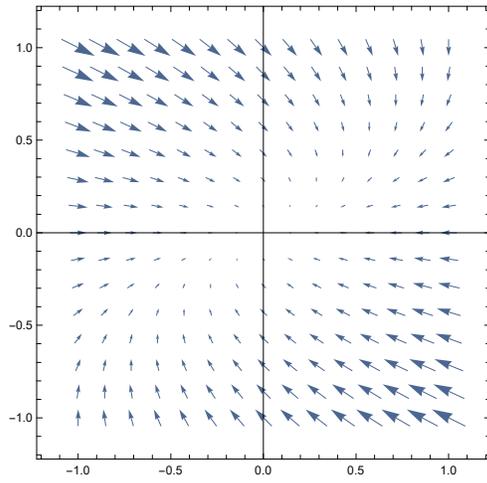


Figure 2.12:  $\lambda < 0$ . No exemplo  $\lambda = -1$ .

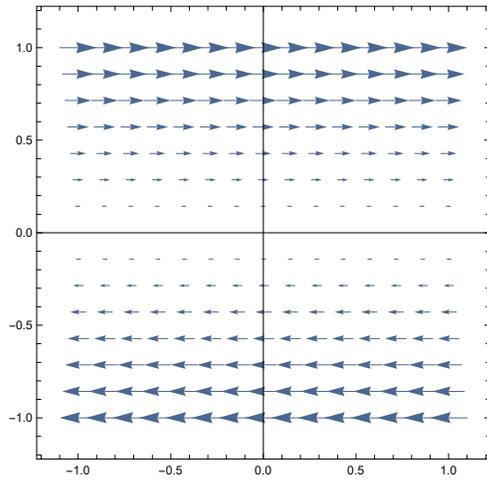


Figure 2.13:  $\lambda = 0$ .

Há também em questão, o caso em que  $A$  é da forma  $\lambda I$ , ou seja, múltipla da matriz identidade. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema é dado por:

$$Ax = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda x \mathbf{i} + \lambda y \mathbf{j}.$$

Por consequência, o campo vetorial será estudado em

$$\boxed{F(x, y) = \lambda x \mathbf{i} + \lambda y \mathbf{j}}.$$

Analisaremos os sinais dos autovalores.

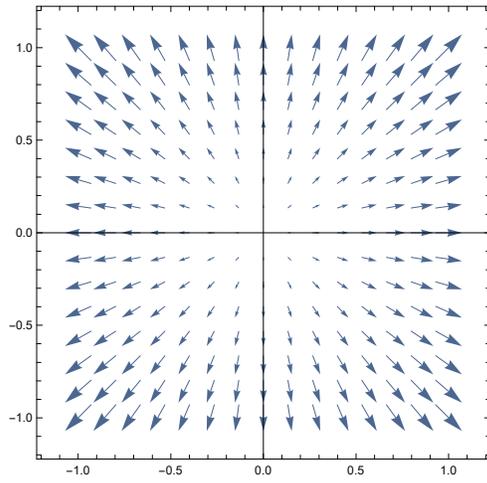


Figure 2.14:  $\lambda > 0$ . No exemplo  $\lambda = 1$ .

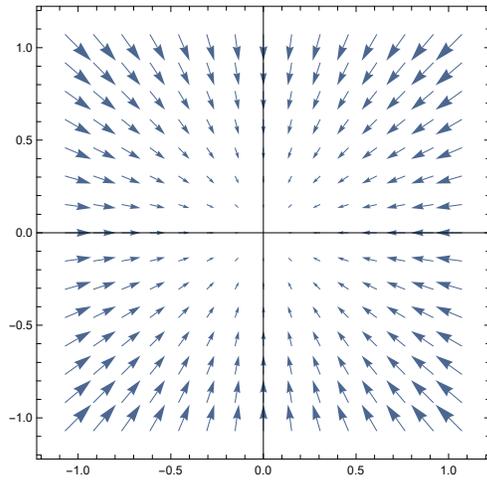


Figure 2.15:  $\lambda < 0$ . No exemplo  $\lambda = -1$ .

- Analisando o terceiro caso:  $\mu = \lambda + iv$ ,  $\bar{\mu} = \lambda - iv$ , com  $\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}$ .

Para tais autovalores complexos conjugados aos pares, temos o seguinte bloco de Jordan associado:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & -v \\ v & \lambda \end{bmatrix}.$$

Portanto o sistema é dado por:

$$Jx = \begin{bmatrix} \lambda & -v \\ v & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\lambda x - vy)\mathbf{i} + (vx + \lambda y)\mathbf{j}.$$

Onde então o campo vetorial será estudado em

$$\boxed{F(x, y) = (\lambda x - vy)\mathbf{i} + (vx + \lambda y)\mathbf{j}}.$$

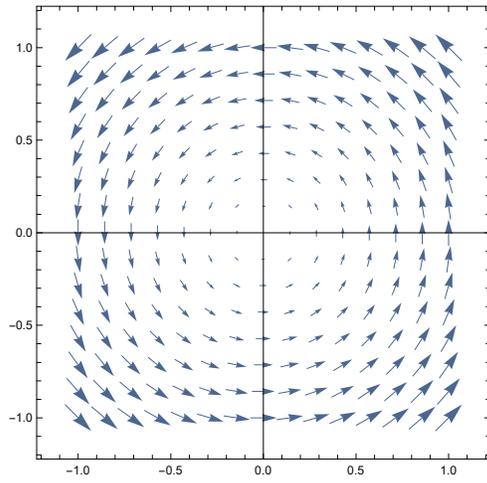


Figure 2.16:  $\lambda = 0$  e  $v > 0$ . No exemplo  $v = 1$ .

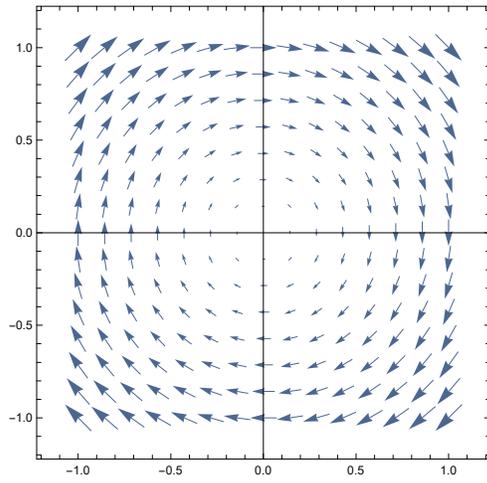


Figure 2.17:  $\lambda = 0$  e  $v < 0$ . No exemplo  $v = -1$ .

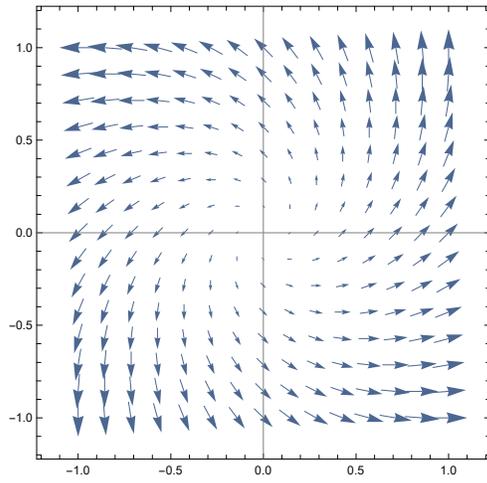


Figure 2.18:  $\lambda > 0$  e  $\nu > 0$ . No exemplo  $\lambda = 1$  e  $\nu = 1$ .

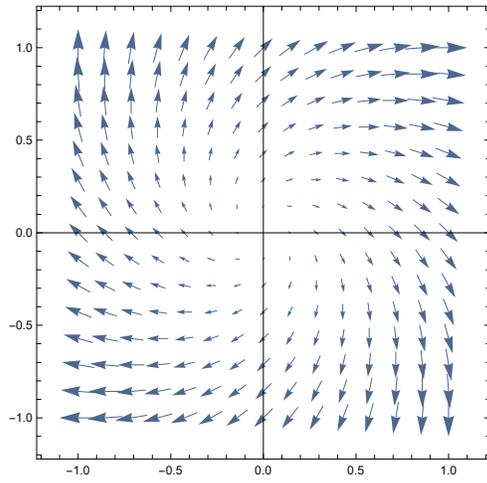


Figure 2.19:  $\lambda > 0$  e  $v < 0$ . No exemplo  $\lambda = 1$  e  $v = -1$ .

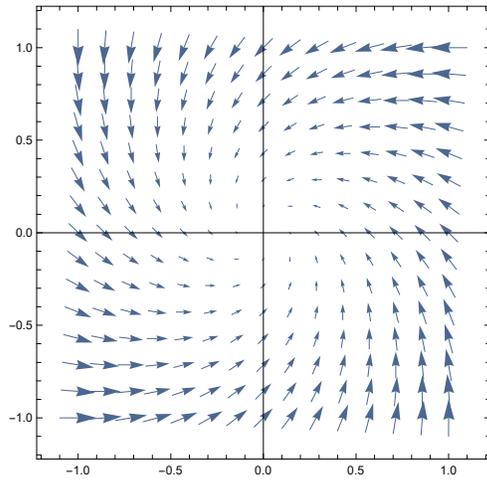


Figure 2.20:  $\lambda < 0$  e  $v > 0$ . No exemplo  $\lambda = -1$  e  $v = 1$ .

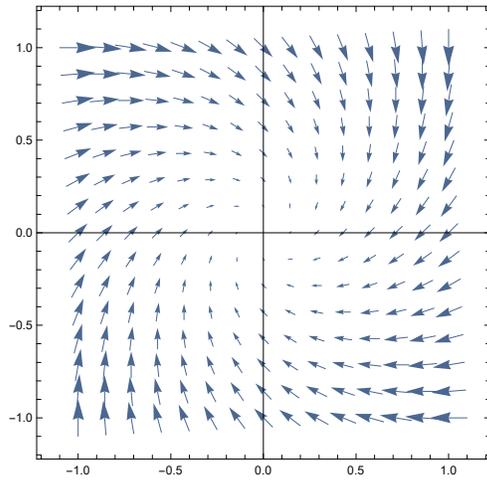


Figure 2.21:  $\lambda < 0$  e  $v < 0$ . No exemplo  $\lambda = -1$  e  $v = -1$ .

**Observação 2.11** *É importante ver que esses campos vetoriais tangenciam as soluções do sistema linear, estas que por sua vez, dependem do valor inicial escolhido.*

## 2.3 Solução para Equações do tipo $\dot{x} = Ax$

Para expressar de forma explícita a solução de uma equação diferencial linear do tipo  $\dot{x} = Ax$  usa-se a forma real de Jordan da matriz  $A$ , e neste momento nosso objetivo principal é descrever tal processo.

**Proposição 2.12** *Considere  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  de modo que para algum  $S \in Gl(d, \mathbb{R})$  seja satisfeito  $B = S^{-1}AS$ . Diante disso, as soluções  $y(t, y_0)$  e  $x(t, x_0)$  de  $\dot{y} = By$  e  $\dot{x} = Ax$  respectivamente, são relacionadas por*

$$y(t, y_0) = S^{-1}x(t, Sy_0), \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração:** Veja que dado  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} y(t, y_0) &= e^{Bt}y_0 = e^{S^{-1}AS}y_0 \\ &= S^{-1}e^A S y_0 \\ &= S^{-1}x(t, Sy_0). \end{aligned}$$

□

A seguir veremos dois teoremas que nos auxiliarão na dedução das soluções implícitas destas equações. Porém antes disso, vale ressaltar que em matrizes na forma real de Jordan o cálculo da exponencial se torna mais simples, e a proposição 2.4 nos permite trabalhar com matrizes dessa forma.

**Teorema 2.13** *Considere  $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  uma base de autovetores reais generalizados de  $A$ , ou seja, uma base de  $\mathbb{R}^d$ . Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se  $x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i$ , então  $x(t, x_0) = \sum_{i=1}^d \alpha_i x(t, v_i)$ .*

**Demonstração:** Com efeito, escrevendo  $x_0$  em função da base temos

$$x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i.$$

Devido ao fato da solução do sistema ser linear, temos que

$$\begin{aligned} x(t, x_0) &= x(t, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_d v_d) \\ &= x(t, \alpha_1 v_1) + x(t, \alpha_2 v_2) + \cdots + x(t, \alpha_d v_d) \\ &= \alpha_1 x(t, v_1) + \alpha_2 x(t, v_2) + \cdots + \alpha_d x(t, v_d) \\ &= \sum_{i=1}^d \alpha_i x(t, v_i). \end{aligned}$$

Desta maneira, as soluções  $\dot{x} = Ax$  podem ser encontradas calculando as soluções para os blocos de Jordan de  $A$ .

□

Consideremos a base canônica de  $\mathbb{R}^d$ , ou seja,  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 1, 0)$ . Pelo teorema 1.33, temos que  $x(\cdot, e_1), x(\cdot, e_2), \dots, x(\cdot, e_d)$  forma uma base para o espaço solução de  $A$ . Por certo, dado  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  segue que  $x_0 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_d e_d$ , com  $a_i \in \mathbb{R}$  e  $1 \leq i \leq d$ . Recordando o teorema 1.32 detemos que a solução  $x(\cdot, x_0)$  é única e dada por  $x(t, x_0) = e^{At} x_0$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, conciliando tais informações, com a proposição 2.13 segue que

$$\begin{aligned} x(t, x_0) &= e^{At} \\ &= e^{At}(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_d e_d) \\ &= e^{At}(a_1 e_1) + e^{At}(a_2 e_2) + \cdots + e^{At}(a_d e_d) \\ &= a_1 e^{At}(e_1) + a_2 e^{At}(e_2) + \cdots + a_d e^{At}(e_d) \end{aligned}$$

Assim segue o resultado.

**Teorema 2.14** *Dada uma equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ , se  $x_0 \in E_k$  então  $x(t, x_0) = e^{At} x_0 \in E_k$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Com efeito, se  $x_0 \in E_k$ , de acordo com a definição de autoespaço real generalizado, temos que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $(A - \mu_k I)^p(x_0) = 0$ . Note que  $e^{At}$  e  $A$  comutam, segue que

$$(A - \mu_k I)^p e^{At}(x_0) = e^{At}(A - \mu_k I)^p(x_0) = e^{At}(0) = 0.$$

Consequentemente,  $E_k$  é invariante para a equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ .

□

A importância do teorema 2.14 em nossos estudos é que devido ao fato de o espaço estado  $\mathbb{R}^d$  ser dividido em autoespaços reais generalizados, e sendo o ponto inicial dado em um determinado autoespaço generalizado, a solução (trajetória) estará inteiramente contida no mesmo autoespaço generalizado.

Veremos as fórmulas para as soluções de  $\dot{x} = Ax$  em algumas situações importantes para nós.

**Exemplo 2.15** *Caso a matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , as soluções são quase triviais. Seja  $A = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d)$  uma matriz diagonal.*

*Dentre as propriedades de uma matriz diagonal, temos que a base canônica  $e_1, e_2, \dots, e_d$  de  $\mathbb{R}^d$  consiste de autovetores de  $A$  e a solução de uma equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  com valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  é dada por*

$$e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} e^{\mu_1 t} & & & \\ & e^{\mu_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mu_d t} \end{bmatrix} x_0 \quad (2.4)$$

*Lembremo-nos que para matrizes diagonais, a potência da matriz é obtida pela potência dos elementos da diagonal. Deste modo,*

$$\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \\
&= \text{diag}(1, \dots, 1) + \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_d) + \text{diag}\frac{1}{2}(\mu_1^2, \dots, \mu_d^2) + \text{diag}\frac{1}{3!}(\mu_1^3, \dots, \mu_d^3) + \dots \\
&= \text{diag}\left(1 + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1^2 + \frac{1}{3!}\mu_1^3 + \dots, \dots, 1 + \mu_d + \frac{1}{2}\mu_d^2 + \frac{1}{3!}\mu_d^3 + \dots\right) \\
&= \text{diag}(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \dots, e^{\mu_d}).
\end{aligned}$$

Consequentemente,  $e^{At} = \text{diag}(e^{\mu_1 t}, e^{\mu_2 t}, \dots, e^{\mu_d t})$ .

Vimos anteriormente, que para dada matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , caso a mesma não seja diagonalizável, nós conseguimos reescreve-la pelo menos na forma real de Jordan. Faremos uso disto, e da proposição 2.12 para prosseguir com as deduções implícitas das soluções das equações do tipo  $\dot{x} = Ax$ .

**Exemplo 2.16** Dada uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , denotemos por  $J$  um bloco de Jordan com  $\dim(J) = n$ , associado a um autovalor real  $\mu$ . Desta forma, para

$$J = \begin{bmatrix} \mu & 1 & & & \\ & \mu & 1 & & \\ & & \mu & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu \end{bmatrix}, \text{ toma-se } e^{Jt} = e^{\mu t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Melhor dizendo, para  $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  a  $j$ -ésima componente da solução de  $\dot{x} = Jx$  é descrita do seguinte modo

$$x_j(t, x_0) = e^{\mu t} \sum_{k=j}^n \frac{t^k - j}{(k-j)!} x_k, \text{ com } 1 \leq j \leq n. \quad (2.6)$$

Para ficar mais claro o raciocínio empregado no exemplo 2.6 tomemos um bloco de Jordan  $J$  com dimensão 4 por exemplo, também associado ao autovalor real  $\mu$ . Assim

$$Jt = \begin{bmatrix} \mu t & t & 0 & 0 \\ 0 & \mu t & t & 0 \\ 0 & 0 & \mu t & t \\ 0 & 0 & 0 & \mu t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I\mu t + Nt.$$

Veja, que assim temos  $e^{Jt} = e^{I\mu t + Nt} = e^{I\mu t} \cdot e^{Nt}$ . Consequentemente,

$$Nt^0 = I, Nt^1 = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Nt^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ e } Nt^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Perceba que isto implica em

$$e^{Jt} = e^{\mu t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja  $x_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ . Vejamos como são as  $j$ -ésimas componentes da solução  $\dot{x} = Jx$ , com  $1 \leq j \leq 4$  a efeito de comparação entre matriz e fórmula geral. Neste caso, temos

$$x_j = e^{\mu t} \sum_{k=j}^4 \frac{t^k - j}{(k-j)!} x_k. \quad (2.7)$$

- $x_1(t, x_0) = e^{\mu t} \left( x_1 + tx_2 + \frac{t^2}{2!}x_3 + \frac{t^3}{3!}x_4 \right);$
- $x_2(t, x_0) = e^{\mu t} \left( x_2 + tx_3 + \frac{t^2}{2!}x_4 \right);$
- $x_3(t, x_0) = e^{\mu t} (x_3 + tx_4);$
- $x_4(t, x_0) = e^{\mu t} (x_4).$

De acordo com o exemplo 2.16, vimos que a equação 2.5 é solução de um bloco. Assim, para saber a solução do sistema, basta aplicarmos a fórmula bloco a bloco.

**Exemplo 2.17** Seja  $J = \begin{bmatrix} \lambda & -v \\ v & \lambda \end{bmatrix}$  um bloco de Jordan associado ao autovalor complexo  $\mu = \lambda + iv$  de uma dada matriz  $A \in \mathbb{R}^d$ . Considere  $x_0 \in E\mu$ , logo a solução  $x(t, x_0)$  de  $\dot{x} = Jx$  é dada por:

$$x(t, x_0) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \cos vt & -\sin vt \\ \sin vt & \cos vt \end{bmatrix} x_0. \quad (2.8)$$

**Observação 2.18** A matriz  $R := \begin{bmatrix} \cos vt & -\sin vt \\ \sin vt & \cos vt \end{bmatrix}$  é comumente chamada de matriz rotação.

Alguns comentários referente ao exemplo 2.17 a fim de entender melhor o processo de sua construção.

Temos que  $\mu$  é um autovalor complexo, podemos representá-lo por  $\mu = \lambda \pm iv$ . Trabalharemos com  $\mu = \lambda + iv$  tendo em vista que a função seno é ímpar, conservando assim o resultado.

Deste modo,

$$x(t, x_0) = e^{\mu t} x_0 = e^{(\lambda+iv)t} x_0 = e^{\lambda t} \cdot e^{ivt} x_0.$$

Pela fórmula de Euler, temos  $e^{ivt} = \cos vt + i \sin vt$ , e mais, como  $v, t \in \mathbb{R}$  segue que  $\sin vt, \cos vt \in \mathbb{R}$ . Assim sendo,  $\cos vt + i \sin vt \in \mathbb{C}$ , o que por sua vez pode ser escrito matricialmente por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos vt & -\sin vt \\ \sin vt & \cos vt \end{bmatrix}$$

Devido a isto, obtemos a solução 2.8 para  $\dot{x} = Jx$ , visto que  $e^{\lambda t} \cdot e^{ivt} x_0$  pode ser escrito com

$$e^{\lambda t} \cdot \begin{bmatrix} \cos vt & -\sin vt \\ \sin vt & \cos vt \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \cdot R.$$

**Exemplo 2.19** Dada uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , considere  $J$  um bloco de Jordan associado ao autovalor complexo  $\mu = \lambda + iv$  com dimensão  $2m = n$ . Tenha

$$D := \begin{bmatrix} \lambda & -v \\ v & \lambda \end{bmatrix}, I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R := R(t),$$

com  $R$  sendo a matriz de rotação em  $\mathbb{R}^2$ . Para

$$J = \begin{bmatrix} D & I & & & \\ & D & I & & \\ & & D & I & \\ & & & D & \ddots \\ & & & & \ddots & I \\ & & & & & & D \end{bmatrix}, \text{ tem-se } e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} R & tR & \frac{t^2}{2!}R & \frac{t^3}{3!}R & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}R \\ & R & tR & \frac{t^2}{2!}R & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}R \\ & & R & tR & \ddots & \vdots \\ & & & R & \ddots & \frac{t^2}{2!}R \\ & & & & \ddots & tR \\ & & & & & R \end{bmatrix}$$

Em outras palavras, para  $x_0 = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m) \in \mathbb{R}^{2m}$  e  $1 \leq m$ , a solução de  $\dot{x} = Jx$  é dada por:

$$x_j(t, x_0) = e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (x_k \cos vt - y_k \sin vt), \quad (2.9)$$

$$y_j(t, x_0) = e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (x_k \sin vt + y_k \cos vt). \quad (2.10)$$

Tomemos um bloco de Jordan com dimensão 4, ou seja, um bloco onde  $m = 2$ , em que o autovalor associado seja  $\mu \in \mathbb{C}$ . Assim,

$$J = \begin{bmatrix} D & I \\ & D \end{bmatrix} \implies Jt = \begin{bmatrix} \lambda t & -vt & t & 0 \\ vt & \lambda t & 0 & t \\ & & \lambda t & -vt \\ & & vt & \lambda t \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
e^{Jt} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & -vt & t & 0 \\ vt & \lambda t & 0 & t \\ 0 & 0 & \lambda t & -vt \\ 0 & 0 & vt & \lambda t \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda^2 t^2 - v^2 t^2 & -2\lambda vt^2 & 2\lambda t^2 & -2vt^2 \\ 2\lambda vt^2 & \lambda^2 t^2 - v^2 t^2 & 2vt^2 & 2\lambda t^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 t^2 - v^2 t^2 & -2\lambda vt^2 \\ 0 & 0 & 2\lambda vt^2 & \lambda^2 t^2 - v^2 t^2 \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} \lambda^3 t^3 - 3\lambda v^2 t^3 & v^3 t^3 - 3\lambda^2 vt^3 & 3\lambda^2 t^3 - 3v^2 t^3 & -6v\lambda t^3 \\ -v^3 t^3 + 3\lambda^2 vt^3 & \lambda^3 t^3 - 3\lambda v^2 t^3 & 6v\lambda t^3 & 3\lambda^2 t^3 - 3v^2 t^3 \\ 0 & 0 & \lambda^3 t^3 - 3\lambda v^2 t^3 & v^3 t^3 - 3\lambda^2 vt^3 \\ 0 & 0 & -v^3 t^3 + 3\lambda^2 vt^3 & \lambda^3 t^3 - 3\lambda v^2 t^3 \end{bmatrix} + \dots
\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, tenhamos claro as seguintes definições analíticas.

$$\bullet \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\bullet e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Considerando  $e^{Jt} = (a_{ij})_{4 \times 4}$ . Veja,

$$\begin{aligned}
\bullet \mathbf{a}_{11} &= 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} - \frac{v^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} - \frac{\lambda v^2 t^3}{2!} + \dots \\
&= \left( 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) \left( 1 - \frac{v^2 t^2}{2!} + \dots \right) \\
&= e^{\lambda t} \cdot \cos vt
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{22} = \mathbf{a}_{33} = \mathbf{a}_{44} = e^{\lambda t} \cdot \cos vt$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{a}_{12} &= 0 - vt - \lambda vt^2 + \frac{v^3 t^3}{3!} - \frac{\lambda^2 vt^3}{2!} + \dots \\ &= \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots\right) \left(-vt + \frac{v^3 t^3}{3!} - \frac{v^5 t^5}{5!} + \dots\right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot (-\sin vt) \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_{34} = e^{\lambda t} \cdot (-\sin vt)$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{a}_{21} &= 0 + vt + \lambda vt^2 - \frac{v^3 t^3}{3!} + \frac{\lambda^2 vt^3}{2!} + \dots \\ &= \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots\right) \left(vt - \frac{v^3 t^3}{3!} + \frac{v^5 t^5}{5!} - \dots\right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot \sin vt \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_{43} = e^{\lambda t} \cdot \sin vt$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{a}_{13} &= 0 + 0 + \lambda t^2 + \frac{\lambda^2 t^3}{2!} - \frac{v^2 t^3}{2!} + \dots \\ &= (1 + \lambda t + \dots) \cdot t \left(1 - \frac{v^2 t^2}{2!} + \dots\right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot t \cos vt \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{a}_{13} = \mathbf{a}_{24} = e^{\lambda t} \cdot t \cos vt$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{a}_{14} &= 0 + 0 - vt^2 - v\lambda t^2 + \dots \\ &= (1 + \lambda t + \dots) \cdot t \left(-vt + \frac{v^2 t^2}{2!} - \dots\right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot t \sin vt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{a}_{23} &= 0 + 0 + vt^2 + \lambda vt^3 + \dots \\ &= (1 + \lambda t + \dots) \dots \left(vt - \frac{v^3 t^3}{3!} + \dots\right) \\ &= e^{\lambda t} \cdot \sin vt \end{aligned}$$

Reescrevendo, temos:

$$\begin{aligned}
 e^{Jt} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \cos vt & e^{\lambda t}(-\sin vt) & e^{\lambda t} \cdot t \cos vt & e^{\lambda t} \cdot t(-\sin vt) \\ e^{\lambda t} \sin vt & e^{\lambda t} \cos vt & e^{\lambda t} \cdot t \sin vt & e^{\lambda t} \cdot t \cos vt \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \cos vt & e^{\lambda t}(-\sin vt) \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \sin vt & e^{\lambda t} \cos vt \end{bmatrix} \\
 &= e^{\lambda t} \begin{bmatrix} R & tR \\ 0 & R \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Seja  $x_0 = (x_1, y_1, x_2, y_2)^T \in \mathbb{R}^4$ . Vejamos como são as  $x_j$ -ésimas e  $y_j$ -ésimas coordenadas da solução de  $\dot{x} = Jx$  com  $j : 1 \leq j \leq 2$ .

- $x_1(t, x_0) = e^{\lambda t} [(x_1 \cos vt - y_1 \sin vt) + t(x_2 \cos vt - y_2 \sin vt)];$
- $y_1(t, x_0) = e^{\lambda t} [(x_1 \sin vt + y_1 \cos vt) + t(x_2 \sin vt + y_2 \cos vt)];$
- $x_2(t, x_0) = e^{\lambda t}(x_2 \cos vt - y_2 \sin vt);$
- $y_2(t, x_0) = e^{\lambda t}(x_2 \sin vt + y_2 \cos vt).$

Deste modo, concluímos as fórmulas de solução para equações diferenciais lineares do tipo  $\dot{x} = Ax$ .

# Chapter 3

## Estabilidade e Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo serão apresentadas as ideias de expoentes de Lyapunov e suas relações. A fim de preparar o ambiente para os capítulos seguintes, também estudaremos a decomposição do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^d$  em subespaços estável, instável e central.

### 3.1 Espaços de Lyapunov

O comportamento assintótico das soluções de uma equação diferencial linear relaciona nossos conhecimentos de álgebra linear e sistemas dinâmicos. A ferramenta que faz tal ligação são os expoentes de Lyapunov. O maior expoente de Lyapunov será o nosso foco principal, uma vez que o mesmo determina o comportamento geral do sistema.

**Definição 3.1** *Dada uma equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  e sua solução  $x(\cdot, 0)$ , o expoente de Lyapunov é definido para  $x_0 \neq 0$  como*

$$\lambda(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0)\|$$

onde  $\|\cdot\|$  é uma norma qualquer em  $\mathbb{R}^d$ .

Veja que a norma escolhida em  $\mathbb{R}^d$  é indiferente.

De fato, já vimos que a solução de uma equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  com problema de valor inicial é dado de forma única por  $x(t, x_0) = e^{At}x_0$ , com  $t \in \mathbb{R}$ .

Pode-se mostrar que o expoente de Lyapunov não depende da norma.

Antes da definição seguinte, vamos deixar claro alguns conceitos a serem usados ao longo do capítulo. Trabalharemos com uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , cujos  $\mu_k = \lambda_k + iv_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, r$  são os autovalores associados.

**Definição 3.2** *Ordenando as partes reais dos autovalores de ordem crescente, i.e.,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_l$ ,  $1 \leq l \leq r \leq d$  definimos o espaço de Lyapunov associado a  $\lambda_j$  como*

$$L(\lambda_j); = \oplus E(\mu_k),$$

onde  $E(\mu_k)$  é o autoespaço real generalizado associado ao autovalor  $\mu_k$  cuja parte real é  $\lambda_j$ .

**Observação 3.3** *Note que*

$$\mathbb{R}^d = L(\lambda_1) \oplus \dots \oplus L(\lambda_l) = \oplus_{j=1}^l L(\lambda_j).$$

Assim, como vimos, dadas duas matrizes  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  e,  $S \in Gl(d, \mathbb{R})$  satisfazendo  $B = S^{-1}AS$  as soluções se relacionam, o mesmo ocorre para os expoentes de Lyapunov. Ou seja,  $\lambda(y_0, B) = \lambda(Sy_0, A)$ , assim  $\lambda(x_0)$  e  $\lambda(y_0)$  são os expoentes de Lyapunov respectivos.

De fato, sendo  $x(t, x_0)$  e  $y(t, y_0)$  as soluções respectivas de  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{y} = By$ , vimos que as mesmas se relacionam por  $y(t, y_0) = S^{-1}x(t, Sy_0)$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} \lambda(y_0, B) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|y(t, y_0)\| \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|S^{-1}x(t, Sy_0)\| \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|S^{-1}\| + \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, Sy_0)\| \\ &= \lambda(Sy_0, A). \end{aligned}$$

Escrevendo  $x_0 = S(S^{-1}x_0)$ , obtém-se também a desigualdade inversa.

Veremos a seguir o teorema mais importante desta seção, uma vez que o mesmo elucidada a relação entre os expoentes de Lyapunov e a parte real dos autovalores.

**Teorema 3.4** Para  $\dot{x} = Ax$  há exatamente  $l$  expoentes de Lyapunov  $\lambda(x_0)$ , onde  $l$  representa as partes reais distintas  $\lambda_j$  dos autovalores de  $A$ . Para uma solução  $x(\cdot, x_0)$ , com  $x_0 \neq 0$ , tem-se

$$\lambda_j(x_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0)\| = \lambda_j \iff x_0 \in L(\lambda_j).$$

**Demonstração:** Já vimos que dada uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , existe uma matriz  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$  que nos fornece a forma real de Jordan  $J^{\mathbb{R}}$ , ou seja,  $J^{\mathbb{R}} = T^{-1}AT$ .

Para facilitar os cálculos, consideraremos os blocos  $2 \times 2$ .

Suponha que o expoente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  de uma solução  $x(\cdot, x_0)$ , com  $x_0 \neq 0$  satisfaz

$$\lambda_j(x_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0)\| = \lambda_j.$$

Demonstraremos que  $x_0 \in L(\lambda_j)$ .

Seja  $J^{\mathbb{R}}$  a matriz formada pelos blocos de Jordan reais, associados aos pares de autovalores complexos  $\mu_1 = \lambda_1 \pm iv_1, \dots, \mu_r = \lambda_r \pm iv_r$ , com  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$ . De forma matricial podemos representar por:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & -v_1 & & & & \\ v_1 & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & -v_r \\ & & & & v_r & \lambda_r \end{bmatrix}$$

Deste modo, temos

$$e^{J^{\mathbb{R}}_A t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \cos v_1 t & -e^{\lambda_1 t} \sin v_1 t & & & & \\ e^{\lambda_1 t} \sin v_1 t & e^{\lambda_1 t} \cos v_1 t & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & e^{\lambda_r t} \cos v_r t & -e^{\lambda_r t} \sin v_r t \\ & & & & e^{\lambda_r t} \sin v_r t & e^{\lambda_r t} \cos v_r t \end{bmatrix},$$

então,

$$\begin{aligned} e^{J^{\mathbb{R}}_A t} x_0 &= [e^{\lambda_1 t} (x_1 \cos v_1 t - x_2 \sin v_1 t), x_1 \sin v_1 t + x_2 \cos v_1 t), \dots \\ &\dots, e^{\lambda_r t} (x_{d-1} \cos v_r t - x_d \sin v_r t), x_{d-1} \sin v_r t + x_d \cos v_r t)] \end{aligned}$$

em que  $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ .

Lembre-mo-nos de que

$$\mathbb{R}^d = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_r,$$

e que para todo  $y \in \mathbb{R}^d$ , temos

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_r),$$

onde  $y_j \in L(\lambda_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Porém, como neste caso  $L(\lambda_j)$  tem dimensão 2, podemos escrever  $y_1 = (x_1, x_2), y_2 = (x_3, x_4), \dots, y_r = (x_{d-1}, x_d)$ , quer dizer  $y = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d)$ .

Portanto, se  $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  e  $x_1 = x_2 = \dots = x_{j-2} = x_{j+1} = \dots = x_d = 0$ . Temos que  $x_0 \in L(\lambda_j)$ . Mostremos então que isso acontece.

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{t \pm \infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{J_A^{\mathbb{R}} t} x_0\| \\ &= \lim_{t \pm \infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_1 t}(a_{1,2}) + \dots + e^{2\lambda_j t}(a_{j-1,j}) + \dots + e^{2\lambda_r t}(a_{d-1,d})}}{t} \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

onde  $1 \leq j \leq r$ , e  $a_{1,2} = x_1^2 + x_2^2, a_{3,4} = x_3^2 + x_4^2, \dots, a_{j-1,j} = x_{j-1}^2 + x_j^2, \dots, a_{d-1,d} = x_{d-1}^2 + x_d^2$ .

**Observação 3.5** *Veja que  $a_{1,2} = x_1^2 + x_2^2$  vem do fato de*

$$(e^{\lambda_1 t} \cos v_1 t x_1 - e^{\lambda_1 t} \sin v_1 t x_2)^2 = e^{2\lambda_1 t \cos^2 v_1 t x_1^2} + e^{2\lambda_1 t \sin^2 v_1 t x_2^2} - 2e^{\lambda_1 t} \cos v_1 t x_1 \sin v_1 t x_2 \quad (3.1)$$

$$(e^{\lambda_1 t} \sin v_1 t x_1 + e^{\lambda_1 t} \cos v_1 t x_2)^2 = e^{2\lambda_1 t \sin^2 v_1 t x_1^2} + e^{2\lambda_1 t \cos^2 v_1 t x_2^2} + 2e^{\lambda_1 t} \sin v_1 t \cos v_1 t \quad (3.2)$$

*Fazendo 3.1 + 3.2 temos*

$$e^{2\lambda_1 t} (x_1^2 + x_2^2).$$

*O que por sua vez é análogo para os demais.*

Retornando ao cálculo do exponencial de Lyapunov  $\lambda(x_0)$ , e evidenciando  $e^{2\lambda_j t}$  temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_j t} (e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d}))}}{t} = \lambda_j.$$

A fim de simplificar, façamos

$$e^{2\lambda_j t} (e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})) = E,$$

assim, segue

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_j t} \cdot E}}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_j t}} + \ln \sqrt{E}}{t} = \lambda_j \\ \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_j t}}}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{E}}{t} & \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

ou seja, temos

$$\lambda_j + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{E} = \lambda_j.$$

Portanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{E} = 0$ .

Suponha que  $a_{l-1,l} = x_{l-1}^2 + x_l^2 > 0$  para  $j+1 \leq l \leq d$  e  $j < q \leq r$ . Então

$$(e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})) \geq e^{2\lambda_q - 2\lambda_j t}(a_{l-1,l}).$$

Porém,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})} &\geq \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{2\lambda_q - 2\lambda_j t}(a_{l-1,l})}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}(a_{l-1,l})} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} \cdot \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} + \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \\ &= \lambda_q - \lambda_j > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})} > 0.$$

O que por sua vez é um absurdo, e assim  $a_{l-1,l} = 0$  para  $l = j + 1, \dots, d$ . Implicando assim,  $x_{j+1} = \cdots = x_d = 0$ .

Considere  $a_{l-1,l} = x_{l-1}^2 + x_l^2 > 0$  para  $1 \leq l \leq j - 2$  e  $1 \leq q < j$ . Então

$$(e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})) \geq e^{2\lambda_q - 2\lambda_j t}(a_{l-1,l}).$$

Porém,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})} &\leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}(a_{l-1,l})}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}(a_{l-1,l})} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \left( \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} \cdot \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \left( \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} + \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \\ &= \lambda_q - \lambda_j < 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})} < 0.$$

O que por sua vez é um absurdo, e assim  $a_{l-1,l} = 0$  para  $l = 1, \dots, j - 2$ . Implicando assim,  $x_1 = \cdots = x_{j-2} = 0$ .

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{2\lambda_1 t}(a_{1,2}) + \cdots + e^{2\lambda_j t}(a_{j-1,j}) + \cdots + e^{2\lambda_r t}(a_{d-1,d})} = \lambda_j.$$

Desta forma, segue que

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} = \cdots = x_d = 0, \text{ ou seja, } x_0 \in L(\lambda_j).$$

Reciprocamente, suponhamos que  $x_0 \in L(\lambda_j)$ .

Para blocos de Jordan correspondentes aos pares de autovalores complexos de  $A$ , temos que a  $j$ -ésima componente da solução de  $\dot{x} = J^{\mathbb{R}}x$  é dada por:

$$x_j(t, x_0) = e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (x_k \cos vt - y_k \sin vt)$$

e

$$y_j(t, x_0) = e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (x_k \sin vt + y_k \cos vt),$$

com  $j = 1, 2, \dots, m$  e onde  $x_0 = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m) \in E(\mu)$ .

Consideremos as componentes da solução

$$x_1(t, x_0), y_1(t, x_0), x_2(t, x_0), y_2(t, x_0), \dots, x_m(t, x_0), y_m(t, x_0).$$

em seguida, façamos

- $f_j^x = x_j \cos vt - y_j \sin vt$ ;
- $f_j^y = x_j \sin vt + y_j \cos vt$ ;
- $tg_j^x = t(x_{2j} \cos vt - y_{2j} \sin vt)$ ;
- $tg_j^y = t(x_{2j} \sin vt + y_{2j} \cos vt)$ .

Então,

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0)\| &= \sqrt{x_1(t, x_0)^2 + y_1(t, x_0)^2 + \dots + x_m(t, x_0)^2 + y_m(t, x_0)^2} \\ &= \sqrt{(e^{\lambda t}(f_1^x + tg_1^x))^2 + (e^{\lambda t}(f_1^y + tg_1^y))^2 + \dots + (e^{\lambda t}(f_m^x + tg_m^x))^2 + (e^{\lambda t}(f_m^y + tg_m^y))^2} \\ &= \sqrt{(e^{\lambda t})^2} \end{aligned}$$

onde,

$$f(t) = \sum_{j=1}^m [(f_j^x + tg_j^x)^2 + (f_j^y + tg_j^y)^2].$$

A vista disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \|(x, tx_0)\| &= \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{\lambda t})^2 \cdot f(t)} \\ &= \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{\lambda t})^2} + \frac{1}{t} \ln \sqrt{f(t)} \end{aligned}$$

Veja que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{f(t)} = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{\lambda t})^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln e^{\lambda t} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \lambda t = \lambda.$$

□

## 3.2 Estabilidade em Sistemas Dinâmicos em $\mathbb{R}^d$

Nesta seção, faremos um estudo do comportamento das soluções, no contexto de estabilidade.

Considere  $N(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < \varepsilon\}$  com  $\varepsilon > 0$ , uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Definição 3.6** *Seja  $x^* \in \mathbb{R}^d$  um ponto fixo da equação diferencial  $\dot{x} = Ax$ , isto é, ao aplicarmos este ponto na solução  $x(t, x_0)$ , segue que  $x(t, x^*) = x^*$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Desta forma,  $x^*$  é chamado de:*

1. *Estável: se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  de modo que  $x(t, x_0) \in N(x^*, \varepsilon)$ , para todo  $t \geq 0$  quando  $x_0 \in N(x^*, \delta)$ ;*
2. *Assintoticamente Estável: se é estável e existe  $\gamma > 0$  de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = x^*$  quando  $x_0 \in N(x^*, \gamma)$ ;*
3. *Exponencialmente Estável: se existe  $\alpha \geq 1$  e  $\beta, \eta > 0$  de modo que para cada  $x_0 \in N(x^*, \eta)$ , a solução satisfaz  $\|x(t, x_0) - x^*\| \leq \alpha \|x_0 - x^*\| e^{-\beta t}$ , para todo  $t \geq 0$ ;*
4. *Instável: caso não seja estável.*

**Observação 3.7** *Note que para  $\dot{x} = Ax$ ,  $x^*$  é um ponto fixo se, e somente se  $x^* \in \ker A$ . E mais, a origem é um ponto fixo em qualquer equação diferencial linear.*

Como visto na seção anterior, podemos decompor  $\mathbb{R}^d$  em soma direta de espaços de Lyapunov, i.e.,  $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{j=1}^l L(\lambda_j)$ . Fazendo uso de tais subespaços, e da pequena introdução referente aos conceitos de estabilidade, daremos a seguinte definição.

**Definição 3.8** Os subespaços estável, central e instável relacionados a matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  são definidos de forma respectiva do seguinte modo:

1.  $L^- = \oplus L(\lambda_j) : \lambda_j < 0;$
2.  $L^0 = \oplus L(\lambda_j) : \lambda_j = 0;$
3.  $L^+ = \oplus L(\lambda_j) : \lambda_j > 0.$

Perceba que de acordo com a definição acima, o espaço estado  $\mathbb{R}^d$  pode ser decomposto em soma direta dos subespaços estável, central e instável. De outra forma,

$$\mathbb{R}^d = L^- \oplus L^0 \oplus L^+.$$

Vejamos a seguir, alguns exemplos das definições acima.

**Exemplo 3.9** Considere  $A \in gl(4, \mathbb{R})$  com os seguintes autovalores

$$\mu_1 = -3 \pm 2i, \quad \mu_2 = 2 \quad e \quad \mu_3 = 0.$$

Neste exemplo, claramente

$$\mathbb{R}^4 = E(-3 \pm 2i) \oplus E(2) \oplus E(0).$$

Contudo,

$$\begin{aligned} E(-3 \pm 2i) &= \ker(A^2 + 6x + 13), \\ E(2) &= \ker(A - 2), \\ E(0) &= \ker A, \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\mathbb{R}^4 = \ker(A^2 + 6x + 13) \oplus \ker(A - 2) \oplus \ker A.$$

Tendo em vista que  $-3, 2,$  e  $0$  são as partes reais dos autovalores relativos a matriz  $A$ , acertamos que os espaços de Lyapunov são:

$$\begin{aligned} L(-3) &= E(-3 \pm 2i) = \ker(A^2 + 6x + 13), \\ L(2) &= E(2) = \ker(A - 2), \\ L(0) &= E(0) = \ker A, \end{aligned}$$

Isto posto, temos

$$L^- = L(-3), L^0 = L(0) \text{ e } L^+ = L(2)$$

como sendo os subespaços estável, central e instável respectivamente.

**Exemplo 3.10** Considere  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , e  $\mu = \lambda + iv$  como sendo o modelo de seus autovalores, de modo que  $\lambda \neq 0$ . O espaço central é o conjunto vazio, visto que  $L^0 = \{L(\lambda_j); \lambda_j = 0\} = \emptyset$ . Por consequência,

$$\mathbb{R}^d = L^- \oplus L^+.$$

O teorema a seguir é importante, uma vez que possibilita a caracterização de estabilidade por meio dos autovalores.

**Teorema 3.11** Para uma equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  em  $\mathbb{R}^d$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A origem  $0 \in \mathbb{R}^d$  é assintoticamente estável.
2. A origem  $0 \in \mathbb{R}^d$  é exponencialmente estável.
3. Todos os expoentes de Lyapunov são negativos (em outras palavras, todas as partes reais dos autovalores são negativas).
4. O subespaço estável  $L^-$  satisfaz  $L^- = \mathbb{R}^d$ .

**Demonstração:** Observemos primeiro que a estabilidade assintótica e exponencial de ponto fixo  $x^* \in \mathbb{R}^d$  em uma vizinhança  $N(x^*, \gamma)$  implica a estabilidade assintótica e exponencial, respectivamente, para todos os pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ .

De fato, suponha que a origem tenha estabilidade exponencial em  $N(0, \gamma)$ . Então para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  o ponto

$$x_1 = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{x_0}{\|x_0\|} \in N(0, \gamma),$$

e, deste modo,

$$\begin{aligned}
 \|x(t, x_0)\| &= \|e^{At}x_0\| \\
 &= \left\| \frac{2\|x_0\|}{\gamma} \cdot e^{At} \cdot \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\| \\
 &= \frac{2\|x_0\|}{\gamma} \cdot \|x(t, x_1)\| \\
 &\leq \frac{2\|x_0\|}{\gamma} \cdot \alpha \|x_1\| e^{-\beta t} \\
 &= \alpha \|x_0\| e^{-\beta t}.
 \end{aligned}$$

Por meio do resultado, de forma análoga mostramos a estabilidade assintótica.

Provemos as equivalências.

(2)  $\implies$  (1) O resultado sai de forma direta por meio da definição de assintoticamente estável.

(1)  $\implies$  (3) Repare que se a origem é assintoticamente estável,  $e^{At}x_0 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Suponha que um dos expoentes de Lyapunov não é negativo. Assim, um dos autovalores,  $\mu$  por exemplo, tem parte real não negativa.

- $\mu$  real positivo, isto é,  $\mu = \lambda$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Se  $w$  é o autovetor relativo a  $\mu$ , então a solução correspondente a esse autovetor é dada por  $e^{At}w = e^{\lambda t}w$ . Além disso, quando  $t \rightarrow \infty$  temos que  $e^{\lambda t}w \rightarrow \infty$  para  $\lambda > 0$ , e  $e^{\lambda t}w = w$  é um ponto fixo para  $\lambda = 0$ . Logo, a solução correspondente ao autovetor  $w$ , não tende para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

- Seja  $\mu = \lambda + iv$  com  $\lambda > 0$  e  $v \neq 0$ . Mostraremos este caso para um bloco de Jordan relacionado ao par  $\mu = \lambda \pm iv$ . Então, a solução é dada por

$$e^{At}x_0 = e^{\lambda t} (\cos vt \cdot x_1 - \sin vt \cdot x_2, \sin vt \cdot x_1 + \cos vt \cdot x_2), \text{ onde } x_0 = (x_1, x_2). \quad (3.3)$$

Deste modo, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $e^{At}x_0 \rightarrow \infty$  para  $\lambda > 0$ , e a equação (3.3) é a rotação em  $x_0$  para  $\lambda = 0$ . Portanto, neste caso também temos que a solução não tende para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

(3)  $\implies$  (2) Considere, por absurdo, que a origem não é exponencialmente estável, ou

seja, para todos  $\alpha, \beta, \eta > 0$  existe  $x_0$  in  $N(0, \eta)$  tal que

$$\|e^{At}x_0\| > \alpha\|x_0\|e^{-\beta t},$$

para  $t \geq 0$ . Porém, deste modo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| > \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha\|x_0\|e^{-\beta t} = 0,$$

assim,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| > 0$ , o que por sua vez é um absurdo, pois se todos os expoentes de Lyapunov são negativos, temos que  $\mathbb{R}^d = L^-$ , e assim,  $e^{At}x_0 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| = 0.$$

(3)  $\iff$  (4) Sabemos que  $\mathbb{R}^d = L^- \oplus L^0 \oplus L^+$ . Então,  $\mathbb{R}^d = L^- \iff L^0 = \emptyset$  e  $L^+ = \emptyset$ . O que por sua vez, ocorre se, e somente se, todos os expoentes de Lyapunov de  $A$  são negativos.

□

### 3.3 Classificação dos Sistemas Lineares Hiperbólicos no Plano

O Plano de Fase é uma representação geométrica das curvas da solução de um sistema  $\dot{x} = Ax$ . Essas curvas, são chamadas de trajetórias.

Veremos o Plano Traço-Determinante. Apresentaremos as propriedades em função apenas do traço e do determinante.

Por simplicidade adotaremos uma matriz  $2 \times 2$  para representar o sistema.

Sendo  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , temos

$$Ax = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = (ax + by, cx + dy).$$

Sabemos que a equação  $\det(A - \lambda I) = 0$  é denominada equação característica da matriz  $A$ , onde suas raízes são os autovalores associados a  $A$ . Assim,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \implies &(a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0 \\ \implies &\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb) = 0 \\ \implies &\lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A = 0 \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(-\text{Tr } A) \pm \sqrt{(-\text{Tr } A)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \det A}}{2} \\ &= \frac{\text{Tr } A}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\text{Tr } A}{2}\right]^2 - \det A} \end{aligned}$$

Veja que a equação terá raízes reais se, e somente se,  $\Delta \geq 0$ , ou seja,

$$(\text{Tr } A)^2 - 4 \det A \geq 0.$$

Note que conseguimos encontrar o sinal das raízes, sem ter de resolver os sistemas. Note que

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \text{ e } \text{Tr } A = \lambda_1 + \lambda_2.$$

- Quando  $\det A$  é negativo, temos

$$\sqrt{\left[\frac{\text{Tr } A}{2}\right]^2 - \det A} \geq \left[\frac{\text{Tr } A}{2}\right],$$

o que implica autovalores reais, e com sinais distintos. Em tal casos, o plano de fase é do tipo ponto de sela.

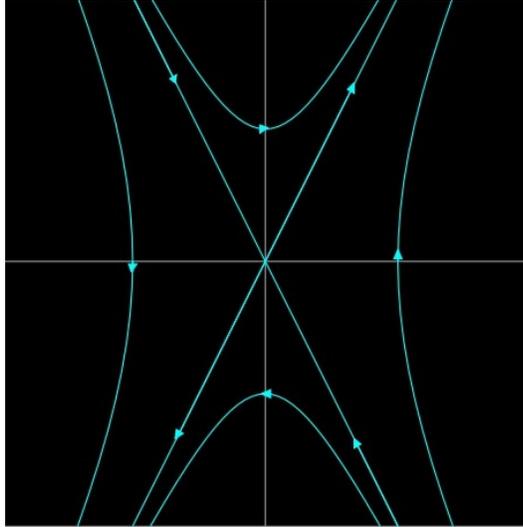


Figure 3.1: Trajetória tipo **Sela** com  $\mu_1 = -2$  e  $\mu_2 = 2$

- Quando  $\det A$  é positivo, mas

$$0 < \det A < \left[ \frac{\text{Tr } A}{2} \right]^2,$$

temos duas soluções reais de mesmo sinal. Em tal caso, o plano de fase é do tipo fonte caso o sinal seja positivo, ou do tipo poço caso o sinal seja negativo.

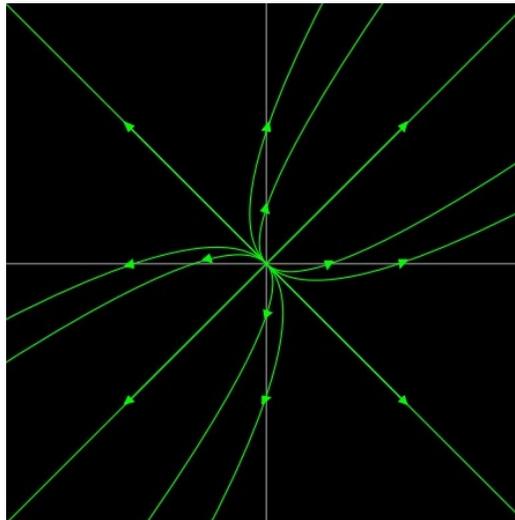


Figure 3.2: Trajetória tipo **Fonte** com  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 4$

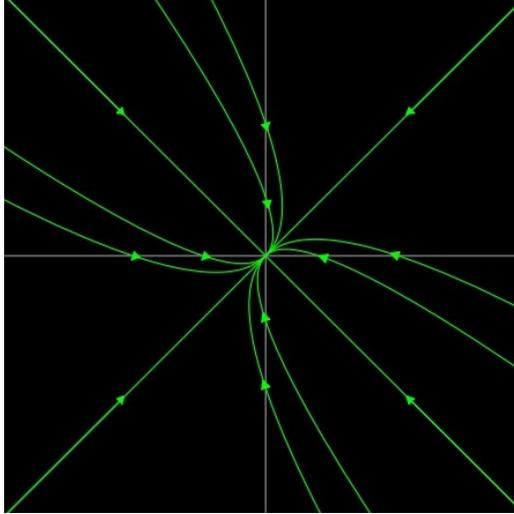


Figure 3.3: Trajetória tipo **Poço** com  $\mu_1 = -4$  e  $\mu_2 = -2$

- Quando o  $\det A$  é exatamente igual a  $\left[\frac{\text{Tr } A}{2}\right]^2$ , temos uma única raiz real. Em tal caso, se  $A = \lambda I$  o plano de fase é do tipo nó próprio, se  $A$  é qualquer o plano de fase é do tipo nó impróprio. Neste último caso, se for positivo será chamado repulsivo, e se for negativo será chamado de atrativo.

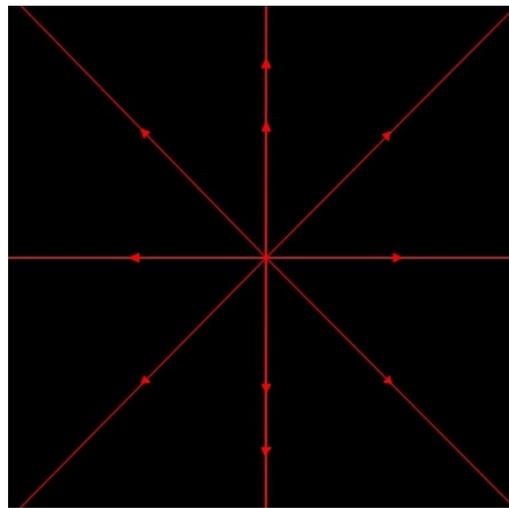


Figure 3.4: Trajetória tipo **Nó** com  $\mu = 1$

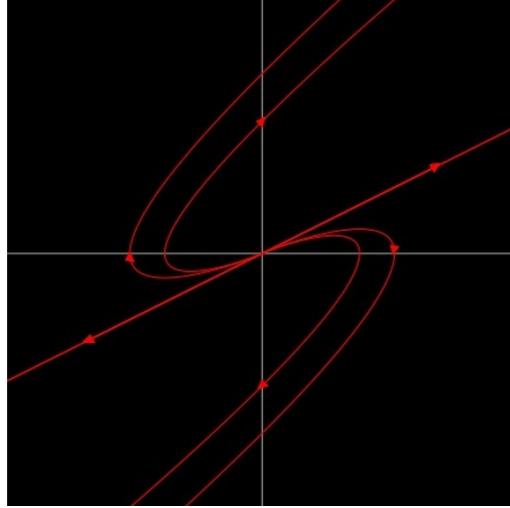


Figure 3.5: Trajetória tipo **Nó Repulsivo** com  $\mu = \frac{1}{2}$

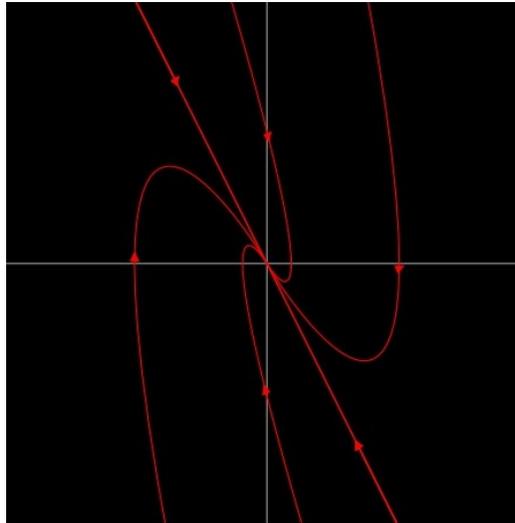


Figure 3.6: Trajetória tipo **Nó Atrativo** com  $\mu = -2$

Veja que a equação terá raízes complexas se, e somente se,  $\Delta < 0$ , ou seja,

$$(Tr A)^2 - 4 \det A < 0 \implies \frac{(Tr A)^2}{4} < \det A.$$

Assim, as raízes serão do seguinte modo,

$$\mu = \lambda + iv \text{ e } \bar{\mu} = \lambda - iv \implies Tr A = 2\lambda,$$

e desta forma, o sinal do traço é dado pelo sinal de  $\lambda$ .

- Quando  $Tr A < 0$ , o plano de fase é do tipo espiral convergente, a que por sua vez chamamos de atrativa.

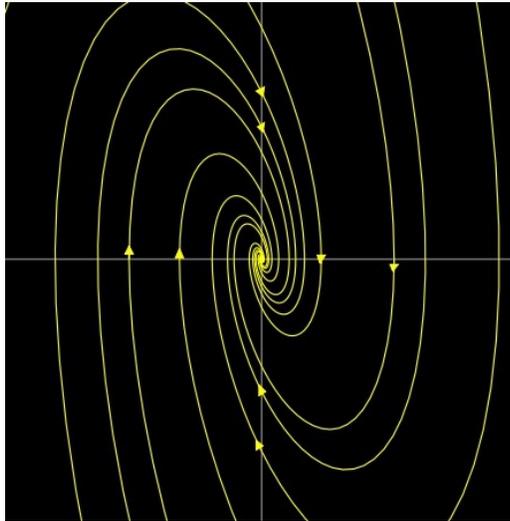


Figure 3.7: Trajetória tipo **Espiral Atrativa** com  $\mu_1 = -1 - 2i$  e  $\mu_2 = -1 + 2i$

- Quando  $Tr A > 0$ , o plano de fase é do tipo espiral divergente, a que por sua vez chamamos de repulsiva.

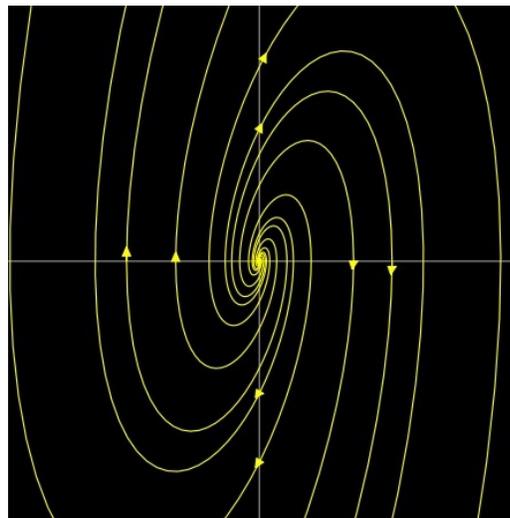


Figure 3.8: Trajetória tipo **Espiral Repulsiva** com  $\mu_1 = 1 - 2i$  e  $\mu_2 = 1 + 2i$

- Quando  $Tr A = 0$ , o plano de fase é cíclico, o que por sua vez chamamos de centro.

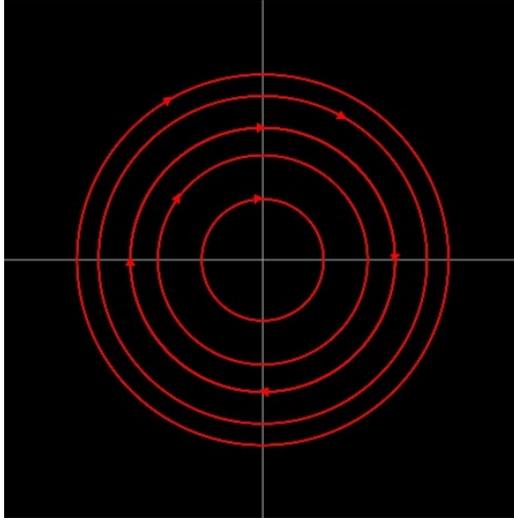


Figure 3.9: Trajetória tipo **Centro** com  $\mu_1 = -i$  e  $\mu_2 = i$

**Observação 3.12** *Uma equação diferencial linear, é dita hiperbólica quando todos os autovalores da matriz que o origina possui parte real não nula.*

De acordo com nossas análises, podemos esquematizar o plano traço-determinante do seguinte modo.

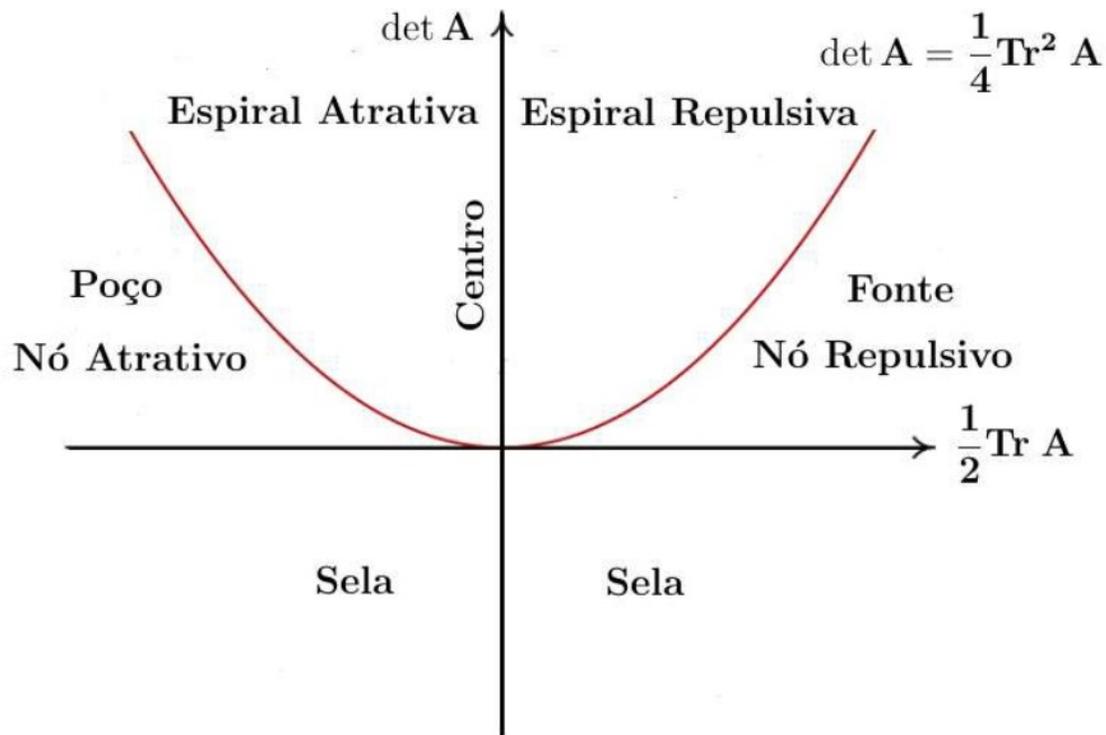


Figure 3.10: Plano Traço-Determinante

A figura acima foi inspirada numa figura presente na página do Professor Jaime Villate, da Universidade do Porto.

De modo sucinto, podemos tabelar os resultados vistos nesta seção, a fim de classificar os sistemas a nível de estabilidade por meio de seus autovalores.

<b>Autovalores</b>	<b>Trajectoria</b>	<b>Estabilidade</b>
$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ , ambos positivos	Fonte	Instável
$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ , ambos negativos	Poço	Estável
$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ , sinais opostos	Sela	Instável
$\mu \in \mathbb{R}$ , positivo	Nó Repulsivo	Instável
$\mu \in \mathbb{R}$ , negativo	Nó Atrativo	Estável
$\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}$ , parte real positiva	Espiral Repulsiva	Instável
$\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}$ , parte real negativa	Espiral Atrativa	Estável
$\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}$ , parte real nula	Centro	Estável

Table 3.1: **Estabilidade via Autovalores**

# Chapter 4

## Equações Diferenciais Lineares em Tempo Discreto

Neste capítulo, introduziremos o conceito de equação diferencial linear em tempo discreto, assim como também discutiremos as fórmulas de solução e as propriedades de estabilidade.

### 4.1 Equações Diferença

Em várias áreas encontramos situações em que as variáveis mudam de forma discreta. As equações que articulam tais relações entre as variáveis recebem o nome de equações diferença, as quais apresentam uma relação de recorrência.

Perceba, que nesta situação trabalhamos com o chamado tempo-discreto, em que nosso domínio de tempo passa a ser  $\mathbb{N}_0$  ou  $\mathbb{Z}$ , dependendo da situação. Fornecida uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , temos que a equação é obtida por

$$x_{(n+1)} = Ax_n. \tag{4.1}$$

Por outro lado, é fácil ver que ao considerarmos apenas o tempo positivo, as soluções

$\varphi(n, x_0)$  são dadas por

$$\varphi(n, x_0) = x_n = A^n x_0, \text{ com } n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

De fato, como havíamos mencionado, há uma recorrência em equações diferença. Uma solução para equações do tipo (4.1) pode ser encontrada por meio de iterações, embora haja outros métodos os quais veremos posteriormente. Veja que

$$\begin{aligned} \varphi(0, x_0) &= A^0 x_0 = x_0 \\ \varphi(1, x_0) &= A^1 x_0 = Ax_0 = x_1 \\ \varphi(2, x_0) &= A^2 x_0 = A(A^1 x_0) = x_2 \\ &\vdots \\ \varphi(n, x_0) &= A^n x_0 = A(A^{n-1} x_0) = x_n \\ \varphi(n+1, x_0) &= A^{n+1} x_0 = A(A^n x_0) = Ax_n = x_{n+1} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.1** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in gl(2, \mathbb{R})$  e  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Iterando, podemos encontrar  $x_5 = Ax_4$  da seguinte forma:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e \quad x_5 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Caso  $A$  seja inversível, a fórmula (4.2) vale para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Em nossos estudos, consideraremos as matrizes hiperbólicas a qual definiremos a seguir.

**Definição 4.2** Uma matriz  $A \in \mathbb{R}$  é dita ser hiperbólica, se a parte real dos seus autovalores é não nula, i.e., não possui autovalores em seu eixo imaginário.

**Observação 4.3** Perceba que as matrizes hiperbólicas são inversíveis, logo podemos trabalhar tranquilamente com  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 4.2 Fórmulas de Solução para $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$

Para o caso discreto, conseguimos, em algumas situações, informações similares à que temos no caso contínuo. Por exemplo, no caso discreto continua sendo válido a existência e unicidade das soluções, como também o fato de que dado uma matriz  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ , o conjunto de soluções  $\varphi(n, x_0)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , forma um espaço linear  $d$ -dimensional.

Como comentamos anteriormente, se  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$  a fórmula (4.2) vale para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , e mais,  $A^n$  forma uma solução fundamental. Assim consideraremos, no caso discreto, sempre  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ , e tomaremos por  $E_k$  como sendo o autoespaço real generalizado em relação aos autovalores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$ , onde  $k = 1, 2, \dots, r$ . Em tal caso,  $n_k$  indicará a dimensão de  $E_k$ .

Em relação as fórmulas de solução, temos de acordo com o teorema 2.3, as seguintes propriedades análogas ao tempo contínuo, organizadas em forma de teorema para o caso de tempo discreto.

**Teorema 4.4** *Considerando a matriz  $A$ , segue que:*

1. *Se  $A = T^{-1}J^{\mathbb{R}}T$ , então  $A^n = T^{-1}(J^{\mathbb{R}})^nT$ , em outras palavras, para o cálculo de potência de matrizes, é suficiente conhecermos as potências das matrizes em sua forma real de Jordan;*
2. *Sendo  $v_1, v_2, \dots, v_d$  uma base de  $\mathbb{R}^d$ , por exemplo, a constituída por todos os autovetores reais generalizados de  $A$ . Se  $x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i$ , então*

$$\varphi(n, x_0) = \sum_{i=1}^d \alpha_i \varphi(n, v_i),$$

*para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ;*

3. *Cada autoespaço real generalizado  $E_k$  é invariante para a equação diferencial linear  $x_n = A^n x_0$ , ou seja, para  $x_0 \in E_k$  a solução correspondente satisfaz  $\varphi(n, x_0) \in E_k$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

O teorema acima nos mostra que as soluções para as equações diferenciais lineares em tempo discreto, podem ser formuladas por meio dos cálculos das iterações dos blocos de Jordan. Tendo em vista tais informações, vejamos de forma detalhada as fórmulas destas soluções, tanto referente aos autovalores reais, quanto aos complexos.

Comecemos por considerar o caso em que os autovalores são reais. Então, sendo  $J$  um bloco de Jordan cuja dimensão é  $m$ , relativo a um autovalor real  $\mu$ . Perceba que,

$$J = \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \ddots & \vdots \\ & 0 & \mu & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \cdot & & & 0 & \mu \end{bmatrix} = \underbrace{\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdot & & & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \cdot & & & 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

$$\implies J = \mu I + N, \text{ com } N^m = 0, \text{ i.e., } N \text{ é nilpotente.}$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$J^n = (\mu I + N)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mu^{n-i} N^i.$$

E mais, note que para  $n \geq m - 1$ ,

$$\varphi(n, y_0) = J^n y_0 = \mu^{n+1-m} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \mu^{m-1-i} N^i y_0. \quad (4.3)$$

Conseguimos ainda mais, dado  $y_0 = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ , a  $j$ -ésima componente da solução  $\varphi(n, y_0)$  de  $y_{n+1} = Jy_n$  pode ser encontrada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \varphi_j(n, y_0) &= \binom{n}{0} \mu^n y_j + \binom{n}{1} \mu^{n-1} y_{j+1} + \cdots + \\ &+ \binom{n}{m-j} \mu^{n-(m-j)} y_m \\ &= \sum_{i=0}^{m-j} \binom{n}{i} \mu^{n-i} y_{j+1}. \end{aligned}$$

Acompanhe a seguir a explicação para tal fato. Veja que para  $n \geq m - 1$ ,

$$\begin{aligned} J^n y_0 &= \mu^{n+1-m} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \mu^{m-1-i} N^i y_0 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \mu^{n-i} N^i y_0, \end{aligned}$$

pois,

$$\binom{n}{0} \mu^n N^0 + \binom{n}{1} \mu^{n-1} N^1 + \dots + \binom{n}{m-1} \mu^{n-m+1} N^{m-1} + \binom{n}{m} \mu^{n-n} \underbrace{N^m}_{\text{zero a partir daqui}}.$$

Vejamos um exemplo, para melhor entender o que foi exposto acima.

**Exemplo 4.5** Considere  $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Assim,  $J = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , com  $m = 2$ .  
Tomando  $n = 3$  e  $y_0 = [y_1, y_2]^T$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi(3, y_0) &= J^3 y_0 = \mu^2 \sum_{i=0}^1 \binom{3}{i} \mu^{1-i} N^i y_0 \\ &= \mu^2 ((1\mu \cdot I) + (3 \cdot N)) y_0 \\ &= \mu^2 \left( \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) y_0 \\ &= \mu^2 \begin{bmatrix} \mu & 3 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} y_0 \\ &= \begin{bmatrix} \mu^3 & 3\mu^2 \\ 0 & \mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O que implica em

$\mu^3 y_1 + 3\mu^2 y_2$  como sendo a 1<sup>a</sup> componente da solução, e

$\mu^3 y_2$  como sendo a 2<sup>a</sup> componente da solução.

Se ao invés dessa construção, aplicarmos a fórmula para cada componente, obtemos o mesmo resultado,

$$\begin{aligned} \varphi_1(3, y_0) &= \binom{3}{0} \mu^3 y_1 + \binom{3}{1} \mu^2 y_2 = \mu^3 y_1 + 3\mu^2 y_2, \\ \varphi_2(3, y_0) &= \binom{3}{0} \mu^3 y_2 = \mu^3 y_2. \end{aligned}$$

Consideraremos o caso em que os autovalores são complexos. Então, sendo  $J$  um bloco de Jordan cuja dimensão é  $2m$ , relativo a um par de autovalores conjugados  $\mu = \alpha + i\beta$ .

Sendo

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos  $J$  como sendo escrito por

$$J = \begin{bmatrix} D & I_2 & & \cdot \\ 0 & D & I_2 & \\ & 0 & D & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \cdot & & & 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & & \cdot \\ 0 & D & 0 & \\ & 0 & D & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ \cdot & & & 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_2 & & \cdot \\ 0 & 0 & I_2 & \\ & 0 & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \cdot & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, vemos facilmente que  $J$  é a soma de uma matriz bloco-diagonal  $\tilde{D}$  com blocos  $D$ , e uma matriz nilpotente  $N$ , onde  $N^m = 0$ .

De fato,  $N^m = 0$ , visto que  $N$  possui dimensão  $2m$ , e a cada potência temos que os blocos  $I_2$  deslocam-se para a direita.

Observemos que  $\tilde{D}$  e  $N$  comutam, isto é,  $\tilde{D}N = N\tilde{D}$ . Com efeito, visto que  $\tilde{D}$  é uma matriz bloco-diagonal, e  $N$  é uma matriz bloco-superdiagonal.

Assim, calculamos para  $n \geq m - 1$

$$\begin{aligned} J^n &= (\tilde{D} + N)^n = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \tilde{D}^{n-i} N^i \\ &= \binom{n}{0} \tilde{D}^n I + \binom{n}{1} \tilde{D}^{n-1} N + \dots + \binom{n}{m-1} \tilde{D}^{n-(m-1)} N^{m-1}. \end{aligned}$$

Observe que  $|\mu| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , portanto com  $\varphi \in [0, 2\pi]$  sendo determinado por  $\cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ . Deste modo, temos que  $\mu = |\mu| \cdot e^{i\varphi}$ , e assim, podemos escrever a matriz  $D$  como

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = |\mu| \cdot R, \text{ com } R := \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Desta forma,  $D$  descreve uma rotação pelo ângulo  $\varphi$  seguido pela multiplicação por  $|\mu|$ . Denotemos por  $\tilde{R}$  a matriz bloco-diagonal com blocos  $R$ . Assim, para  $n \geq m - 1$ , a fórmula de solução é a seguinte:

$$\begin{aligned}\varphi(n, y_0) &= J^n y_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} |\mu|^{n-i} \tilde{R}^{n-i} N^i y_0 \\ &= |\mu|^{n+1-m} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} |\mu|^{m-1-i} \tilde{R}^{n-i} N^i y_0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Conseguimos chegar na fórmula (4.4) visto que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} |\mu|^{m-1-i+n+1-m} \tilde{R}^{n-i} N^i y_0 \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} |\mu|^{n-i} \tilde{R}^{n-i} N^i y_0\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} |\mu|^n \cdot \tilde{R}^n \cdot I &+ \binom{n}{1} |\mu|^{n-1} \cdot R^n - 1 \cdot N + \dots \\ &+ \binom{n}{m-1} |\mu|^{n-m+1} \cdot R^{n-m+1} \cdot N^{m-1} \\ &+ \binom{n}{m} |\mu|^{n-m} \cdot R^{n-m} \cdot \underbrace{N^m}_{\text{zera a partir daqui}}.\end{aligned}$$

Façamos a dedução das  $\varphi_{y_j}$  e  $\varphi_{x_j}$ -ésimas componentes da solução  $\varphi(n, z_0)$  de  $z_{n+1} = Jz_n$ , onde  $z_0 = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m]^T$  é o valor inicial. Assim,

$$\varphi(n, z_0) = J^n z_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} |\mu|^{m-1-i} \tilde{R}^{m-1-i} N^i z_0,$$

considerando até  $m - 1$  visto que  $N^m = 0$ . Lembrando que  $j : 1 \leq j \leq m$ , segue

$$\begin{aligned}\varphi_{x_j}(n, z_0) &= \binom{n}{0} |\mu|^n (x_j \cos(n\varphi) - y_j \sin(n\varphi)) \\ &+ \binom{n}{1} |\mu|^{n-1} (x_{j+1} \cos((n-1)\varphi) - y_{j+1} \sin((n-1)\varphi)) \\ &+ \dots \\ &+ \binom{n}{m-j} |\mu|^{n-m+1} (x_m \cos((n-m+j)\varphi) - y_m \sin((n-m+j)\varphi)),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi_{y_j}(n, z_0) &= \binom{n}{0} |\mu|^n (x_j \sin(n\varphi) + y_j \cos(n\varphi)) \\
&+ \binom{n}{1} |\mu|^{n-1} (x_{j+1} \sin((n-1)\varphi) + y_{j+1} \cos((n-1)\varphi)) \\
&+ \dots \\
&+ \binom{n}{m-j} |\mu|^{n-m+1} (x_m \sin((n-m+j)\varphi) + y_m \cos((n-m+j)\varphi)).
\end{aligned}$$

Para melhor entender, tomemos um exemplo.

**Exemplo 4.6** *Seja*

$$J = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\tilde{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{N}}.$$

Neste caso, tomamos  $m = 2$  e vamos considerar  $n = 3$ . Seja também  $z_0 = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T$ , assim, temos o seguinte,

$$\begin{aligned}
\varphi(3, z_0) &= J^3 y_0 = (\tilde{D} + N)^3 \\
&= |\mu|^2 \left( \binom{3}{0} |\mu| \cdot (\tilde{R})^3 \cdot I + \binom{3}{1} |\mu|^0 \cdot \tilde{R}^2 \cdot N^1 \right) z_0 \\
&= |\mu|^3 \cdot \left( |\mu| \cdot \tilde{R}^3 + 3 \cdot \tilde{R}^2 \cdot N \right) z_0 \\
&= \left( |\mu|^3 \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^3 + \right. \\
&\quad \left. + 3|\mu|^2 \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( |\mu|^3 \cdot \begin{bmatrix} \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi & 0 & 0 \\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi \\ 0 & 0 & \sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \left. 3|\mu|^2 \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |\mu|^3 \cos 3\varphi & -|\mu|^3 \sin 3\varphi & 3|\mu|^2 \cos 2\varphi & -3|\mu|^2 \sin 2\varphi \\ |\mu|^3 \sin 3\varphi & |\mu|^3 \cos 3\varphi & 3|\mu|^2 \sin 2\varphi & 3|\mu|^2 \cos 2\varphi \\ 0 & 0 & |\mu|^3 \cos 3\varphi & -|\mu|^3 \sin 3\varphi \\ 0 & 0 & |\mu|^3 \sin 3\varphi & |\mu|^3 \cos 3\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Deste modo, temos

- $\varphi_{x_1}(3, z_0) = |\mu|^3 \cdot (x_1 \cos 3\varphi - y_1 \sin 3\varphi + 3|\mu|^2 x_2 \cos 2\varphi - y_2 \sin 2\varphi)$ ;
- $\varphi_{y_1}(3, z_0) = |\mu|^3 \cdot (x_1 \sin 3\varphi + y_1 \cos 3\varphi + 3|\mu|^2 x_2 \sin 2\varphi + y_2 \cos 2\varphi)$ ;
- $\varphi_{x_2}(3, z_0) = |\mu|^3 \cdot (x_2 \cos 3\varphi - y_2 \sin 3\varphi)$ ;
- $\varphi_{y_2}(3, z_0) = |\mu|^3 \cdot (x_2 \sin 3\varphi + y_2 \cos 3\varphi)$ .

Agora, façamos por meio da fórmula que acabamos de deduzir

- $\varphi_{x_1} = \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} |\mu|^3 (x_1 \cos 3\varphi - y_1 \sin 3\varphi) + \underbrace{\binom{3}{1}}_{=3} |\mu|^2 (x_2 \cos 3\varphi - y_2 \sin 3\varphi)$ ;
- $\varphi_{y_1} = \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} |\mu|^3 (x_1 \sin 3\varphi + y_1 \cos 3\varphi) + \underbrace{\binom{3}{1}}_{=3} |\mu|^2 (x_2 \sin 3\varphi + y_2 \cos 3\varphi)$ ;
- $\varphi_{x_2} = \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} |\mu|^3 (x_2 \cos 3\varphi - y_2 \sin 3\varphi)$ ;
- $\varphi_{y_2} = \underbrace{\binom{3}{0}}_{=1} |\mu|^3 (x_2 \sin 3\varphi + y_2 \cos 3\varphi)$ .

Ou seja, realmente coincidiram. Logo, é mais viável usarmos as fórmulas para encontrar as componentes  $\varphi_{x_j}$  e  $\varphi_{y_j}$  da trajetória  $\varphi(n, z_0)$ .

Podemos simplificar  $\varphi_{x_j}(n, z_0)$  e  $\varphi_{y_j}(n, z_0)$  do seguinte modo:

$$\varphi_{x_j}(n, z_0) = \sum_{i=0}^{m-j} \left[ \binom{n}{i} |\mu|^{n-i} (x_{j+i} \cos[(n-i)\varphi] - y_{j+i} \sin[(n-i)\varphi]) \right];$$

e

$$\varphi_{y_j}(n, z_0) = \sum_{i=0}^{m-j} \left[ \binom{n}{i} |\mu|^{n-i} (x_{j+i} \sin[(n-i)\varphi] + y_{j+i} \cos[(n-i)\varphi]) \right].$$

### 4.3 Espaços de Lyapunov e Estabilidade

Assim como visto no tempo contínuo, veremos aqui o comportamento assintótico das trajetórias de  $\varphi(n, x_0) = Ax_0$ . Para tal fim, começaremos com a definição de expoentes e espaços de Lyapunov para o tempo discreto.

**Definição 4.7** *Dada uma equação diferencial linear  $x_{n+1} = Ax_n$  e sua solução  $\varphi(n, x_0) = A^n x_0, n \in \mathbb{Z}$ , o expoente de Lyapunov é definido para  $x_0 \neq 0$  como*

$$\lambda(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\varphi(n, x_0)\|,$$

onde  $\|\cdot\|$  é uma norma qualquer em  $\mathbb{R}^d$ .

Antes da definição seguinte, é importante relembramos que para nós,  $E_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, r$  são os autoespaços reais generalizados associados aos autovalores  $\mu_k$  de  $A$ .

**Definição 4.8** *Suponha que exista  $1 \leq l \leq d$  módulos distintos dos autovalores  $\mu_k$ , e sejam  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l$  os logaritmos desses módulos. Ordenando-os como  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r$ , em que  $1 \leq l \leq r$ , definimos o espaço de Lyapunov associado a  $\lambda_j$  como*

$$L(\lambda_l) := \oplus E_k,$$

ou seja, soma direta de todos os autoespaços reais generalizados  $E_k$  associados aos autovalores  $\mu_k$  com  $\lambda_k = \ln |\mu_k|$ .

Vale notar que o espaço estado  $\mathbb{R}^d$  pode ser decomposto como soma direta dos espaços de Lyapunov referentes ao tempo discreto, i.e.,  $\mathbb{R}^d = \oplus_{j=1}^l L(\lambda_j)$ .

**Exemplo 4.9** Veja para o caso escalar,  $x_{n+1} = \lambda_n x_n$ ,  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ , as soluções são  $\varphi(n, x_0) = \lambda^n x_0$ . O expoente de Lyapunov é um limite dado por:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda^n x_0| &= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \ln (|\lambda|^n) + \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \ln |x_0| \\ &= \ln |\lambda|. \end{aligned}$$

Para um trajetória  $x_n, n \in \mathbb{Z}$  de  $x_{n+1} = Ax_n$ , a função  $x_{n+1} = A^{-1}x_n, n \in \mathbb{Z}$  é denominada equação invertida no tempo.

Veremos a seguir um teorema que relaciona os expoentes de Lyapunov de  $x_{n+1} = Ax_n$  com os módulos dos autovalores de  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ , associando-os a decomposição de  $\mathbb{R}^d$  como soma direta dos espaços de Lyapunov.

**Teorema 4.10** Considerando uma equação diferencial linear  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ . Decomponamos o espaço estado  $\mathbb{R}^d$  como soma direta dos espaços de Lyapunov,

$$\mathbb{R}^d = L(\lambda_1) \oplus L(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus L(\lambda_l),$$

e o expoente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  para  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  são dados pelos logaritmos  $\lambda_j$  dos módulos dos autovalores de  $A$ . Para uma trajetória  $\varphi(\cdot, x_0)$ , onde  $x \neq 0$ , tem-se

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|\varphi(t, x_0)\| = \lambda_j \iff x_0 \in (\lambda_j).$$

**Demonstração:** Já provamos que para qualquer matriz  $A$ , temos  $A = TJ^{\mathbb{R}}T^{-1}$ , onde  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$  e  $J$  sendo a forma real de Jordan. Deste modo, podemos usar as fórmulas de solução referente aos autoespaços generalizados para provar as asserções do teorema. Provaremos aqui para o caso em que  $\mu$  é um autovalor real, por meio da fórmula (4.3). Assim, para  $n \geq m - 1$  segue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \|\varphi(n, x_0)\| &= \frac{n+1-m}{n} \ln |\mu| + \\ &+ \frac{1}{n} \ln \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \mu^{m-1-i} N^i x_0 \right\|. \end{aligned}$$

Assumindo os máximo em  $i$ , com  $0 \leq i \leq m - 1$ , e podemos realizar a seguinte estimativa para cada  $i$  e  $n \rightarrow \infty$ :

$$\left\| \frac{1}{n} \ln \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \mu^{m-1-i} N^i x_0 \right\| \right\| \leq \ln m + \max_i \ln \binom{n}{i} + \max_i \ln (|\mu|^{m-1-i} \|N^i x_0\|).$$

Para cada  $i$  e  $n \rightarrow \infty$  podemos também estimar

$$\frac{1}{n} \ln \binom{n}{i} = \frac{1}{n} \ln \frac{n(n-1) \cdots (n-i-1)}{i!} \leq \max \frac{1}{n} (\ln n - \ln i!) \rightarrow 0.$$

Assim, tomando o limite para  $n$  na expressão acima, encontramos que o expoente de Lyapunov é igual a  $\ln |\mu|$  para cada valor inicial  $x_0$ , neste próprio autoespaço generalizado.

De forma análoga, conseguimos provar para o caso de autovalores complexos.

Por fim, para valores iniciais na soma direta de autoespaços generalizados referentes a autovalores com módulos diferentes, temos que o maior expoente determina o expoente de Lyapunov. O mesmo ocorre quando  $n \rightarrow -\infty$ .

□

O teorema seguinte, permitirá concluir o raciocínio para conclusão da demonstração do teorema 4.10 de forma direta.

**Teorema 4.11** *Considere a equação diferencial linear  $x_{n+1} = Ax_n$  com  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ , e os espaços de Lyapunov correspondentes  $L(\lambda_j)$ ,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l$ . Definamos os seguintes subespaços:*

$$V_{l+1} = W_0 := \{0\},$$

e para  $1 \leq j \leq l$

$$V_j := L_l \oplus \cdots \oplus L_j \text{ e } W_j := L_j \oplus \cdots \oplus L_1.$$

Então a solução  $\varphi(\cdot, x_0)$  com  $x_0 \neq 0$ , satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|\varphi(n, x_0)\| = -\lambda_j \iff x_0 \in W_j \setminus W_{j-1}.$$

De modo particular,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|\varphi(n, x_0)\| = \pm\lambda_j \iff x_0 \in L(\lambda_j) = V_j \cap W_j$$

A prova do Teorema acima pode ser realizada fazendo uso das formulas de solução e argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do teorema 4.10.

É importante ressaltar que os autoespaços generalizados e os espaços de Lyapunov  $L(-\lambda_j)$ , coincidem com os autoespaços generalizados e espaços de Lyapunov  $L(\lambda_j)$  respectivamente.

## Estabilidade

Assim como visto para o caso contínuo, para o caso discreto também conseguimos descrever o comportamento assintótico de  $\varphi(n, x_0)$  para  $n \rightarrow \infty$ . Uma das ferramentas que nos possibilita tal fato é o conceito de expoente de Lyapunov.

Vimos que uma trajetória com expoente de Lyapunov negativo tende a origem, enquanto que quando o expoente de Lyapunov tende ao infinito a trajetória torna-se ilimitada. Contudo, em geral define-se as trajetórias para  $x \geq 0$ .

**Definição 4.12** *Seja  $x^* \in \mathbb{R}^d$  um ponto fixo da equação diferencial  $x_{n+1} = Ax_n$ , isto é, ao aplicarmos este ponto na solução  $\varphi(n, x^*)$  com valor inicial  $\varphi(0, x^*) = x^*$  segue que  $\varphi(n, x^*) = x^*$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Desta forma,  $x^*$  é chamado de:*

1. *Estável: se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  de modo que  $\varphi(n, x_0) \in N(x^*, \varepsilon)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  quando  $x_0 \in N(x^*, \delta)$ ;*
2. *Assintoticamente Estável: se é estável e existir  $\gamma > 0$  de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(n, x_0) = x^*$  quando  $x_0 \in N(x^*, \gamma)$ ;*
3. *Exponencialmente Estável: se existe  $\alpha \geq 1$ ,  $\eta > 0$  e  $\beta \in (0, 1)$  de modo que para cada  $x_0 \in N(x^*, \eta)$ , a solução satisfaz  $\|\varphi(n, x_0) - x^*\| \leq \alpha \beta^n \|x_0 - x^*\| e^{-\beta t}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;*
4. *Instável: caso não seja estável.*

**Definição 4.13** *Os subespaços estável, central e instável relacionados a matriz  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$  são definidos de forma respectiva do seguinte modo:*

1.  $L^- = \oplus_{\lambda_j < 0} L(\lambda_j) : \lambda_j < 0;$

2.  $L^0 = \oplus L(\lambda_j) : \lambda_j = 0;$

3.  $L^+ = \oplus_{\lambda_j > 0} L(\lambda_j) : \lambda_j > 0.$

Por meio dos autovalores de  $A$  é possível caracterizarmos a estabilidade assintótica e exponencial da origem para  $x_{n+1} = Ax_n$ .

**Teorema 4.14** *Para uma equação diferencial linear  $x_{n+1} = Ax_n$  em  $\mathbb{R}^d$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A origem  $0 \in \mathbb{R}^d$  é assintoticamente estável.*

2. *A origem  $0 \in \mathbb{R}^d$  é exponencialmente estável.*

3. *Todos os expoentes de Lyapunov são negativos (em outras palavras, todos os módulos dos autovalores são menores que 1).*

4. *O subespaço estável  $L^-$  satisfaz  $L^- = \mathbb{R}^d$ .*

**Demonstração:** Análogo ao caso contínuo já demonstrado neste trabalho. □

Para concluir esta seção, vale ressaltar que os expoentes de Lyapunov sozinhos não nos permitem caracterizar a estabilidade. Na verdade, os mesmos estão relacionados a estabilidade assintótica, não detectando assim, estabilidades polinomiais.

# Chapter 5

## Conjugação e Equivalência de Fluxos Lineares no Espaço Euclidiano

Neste capítulo veremos dois resultados importantes neste trabalho, relacionados à conjugação e equivalência topológica para alguns tipos de sistemas dinâmicos, tanto para o tempo contínuo, quanto para o tempo discreto.

Algo primordial na teoria de sistemas dinâmicos consiste em saber quando podemos comparar dois sistemas, isto é, em qual situação podemos deduzir que ambos possuem o mesmo comportamento.

Um conceito padrão para a classificação destes sistemas são as conjugações, que mapeiam trajetórias em trajetórias.

### 5.1 Fluxos Lineares em $\mathbb{R}^d$

Nesta seção faremos a caracterização de fluxos em espaços métricos e noções de conjugação.

Começamos recordando a definição de fluxo.

**Definição 5.1** *Um fluxo topológico sobre um espaço métrico  $X$  é definido como uma*

aplicação contínua

$$\Phi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$

munido das seguintes propriedades:

1.  $\Phi(0, x) = x$ , para todo  $x \in X$ ;
2.  $\Phi(s + t, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$ , para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in X$ .

**Definição 5.2** Para cada  $x \in X$ , o conjunto  $\{\Phi(t, x); t \in \mathbb{R}\}$  é chamado de órbita (ou trajetória) do fluxo por meio de  $x$ .

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , a aplicação tempo é definida como  $\varphi_t = \Phi(t, \cdot) : X \longrightarrow X$ . Para esta nova aplicação, conseguimos reescrever as propriedades 1 e 2 acima do seguinte modo:

1.  $\varphi_0 = id_X$  (aplicação identidade de  $X$ );
2.  $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ , para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 5.3** A aplicação  $\varphi_t$  tem inversa dada por  $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ . Aliás,  $\varphi_t : X \longrightarrow X$  é um homeomorfismo.

Exemplos padrão para sistemas dinâmicos contínuos são fornecidos por soluções de equações diferenciais.

**Exemplo 5.4** Dado  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , as soluções de  $\dot{x} = Ax$  formam um sistema dinâmico contínuo, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , com o espaço estado  $X = \mathbb{R}^d$ .

Note que aqui  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  é definido por

$$\Phi(t, x_0) = x(t, x_0) = e^{At} x_0.$$

Temos aqui verificado facilmente as condições para ser um sistema dinâmico.

1.  $\Phi(0, x_0) = x(0, x_0) = x_0$ ,

2.

$$\begin{aligned}\Phi(s+t, x_0) &= x(s+t, x_0) = e^{A(s+t)}x_0 \\ &= (e^{As} \cdot e^{At})x_0 = e^{As} \cdot (e^{At}x_0) \\ &= e^{As}(x(t, x_0)) = x(s, x(t, x_0)) \\ &= \Phi(s, \Phi(t, x_0)).\end{aligned}$$

**Exemplo 5.5** *Seja  $F$  uma função com problema de valor inicial e localmente Lipschitz contínua, de modo que para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  existem soluções  $\varphi(t, x_0)$  definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim,  $\varphi(t, x_0) = \varphi(t, x_0)$  define um sistema dinâmico  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ .*

*Verifiquemos que de fato as condições de fluxo são satisfeitas neste exemplo.*

1.  $\Phi(0, x_0) = \varphi(0, x_0) = x_0;$

2.

$$\begin{aligned}\Phi(s+t, x_0) &= \varphi(s+t, x_0) = (\varphi(s) \circ \varphi(t))x_0 \\ &= \varphi(s) \circ (\varphi(t)x_0) = \varphi(s) \circ \varphi(t, x_0) \\ &= \Phi(s, \Phi(t, x_0))\end{aligned}$$

*Neste caso, o campo vetorial  $F$  é chamado de completo.*

As duas definições seguintes são tipos específicos de órbitas.

**Definição 5.6** *Um ponto fixo (ou equilíbrio) de um sistema dinâmico  $\Phi$  é um ponto  $x \in X$  com a propriedade  $\Phi(t, x) = x$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 5.7** *Uma órbita  $\{\Phi(t, x), t \in \mathbb{R}\}$  de um sistema dinâmico  $\Phi$  é chamada periódica se existe  $P \in \mathbb{R}_+^*$  tal que  $\Phi(P+s, x) = \Phi(s, x)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ .*

*O ínfimo de*

$$\{P \in \mathbb{R}_+^*; \Phi(P+s, x) = \Phi(s, x)\}$$

*é o período da órbita  $\{\Phi(t, x), t \in \mathbb{R}\}$ .*

Perceba que uma órbita de período 0 é um ponto fixo.

**Proposição 5.8** *Um ponto  $x_0$  é um ponto fixo de um sistema dinâmico  $\Phi$  associado a equação diferencial  $\dot{x} = F(x)$  se, e somente se,  $F(x_0) = 0$ . Perceba que  $F$  é um campo vetorial*

**Demonstração:** Considerando  $x_0 \in X$  um ponto fixo do sistema dinâmico  $\Phi$ , o mesmo por sua vez satisfaz para todo  $s \in \mathbb{R}$  que  $\Phi(s, x_0) = x_0$ . Certo de que  $\Phi(s, x_0) = x(s, x_0) = x_0$ , temos

$$0 = \dot{x}(s, x_0) = F(x, (s, x_0)) = f(x_0).$$

Assim,  $F(x_0) = 0$ .

Por outro lado, considere  $F(x_0) = 0$ , de modo que  $\dot{x}_0 = F(x_0) = 0$ . Dessa maneira,  $\dot{x}(s, x_0) = 0$ , ou seja,  $x(s, x_0) = k$ , onde  $k$  é uma constante real. Contudo, como  $x(0, x_0) = x_0$ , acha-se  $x(s, x_0) = x_0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Proposição 5.9** *Um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  é um ponto fixo de um sistema dinâmico  $\Phi$  associado a equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  se, e somente se,  $x_0 \in \ker A$ .*

**Demonstração:**

Admita que  $x_0$  seja um ponto fixo do sistema dinâmico  $\dot{x} = Ax$ , em outras palavras,  $\Phi(s, x_0) = e^{As}x_0 - x_0$ . Derivando com respeito ao tempo  $s$  temos  $Ae^{As}x_0 = 0$ . Dado que  $e^{As}x_0 = x_0$ , temos que  $Ax_0 = 0$ , isto é,  $x_0 \in \ker A$ .

Mutualmente, seja  $x_0 \in \ker A$ . Deste modo,  $Ax_0 = 0$  e  $e^{As}(Ax_0) = 0$ . Consequentemente,  $e^{As}x_0 = k$ , onde  $k$  é uma contante real. Como  $e^{A0}x_0 = x_0$ , temos que  $e^{As}x_0 = x_0$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Observação 5.10** *Note que se uma matriz  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$  é inversível, então o 0 é o único ponto fixo dos sistemas dinâmicos associados à equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ .*

*De fato, seja  $\Phi$  um sistema dinâmico associado a  $\dot{x} = Ax$ . Sabemos que o 0 é um ponto fixo de  $\Phi$ . Resta-nos mostrar que ele é o único. Seja  $e_0$  um outro ponto fixo de  $\Phi$ . Logo, pela proposição anterior  $A(e_0) = 0$ . Portanto, como  $A$  é inversível, temos que  $e_0 = 0$ .*

## 5.2 Conjugação e Equivalência de Fluxos Lineares no Espaço Euclidiano em Tempo Contínuo

Nesta seção definiremos conjugação topológica, e exibiremos que a mesma fornece uma relação de equivalência.

**Definição 5.11** *Sejam  $X$  um espaço métrico e,*

$$\Phi, \Psi : \mathbb{R} \longrightarrow X$$

*dois sistemas dinâmicos contínuos. Dizemos que são:*

1.  $C^0$ -conjugados (ou topologicamente conjugados), se existe um homeomorfismo

$$h : X \longrightarrow X \text{ de modo que}$$

$$h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, (h(x))),$$

*para todo  $x \in X$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

2.  $C^0$ -equivalentes (ou topologicamente equivalentes), se existe um homeomorfismo

$$h : X \longrightarrow X,$$

*de modo que para todo  $x \in X$  existe uma aplicação parametrizada contínua*

$$\tau_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (estritamente crescente), de modo que}$$

$$h(\Phi(t, x)) = \Psi(\tau_x(t), h(x))$$

*para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

3.  $C^k$ -conjugados com  $k \geq 1$  se existe um difeomorfismo

$$h : X \longrightarrow X \text{ de modo que}$$

$$h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, (h(x))),$$

*para todo  $x \in X$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Também chamamos  $h$  de conjugação suave neste caso.*

**Observação 5.12** Podemos representar a propriedade de conjugação com o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Psi(t, \cdot)} & X \\
 h \downarrow & & \downarrow h \\
 X & \xrightarrow{\Phi(t, \cdot)} & X
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \boxed{\Psi(t, h(x))} \\
 \parallel \\
 \boxed{h(\Phi(t, x))}
 \end{array}$$

Figure 5.1: Diagrama comutativo de conjugação.

Veremos mais uma definição importante para este trabalho.

**Definição 5.13** Considere um fluxo  $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ . Um domínio fundamental  $\Phi$  é um par  $(Z, \tau)$  onde  $Z$  é um subconjunto de  $X$  e  $\tau : X \rightarrow X$  é uma função contínua tal que para todo  $x \in X$  vale:  $\Phi(t, x) \in Z$  se e somente se  $t = \tau(x)$ .

**Observação 5.14** Note que a existência de um domínio fundamental é uma propriedade bem restritiva para um fluxo. Por exemplo, suponha que o fluxo  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tem um equilíbrio  $x \in \mathbb{R}^d$ . Então para qualquer domínio fundamental  $(Z, \tau)$ , o conjunto  $Z$  contém  $x$ . Daí  $\Phi(t, x) = x \in Z$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , contradizendo a definição de domínio fundamental. Similarmente, vemos que  $\Phi$  não pode ter nenhuma trajetória periódica.

**Observação 5.15** Perceba que a conjugação topológica  $h$  leva órbitas de  $\Phi(t, x)$  em órbitas de  $\Psi(t, x)$  preservando o tempo, enquanto que a equivalência topológica não o preservará necessariamente.

No caso de sistemas dinâmicos, temos que a conjugação está relacionada com a semelhança das matrizes, de modo em que se preservam muitas propriedades. Vejamos alguns desses resultados a seguir.

**Proposição 5.16** Sejam  $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  dois sistemas dinâmicos em um espaço métrico  $X$  e  $h : X \rightarrow X$  uma conjugação topológica destes dois sistemas.

1. Então, o ponto fixo  $p \in X$  é um ponto fixo de  $\Phi$  se, e somente se,  $h(p)$  é um ponto fixo de  $\Psi$ .
2. Considere além disso,  $g : Y \rightarrow Y$  uma conjugação topológica de dois sistemas dinâmicos  $\Phi_*, \Psi_* : \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$  em um espaço métrico  $Y$ . Então o fluxo produto de  $\Phi \times \Phi_*$  e  $\Psi \times \Psi_*$  em  $X \times Y$  são topologicamente conjugados via

$$h \times g : X \times Y \rightarrow X \times Y.$$

### Demonstração:

1. Temos por hipótese que  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente conjugados por meio de  $h : X \rightarrow X$ , isto é,  $h$  é um homeomorfismo tal que

$$h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h(x)).$$

Seja  $p$  um ponto fixo de  $\Phi$ , então

$$h(p) = h(\Phi(t, p)) = \Psi(t, h(p)).$$

Uma vez que  $h$  é homeomorfismo e  $p$  é um ponto fixo, temos que a órbita  $\Psi(t, h(p))$  deve ser um ponto, ou seja,

$$\Psi(t, h(p)) = h(p) \text{ para todo } t.$$

Assim,  $h(p)$  é um ponto fixo. Deste modo, a aplicação conjugação leva ponto fixo em ponto fixo.

De forma análoga provamos a volta.

2. Temos que  $h \times g$  é um homeomorfismo. De fato,  $h \times g$  é produto de funções contínuas e portanto contínua, é bijetora, e sua inversa  $(h \times g)^{-1}$  é contínua.

Além disso, para  $x \in X, y \in Y$  e  $t \in \mathbb{R}$  nós temos

$$\begin{aligned}
(h \times g)(\Phi \times \Phi_*)(x, y) &= (h(\Phi(t, x)), g(\Phi_*(t, y))) \\
&= (\Psi(t, h(x)), \Psi_*(t, g(y))) \\
&= (\Psi \times \Psi_*)(t, (h \times g)(x, y)).
\end{aligned}$$

Portanto, são topologicamente conjugados.

□

Para fluxos lineares associados a equações diferenciais do tipo  $\dot{x} = Ax$ , conseguimos caracterizar a conjugação de forma direta pela matriz  $A$

**Teorema 5.17** *Para dois fluxos lineares  $\Phi$  e  $\Psi$  associados a  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{x} = Bx$  respectivamente em  $\mathbb{R}^d$ , temos as seguintes equivalências:*

1.  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -conjugação para  $k \geq 1$ ;
2.  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados, isto é, a aplicação conjugação  $h$  é um operador linear inversível em  $\mathbb{R}^d$ ;
3.  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes, isto é,  $B = SAS^{-1}$  para algum  $S \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

**Demonstração:**

(3)  $\longrightarrow$  (2) Temos por hipótese que  $A$  e  $B$  são semelhantes, em outras palavras, que  $A = SAS^{-1}$  para algum  $S \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

Repare que  $A = SAS^{-1} \iff e^{At} = Se^{Bt}S^{-1} \iff S^{-1}e^{At} = e^{Bt}S^{-1}$ . Admita a aplicação

$$\begin{aligned}
h : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\
x &\longmapsto h(x) = S^{-1}(x).
\end{aligned}$$

Veja que a mesma é um operador linear inversível, pois

$$\begin{aligned}
 h(x + \alpha y) &= S^{-1}(x + \alpha y) \\
 &= S^{-1}x + S^{-1}(\alpha y) \\
 &= S^{-1}(x) + \alpha S^{-1}(y) \\
 &= h(x) - \alpha h(y)
 \end{aligned}$$

E mais, possui inversa  $S$ , onde

$$S^{-1} \circ S = S \circ S^{-1} = I.$$

Portanto  $h$  é de fato um operador linear inversível.

Além disso, veja que  $h$  é de fato aplicação conjugação entre  $\Phi$  e  $\Psi$ , visto que

$$\begin{aligned}
 h(\Phi(t, x)) &= h(e^{At}x) \\
 &= S^{-1}(e^{At}x) \\
 &= e^{Bt}(S^{-1}x) \\
 &= e^{Bt}(h(x)) \\
 &= \Psi(t, h(x)).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados.

(2)  $\longrightarrow$  (1) Por hipótese temos que  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados. Assim sendo, existe uma aplicação linear de conjugação

$$h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$C^k$ -difeomorfa, tal que  $h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h(x))$ , em outras palavras,  $h(e^{At}x) = e^{Bt}(h(x))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Logo, de acordo com a definição temos que  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$  conjugados.

(2)  $\longrightarrow$  (3) Por hipótese existe uma aplicação de conjugação linear, ou seja, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  temos:

$$h(\Phi(t, x)) = \underbrace{h(e^{At}x)}_1 = \underbrace{e^{Bt}(h(x))}_2 = \Psi(t, h(x)).$$

Derivando as igualdades anterior com respeito a  $x$ , com o auxílio da regra da cadeia, chegamos em

$$h'(eAtx) \cdot e^{At} = e^{Bt} \cdot h'(x).$$

Tomemos  $S^{-1} := h'(x)$ , e devido ao fato de  $h$  ser linear e difeomorfa por hipótese, segue que

$$S^{-1}e^{At} = h'(0)e^{At} = e^{Bt}h'(0) = e^{Bt}S^{-1},$$

ou seja,

$$S^{-1}e^{At} = e^{Bt}S^{-1}.$$

Portanto,  $A = SBS^{-1}$ , e  $A$  e  $B$  são semelhantes.

(1)  $\longrightarrow$  (2) Temos por hipótese que  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -conjugados. Desta forma, existe uma  $C^k$ -aplicação de conjugação

$$h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

de modo que

$$h(\Phi(t, x)) = h(e^{At}x) = e^{Bt}(h(x)) = \Psi(t, h(x)),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Devido ao fato de (2)  $\longrightarrow$  (3), temos que  $S^{-1}A = BS^{-1}$ , onde  $S^{-1} = h'(0)$ . Como por hipótese temos que  $h'(0)$  é inversível, temos assim definida a conjugação linear.

(1)  $\longrightarrow$  (3) Por hipótese temos que  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -conjugados. Logo pela equivalência anterior temos  $S^{-1}A = BS^{-1}$ , donde  $S^{-1}$  é inversível. Assim sendo, temos  $A = SBS^{-1}$  ou seja,  $A$  e  $B$  são semelhantes.

(3)  $\longrightarrow$  (1) Temos por hipótese que  $A$  e  $B$  são semelhantes. Logo, como provamos que o mesmo equivale a dizer que  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados, temos por sua vez que são  $C^k$ -conjugação. Daí, por consequência de matrizes semelhantes são  $C^k$ -conjugadas.

□

**Observação 5.18** *Note que cada uma das asserções do teorema 5.17 equivale a propriedade de que  $A$  e  $B$  possuem a mesma forma de Jordan.*

Perceba que o teorema 5.17 esclarece que para fluxos de conjugação suave os autovalores e as dimensões dos blocos de Jordan permanecem invariantes, enquanto que os

autovetores e autoespaços generalizados são mapeados uns sobre os outros. Veremos que para o caso de conjugação topológica a situação é diferente, e para isso iremos formalizar a definição de hiperbolicidade.

**Definição 5.19** *Uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  é dita ser hiperbólica se não possui autovalores sobre o eixo imaginário. Podemos também dizer em outras palavras, que a mesma é hiperbólica se nenhum de seus autovalores possui parte real nula.*

**Exemplo 5.20** *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in gl(2, \mathbb{R}).$$

- *O polinômio característico é*

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

- *Consequentemente, seus autovalores são:*

$$\mu_1 = 1 - 2i \quad e \quad \mu_2 = 1 + 2i.$$

*Logo,  $A$  é uma matriz hiperbólica.*

**Exemplo 5.21** *Seja*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in gl(2, \mathbb{R}).$$

- *O polinômio característico é*

$$|B - \lambda I| = \lambda^2 + 3.$$

- *Consequentemente, seus autovalores são:*

$$\mu_1 = i\sqrt{3} \quad e \quad \mu_2 = -i\sqrt{3}.$$

*Logo,  $B$  não é uma matriz hiperbólica, visto que possui autovalor com parte real nula.*

**Exemplo 5.22** *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in gl(2, \mathbb{R}).$$

- *O polinômio característico é*

$$|C - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

- *Consequentemente, seus autovalores são:*

$$\mu_1 = -1 \text{ e } \mu_2 = 2.$$

*Logo,  $C$  é uma matriz hiperbólica.*

**Observação 5.23** *Em matrizes hiperbólicas, costumamos chamar também seus fluxos de hiperbólicos.*

**Observação 5.24** *Toda matriz hiperbólica é inversível, visto que não possui autovalor nulo.*

**Observação 5.25** *Devido ao fato de as matrizes hiperbólicas serem inversíveis, temos que a origem é o único ponto fixo de um fluxo hiperbólico.*

Atentemo-nos ao lema seguinte.

**Lema 5.26** *Seja  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  uma matriz hiperbólica associada a equação diferencial  $\dot{x} = Ax$ . Se  $B \in gl(d, \mathbb{R})$  possui entradas suficientemente próximas das entradas de  $A$ , então  $B$  também é hiperbólica e  $\dot{x} = Bx$  induz um fluxo  $e^{Bt}$  de modo que*

$$\dim L_A^- = \dim L_B^- \text{ e } \dim L_A^+ = \dim L_B^+.$$

**Demonstração:**

Denotemos  $p_A$  e  $p_B$  como sendo os polinômios característicos de  $A$  e  $B$  respectivamente.

Por hipótese temos que  $B$  está suficientemente próxima de  $A$ , o que por vez implica que  $p_B$  também está suficientemente próximo de  $p_A$ .

Em decorrência disso deduzimos que o número de autovalores com parte real positiva de  $A$  e  $B$  são os mesmos, assim como também o número de autovalores com parte real negativa.

À vista disso,

$$\dim L_A^- = \dim L_B^- \quad \text{e} \quad \dim L_A^+ = \dim L_B^+.$$

□

Denotemos por  $H(d, \mathbb{R}^d)$  o conjunto das matrizes hiperbólicas em  $gl(d, \mathbb{R})$ , e vejamos a proposição seguinte.

**Proposição 5.27** *O conjunto das matrizes hiperbólicas é aberto e denso em  $gl(d, \mathbb{R})$ , e para cada matriz hiperbólica  $A$ , há uma vizinhança  $U \subset gl(d, \mathbb{R})$  de modo que todo  $B \in U$  é topologicamente equivalente a  $A$ .*

**Demonstração:**

Sabemos que toda matriz  $A$  hiperbólica possui autovalor com parte real não nula. Assim, os autovalores de uma matriz  $B \in U$  diferem dos autovalores de  $A$  por dependerem de  $U$ . Logo, se tomarmos uma vizinhança suficientemente pequena, teremos que os autovalores de  $B$  estão suficientemente próximos dos autovalores de  $A$  uma vez que suas partes reais são não nulas. Consequentemente, por meio do lema 5.26 temos que as dimensões dos subespaços estáveis e instáveis coincidem. Portanto,  $A$  e  $B$  são topologicamente equivalentes, e mais,  $A$  é estruturalmente estável.

Devido ao fato de  $U$  ser aberto, temos que todos os seus elementos são estruturalmente estáveis. Logo,  $U \subset H(d, \mathbb{R}^d)$  e como por hipótese  $A \in U$ , concluímos que  $H(d, \mathbb{R}^d)$  é aberto uma vez que é união de conjuntos abertos.

Provemos por fim a densidade de  $H(d, \mathbb{R}^d)$  em  $gl(d, \mathbb{R})$ . Suponha que  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , mas  $A \notin H(d, \mathbb{R}^d)$ . Estando  $A$  em uma  $\epsilon$ -vizinhança, existe uma matriz  $B$  que pode ser tomada suficientemente próxima de  $A$  tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno, de modo que  $B = A + \epsilon I$  é hiperbólica para quase todo  $\epsilon \neq 0$ . Desta forma, todo elemento de  $gl(d, \mathbb{R})$

está arbitrariamente próximo dos elementos de  $H(d, \mathbb{R}^d)$ . Consequentemente,  $H(d, \mathbb{R}^d)$  é um subconjunto denso em  $gl(d, \mathbb{R})$ .

□

Prosseguindo, enunciaremos e demonstraremos uma proposição muito importante para a caracterização de fluxos lineares topologicamente conjugados (ou  $C^0$ -conjugados). Mas antes precisamos da seguinte definição:

**Definição 5.28** A norma  $\|\cdot\|_A$  sobre  $\mathbb{R}^d$ , com  $a > 0$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , de modo que para todo  $t \geq 0$  tem-se

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A,$$

é chamada de norma adaptada para  $A$ .

**Proposição 5.29** Para  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , temos que as seguintes propriedades são equivalentes:

1. Para todo autovalor  $\mu$  de  $A$ , tem-se  $\Re(\mu) < 0$ ;
2. Para toda norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^d$ , existem constantes  $a > 0$ , e  $c \geq 1$  tal que para todo  $t \geq 0$ ,

$$\|e^{At}x\| \leq c \cdot e^{-at}\|x\|;$$

3. Existe uma norma  $\|\cdot\|_A$  em  $\mathbb{R}^d$  (norma adaptada) tal que para algum  $a > 0$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , tem-se para  $t \geq 0$ ,

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A.$$

**Demonstração:**

(3)  $\Rightarrow$  (2) Em  $\mathbb{R}^d$  duas normas quaisquer são equivalentes. Dado que em  $\mathbb{R}^d$  duas normas  $\|x\|$  e  $\|x\|_A$  são equivalentes se existem  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  satisfazendo para todo  $x \in \mathbb{R}^d$

$$c_1\|x\| \leq \|x\|_A \leq c_2\|x\|,$$

temos assim para  $t \geq 0$

$$\|e^{At}x\| \leq \frac{1}{c_1} \|e^{At}x\|_A \leq \frac{1}{c_1} e^{-at} \|x\|_A \leq \frac{c_2}{c_1} e^{-at} \|x\|.$$

Tomando então  $c = \frac{c_2}{c_1}$  temos pela desigualdade desenvolvida acima que

$$\|e^{At}x\| \leq c \cdot e^{-at} \|x\|.$$

Mostrando assim que realmente (3)  $\Rightarrow$  (2).

(2)  $\Rightarrow$  (1) Aceitamos por absurdo, que exista um autovalor  $\mu = \lambda \pm iv$  cuja  $\Re(\mu) \geq 0$ , isto é, com  $\lambda \geq 0$ .

Deste modo, o bloco de Jordan relacionado ao autovalor  $\mu = \lambda \pm iv$  tem solução dada por

$$e^{At}x_0 = e^{\lambda t}(\cos(vt)x_1 - \sin(vt)x_2, \sin(vt)x_1 + \cos(vt)x_2),$$

onde  $x_0 = (x_1, x_2)$ . Desta forma, para  $\lambda > 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $e^{At}x_0 \rightarrow \infty$ . Já para  $\lambda = 0$  temos a rotação de  $x_0$  visto que

$$e^{At}x_0 = (\cos(vt)x_1 - \sin(vt)x_2, \sin(vt)x_1 + \cos(vt)x_2).$$

Por consequência, temos que  $e^{At}x_0 \not\rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o que por sua vez contraria nossa hipótese. Mostramos assim, que (2)  $\Rightarrow$  (1).

(2)  $\Rightarrow$  (3) Vamos mostrar nossa última implicação. Seja  $b \in (0, a)$ , logo pela nossa hipótese, para qualquer norma em  $\mathbb{R}^d$  temos para  $t \geq 0$  o seguinte:

$$\|e^{At}x\| c \cdot e^{-at} \|x\| = c \cdot e^{(-a+b-b)t} \|x\| = c \cdot e^{(b-a)t} \cdot e^{-bt} \|x\|.$$

Deste modo, existe  $\tau > 0$  de forma que  $c \cdot e^{(b-a)t} < 1$  para todo  $t \geq \tau$ . Consequentemente,

$$\|e^{At}x\| \leq e^{-bt} \|x\|. \tag{5.1}$$

Então,

$$\|x\|_A := \int_0^\tau e^{bs} \|e^{As}x\| ds,$$

define uma norma para  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Mostremos que  $\|x\|_A$  é de fato uma norma em  $\mathbb{R}^d$ .

Com efeito,

$$\|x\|_A = 0 \iff e^{bs}\|e^{As}x\| = 0.$$

Para  $s \in [0, \tau]$ , tal fato ocorre se, e somente se,  $x = 0$ .

Prosseguindo, veja que

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_A &= \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}(\alpha x)\|ds \\ &= \int_0^\tau e^{bs}\|\alpha e^{As}x\|ds \\ &= \int_0^\tau e^{bs}|\alpha|\|e^{As}x\|ds \\ &= |\alpha| \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}x\|ds \\ &= |\alpha|\|x\|_A. \end{aligned}$$

Quanto a desigualdade triangular, note que

$$\begin{aligned} \|x + y\|_A &= \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}(x + y)\|ds \\ &= \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}x + e^{As}y\|ds \\ &\leq \int_0^\tau e^{bs}(\|e^{As}x\| + \|e^{As}y\|)ds \\ &= \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}x\|ds + \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}y\|ds \\ &= \|x\|_A + \|y\|_A. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|x\|_A$  é de fato uma norma em  $\mathbb{R}^d$ .

Para  $t \geq 0$ , escrevamos  $t = n\tau + T$ , com  $0 \leq T \leq \tau$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ , e assim alcançamos

$$\begin{aligned}
\|e^{At}x\|_A &= \int_0^\tau e^{bs} \|e^{As} e^{At} x\| ds \\
&= \int_0^\tau e^{bs} \|e^{As} e^{A(n\tau+T)} x\| ds \\
&= \int_0^{\tau-T} e^{bs} \|e^{A(s+n\tau+T)} e^{At} x\| ds + \int_{\tau-T}^T e^{bs} \|e^{A(s+n\tau+T)} e^{At} x\| ds \\
&= \int_0^{\tau-T} e^{bs} \|e^{A(n\tau+T+s)} e^{At} x\| ds + \int_{\tau-T}^T e^{bs} \|e^{A(n+1)\tau+T-\tau+s} e^{At} x\| ds \\
&= \underbrace{\int_0^{\tau-T} e^{bs} \|e^{A(n\tau)} e^{A(T+s)} x\| ds}_* + \underbrace{\int_{\tau-T}^T e^{bs} \|e^{A(n+1)\tau} e^{A(T-\tau+s)} x\| ds}_{**}.
\end{aligned}$$

Em (\*) tomemos  $\sigma := T + s$  e, em (\*\*) tomemos  $\sigma := T - \tau + s$ . Fazendo uso do Teorema de Mudança de variáveis, chegamos ao seguinte:

$$\int_0^{\tau-T} e^{bs} \|e^{A(n\tau)} e^{A(T+s)} x\| d\sigma = \int_T^\tau e^{b(\sigma-T)} \|e^{An\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma,$$

pois para  $s = 0 \implies \sigma = T$ , para  $s = \tau - T \implies \sigma = \tau$ , e como  $\sigma = T + s \implies s = \sigma - T$ .

$$\int_{\tau-T}^T e^{bs} \|e^{A(n+1)\tau} e^{A(T-\tau+s)} x\| d\sigma = \int_0^T e^{b(\sigma-T+\tau)} \|e^{b(n+1)\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma$$

pois para  $s = \tau - T \implies \sigma = T - \tau + \tau - T = 0$ , para  $s = T \implies \sigma = T - \tau + \tau = T$ , e como  $\sigma = T - \tau + s \implies s = \sigma - T + \tau$ .

A vista da desigualdade 5.1, segue

$$\begin{aligned}
\|e^{At}x\|_A &= \int_0^T e^{b(\sigma-T+\tau)} \|e^{b(n+1)\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma + \int_T^\tau e^{b(\sigma-T)} \|e^{An\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma \\
&\leq \int_0^T e^{b(\sigma-T+\tau)-(n+1)\tau} \|e^{A\sigma} x\| d\sigma + \int_T^\tau e^{b(\sigma-T-n\tau)} \|e^{A\sigma} x\| d\sigma \\
&= e^{-bt} \int_0^T e^{b\sigma} \|e^{A\sigma} x\| d\sigma \\
&= e^{-bt} \|x\|_A.
\end{aligned}$$

Mostramos assim então, que

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-bt} \|x\|_A$$

por meio da hipótese  $\|e^{At}x\| \leq c \cdot e^{-at}\|x\|$ , com  $t \geq 0, a > 0, c \geq 1$ , e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Ou seja, mostramos que (2)  $\implies$  (3), concluindo assim a demonstração. □

**Proposição 5.30** *Dada  $\|\cdot\|_A$  uma norma adaptada qualquer em  $\mathbb{R}^d$ , temos consequentemente que a mesma é contínua em  $\mathbb{R}^d$ .*

**Demonstração:**

Façamos a priore uma organização de informações.

- Sabemos que todas as normas em  $\mathbb{R}^d$  são equivalentes, e que tal fato ocorre se, e somente se, existem  $a > 0$  e  $b > 0$  satisfazendo

$$a\|\cdot\|_1(x) \leq \|\cdot\|_2(x) \leq b\|\cdot\|_1(x),$$

onde  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  são normas em  $\mathbb{R}^d$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ .

- Sendo  $\|\cdot\|$  uma norma qualquer em  $\mathbb{R}^d$ , temos  $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$  que

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

- Sabemos que toda função uniformemente contínua é contínua.

Tendo em vista estas informações, podemos realizar a demonstração.

Tomemos  $\|\cdot\|$  como sendo a norma usual em  $\mathbb{R}^d$ . Devido ao fato de duas normas quaisquer em  $\mathbb{R}^d$  serem equivalentes, temos que existem  $a > 0$  e  $b > 0$  tais que

$$a\|x - y\|_A \leq \|x - y\| < \delta \text{ com } \delta > 0, \tag{5.2}$$

e

$$\left| \|x\|_A - \|y\|_A \right| \leq b\left| \|x\| - \|y\| \right|. \tag{5.3}$$

Desta forma, para qualquer  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \frac{a \cdot \epsilon}{b}$ , com quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^d$  e  $\|x - y\| < \delta$ .

Assim, por (5.2) segue que

$$\|x - y\|_A < \frac{\delta}{a}. \tag{5.4}$$

Aplicando (5.3) em (5.4) segue que

$$\| \|x\|_A - \|y\|_A \| \leq b \| \|x\|_A - \|y\|_A \| \leq b \|x - y\| < \frac{b \cdot \delta}{\epsilon} = \epsilon.$$

Portanto, mostramos que  $\| \cdot \|_A$  é contínua em  $\mathbb{R}^d$  pois

$$\|x - y\|_A < \delta \implies \| \|x\|_A - \|y\|_A \|_A < \epsilon$$

□

**Lema 5.31** *Seja  $\| \cdot \|$  uma norma tal que são satisfeitos o seguinte:*

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A \text{ para } t \geq 0, \quad (5.5)$$

e

$$\|e^{At}x\|_A \geq e^{a|t|}\|x\|_A \text{ para } t \leq 0, \quad (5.6)$$

onde  $a > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|e^{At}x\|_A. \end{aligned}$$

Então existe um único tempo  $t \in \mathbb{R}$  de modo que  $\|e^{At}x\|_A = 1$ .

**Demonstração:**

Ao aplicar o limite vemos que, quando  $t \rightarrow \infty \implies e^{-at}\|x\|_A \rightarrow 0$ , consequentemente pela desigualdade (5.5) da hipótese temos que  $\|e^{At}x\|_A \rightarrow 0$ . Quando  $t \rightarrow -\infty \implies e^{a|t|}\|x\|_A \rightarrow \infty$ , consequentemente pela desigualdade (5.6) da hipótese temos que  $\|e^{At}x\|_A \rightarrow 0$ .

Portanto, fazendo uso do teorema do Valor Intermediário, sabemos que existe pelos menos um  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\|e^{At}x\|_A = 1$ . Mostremos que existe um único  $t \in \mathbb{R}$  que satisfaz.

Suponhamos que existam  $t_1, t_2$  tais que

$$\|e^{At_1}x\|_A = 1 = \|e^{At_2}x\|_A,$$

e considere sem perda de generalidade que  $t_2 > t_1$ . Então,

$$\|e^{At_1} \cdot e^{-At_1}x\| = \|e^{At_2} \cdot e^{-At_1}x\|,$$

e assim

$$\|x\|_A = \|e^{A(t_2-t_1)}x\|_A.$$

Note que pela hipótese

$$\|e^{A(t_2-t_1)}x\|_A \leq e^{-a(t_2-t_1)}\|x\|_A \text{ com } a > 0,$$

e deste modo,

$$\|x\|_A \leq e^{-a(t_2-t_1)}\|x\|_A \implies 1 \leq e^{-a(t_2-t_1)}.$$

No entanto, como  $-a < 0$  e  $t_2 - t_1 > 0$ , segue que  $-a(t_2 - t_1) \leq 0$ , e consequentemente  $e^{-a(t_2-t_1)} \leq 1$  o que prontamente implica que

$$e^{-a(t_2-t_1)} = 1,$$

o que por sua vez ocorre se, e somente se,  $t_1 = t_2$ . Mostramos assim a unicidade. □

**Teorema 5.32** *Sejam  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$ . Se todos os autovalores de  $A$  e de  $B$  possuem parte real negativa, então os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.*

**Demonstração:**

Dadas as matrizes  $A$  e  $B$ , consideremos  $\|\cdot\|_A$  e  $\|\cdot\|_B$  como sendo as respectivas normas adaptadas. Assim sendo, existem constantes  $a > 0$  e  $b > 0$  satisfazendo para todo  $t \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}^d$  que

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A \text{ e,}$$

$$\|e^{Bt}x\|_B \leq e^{-bt}\|x\|_B.$$

Para  $e^{At}, e^{Bt}$  e  $-t$ , tomando as inequações acima, e considerando  $t \leq 0$ , segue que

$$\|e^{At}x\|_A \geq e^{a|t|}\|x\|_A \text{ e,}$$

$$\|e^{Bt}x\|_B \geq e^{b|t|}\|x\|_B.$$

Deste modo,

$$\|x\|_A = \|e^{-At} \cdot e^{At}x\|_A \leq e^{at}\|e^{At}x\|_A \text{ e,}$$

$$\|x\|_B = \|e^{-Bt} \cdot e^{Bt}x\|_B \leq e^{bt}\|e^{Bt}x\|_B.$$

Tome as esferas unitárias

$$S_A = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_A = 1\} \text{ e,}$$

$$S_B = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_B = 1\},$$

como sendo os domínios fundamentais dos fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  respectivamente, isto é, possuem um e apenas um ponto da trajetória de  $e^{At}$  e de  $e^{Bt}$ .

Para todo  $x \in S_A$ , defina a aplicação entre as esferas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} h_0 : S_A &\longrightarrow S_B \\ x &\longmapsto h_0(x) = \frac{x}{\|x\|_B}, \end{aligned}$$

onde a inversa é definida por

$$\begin{aligned} h_0^{-1} : S_B &\longrightarrow S_A \\ y &\longmapsto h_0^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|_A}. \end{aligned}$$

Constatemos que  $h_0$  é um homeomorfismo, ou seja, que é uma aplicação bijetora, contínua e com inversa contínua.

Pela proposição 5.30 provamos que qualquer norma adaptada em  $\mathbb{R}^d$  é contínua, assim, segue que  $\|x\|_A$  e  $\|x\|_B$  são contínuas em  $\mathbb{R}^d$ . Além disso, sabemos que o quociente de funções contínuas é ainda uma função contínua. Sendo então  $\frac{x}{\|x\|_A}$  e  $\frac{y}{\|y\|_B}$  contínuas, chegamos que  $h_0$  e  $h_0^{-1}$  são de fato aplicações contínuas.

Como a bijeção já saiu de forma direta pela forma a qual definimos as funções  $h_0$  e  $h_0^{-1}$ , concluímos que realmente  $h_0$  é um homeomorfismo.

Nosso objetivo é estender  $h_0$  para todo o  $\mathbb{R}^d$ . Lembre que pelo lema 5.31 para todo  $x \neq 0$  existe um único tempo  $\tau_A(x) \in \mathbb{R}$  tal que  $\|e^{A\tau_A(x)}x\|_A = 1$ . Portanto,

$$\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t, \tag{5.7}$$

visto que  $e^{-A\tau_A(e^{At}x)} \cdot e^{A\tau_A(x)}x = e^{At}x$ .

De forma semelhante, para todo  $x \neq 0$  existe um único tempo  $\tau_B(x) \in \mathbb{R}$  tal que  $\|e^{B\tau_B(x)}x\|_B = 1$ . Assim,

$$\tau_B(e^{Bt}x) = \tau_B(x) - t, \quad (5.8)$$

pois  $e^{-B\tau_B(e^{Bt}x)} \cdot e^{B\tau_B(x)}x = e^{Bt}x$ .

A fim de simplificar, visto que o mesmo é válido tanto para  $\tau_A(x)$  quanto para  $\tau_B(x)$ , consideraremos  $\tau(x)$ . Isso implica na continuidade da aplicação  $x \mapsto \tau(x)$ .

Com efeito, tomando  $x \in \mathbb{R}^d$  considere uma sequência  $(x_n)$  também em  $\mathbb{R}^d$  de modo que  $x_n$  converge para  $x$ . Usaremos aqui, sem perda de generalidade a norma  $\|\cdot\|_A$ , pois para  $\|\cdot\|_B$  é análogo e já estamos considerando  $\tau(x)$ . De acordo com a propriedade de  $\|\cdot\|_A$ , segue que

$$\|e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}(x_n - x)\|_A \leq e^{-a(\tau(x_n)-\tau(x))}\|x_n - x\|_A.$$

Veja que  $a > 0$  e  $\tau(x_n) - \tau(x) \geq 0$ , implicando assim que

$$e^{-a(\tau(x_n)-\tau(x))} \leq 1,$$

e por consequência

$$e^{-a(\tau(x_n)-\tau(x))}\|x_n - x\|_A \leq \|x_n - x\|_A.$$

Como por hipótese temos que  $x_n$  converge para  $x$ , de forma equivalente podemos escrever  $\|x_n - x\|_A \mapsto 0$ , por isso

$$e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}\|x_n - x\|_A \longrightarrow 0 \implies \|e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}(x_n - x)\|_A \longrightarrow 0.$$

Agora

$$e^{A\tau(x_n)} \left( e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}(x_n - x) \right) \longrightarrow 0 \implies e^{A\tau(x_n)}(x_n - x) \longrightarrow 0,$$

por isso

$$e^{A\tau(x_n)}(x_n) - e^{A\tau(x_n)}(x) \longrightarrow 0.$$

No entanto, desta forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{A\tau(x_n)}(x_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{A\tau(x)}(x) \right) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x_n)\|_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x)}(x)\|_A.$$

Devido ao fato de  $\|e^{A\tau(x_n)}(x_n)\|_A = 1$  para todo  $n$ , somos obrigados a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x_n)\|_A = 1$ , por consequência temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A = 1$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A = 1. \quad (5.9)$$

Observe que  $A\tau(x_n)$  é uma matriz, onde ao aplicarmos o limite passamos a ter uma sequência de matrizes. Por sua vez, o limite dessa exponencial é o limite da soma de matrizes, em outras palavras, é uma série. Como a exponencial de matrizes é uma série convergente, podemos aplicar o fato de o limite da exponencial de matrizes ser a exponencial do limite das mesmas. Outro ponto importante é o fato de a norma ser contínua, possibilitando assim que o limite da composição de funções entre para dentro da composta. Permitindo-nos assim, usar tais igualdades.

Daí vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(x_n) \longrightarrow \tau(x).$$

Mostrando assim, que a aplicação  $x \mapsto \tau(x)$ .

Neste momento, defina

$$h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$x \longmapsto h(x) = \begin{cases} e^{-B\tau_A(x)} h_0(e^{A\tau_A(x)}(x)), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Mostremos que a aplicação  $h$  é um conjugação, visto que para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} h(e^{At}x) &= e^{-B\tau_A(e^{At}x)} h_0(e^{A\tau_A(e^{At}x)}(e^{At}x)) \\ &= e^{-B[\tau_A(x)-t]} h_0(e^{A[\tau_A(x)-t]}(e^{At}x)) \\ &= e^{Bt} e^{-B\tau_A(x)} h_0(e^{A\tau_A(x)}x) \\ &= e^{Bt} h(x) \end{aligned}$$

.

Vejamos a continuidade. Note que devido ao fato de as aplicações  $e^{At}$ ,  $e^{Bt}$  e  $\tau(x)$  serem contínuas, temos que  $h$  é contínua em  $x \neq 0$ .

Resta-nos verificar a continuidade em  $x = 0$ . Para tanto, tomemos uma sequência  $(x_j)$  em  $\mathbb{R}^d$  de modo que  $x_j$  convirja para 0. Nosso intuito será mostrar que  $h(x_j)$

converge para  $h(0) = 0$ . Seja  $\tau_j$  o tempo em que  $\|e^{A\tau_j}x_j\|_A = 1$ , então teremos que  $\tau_j := \tau(x_j) \rightarrow -\infty$ .

Com efeito, suponhamos que  $\tau_j \geq 0$ . Diante disto,

$$1 = \|e^{A\tau_j}x_j\|_A \leq \rightarrow e^{-a\tau_j}\|x_j\|_A \rightarrow 0,$$

o que por vez é um absurdo.

Tomemos agora  $\tau_j \leq 0$ . Como já visto, para cada  $x \neq 0$ , a trajetória  $e^{At}$  cruza uma única vez a esfera  $S_A$ , logo para cada  $j$  há um único  $\tau_j \in \mathbb{R}_-$  e um único  $y_j \in S_A$  de modo que  $e^{A\tau_j}x_j = y_j$ .

Vamos supor que  $|\tau_j| < K$ , para qualquer  $j$  e  $K \in \mathbb{R}$ . Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma sequência  $\tau_{j_k}$  convergindo para  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

A sequência  $e^{A\tau_{j_k}}x_{j_k}$  está no compacto  $S_A$ , portanto, há uma subsequência  $y_{j_{i_k}}$  de modo que

$$y_{j_{i_k}} \rightarrow y_0, \quad y_0 \in S_A.$$

Consequentemente,  $e^{A\tau_{j_{i_k}}}x_{j_{i_k}} = y_{j_{i_k}}$ .

Desta forma, quanto  $k \rightarrow \infty$ , temos,

$$\tau_{j_{i_k}} \rightarrow t_0, \quad x_{j_{i_k}} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad y_{j_{i_k}} \rightarrow y_0.$$

Assim sendo,

$$e^{At}(0) = y_0 \implies y_0 = 0,$$

o que é um absurdo.

Logo,  $\tau_j \rightarrow -\infty$  quando  $x_j \rightarrow 0$ .

Defina  $y_j := h_0(e^{A\tau_j}x_j)$ . Desta forma,

$$\|y_j\|_B = \|h_0(e^{A\tau_j}x_j)\|_B = \left\| \frac{e^{A\tau_j}x_j}{\|e^{A\tau_j}x_j\|_B} \right\|_B = \frac{\|e^{A\tau_j}x_j\|_B}{\|e^{A\tau_j}x_j\|_B} = 1,$$

e por esse motivo,

$$\|h(x_j)\|_B = \|e^{-B\tau_j}h_0(e^{A\tau_j}x_j)\|_B \leq \|e^{-B\tau_j}\|_B \|h_0(e^{A\tau_j}x_j)\|_B = \|e^{-B\tau_j}\|_B \leq e^{-b|\tau_j|} \rightarrow 0,$$

quando  $j \rightarrow \infty$ .

Resulta que  $\|h(x_j)\|_B \rightarrow 0$ , ou seja,  $h(x_j) \rightarrow 0$  quando  $x_j \rightarrow 0$ , mostrando assim que  $h$  é também contínua em  $x = 0$ . Concluindo assim a continuidade da aplicação  $h$ .

Temos que a aplicação  $h$  é inversível, cuja inversa é dada por:

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} e^{-A\tau_B(x)} h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}(x)), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

De fato, em virtude de  $\tau_B(e^{Bt}x) = \tau_B(x) - t$  e  $h_0(e^{\tau_A(x)}x) \in S_B$  assumamos que

$$\tau_B(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}x)) = \tau_B(h_0(e^{\tau_A(x)}x)) + \tau_A(x) = \tau_A(x).$$

Então,

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ h)(x) &= h^{-1}(h(x)) \\ &= h^{-1}(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}(x))) \\ &= e^{-A\tau_B(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}(x)))} h_0^{-1}(e^{B\tau_B(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}(x)))}(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}(x)))) \\ &= e^{-A\tau_A(x)} h_0^{-1}(e^{B\tau_A(x)} e^{-B\tau_A(x)} h_0(e^{A\tau_A(x)}x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Note que em virtude de  $\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t$  e  $h_0^{-1}(e^{\tau_B(x)}x) \in S_A$  podemos assumir

$$\tau_A(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x)) = \tau_A(h_0^{-1}(e^{\tau_B(x)}x)) + \tau_B(x) = \tau_B(x).$$

Então,

$$\begin{aligned} (h \circ h^{-1})(x) &= h(h^{-1}(x)) \\ &= h(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}(x))) \\ &= e^{-B\tau_A(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}(x)))} h_0(e^{A\tau_A(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}(x)))}(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}(x)))) \\ &= e^{-B\tau_B(x)} h_0(e^{A\tau_B(x)} e^{-A\tau_B(x)} h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Portanto, temos que de fato  $h$  é um homeomorfismo, e conseqüentemente após nossa construção mostramos que  $A$  e  $B$  são topologicamente conjugados.

□

**Observação 5.33** Temos a seguinte interpretação geométrica da igualdade da equação (5.7),  $\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t$  usada no teorema 5.32.

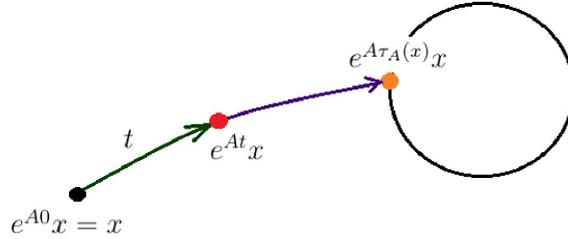


Figure 5.2:  $\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t$

Veja que  $x = e^{A0}x$ , que o ponto  $e^{At}x$  está na mesma  $e$ -trajetória de  $x$ , e mais, que  $e^{A\tau_A(x)}x$  também está na mesma  $e$ -trajetória de  $x$ . Tendo em vista que partindo do ponto  $x$  precisamos do tempo  $t$  para chegarmos ao ponto  $e^{At}x$ , e de modo semelhante, partindo do ponto  $x$  precisamos do tempo  $\tau_A(x)$  para chegarmos ao ponto  $e^{A\tau_A(x)}x$ , segue que

$$\tau_A(x) = t + \tau(e^{At}x) \implies \tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t.$$

De modo análogo, verificamos que  $\tau_B(e^{Bt}x) = \tau_B(x) - t$ .

**Corolário 5.34** Sejam  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$ . Se todos os autovalores de  $A$  e de  $B$  possuem parte real positiva, então os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  também são topologicamente conjugados.

**Demonstração:**

Com efeito, visto que todos os autovalores de  $-A$  e  $-B$  possuem partes reais negativas, logo pelo teorema 5.32 segue que

$$e^{-A(-t)} \text{ e } e^{-B(-t)}$$

são topologicamente conjugados. Portanto,

$$e^{At} \text{ e } e^{Bt}$$

são topologicamente conjugados.

□

**Exemplo 5.35** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

As matrizes  $A$  e  $B$  possuem respectivamente  $\mu_1 = -2-3i$  e  $\mu_2 = -2+3i$ ,  $\gamma_1 = -5-2i$  e  $-5+2i$  como seus autovalores. Como ambos os autovalores de  $A$  e  $B$  possuem partes reais negativas, podemos concluir que os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.

Formularemos a seguir, o teorema mais importante desta seção.

**Teorema 5.36** *Se  $A$  e  $B$  são matrizes hiperbólicas, então os fluxos lineares associados respectivamente  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $\mathbb{R}^d$  são topologicamente equivalentes (e topologicamente conjugados) se, e somente se, as dimensões dos subespaços estáveis (e consequentemente as dimensões dos subespaços instáveis) de  $A$  e  $B$  coincidem.*

**Demonstração:**

Se  $A$  e  $B$  são matrizes hiperbólicas, então  $A$  e  $B$  não possuem autovalores sobre o eixo imaginário, ou seja, não possuem autovalores cuja parte real seja nula. Desta forma podemos decompor  $\mathbb{R}^d$  do seguinte modo:

$$\mathbb{R}^d = L_A^- \oplus L_A^+ \quad e \quad \mathbb{R}^d = L_B^- \oplus L_B^+,$$

no qual  $L_A^-$  e  $L_A^+$  denotam respectivamente os subespaços estáveis e instáveis de  $A$ , e  $L_B^-$  e  $L_B^+$  denotam respectivamente os subespaços estáveis e instáveis de  $B$ . Represente as projeções naturais por:

$$\begin{aligned} \pi_A^- : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_A^- \\ x_A = x_A^- \oplus x_A^+ &\longmapsto x_A^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_A^+ : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_A^+ \\ x_A = x_A^- \oplus x_A^+ &\longmapsto x_A^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_B^- : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_B^- \\ x_B = x_B^- \oplus x_B^+ &\longmapsto x_B^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_B^+ : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_B^+ \\ x_B = x_B^- \oplus x_B^+ &\longmapsto x_B^+.\end{aligned}$$

Os subespaços  $L_A^-$  e  $L_A^+$  são invariantes por  $A$ , e os subespaços  $L_B^-$  e  $L_B^+$  são invariantes por  $B$ . Tome as seguintes equações diferenciais lineares:

$$\dot{x} = A|_{L_A^+}x \quad \text{e} \quad \dot{x} = A|_{L_A^-}x \quad (5.10)$$

$$\dot{x} = B|_{L_B^+}x \quad \text{e} \quad \dot{x} = B|_{L_B^-}x. \quad (5.11)$$

Perceba que as soluções de  $\dot{x} = Ax$  podem ser escritas de forma única como a soma direta das soluções das equações (5.10), e que as soluções de  $\dot{x} = Bx$  podem ser escritas de forma única como a soma direta das soluções das equações (5.11).

Por hipótese temos que os subespaços estáveis e instáveis possuem a mesma dimensão, pelo teorema 5.32 existem as equivalências topológicas  $h^-$  e  $h^+$ , ou seja, os homeomorfismos

$$h^- : L_A^- \longrightarrow L_B^- \text{ tal que } h^-(e^{At}x) = e^{\tau_x(t)}h^-(x), \text{ no qual } x \in L_A^-;$$

$$h^+ : L_A^+ \longrightarrow L_B^+ \text{ tal que } h^+(e^{At}x) = e^{\tau_x(t)}h^+(x), \text{ no qual } x \in L_A^+,$$

em que  $\tau_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação contínua.

Portanto, estabelecemos uma equivalência topológica  $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ , de  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$ , do seguinte modo:

$$h(x) = h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x)).$$

Temos que  $h$  é bijetora, onde sua inversa  $h^{-1} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  é dada por:

$$h^{-1}(x) = (h^-)^{-1}(\pi_B^-(x)) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(x)).$$

De fato, tomando  $x = x_A^- \oplus x_A^+$ , segue que

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ h(x) &= h^{-1}(h^{-}(\pi_A^{-}(x)) + h^{+}(\pi_A^{+}(x))) \\
&= h^{-1}(h^{-}(\pi^{-}(x_A^- \oplus x_A^+)) + h^{+}(\pi^{+}(x_A^- \oplus x_A^+))) \\
&= h^{-1}(h^{-}(x_A^-) + h^{+}(x_A^+)) \\
&= (h^{-})^{-1}(\pi_B^{-}(h^{-}(x_A^-) + h^{+}(x_A^+))) + (h^{+})^{-1}(\pi_B^{+}(h^{-}(x_A^-) + h^{+}(x_A^+))) \\
&= (h^{-})^{-1}(h^{-}(x_A^-)) + (h^{+})^{-1}(h^{+}(x_A^+)) \\
&= x_A^- \oplus x_A^+ \\
&= x,
\end{aligned}$$

e, tomando  $x = x_B^- \oplus x_B^+$ , segue que

$$\begin{aligned}
h \circ h^{-1}(x) &= h((h^{-})^{-1}(\pi_B^{-}(x)) + (h^{+})^{-1}(\pi_B^{+}(x))) \\
&= h((h^{-})^{-1}(\pi_B^{-}(x_B^- \oplus x_B^+)) + (h^{+})^{-1}(\pi_B^{+}(x_B^- \oplus x_B^+))) \\
&= h((h^{-})^{-1}(x_B^-) + (h^{+})^{-1}(x_B^+)) \\
&= h^{-}(\pi_A^{-}((h^{-})^{-1}(x_B^-) + (h^{+})^{-1}(x_B^+))) + h^{+}(\pi_A^{+}((h^{-})^{-1}(x_B^-) + (h^{+})^{-1}(x_B^+))) \\
&= h^{-}((h^{-})^{-1}(x_B^-)) + h^{+}((h^{+})^{-1}(x_B^+)) \\
&= x_B^- \oplus x_B^+ \\
&= x.
\end{aligned}$$

Deste modo,  $h$  e  $h^{-}$  são contínuas, visto que  $h^{-}$ ,  $h^{+}$ ,  $(h^{-})^{-1}$  e  $(h^{+})^{-1}$  são aplicações contínuas, e soma de aplicações contínuas é contínua. De onde chegamos que de fato  $h$  é um homeomorfismo.

De mais a mais, tendo  $x = x_A^- \oplus x_A^+$ , a aplicação  $h$  satisfaz a condição de equivalência.

$$\begin{aligned}
h(e^{At}x) &= h^-(\pi_A^-(e^{At}x)) + h^+(\pi_A^+(e^{At}x)) \\
&= h^-(\pi_A^-(e^{At}(x_A^- \oplus x_A^+))) + h^+(\pi_A^+(e^{At}(x_A^- \oplus x_A^+))) \\
&= h^-(\pi_A^-(e^{At}x_A^- \oplus e^{At}x_A^+)) + h^+(\pi_A^+(e^{At}x_A^- \oplus e^{At}x_A^+)) \\
&= h^-(e^{At}x_A^-) + h^+(e^{At}x_A^+) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h^-(x_A^-) + e^{B\tau_x(t)}h^+(x_A^+) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h^-(\pi_A^-(x_A^- \oplus x_A^+)) + e^{B\tau_x(t)}h^+(\pi_A^+(x_A^- \oplus x_A^+)) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h^-(\pi_A^-(x)) + e^{B\tau_x(t)}h^+(\pi_A^+(x)) \\
&= e^{B\tau_x(t)}(h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x))) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h(x).
\end{aligned}$$

De forma recíproca, suponha que os fluxos lineares  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $\mathbb{R}^d$ . Temos por hipótese que existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de modo que  $h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x)$ , ou melhor reescrevendo

$$h : L_A^- \oplus L_A^+ \rightarrow L_B^- \oplus L_B^+$$

de forma que

$$h(e^{At}(x_A^- \oplus x_A^+)) = e^{Bt}h(x_A^- \oplus x_A^+),$$

uma vez que as matrizes  $A$  e  $B$  são hiperbólicas.

Devido ainda ao fato de as matrizes  $A$  e  $B$  serem hiperbólicas, a mesma é por sua vez inversível. Para toda matriz inversível o único ponto fixo associado ao sistema dinâmico é o 0. Como a aplicação conjugação leva ponto fixo em ponto fixo, temos aqui que  $h(0) = 0$ .

Admita  $x_A^- \in L_A^-$ . Assim, quando  $t \rightarrow +\infty$  temos que

$$e^{At}x_A^- \rightarrow 0.$$

Prontamente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(e^{At}x_A^-) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Bt}h(x_A^-) = e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} Bt}h(x_A^-) = 0,$$

implicando assim que  $h(x_A^-) \in L_B^-$ , isto é,  $h(L_A^-) \subset L_B^-$ .

Suponha que  $x_A^+ \in L_A^+$ . Assim, quando  $t \rightarrow -\infty$  temos que

$$e^{At}x_A^+ \rightarrow 0.$$

Prontamente,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(e^{At}x_A^+) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{Bt}h(x_A^+) = e^{\lim_{t \rightarrow -\infty} Bt}h(x_A^+) = 0,$$

implicando assim que  $h(x_A^+) \in L_B^+$ , isto é,  $h(L_A^+) \subset L_B^+$ .

Nosso objetivo final é mostrar que os subespaços estáveis (e instáveis) possuem a mesma dimensão.

Sejam  $h_1$  e  $h_2$  as restrições de  $h$  respectivamente em relação aos subespaços  $L_A^+$  e  $L_A^-$ , ou seja,

$$h_1 = h|_{L_A^-} : L_A^- \rightarrow L_B^-;$$

$$h_2 = h|_{L_A^+} : L_A^+ \rightarrow L_B^+.$$

Adote  $x_B^- \in L_B^-$ . Tendo em vista a sobrejetividade de  $h$ , existe  $x_A^- \oplus x_A^+ \in L_A^- \oplus L_A^+$  de modo que  $h(x_A^- \oplus x_A^+) = x_B^-$ . Porém, veja que  $e^{Bt}h(x_A^- \oplus x_A^+) = e^{Bt}x_B^-$ , e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Bt}h(x_A^- \oplus x_A^+) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Bt}x_B^- = 0,$$

em outras palavras,

$$e^{Bt}h(x_A^- \oplus x_A^+) = h(e^{At}x_A^+ \oplus e^{At}x_A^-).$$

Observa-se que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(e^{At}x_A^+ \oplus e^{At}x_A^-) = 0 \implies x_A^+ = 0,$$

uma vez que  $e^{At}x_A^- \rightarrow 0$  e  $e^{At}x_A^+ \rightarrow +\infty$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Portanto, para todo  $x_B^- \in L_B^- \exists x_A^- \in L_A^-$  de modo que  $h_1(x_A^-) = h_1(x_A^- + 0) = x_B^-$ , isto é,  $h_1$  é sobrejetora. Ademais,  $h_1$  também é injetora, uma vez que

$$h_1(x_1) = h_1(x_2) \implies h_1(x_1 + 0) = h_2(x_2 + 0) \implies h(x_1 + 0) = h(x_2 + 0) \implies x_1 = x_2.$$

Concluindo assim, que  $h_1$  é bijetora.

De forma análoga, mostra-se que  $h_2$  é sobrejetora.

À vista disso, temos que as dimensões dos subespaços estáveis e instáveis de  $A$  e  $B$  coincidem.

□

**Exemplo 5.37** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

*Perceba que a matriz  $A$  possui autovalores*

$$\mu_1 = -3 + 4i, \mu_2 = -3 - 4i, \mu_3 = 4 - 2i \text{ w } \mu_4 = 4 + 2i,$$

*e que a matriz  $B$  possui autovalores*

$$\gamma_1 = -5 - 4i, \gamma_2 = -5 + 4i, \gamma_3 = 9 - i \text{ e } \gamma_4 = 9 + i.$$

*Visto que todos os autovalores, tanto de  $A$ , quanto de  $B$  possuem parte real não nula, temos por consequência que as matrizes  $A$  e  $B$  são hiperbólicas. Além do mais,*

$$L_A^- = L(-3) = 2, L_A^+ = L(4) = 2, L_B^- = L(-5) = 2 \text{ e } L_B^+ = L(9) = 2.$$

*À vista disso, as dimensões dos subespaços estáveis e instáveis das matrizes  $A$  e  $B$  coincidem, logo, pelo teorema 5.36, os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  associados respectivamente aos sistemas lineares  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{x} = Bx$  são topologicamente conjugados.*

## 5.3 Conjugação e Equivalência de Fluxos Lineares no Espaço Euclidiano em Tempo Discreto

Temos por objetivo nesta seção definir formalmente os sistemas dinâmicos em tempo discreto, e então classifica-los de acordo com as classes de conjugação dos sistemas dinâmicos gerados por equações diferenciais lineares autônomas da forma  $x_{(n+1)} = Ax_n$ , com  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

**Definição 5.38** *Um sistema dinâmico contínuo em tempo discreto sobre o conjunto da tempo  $\mathbb{Z}$ , e com espaço estado  $X$  sendo um espaço métrico, é definido como uma aplicação*

contínua

$$\Phi : \mathbb{Z} \times X \longrightarrow X,$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\Phi(0, x) = x$  para todo  $x \in X$ ,
2.  $\Phi(m + n, x) = \Phi(m, \Phi(n, x))$  para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in X$ .

**Definição 5.39** Para cada  $x \in X$ , o conjunto  $\Phi(n, x) : n \in \mathbb{Z}$  é chamado de órbita do sistema através do ponto  $x$ .

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , a aplicação tempo é definida como  $\varphi_n = \Phi(n, \cdot) : X \longrightarrow X$ . Para esta nova aplicação, conseguimos reescrever as propriedades 1 e 2 acima do seguinte modo:

1.  $\varphi_0 = id_X$  (aplicação identidade de  $X$ );
2.  $\varphi_{m+n} = \varphi_m \circ \varphi_n$ , para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Como consequência imediata da definição, percebemos que os sistemas dinâmicos em tempo discreto são completamente determinados por sua aplicação tempo.

**Proposição 5.40** Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , a aplicação tempo  $\varphi_n$  é dada por  $\varphi_n = (\varphi_1)^n$ . Em particular, cada aplicação tempo- $n$   $\varphi_n$  tem uma inversa  $(\varphi_n)^{-1} = \varphi_{-n}$ , e  $\varphi_n : X \longrightarrow X$  é um homeomorfismo. Um sistema dinâmico em tempo discreto é um grupo com respeito  $(\{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ , com  $\circ$  denotando composição de aplicações satisfazendo os axiomas, e

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ),$$

definida por  $\varphi(n) = \varphi_n$  é um homeomorfismo de grupos.

**Demonstração:**

De fato,

$$\varphi_n = \Phi(n, \cdot) : X \longrightarrow X$$

para todo  $n$  é um grupo.

- Satisfaz a propriedade do fecho, visto que  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ , segue por definição que

$$\varphi_m \circ \varphi_n = \varphi_{m+n}.$$

- Satisfaz a propriedade associativa, visto que para todo  $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$ , segue

$$(\varphi_m \circ \varphi_n) \circ \varphi_p = (\varphi_{m+n}) \circ \varphi_p = (\varphi_{m+n+p}) = \varphi_m \circ (\varphi_{n+p}) = \varphi_m \circ (\varphi_n \circ \varphi_p).$$

- Satisfaz a existência do elemento neutro, visto que para todo  $n \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_0 \circ \varphi_n = \varphi_{0+n} = \varphi_n \text{ e,}$$

$$\varphi_n \circ \varphi_0 = \varphi_{n+0} = \varphi_n.$$

- Satisfaz a existência do elemento simétrico, uma vez que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , existe  $-n \in \mathbb{Z}$  de modo que

$$\varphi_n \circ \varphi_{-n} = \varphi_{n+(-n)} = \varphi_0, \text{ e}$$

$$\varphi_{-n} \circ \varphi_n = \varphi_{-n+n} = \varphi_0.$$

Portanto, temos que  $(\{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ)$  é um grupo.

Vejamos que é um homeomorfismo de grupos.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (\{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ) \\ n &\longmapsto \varphi(n) = \varphi_n \end{aligned}$$

é um homeomorfismo de grupo, pois para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$ , devemos ter  $\varphi(m+n) = \varphi_m \circ \varphi_n$  por definição. Desta forma temos para todo  $x \in X$

$$\varphi_m \circ \varphi_{-m} = \varphi_{-m} \circ \varphi_m = \varphi_0 = id.$$

Ou seja, há inversa e a mesma é contínua.

Portanto, é de fato um homeomorfismo de grupos.

□

A proposição 5.40 nos garante que todo homeomorfismo  $f$  define um sistema dinâmico contínuo em tempo discreto por  $\varphi_n : f^n, n \in \mathbb{Z}$ . Em particular, é válido para  $f$  dado por uma matriz  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

Uma das principais diferenças entre o caso contínuo e o caso discreto, vem do fato de que ao contrário de  $e^{At}$ , a matriz  $A$  pode não ser inversível, ou de forma equivalente, 0 pode ser um autovalor de  $A$ . Neste caso, obtém-se uma aplicação

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (n, x) &\longrightarrow \Phi(n, x) = A^n x,\end{aligned}$$

a qual podemos ver facilmente que o segundo argumento é linear e satisfaz a propriedade 2 apenas para  $m, n \geq 0$ . Para o caso em que  $A$  é inversível, a aplicação  $\Phi$  pode ser estendida para  $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ .

Por tal motivo e tendo em mente o teorema principal desta seção, consideraremos a partir deste momento apenas  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

Sejam

$$\Phi, \Psi : \mathbb{Z} \times X \longrightarrow X$$

sistemas dinâmicos gerados pelos homeomorfismos

$$f, g : X \longrightarrow X,$$

respectivamente. Recorde que esses sistemas (e também  $f$  e  $g$ ) são ditos serem topologicamente conjugados se existir um homeomorfismo

$$h : X \longrightarrow X \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e todo } x \in X$$

$$h(\Phi(n, x)) = \Psi(n, (h(x))).$$

Ou seja, temos que dois sistemas dinâmicos  $\Phi_A$  e  $\Phi_B$  em tempo discreto, gerados pelas matrizes  $A, B \in Gl(d, \mathbb{R})$ , respectivamente, são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo

$$h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

tal que para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  tem-se

$$h(Ax) = B(h(x)).$$

Enunciaremos a seguir uma proposição a fim de introduzir o conceito de norma adaptada para sistemas dinâmicos em tempo discreto.

**Proposição 5.41** Para  $x_{n+1} = Ax_n$ , com  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ , as seguintes propriedades são equivalentes.

1. Existe uma norma  $\|\cdot\|_A$  em  $\mathbb{R}^d$ , chamada de norma adaptada, tal que para algum  $0 < a < 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e para todo  $n \geq 0$ ,

$$\|A^n x\|_A \leq a^n \|x\|_A.$$

2. Para toda norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^d$ , existem  $0 < a < 1$ , e  $c \geq 0$ , tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e para todo  $n \geq 0$ ,

$$\|A^n x\| \leq c \cdot a^n \|x\|.$$

3. Para todo autovalor  $\mu$  de  $A$ , tem-se

$$|\mu| < 1.$$

### Demonstração:

(1)  $\implies$  (2) Em  $\mathbb{R}^d$  duas normas quaisquer são equivalentes. Então dadas em  $\mathbb{R}^d$  duas normas  $\|x\|$  e  $\|x\|_A$ , as mesmas são equivalentes se existem  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$  satisfazendo

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|_A \leq c_2 \|x\|$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Temos assim para  $n \geq 0$

$$\|A^n x\| \leq \frac{1}{c_1} \|A^n x\|_A \leq \frac{1}{c_1} a^n \|x\|_A \leq \frac{c_2}{c_1} \cdot a^n \|x\|.$$

Tomando  $c = \frac{c_2}{c_1}$ , temos pela desigualdade desenvolvida anteriormente que

$$\|A^n x\| \leq c \cdot a^n \|x\|.$$

Provando assim a implicação.

(2)  $\implies$  (3) Como  $a \in (\max |\mu|, 1)$  temos a implicância da estabilidade assintótica, e assim sendo, é equivalente.

(2)  $\implies$  (1) Tome  $b \in (a, 1)$ . Então por hipótese segue que para todo  $n \geq 0$

$$\|A^n x\| \leq c \cdot a^n \|x\| = c \left(\frac{a}{b}\right)^n b^n \|x\|.$$

Logo, existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que  $c \left(\frac{a}{b}\right)^n < 1$  para todo  $n \geq n_0$ , e portanto

$$\|A^n x\| \leq b^n \|x\|.$$

□

Enfatizaremos aqui algumas definições, inclusive a de norma adaptada antes de enunciar e demonstrar o teorema principal desta seção.

**Definição 5.42** *Seja  $X$  um espaço topológico, e  $x, y \in X$ . Um caminho em  $X$  ligando  $x$  a  $y$  é uma aplicação contínua*

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$$

*de modo que  $f(a) = x$  e  $f(b) = y$ . Dizemos que  $X$  é conexo por caminhos se todo par de pontos de  $X$  pode ser ligado por um caminho em  $X$ .*

**Definição 5.43** *Dados  $X$  um espaço topológico, e  $x, y \in X$ , defina a seguinte relação de equivalência:*

$$x \sim_c y \iff \text{existe um caminho em } X \text{ ligando } x \text{ a } y.$$

*As classes de equivalência segundo  $\sim_c$  são chamadas de componentes conexas por caminhos de  $X$ .*

**Observação 5.44** *Embora tenhamos definido componente conexa por caminhos para espaços topológicos, tenha em mente que para o principal resultado desta seção iremos considerar o caminho em  $Gl(d, \mathbb{R})$ , onde os caminhos serão dados via transformação de matrizes.*

Recordemos a definição de norma adaptada.

**Definição 5.45** Para  $x_{n+1} = Ax_n$  com  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$ , existe uma norma  $\|\cdot\|_A$  em  $\mathbb{R}^d$  chamada de norma adaptada para  $A$ , tal que para algum  $0 < a < 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , e para todo  $n \geq 0$ , tem-se

$$\|A^n x\|_A \leq a^n \|x\|_A.$$

**Definição 5.46** A matriz  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$  que satisfaz a condição de norma adaptada, ou equivalentemente,  $|\mu| < 1$  para todos os autovalores de  $A$ , é denominada contração linear.

**Teorema 5.47 (Ponto fixo para contração)** Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma contração linear, então  $A$  possui um único ponto fixo. E mais, sob a ação de iterações de  $A$ , todos os pontos convergem com velocidade exponencial.

**Definição 5.48** A matriz  $A \in Gl(d, \mathbb{R})$  que satisfaz a condição  $|\mu| > 1$  para todos os autovalores de  $A$ , é denominada expansão linear. Consequentemente, todos os autovalores de  $A^{-1}$  possuem módulos menores que 1.

**Definição 5.49** Em termos da norma padrão, uma  $n$ -esfera é definida do seguinte modo:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

enquanto que uma  $n$ -esfera de raio  $r$  é definida como:

$$S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}.$$

**Definição 5.50** Um anel em  $\mathbb{R}^n$  é a região entre duas esferas  $S^{n-1}$  concêntricas de raios distintos.

**Definição 5.51** Seja

$$\begin{aligned} G : V &\longrightarrow U \\ x &\longrightarrow G(x) \end{aligned}$$

uma aplicação afim em  $x$ . Logo, para todo  $x, y \in V$ , e para  $\alpha \in [0, 1]$ , segue que

$$G(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha G(x) + (1 - \alpha)G(y).$$

**Teorema 5.52** *Sejam  $A, B \in Gl(d, \mathbb{R})$  contrações lineares em uma mesma componente conexa por caminho do conjunto de contrações lineares, ou seja, encontramos contrações lineares  $A_t, t \in [0, 1]$ , dependendo continuamente de  $t$ , com  $A_0 = B$  e  $A_1 = A$ . Então os sistemas dinâmicos gerados por  $\Phi_A$  e  $\Phi_B$  são topologicamente conjugados.*

**Demonstração:**

Seja  $A_t, t \in [0, 1]$ , a curva em  $Gl(d, \mathbb{R})$  ligando  $A$  e  $B$ , de modo que  $A_0 = B$  e  $A_1 = A$ . Considerando as normas adaptadas  $\|\cdot\|_A$  e  $\|\cdot\|_B$  correspondentes a  $A$  e  $B$  respectivamente, vamos construir um disco e uma esfera, tanto para a contração  $A$ , quanto para a contração  $B$ .

$$D_A := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_A < 1\} \quad S_A := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_A = 1\},$$

$$D_B := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_B < 1\} \quad S_B := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_B = 1\}.$$

Definamos para  $A$  e  $B$  os seguintes anéis

$$F_A := cl(D_A \setminus AD_A) \quad \text{e} \quad F_B := cl(D_B \setminus BD_B)$$

como sendo os respectivos domínios fundamentais associados aos sistemas dinâmicos. Ou seja, existe um único tempo  $j_A \in \mathbb{Z}$  onde  $A^{j_A}x \in F_A$ , de forma semelhante para  $F_B$ . Verifiquemos então, que de fato isto ocorre.

Com efeito, por definição de norma adaptada, e tendo em vista que  $A$  é uma contração, se  $\|x\|_A > 1$ , então existe  $j \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\|A^{j-1}x\|_A > 1$  e  $\|A^j\|_A \leq 1$  visto que  $A$  é contração, desta forma, pela própria definição do anel temos que  $A^jx \in F_A = cl(D_A \setminus AD_A)$ . Note que devido ao fato de  $A$  ser contração, não existe  $l > j \in \mathbb{N}$  de forma que  $A^l x \in F_A$ .

Perceba que a fronteira externa de  $F_A$  é  $S_A$  (esfera em  $A$  de raio 1), enquanto que a fronteira interna é  $AS_A$ , isto é, a contração de  $S_A$ . O mesmo é verificado para a contração  $B$ .

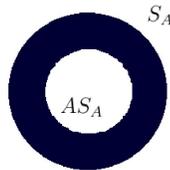


Figure 5.3: Fronteiras externa e interna de  $F_A$ .

Vamos construir uma conjugação (homeomorfismo)

$$h_0 : F_A \longrightarrow F_B \text{ onde } h_0(Ax) = Bh_0(x), x \in F_A,$$

para que posteriormente possamos estender para todo o espaço estado  $\mathbb{R}^d$ .

A ideia de  $h_0$  é levar a fronteira externa de  $F_A$  na fronteira externa de  $F_B$ , e de modo semelhante, levar a fronteira interna de  $F_A$  na fronteira interna de  $F_B$ . Para o caso das fronteiras externas  $h_0$  será a projeção radial de  $S_A$  em  $S_B$ .

Para o caso de fronteira interna a construção será um pouco mais complexa, porém significativa para o contexto de conjugação.

Antes de prosseguir, e embora já explicado anteriormente iremos reforçar como se dá cada fronteira.

$$\partial_{ext}F_A = S_A \text{ e } \partial_{int}F_A = AS_A,$$

$$\partial_{ext}F_B = S_B \text{ e } \partial_{int}F_B = BS_B.$$

Enfatizado assim tais notações, conseguiremos prosseguir. Tomando  $x \in \partial_{int}F_A \implies A^{-1}x \in A^{-1}(\partial_{int}F_A) = A^{-1}(A\partial_{ext}F_A) = \partial_{ext}F_A$ . Feito isto, projetaremos de forma radial o  $A^{-1}x$ , e este cairá em  $\partial_{ext}F_B = S_B$ . A este elemento apliquemos  $B$ , e por sua vez cairá em  $\partial_{int}F_B$ , visto que  $B(\partial_{ext}F_B) = \partial_{int}F_B$ .

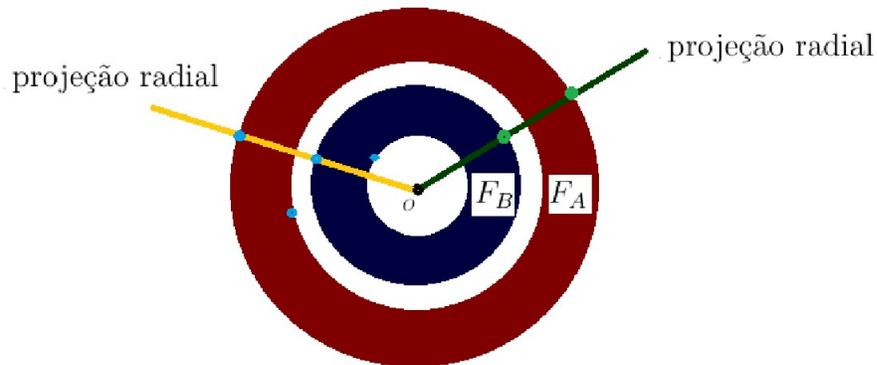


Figure 5.4: Construção de  $h_0$ .

Portanto, fica fácil ver que  $h_0$  se torna uma conjugação. E mais ainda, essa construção separa a componente radial, da componente angular em  $S^{d-1}$ .

Seja  $S^{d-1}$  a esfera em  $\mathbb{R}^d$  cujo raio é igual a 1 na norma canônica, uma vez que para as normas  $\|\cdot\|_A$  e  $\|\cdot\|_B$  o raio não precisa necessariamente ser igual a 1.

Defina por  $h_A$  a aplicação do cilindro  $[0, 1] \times S^{d-1}$  no anel  $F_A$ , e de forma análoga, defina por  $h_B$  a aplicação do cilindro  $[0, 1] \times S^{d-1}$  no anel  $F_B$ .

Prosseguindo, defina  $H : [0, 1] \times S^{d-1} \longrightarrow [0, 1] \times S^{d-1}$ . Vejamos o diagrama seguinte:

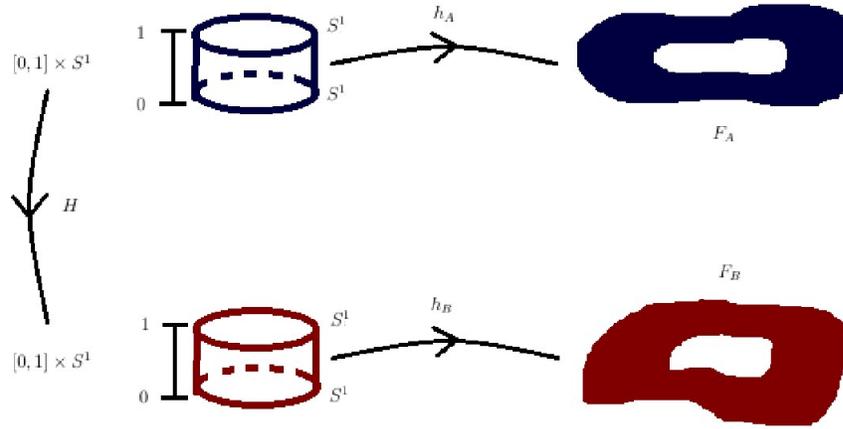


Figure 5.5: Diagrama explicativo das aplicações  $h_A$ ,  $h_B$  e  $H$ .

Note que  $H$  foi definida usando o caminho de  $B$  ate  $A$ . Neste momento, os valores de  $t$  são preservados, a modo que para os valores  $S^{d-1}$  usamos  $A_t A^{-1}$ . Devido ao fato de  $A_0 = B$  e  $A_1 = A$ , temos que o ponto  $(0, x) \in [0, 1] \times S^{d-1}$  é levado em  $(0, A_0 A^{-1} x) = (0, B A^{-1} x)$ , e o ponto  $(1, x) \in [0, 1] \times S^{d-1}$  é levado em  $(1, A A^{-1}) = (1, x)$ . De forma consequente, conseguimos perceber que  $H|_{\{1\} \times S^{d-1}} = Id$ .

Sendo mais rigorosos, defina as aplicações  $\tau_A$  e  $h_A$  do seguinte modo:

$$\tau_A : [0, 1] \times S^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad h_A : [0, 1] \times S^{d-1} \longrightarrow F_A.$$

por

$$h_A(t, x) = \tau_A(t, x) \cdot x,$$

onde  $\tau_A$  é uma aplicação a fim em  $t$ , dada por

$$\begin{cases} \tau_A(1, x) = \|x\|_A^{-1} \\ \tau_A(0, x) = \frac{1}{\|A^{-1}x\|_A} \end{cases}$$

Perceba que  $\|x\|_A$  com  $x \in S^{d-1}$  não é necessariamente 1.

Note como  $h_A$  se comporta nos pontos  $(1, x)$  e  $(0, x)$ , em que o primeiro encontra-se no topo do cilindro, e o segundo na base do mesmo.

$$h_A(1, x) = \tau_A(1, x) \cdot x = \frac{x}{\|x\|_A} \in S_A = \partial_{ext}F_A,$$

$$\begin{aligned} h_A(0, x) &= \tau_A(0, x) \cdot x \\ &= x \cdot \|A^{-1}x\|_A \\ &= AA^{-1}x \|A^{-1}x\|_A \\ &= A \left( \frac{A^{-1}x}{\|A^{-1}x\|_A} \right) \in AS_A \\ &= A(\partial_{ext}F_A) \\ &= \partial_{int}F_A. \end{aligned}$$

Ou seja, percebemos que  $h_A(1, x)$  leva os pontos do topo do cilindro na  $\partial_{ext}F_A$ , enquanto que  $h_A(0, x)$  leva os ponto da base do cilindro na  $\partial_{int}F_A$ .

Tendo a aplicação como característica  $\tau_A$  ser afim  $t$ , para  $t \in [0, 1]$  segue que

$$\begin{aligned} \tau_A(t, x) &= \tau_A(t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 0, x) \\ &= t \cdot \tau_A(1, x) + (1 - t)\tau_A(0, x) \\ &= \frac{t}{\|x\|_A} + \frac{1 - t}{\|A^{-1}x\|_A}. \end{aligned}$$

Prosseguindo, desta forma, para  $y \in S_A$  e  $x = \frac{Ay}{\|Ay\|_A}$  somos capazes de definir neste momento a aplicação  $h_A$  nos pontos não pertencentes a base e ao topo do cilindro. Segue

então que

$$\begin{aligned}
 h_A(0, x) &= h_A\left(0, \frac{Ay}{\|Ay\|}\right) \\
 &= A\left(\frac{A^{-1} \cdot \frac{Ay}{\|Ay\|}}{\left\|A^{-1} \cdot \frac{Ay}{\|Ay\|}\right\|_A}\right) \\
 &= \frac{\frac{Ay}{\|Ay\|}}{\left\|\frac{y}{\|Ay\|}\right\|_A} \\
 &= \frac{\frac{Ay}{\|Ay\|}}{\frac{\|y\|_A}{\|Ay\|}} \\
 &= \frac{Ay \cdot \|Ay\|}{\|Ay\| \cdot \|y\|_A} \\
 &= \frac{Ay}{\|y\|_A} \\
 &= Ay \in S_A.
 \end{aligned}$$

Definimos a aplicação  $h_A^{-1}$  da seguinte forma:

$$h_A^{-1}(Ay) = \left(0, \frac{Ay}{\|Ay\|}\right).$$

Perceba que  $h_A$  é uma bijeção.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 h_A \circ h_A^{-1}(Ay) &= h_A\left(0, \frac{Ay}{\|Ay\|}\right) \\
 &= Ay.
 \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
 h_A^{-1} \circ h(x) &= h_A^{-1}(Ay) \\
 &= \frac{Ay}{\|Ay\|} \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

De modo análogo, definimos as seguintes aplicações  $\tau_B$  e  $h_B$  do seguinte modo:

$$\tau_B : [0, 1] \times S^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad h_B : [0, 1] \times S^{d-1} \longrightarrow F_B.$$

por

$$h_B(t, x) = \tau_B(t, x) \cdot x,$$

onde  $\tau_B$  é uma aplicação a fim em  $t$ , dada por

$$\begin{cases} \tau_B(1, x) = \|x\|_B^{-1} \\ \tau_B(0, x) = \frac{1}{\|B^{-1}x\|_B} \end{cases}$$

Assim, podemos obter

$$h_B\left(0, \frac{Bx}{\|Bx\|}\right) = \frac{Bx}{\|x\|_B} \quad \text{e} \quad h_B\left(1, \frac{Bx}{\|Bx\|}\right) = \frac{x}{\|x\|_B}.$$

Neste momento, usaremos o caminho  $A_t$  que liga a matriz  $B$  na matriz  $A$ , com  $A_0 = B$  e  $A_1 = A$ , com o intuito de construir uma aplicação

$$H : [0, 1] \times S^{d-1} \longrightarrow [0, 1] \times S^{d-1}$$

de modo que o raio seja preservado, e o ângulo em  $S^{d-1}$  varie continuamente.

Definamos então

$$H(t, x) := \left(t, \frac{A_t A^{-1}x}{\|A_t A^{-1}x\|}\right),$$

e assim, para  $x \in S^{d-1}$  segue que

$$\begin{aligned} H(1, x) &= (1, x) \text{ visto que } A_1 = A \text{ e } \|x\| = 1, \\ H(0, x) &= \left(0, \frac{BA^{-1}x}{\|BA^{-1}x\|}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$H\left(0, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \left(0, \frac{Bx}{\|Bx\|}\right).$$

Com isto posto, podemos definir rigorosamente a aplicação

$$h_0 : F_A \longrightarrow F_B, \quad \text{onde } h_0 := h_B \circ H \circ h_A^{-1}.$$

Note que claramente a aplicação  $h_0$  é injetora, uma vez que é composição de aplicações injetoras. E mais,  $h_0$  é uma conjugação, ou seja,  $Bh_0(x) = h_0(Ax)$ .

De fato, tomemos  $x \in F_A$ , o que por sua vez implica que  $Ax \in F_A$ , e em particular  $x \in S_A$ . Conseguimos então assim, a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} Bh_0(x) &= h_B \circ H \circ h_A^{-1}(x) \\ &= h_B \circ H \circ \left(1, \frac{x}{\|x\|}\right) \\ &= \frac{Bx}{\|x\|_B} \end{aligned}$$

Calculemos

$$\begin{aligned} h_0(Ax) &= h_B \circ H \circ h_A^{-1}(Ax) \\ &= h_B \circ H \circ \left(0, \frac{Ay}{\|Ay\|}\right) \\ &= h_B \left(0, \frac{Bx}{\|Bx\|}\right) \\ &= \frac{Bx}{\|x\|_B} \\ &= Bh_0(x). \end{aligned}$$

Ficando assim provada a conjugação de  $h_0(Ax) = Bh_0(x)$ .

Feito todo este processo, nosso objetivo é estender  $h_0$  para todo o  $\mathbb{R}^d$  por meio de uma conjugação  $h$ . Definamos então  $h$  da seguinte forma:

$$h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

onde para  $j(x) \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} h(0) := 0 & \text{para } x = 0, \\ h(x) := B^{-j(x)}h_0(A^{j(x)}(x)) & \text{para } x \neq 0. \end{cases}$$

Note que aqui  $j(x) \in \mathbb{N}$  é definido com o intuito de satisfazer  $A^{j(x)}x \in F_A$ .

Analisemos os dois casos abaixo a priori.

$$\text{Se } A^j x \in F_A \text{ e } A^{j+1} x \in F_A \implies \underbrace{h_0(A^j x)}_* = B^j(h_0(x)) \text{ e } \underbrace{h_0(A^{j+1} x)}_{**} = B^{j+1}(h_0(x)).$$

Em relação a igualdade (\*\*) conseguimos construir

$$B^{-j-1}h_0(A^{j+1}x) = h_0(x), \quad (5.12)$$

enquanto que pela igualdade (\*) construímos que

$$h_0(x) = B^{-j}h_0(A^jx). \quad (5.13)$$

Juntando (5.12) e (5.13) temos:

$$\begin{aligned} B^{-j-1}h_0(A^{j+1}x) &= B^{-j}h_0(A^jx) \\ &= B^{-j}B^{-1}Bh_0(A^jx) \\ &= B^{-j-1}Bh_0(A^jx). \end{aligned}$$

Portanto, se  $j$  e  $j+1$  são tais que  $A^jx \in F_A$  e  $A^{j+1}x \in F_A$ , implica que  $B^{-j}h_0(A^jx) = B^{-(j+1)}h_0(A^{j+1}x)$ . Tendo em vista que  $A$  e  $B$  são contrações, temos que se  $j$  e  $j+l$  são tais que  $A^jx \in F_A$  e  $A^{j+l}x \in F_A$ , teremos que  $A^{j+1}x, A^{j+2}x, \dots, A^{j+l-1}x \in F_A$ . Então temos que se  $j$  e  $j+l$  são tais que  $A^jx \in F_A$  e  $A^{j+l}x \in F_A \implies B^{-j}h_0(A^jx) = B^{-(j+l)}h_0(A^{j+l}x)$ .

Assim, temos que a aplicação  $h$  está bem definida.

Verifiquemos se  $h$  é contínua em todo  $\mathbb{R}^d$ . Da forma pela a qual construímos  $h$ , a mesma é claramente contínua em  $\mathbb{R}^d \setminus 0$ , restando-nos assim, mostrar que  $h$  também é contínua em 0.

Perceba que se  $x \rightarrow -\infty \implies j(x_n) \rightarrow -\infty$ . Como  $B^{-1}$  é uma expansão linear e  $\|h_0(A^{j(x_n)}x_n)\|_B \leq 1$  devido ao fato de  $A^{j(x_n)}x_n \in F_A \implies h_0(A^{j(x_n)}x_n) \in F_B$ , e como  $\|z\|_B \leq 1$  para  $z \in F_B \implies h_0(A^{j(x_n)}x_n)$  é uma sequência limitada.

E mais, temos que  $h(x_n) = B^{-j(x_n)}h_0(A^{j(x_n)}x_n) \rightarrow 0$ , dado que  $h(x_n)$  é produto de uma sequência contrativa  $(B^{-j(x_n)})$  convergindo para zero, uma vez que  $j(x_n) \rightarrow -\infty$ , aplicado em algo que é limitado. Assim, segue que  $h(x_n) \rightarrow 0$ .

De modo análogo, trocando  $A$  por  $B$  temos que  $h^{-1}$  também é continua.

Em síntese, provamos que de fato  $h$  é uma aplicação contínua, concluindo assim, a demonstração do nosso teorema.

□

## 5.4 Classificação de Sistemas Dinâmicos no caso de grupos de Lie Nilpotentes

Nesta última seção estudamos alguns resultados do artigo [KRS]. A saber, estudamos a classificação de sistemas contínuos, com abordagem semelhante à usada nas seções anteriores, mas com o espaço estado sendo grupos de Lie de matrizes nilpotentes no lugar dos espaços euclidianos. Ou seja, estudamos conjugação topológica de fluxos em grupos de Lie (de matrizes) nilpotentes usando o método do domínio fundamental. Mostramos que em grupos de Lie nilpotentes (e abelianos) simplesmente conexos quaisquer dois fluxos são topologicamente conjugados. Veremos que o domínio fundamental aqui será um hiperplano no lugar de uma esfera e um anel, usados nos Teoremas 5.36 e 5.52 respectivamente.

Começamos tomando uma variedade diferenciável  $M$  e denotando por  $\mathfrak{X}(M)$  o espaço vetorial de todos os campos diferenciáveis em  $M$ . Seja também  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$  campos vetoriais completos e  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  seus fluxos associados.

No caso de grupos de Lie, consideraremos campos vetoriais invariantes à esquerda. Ou melhor, estudaremos aqueles que são dados por combinações de fluxos originados da exponencial de elementos da álgebra de Lie (correspondente ao grupo de Lie).

Agora mostraremos que a existência de domínios fundamentais homeomorfos nos garante conjugação topológica num contexto bem geral. Note que a demonstração é uma generalização das demonstrações dos Teoremas 5.36 e 5.52.

**Teorema 5.53** *Sejam  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2$  fluxos em um espaço topológico  $M$  com domínios fundamentais  $(Z_i, \tau_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Suponha que  $Z_1$  é homeomorfo a  $Z_2$ . Então  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são topologicamente conjugados.*

**Demonstração:** Defina  $h : M \rightarrow M$  por  $h(x) := \Phi_2(-\tau_1(x), h_0(\Phi_1(\tau_1(x), x)))$ , onde  $h_0 : Z_1 \rightarrow Z_2$  é um homeomorfismo. Provaremos que  $h$  é uma conjugação topológica.

Primeiro provaremos a propriedade de conjugar. Para isso note que se  $x \in M$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e  $s = \tau_1(\Phi_1(t, x))$ , então  $\Phi_1(s, \Phi_1(t, x)) = \Phi_1(s + t, x) \in Z_1$ . Isso implica  $s + t = \tau_1(x)$ ,

assim  $s = \tau_1(\Phi_1(t, x)) = \tau_1(x) - t$ . Com isso podemos provar a conjugação, de fato

$$\begin{aligned}
h(\Phi_1(t, x)) &= \Phi_2(-\tau_1(\Phi_1(t, x)), h_0(\Phi_1(\tau_1(\Phi_1(t, x)), \Phi_1(t, x)))) \\
&= \Phi_2(t - \tau_1(x), h_0(\Phi_1(\tau_1(x) - t, \Phi_1(t, x)))) \\
&= \Phi_2(t - \tau_1(x), h_0(\Phi_1(\tau_1(x), x))) \\
&= \Phi_2(t, \Phi_2(-\tau_1(x), h_0(\Phi_1(\tau_1(x), x)))) = \Phi_2(t, h(x)).
\end{aligned}$$

Veremos a propriedade de homeomorfismo. Para ver que  $h$  é injetora, suponha que  $h(x_1) = h(x_2)$ . Tome  $\tau := \tau_1(x_1)$ . Nesse caso

$$h(\Phi_1(\tau, x_1)) = \Phi_2(\tau, h(x_1)) = \Phi_2(\tau, h(x_2)) = h(\Phi_1(\tau, x_2)).$$

Assim

$$h(\Phi_1(\tau, x_1)) = h(\Phi_1(\tau, x_2)) \in Z_2, \text{ visto que } \Phi_1(\tau, x_1) \in Z_1 \text{ e } h(Z_1) = Z_2.$$

Como  $h$  leva apenas  $Z_1$  em  $Z_2$ , temos que  $\Phi_1(\tau, x_2) \in Z_1$ . Então, pela unicidade  $\tau = \tau_1(x_1) = \tau_1(x_2)$ . Usando

$$h_0(\Phi_1(\tau, x_1)) = h(\Phi_1(\tau, x_1)) = h(\Phi_1(\tau, x_2)) = h_0(\Phi_1(\tau, x_2))$$

e sabendo que  $h_0$  é injetora, temos

$$\Phi_1(\tau, x_1) = \Phi_1(\tau, x_2), \text{ therefore } x_1 = x_2.$$

Para mostrar que  $h$  é sobrejetora, tome  $y \in M$ . Então  $\Phi_2(\tau_2(y), y) \in Z_2$ . Assim, existe  $z \in Z_1$  tal que  $h_0(z) = \Phi_2(\tau_2(y), y)$ . Seja  $x := \Phi_1(-\tau_2(y), z)$ . Usando o fato que  $\tau_1(x) = \tau_2(y)$ , não é difícil provar que  $h(x) = y$ .

Além disso note que  $h$  é contínua por ser composição de funções contínuas. Por fim, trocando a posição de  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  vemos que  $h^{-1}$  também é contínua  $\square$

Sejam  $M$  e  $P$  espaços topológicos e  $\pi : M \times P \rightarrow M$  a projeção canônica. Se  $\Phi$  é um fluxo em  $M \times P$ , o qual é semiconjugado ao fluxo  $\tilde{\Phi}$  em  $M$  via a aplicação  $\pi$ , então o domínio fundamental de  $\tilde{\Phi}$  pode ser levantado a um domínio fundamental de  $\Phi$ . Implicando no seguinte resultado:

**Corolário 5.54** *Sejam  $M$  e  $P$  espaços topológicos e  $\pi : M \times P \rightarrow M$  a projeção canônica. Assuma que  $\tilde{\Phi}_1$  e  $\tilde{\Phi}_2$  são fluxos em  $M$ , e  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  fluxos em  $M \times P$  da que o diagrama dado por  $\Phi_i(t, \cdot) : M \times P \rightarrow M \times P$ ,  $\pi : M \times P \rightarrow M$  e  $\tilde{\Phi}_i(t, \cdot) : M \rightarrow M$ , commuta para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Suponha que existam domínios fundamentais  $(\tilde{W}_i, \tilde{\tau}_i)$  para os fluxos  $\tilde{\Phi}_i$  tal que  $\tilde{W}_1$  é homeomorfo á  $\tilde{W}_2$ . Então  $\Phi_1$  é topologicamente conjugado á  $\Phi_2$ .*

**Demonstração:** Denote por  $\tilde{h} : \tilde{W}_1 \rightarrow \tilde{W}_2$  o homeomorfismo entre os domínios fundamentais e seja  $W_i := \pi^{-1}(\tilde{W}_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Então define

$$h : W_1 \rightarrow W_2, \quad h(x, y) := \left( \tilde{h}(x), y \right).$$

É claro que  $h$  é um homeomorfismo. Defina  $\tau_i : M \times P \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\tau_i := \tilde{\tau}_i \circ \pi$ ,  $i = 1, 2$ . Assim

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, (x, y)) \in W_i &\Leftrightarrow \pi(\Phi_i(t, (x, y))) \in \tilde{W}_i \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Phi}_i(t, x) \in \tilde{W}_i \\ &\Leftrightarrow t = \tilde{\tau}_i(x) = \tilde{\tau}_i(\pi(x, y)) = \tau_i(x, y). \end{aligned}$$

Isso prova que  $(W_i, \tau_i)$  é um domínio fundamental para  $\Phi_i$ , como queríamos provar.  $\square$

### 5.4.1 Caso nilpotente

Começamos recordando alguns fatos e notações de álgebras e grupos de Lie necessários para esta seção. Para mais detalhes ver o livro [SM].

Denote por  $G$  um grupo de Lie conexo e não compacto e seja  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie, i.e., o espaço tangente à  $G$  no elemento identidade  $e \in G$ ,  $T_e G$ . Recorde que se considerarmos o conjunto  $\mathfrak{X}^d(G)$  dos campos vetoriais invariantes á direita em  $G$  com o colchete de Lie dos campos vetoriais, então  $\mathfrak{X}^d(G)$  pode ser identificado com  $T_e G$ .

Considere um campo vetorial invariante a direita  $X$  em  $G$  e seja  $\Phi_t$  seu fluxo, ou seja, a solução da equação diferencial  $\dot{g} = X(g)$ . Então  $X$  é um campo vetorial completo, i.e., todas soluções  $\Phi_t(g)$  se estendem para todo  $t \in \mathbb{R}$ . A partir destas trajetórias nós definimos a aplicação exponencial  $\exp(tX) = \Phi_t(e)$  e obtemos que  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  é um difeomorfismo entre uma vizinhança  $0 \in \mathfrak{g}$  e uma vizinhança de  $e \in G$ .

Seja  $N$  um grupo de Lie nilpotente simplesmente conexo. Na seção 10.2 de [SM] é mostrado que  $N$  é isomorfo à sua álgebra de Lie  $\mathfrak{n}$ , via aplicação exponencial, considerando  $\mathfrak{n}$  com o produto de Campbell-Hausdorff. Os primeiros termos deste produto são dados da seguinte forma, tome  $X, Y \in \mathfrak{n}$ , então o produto de Campbell-Hausdorff de  $X$  com  $Y$  é

$$X * Y = X + Y + R_2 + R_3 + \cdots + R_k,$$

onde  $R_i$  é dado pelos colchetes  $X, Y$  e  $R_i \in \mathfrak{n}^i$ , onde  $0 = \mathfrak{n}^{k+1} \subset \mathfrak{n}^k \subset \cdots \subset \mathfrak{n}^2 \subset \mathfrak{n}$  é a série central descendente de  $\mathfrak{n}$ .

Identificando  $N$  com  $(\mathfrak{n}, *)$  via exponencial, o fluxo  $\Phi(t, X)$  associado à  $A \in \mathfrak{n}$  passando por um ponto  $X \in \mathfrak{n}$  é a aplicação  $\Phi(t, X) = tA * X$ , onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $X \in \mathfrak{n}$ .

No resultado a seguir, vamos mostrar que se  $A \in \mathfrak{n}$  é não nulo então existe um domínio fundamental em  $N$  para o fluxo de  $A$ .

**Proposição 5.55** *Em um grupo de Lie  $N$  nilpotente e simplesmente conexo, cada fluxo induzido por um elemento não nulo da correspondente álgebra de Lie  $\mathfrak{n}$  tem um domínio fundamental.*

**Demonstração:**

Tome  $A \in \mathfrak{n}$  com  $A \neq 0$ . Vamos mostrar que existe um domínio fundamental em  $\mathfrak{n}$  de  $\Phi(t, X) = tA * X$ . De fato, tome  $j$  um inteiro positivo tal que  $A \in \mathfrak{n}^j$  mas  $A \notin \mathfrak{n}^{j+1}$ . Considere um hiperplano  $h$  de  $\mathfrak{n}$  contendo  $\mathfrak{n}^{j+1}$  e tal que  $A \notin h$ . Se  $X \in \mathfrak{n}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e sabendo que  $A \in \mathfrak{n}^j$  segue que qualquer colchete de  $tA$  e  $X$  está contido em  $\mathfrak{n}^{j+1} \subset h$ . Assim,  $tA * X \in h$  se e somente se  $tA + X \in h$ . Como  $h$  é um hiperplano que não contém  $A$ , existe um único  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $tA + X \in h$ . Agora defina  $\tau : \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\tau(X) = t$  se e somente se  $tA + X \in h$ . Como  $\tau$  é contínua temos que  $(h, \tau)$  é um domínio fundamental do fluxo induzido por  $A$ . □

**Teorema 5.56** *Quaisquer dois fluxos em um grupo de Lie nilpotente simplesmente conexo  $N$  induzidos por elementos não nulos da álgebra de Lie são topologicamente conjugados.*

**Demonstração:** Sejam  $A$  e  $B$  dois campos de vetores não nulos em  $N$ . Seleccionemos dois domínios fundamentais  $h_A$  e  $h_B$  de  $\mathfrak{n}$  que sejam respectivamente transversais aos

campos  $A$  e  $B$ . Como  $h_A$  e  $h_B$  são homeomorfos, na verdade são isomorfos, então o resultado segue do Teorema 5.53.  $\square$

Observe que o caso abeliano é consequência imediata deste resultado.

**Corolário 5.57** *Quaisquer dois fluxos em um grupo de Lie abeliano simplesmente conexo induzidos por elementos não nulos da álgebra de Lie são topologicamente conjugados.*

Se o grupo nilpotente não for simplesmente conexo o resultado acima não vale, i. e., dois fluxos não são necessariamente topologicamente conjugados, como vemos no exemplo abaixo.

**Exemplo 5.58** *Considere o toro bidimensional  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  e um elemento  $A = (a_1, a_2)$  de sua álgebra de Lie  $\mathbb{R}^2$ . O correspondente fluxo é*

$$\varphi(t, X + \mathbb{Z}^2) = tA + X + \mathbb{Z}^2.$$

*Se  $A = (1, 1)$ , então cada ponto  $X + \mathbb{Z}^2 \in T^2$  é 1-periódico. Se  $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , então cada ponto é 2-periódico, e se  $A = (1, \sqrt{2})$ , nenhum ponto é periódico. Desde que conjugação topológica leva órbitas periódicas em órbitas periódicas, preservando o período, fica demonstrado a afirmação.*

# Bibliography

- [ACK] AYALA, V.; COLONIUS, F.; KLIEMANN, W.; *On Topological Equivalence of Linear Flows with Applications to Bilinear Control Systems*, J. Dynam. Control Systems 13 (2007), pp. 337-362.
- [CK] COLONIUS, F.; KLIEMANN, W.; *Dynamical Systems and Linear Algebra*. Graduate Studies in Mathematics; volume 158. American Mathematical Society (2014).
- [CS] COLONIUS, F.; SANTANA, A. J.; *Stability and Topological Conjugacy for Affine Differential Equations*, Bol. Soc. Parana. Mat. 26 (2009), pp. 141–151.
- [CS2] COLONIUS, F.; SANTANA, A. J.; *Topological Conjugacy for Affine-Linear Flows and Control Systems*, Communications on Pure and Applied Analysis 10, (2001), pp. 847–857.
- [HSD] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L.; *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier, London, (2004).
- [HK] HOFFMAN, K.; KUNZE, R.; *Álgebra Linear*. Editora Polígono S. A. (1971).
- [KH] KATOC, A.; HASSELBLATT, B.; *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, 1st Edition, Cambridge University Press, Cambridge, (1996).
- [KRS] KAWAN, C.; ROCIO, O.G.; SANTANA, A. J. *On topological conjugacy of left invariant flows on semisimple and affine Lie groups*, Proyecciones, Chile, v. 30, n. 2, (2011) pp. 175-188.
- [EL] LIMA, E. L.; *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária - 9 ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (2018).

- [MS] MOSKOWITZ, M.; SACKSTEDER, R.; *The Exponential Map and Differential Equations on Real Lie Groups*, Journal of Lie Theory 13 (2003), pp. 291–306.
- [AR] OLIVEIRA, A. R.; *Conjugação Topológica de Fluxos*. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Estadual de Maringá - UEM (2011).
- [CR] ROBINSON, C.; *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, 2nd Edition, CRC Press, London, (1999).
- [RSV] ROCIO, O. G.; SANTANA, A. J.; VERDE, M. A.; *Semigroups of Affine Groups, Controllability of Affine Systems and Affine Bilinear Systems in  $Sl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$* , SIAM J. Control Optim. 48 (2009), pp. 1080–1088.
- [SM] SAN MARTIN, L.A.B.; *Grupos de Lie*, Editora da Unicamp (2009).
- [SW] WIGGINS, S.; *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2 ed. Springer (2003).