

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MAURÍCIO BARBOSA DA SILVA

## **Sobre a estabilidade exponencial de dois modelos viscoelásticos<sup>1</sup>**

Maringá

2024

---

<sup>1</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

MAURÍCIO BARBOSA DA SILVA

## **Sobre a estabilidade exponencial de dois modelos viscoelásticos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Maringá

2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)**

S586s Silva, Maurício Barbosa da  
Sobre a estabilidade exponencial de dois modelos viscoelásticos / Maurício Barbosa da Silva. -- Maringá, 2024.  
76 f. : il. color.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Valéria Neves Domingos Cavalcanti.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2024.

1. Moore-Gibson-Thompson - Equação de. 2. Núcleo de memória. 3. Sistemas de Timoshenko. 4. Memory kernel. I. Cavalcanti, Valéria Neves Domingos, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

# **MAURÍCIO BARBOSA DA SILVA**

## **SOBRE A ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE DOIS MODELOS VISCOELÁSTICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

### **COMISSÃO JULGADORA:**

Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti - UEM (Presidente)

Profa. Dra. María Rosario Astudillo Rojas - UFPR

Profa. Dra. Janaína Pedroso Zanchetta - UNESP / Ilha Solteira

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins - UEM

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria - UEM

Aprovada em: 24 de janeiro de 2024.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (<https://meet.google.com/ced-goga-xph>)

---

## Agradecimentos

---

Muito obrigado, minha querida Orientadora, Professora Valéria Neves Domingos Cavalcanti, por me dar a chance de percorrer essa jornada até o título de Doutor, utilizando todo seu caminhão de paciência comigo. Agradeço muito, professora, por toda ajuda, companhia e amizade nessa trajetória.

Obrigado ao querido Professor Eduardo Henrique Gomes Tavares, pela coorientação e contribuições valiosas para a produção deste trabalho. Obrigado, querido amigo e irmão, por ter aparecido e oferecido ajuda nos momentos mais delicados.

Obrigado, Nágela Martins, pelo apoio e carinho em todos os momentos, principalmente naqueles decisivos, e por acreditar em mim quando eu não acreditei.

Obrigado a todos os membros da minha família, meu pai Gilberto, minha mãe Conceição e meu irmão Mateus, pelo apoio e incentivo durante todos esses anos de estudo. Essa conquista é de toda nossa linda família!

Obrigado a todos os meus familiares, amigos e professores que colaboraram de alguma forma com essa conquista que, embora não citados aqui, estão guardados com muito respeito e carinho em minha memória.

Obrigado CAPES, pelo apoio financeiro, essencial para a produção deste trabalho.

A todos, muito obrigado!

---

## Resumo

---

Alguns fenômenos temporais podem ser modelados por meio de equações diferenciais parciais de evolução. Para estudar a estabilidade desses fenômenos, é importante que o modelo apresente mecanismos de amortecimento, sejam eles inseridos de forma externa ou advindos do material de referência. Nesta tese estudaremos duas equações diferenciais parciais de evolução cujos mecanismos de amortecimento são dados por termos de memória. O primeiro problema abordado é uma equação semilinear de Moore-Gibson-Thompson (MGT) sujeita à efeitos viscoelásticos a qual pode ser deduzida a partir da equação MGT original considerando um termo de relaxação molecular [16]. O segundo problema a ser considerado, descreve o comportamento das vibrações de uma viga composta de material viscoelástico sob as hipóteses de Timoshenko [68, 69]. Neste caso, os termos de memória agem tanto na força de cisalhamento, quanto no momento fletor e podem ser implementados no sistema de Timoshenko por meio da teoria de viscoelasticidade linear proposta por Boltzmann [6, 7]. Por essa razão, chamaremos esse sistema de Timoshenko-Boltzmann.

**Palavras-Chave:** Equação MGT; Núcleo de memória; Sistema de Timoshenko.

---

## Abstract

---

Some temporal phenomena can be modeled using evolutionary partial differential equations. To study the stability of these phenomena, the model should be subjected damping mechanisms, whether they come from an external force or they come from the material. In this thesis, we study two evolutionary PDEs whose damping mechanisms are given by memory terms. The first problem is a semilinear Moore-Gibson-Thompson (MGT) equation in the presence of a memory, then which can be deduced from the original MGT by considering a molecular relaxation term [16]. The second one describes the behavior of vibrations of a beam composed by viscoelastic material under Timoshenko's hypotheses [68, 69]. In this case, the memory terms act on both shear force and bending moment and they can be implemented in Timoshenko systems through the linear viscoelasticity theory proposed by Boltzmann [6, 7]. For this reason, this system is called Timoshenko-Boltzmann system.

**Key-words:** MGT equation; Memory kernel; Timoshenko system.

---

# Sumário

---

Resumo . . . . .	iv
Abstract . . . . .	v
<b>Introdução</b>	<b>2</b>
O modelo de Moore-Gibson-Thompson . . . . .	2
Estado da arte . . . . .	3
O modelo . . . . .	6
Organização e principais contribuições . . . . .	7
O modelo de Timoshenko . . . . .	7
<b>1 Resultados preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Análise funcional . . . . .	12
1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$ . . . . .	14
1.3 Os Espaços de Sobolev . . . . .	15
1.3.1 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	17
1.3.2 Espaços com Peso . . . . .	18
1.4 Teoria de semigrupos . . . . .	19
<b>2 Uma equação de Moore-Gibson-Thompson semilinear</b>	<b>23</b>
2.1 O modelo . . . . .	23
2.2 Existência e unicidade de solução . . . . .	25
2.3 Estabilidade exponencial . . . . .	34
2.3.1 Estimativas técnicas . . . . .	35
2.3.2 Demonstração do Teorema 2.4 . . . . .	41
2.4 Observações adicionais . . . . .	45
2.4.1 Estabilidade para MGT com memória tipo 3: caso crítico . . . . .	45
2.4.2 Boa colocação e estabilidade em $\tilde{\mathbb{H}}_j$ . . . . .	46
<b>3 Um modelo de Timoshenko-Boltzmann completamente dissipativo</b>	<b>49</b>
3.1 Existência e unicidade de solução . . . . .	50
3.2 Estabilidade uniforme . . . . .	58



3.2.1	Estimativas técnicas para a equação resolvente . . . . .	58
3.2.2	Prova do Teorema 3.15: Necessidade . . . . .	69
	<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>

---

# Introdução

---

Neste trabalho estudamos dois modelos de evolução sujeitos à efeitos viscoelásticos dados pelos termos de memória. Discorremos a seguir os modelos estudados.

## O modelo de Moore-Gibson-Thompson

O estudo de propagação de ondas acústicas não lineares tem atraído a atenção de muitos pesquisadores e esse modelo tem um grande número de aplicações na medicina e indústria, onde é usado ultrassom de alta intensidade.

A equação de Kuznetsov, equação de Westervelt e equação de KZK são exemplos clássicos de equações de segunda ordem no tempo que modelam efeitos acústicos não lineares com amortecimento do tipo viscoelástico. Esses modelos usam a clássica lei de Fourier que resulta no paradoxo da velocidade com propagação infinita. Para contornar esse problema, o Matemático italiano Carlo Cattaneo introduziu o tempo característico de relaxamento térmico e o modelo resultante é à equação de terceira ordem no tempo

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} - c^2 \Delta u - b \Delta u_t = \partial_{tt} \left( \frac{\xi}{c^2} u^2 \right). \quad (1)$$

A idéia norteadora é que quantidades físicas, como fluxos termodinâmicos, normalmente dados por relações constitutivas, são governados por equações de evolução com um tempo de relaxação adequado. Em (1),  $u$  denota o potencial de velocidade acústica,  $\tau$  é uma constante positiva relacionada ao tempo necessário para atingir a estabilidade termodinâmica que depende do material considerado,  $\alpha > 0$  está relacionada à viscosidade do fluido,  $c > 0$  é a velocidade do som,  $b = \delta + \sigma c^2$ ,  $\delta$  é a difusividade do som e  $\xi$  é um parâmetro de não linearidade (ver Jordan [40]). A equação acima é denominada de equação MGT (Moore-Gibson-Thompson). Veja [66] para um estudo pioneiro envolvendo a versão linear de (1).

Em uma formulação abstrata, a equação MGT se reduz à equação

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 A u + b A u_t + f(u, u_t, u_{tt}) = 0, \quad (2)$$

onde  $A$  é um operador auto-adjunto definido em um espaço de Hilbert;  $\alpha, b > 0$  e  $c \neq 0$  são constantes estruturais;  $f$  representa um termo fonte e aqui adotamos  $\tau = 1$  por simplificação. Vários autores estudaram (2) do ponto de vista físico (ver [41, 42, 58, 67]) e também do ponto de vista matemático, explorando as relações dos parâmetros estruturais para estabelecer a existência de soluções e o comportamento das mesmas quando o tempo  $t$  cresce indefinidamente. (ver [13, 14, 15, 28, 43, 44, 45, 46, 57]).

Dentre essas relações, destacamos o número de estabilidade dado por

$$\varkappa := b - \frac{c^2}{\alpha}.$$

É possível classificar a equação MGT (2) de acordo com os valores de  $\varkappa$ :

- Subcrítico, se  $\varkappa > 0$ ,
- Crítico, se  $\varkappa = 0$ ,
- Supercrítico, se  $\varkappa < 0$ .

Para o caso  $f \equiv 0$ , foi provado em [44] que o problema (2), para  $\varkappa > 0$ , tem boa colocação global e decaimento exponencial das soluções, enquanto que no caso  $\varkappa = 0$  o sistema é conservativo. Já para o caso  $\varkappa < 0$ , há soluções que podem ter *blow-up* em tempo finito (veja [23]).

Do mencionado acima, podemos adicionar à equação (2) um mecanismo dissipativo adicional dado pelo termo de memória. Consideremos, portanto, o seguinte modelo MGT integro-diferencial.

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} + A \left[ c^2 u - \int_{t_0}^t \mu(t-s) \Theta_j(u, u_t)(s) ds + b u_t \right] + f(u, u_t, u_{tt}) = 0, \quad (3)$$

onde  $\mu$  representa o núcleo de memória,  $t_0 \in [-\infty, 0]$  é chamado tempo de criação (veja [36, 31]) e

$$\Theta_j(u, u_t) = \begin{cases} u & \text{se } j = 1, \\ u_t & \text{se } j = 2, \\ \zeta u + u_t & \text{se } j = 3, \end{cases} \quad (4)$$

em que  $\zeta > 0$ . Observe que  $\Theta_j(u, u_t)$  é a função que representa os diferentes tipos de memória, cuja denominação usada na literatura é "*memória do tipo  $j$* ";  $j = 1, 2, 3$ . A presença do termo memória em equações de evolução de terceira ordem é fisicamente justificada quando uma relaxação molecular é considerada [16, 51, 59]. Para mais detalhes físicos e modelagens relacionadas à equação (3), veja por exemplo [3, 27, 51, 52, 53]. A seguir destacamos algumas contribuições importantes relacionadas à equação MGT com memória.

## Estado da arte

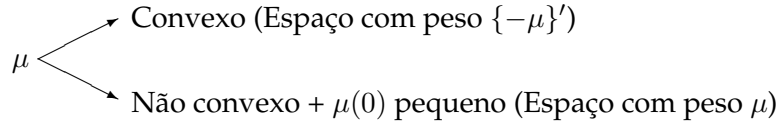
A adição do termo de memória na equação (3) entra em questão à medida que os diferentes tipos de mecanismos de amortecimento presentes em (3) interagem/cooperam/competem entre si e essa interação/cooperação/competição colaboram na obtenção da existência local e global de soluções e também a estabelecer os resultados de estabilidade exponencial.

Estas questões devem ser analisadas considerando cada um dos três tipos de memória dados em (4) separadamente.

Quanto aos resultados de existência e estabilidade relacionados aos três tipos de memória, citamos os trabalhos de Lasiecka e seus colaboradores [51, 52, 53], quando  $t_0 = 0$  e o trabalho de Alves et al. [3], quando  $t_0 = -\infty$ .

**Memória do tipo 1.** Este tipo de memória depende apenas do deslocamento  $u$  e está frequentemente presente nas equações de evolução de segunda ordem. Aparentemente, no que diz respeito à estabilização exponencial, o termo de memória proporciona uma dissipação extra para (3) e é natural pensar que é possível transitar do regime subcrítico ( $\varkappa > 0$ ) para o crítico ( $\varkappa = 0$ ), como acontece no sistema MGT-Fourier [24]. Infelizmente, a estabilização exponencial ocorre no caso crítico se, e somente se,  $A$  for um operador linear limitado (ver [27]), o que implica que a memória do tipo 1 sozinha não é suficiente para estabilizar o sistema quando  $A$  é um operador ilimitado. Por esta razão, a maioria dos trabalhos presentes na literatura existente se restringem ao caso subcrítico ( $\varkappa > 0$ ).

Ao lidar com a equação MGT na presença de um termo de memória tipo 1, a convexidade do núcleo de memória  $\mu$  desempenha um papel essencial. Dependendo da topologia do espaço de energia,  $\mu$  pode ser convexo ou não. Mencionamos aqui os resultados estabelecidos em [3] (Seção 2.4), onde os autores consideram os seguintes casos.



No caso em que o núcleo da memória  $\mu$  é não convexo,  $\mu(0)$  é dada em função de  $\varkappa$  pela relação

$$\mu(0) < \sigma_0 \alpha^2 \varkappa, \quad (5)$$

em que  $\sigma_0 \in (0, 1)$ . Recentemente, esta condição foi removida quando núcleos não convexos são considerados (veja [23]).

Apresentaremos na sequência alguns resultados relativos ao problema (3) na presença do termo de memória do tipo 1, núcleo de memória  $\mu$  e  $\varkappa > 0$ .

Começamos com o caso sem história passada ( $t_0 = 0$ ), onde em [53] os autores estabelecem o resultado de estabilidade supondo  $f \equiv 0$ ,  $\mu$  não convexo e  $\mu(0)$  suficientemente pequeno, o que também pode ser verificado em [56]. No entanto, considerando  $f \equiv 0$  e  $\mu$  convexa, em [52] os autores obtêm a estabilidade exponencial para as soluções do sistema. Ainda considerando  $f \equiv 0$ ,  $\mu$  não convexo e domínio do operador  $A$  limitado, em [23] os autores provaram a estabilidade exponencial. Em [51], com  $f(u, u_t, u_{tt}) = -\frac{d^2}{dt^2}u^2$ , dados iniciais pequenos e  $\mu$  convexo os autores apresentaram a estabilidade exponencial. Já em [27], para  $f \equiv 0$  e  $\mu$  convexo, os autores obtiveram a estabilidade forte, considerando um espaço de fase fraco, estabilidade exponencial, se  $A$  é um operador limitado e estabilidade polinomial, na condição de dados regulares pequenos.

No que concerne o contexto da história passada, isto é, quando  $t_0 = -\infty$ , na literatura existente encontramos poucos trabalhos relativos à existência e à estabilidade da solução de (3). Dentre as contribuições existentes, citamos a referência [3], onde os autores obtêm resultados de boa colocação e estabilidade exponencial considerando  $f \equiv 0$  e  $\mu$  convexo ou não convexo, onde no último caso é adicionada a hipótese de  $\mu(0)$  ser suficientemente pequeno. Além disso, em [55], para  $f \equiv 0$  (também para  $\varkappa = 0$ ),  $\mu$  convexo e dados iniciais limitados, a estabilidade geral fraca e forte é obtida.

Para outros resultados de estabilidade para a equação MGT com memória do tipo 1, veja [11, 39, 49, 70, 72].

**Memória do tipo 2.** Como pontuado em [51] Observação 1.5, os efeitos desse tipo de memória não são suficientes para estabilizar o sistema. Na verdade, mesmo para núcleos do tipo exponencial, o sistema pode não ser dissipativo, veja, por exemplo, [3] Observação 3.2 e [27] Observação 1.3. Assim, para estudar a estabilidade exponencial é necessário restringir a análise ao regime subcrítico, onde o sistema MGT por si só contém um mecanismo de amortecimento.

Na sequência destacamos brevemente algumas das principais contribuições relacionadas à equação MGT (3) com memória do tipo 2, núcleo de memória  $\mu$  e  $\varkappa > 0$ .

Para o caso sem história passada, constatamos a estabilidade exponencial alcançada em [52] para  $f \equiv 0$  e, considerando dados iniciais suficientemente pequenos, para o caso  $f(u, u_t, u_{tt}) = -\frac{d^2}{dt^2}u^2$ , tal estabilidade também pode ser verificada em [51]. Ainda para o caso  $t_0 = 0$  e  $f \equiv 0$ , em [73] é provada a estabilidade polinomial com a condição do domínio limitado e em [26] (também para  $\varkappa = 0$ ) e  $f \equiv 0$  foi provado o comportamento de *Blow up* exponencial.

Para o caso de história passada ( $t_0 = -\infty$ ) e  $f \equiv 0$ , mencionamos a estabilidade exponencial alcançada em [3] com uma condição adicional relacionando  $\varkappa$  e  $\mu$ .

Podemos também encontrar mais estudos relacionados à equação de MGT com memória do tipo 2 em [8, 9, 10].

**Memória do tipo 3.** Na presença da memória do tipo 3 a equação MGT (3) se comporta como uma equação da onda decorrente da viscoelasticidade linear e o termo de memória não produz efeitos anti-dissipativos. Assim, na presença desse tipo de memória, o sistema é estável, mesmo no caso crítico. No que segue, citaremos alguns resultados referentes à equação (3) na presença do termo de memória do tipo 3.

Para  $t_0 = 0$ ,  $\varkappa \geq 0$  e  $f \equiv 0$ , em [52] é provada a estabilidade exponencial, o que também pode ser verificado em [51] para o caso  $f(u, u_t, u_{tt}) = -\frac{d^2}{dt^2}u^2$  e dados iniciais pequenos. Já em [3], vemos a estabilidade esponencial alcançada para  $t_0 = -\infty$ ,  $\varkappa > 0$  e  $f \equiv 0$ .

Agora, estamos em condições de apresentar o primeiro problema que estudamos e destacaremos nossas principais contribuições.

## O modelo estudado

Dado  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^3$  com fronteira suave  $\partial\Omega$ , consideremos a equação de Moore-Gibson-Thompson (MGT) semilinear com história passada

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} - \Delta \left[ c^2 u - \int_{-\infty}^t \mu(t-s) \Theta_j(u, u_t)(s) ds + bu_t \right] + f(u_t + \alpha_j u) = 0, \quad (6)$$

com condição de fronteira de Dirichlet

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times [0, \infty) \quad (7)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & u_{tt}(x, 0) = u_2(x), \\ \Theta_j(u, u_t)(x, t) = \vartheta_j(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (-\infty, 0). \end{cases} \quad (8)$$

Aqui,  $\alpha, b > 0$  e  $c \neq 0$ ,  $\mu$  representa o núcleo de memória,  $f$  representa uma força externa,  $\Theta_j(u, \tilde{u})$  é dado em (4) e  $\zeta \in [\frac{c^2}{b}, \alpha)$ . Com o intuito de provar a existência global de solução para o problema (6)-(8), assumiremos algumas hipóteses a cerca das funções  $\mu$ ,  $f$  e também dos parâmetros  $\alpha, b, c$  e  $\zeta$ . Por simplificação, adotaremos as seguintes notações que estão relacionadas à equação (6) de acordo com cada tipo de memória a ser considerada:

Tipo de memória \ Parâmetros	1	2	3
$\alpha_j$	$\alpha$	$\alpha$	$\zeta$
$\beta_j$	$b$	$b - \rho$	$b - \rho$
$\gamma_j$	$c^2 - \rho$	$c^2$	$c^2 - \zeta\rho$
$\varkappa_j$	$b - \frac{c^2}{\alpha}$	$b - \rho - \frac{c^2}{\alpha}$	$b - \frac{c^2}{\zeta}$

Tabela 1: Parâmetros indexados de acordo com o tipo de memória.

Os parâmetros  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  e  $\varkappa_j$ , apresentados na Tabela 1, são positivos para  $j = 1, 2, 3$ .

Quanto ao núcleo de memória, assumiremos que  $\mu \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$  tem massa total

$$\rho := \int_0^\infty \mu(s) ds > 0 \quad \text{e} \quad \mu(0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \mu(s) < +\infty.$$

Além disso,  $\mu'$  é uma função absolutamente contínua,  $\mu'' \geq 0$  quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  e existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $s > 0$ ,

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0. \quad (9)$$

Quanto à função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é tal que  $f(0) = 0$  e

$$0 \leq \widehat{f}(s) := \int_0^s f(\tau) d\tau \leq f(s)s + \frac{\omega_j}{2} a_j |s|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

em que  $a_j \in [0, c_p)$ , onde  $c_p$  é dado em pela desigualdade de Poincaré, e  $\omega_j := \frac{\gamma_j}{\alpha_j} > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Adicionalmente,  $f$  satisfaz

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq k_0(1 + |s_1|^2 + |s_2|^2)|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

para alguma constante  $k_0 > 0$ .

## Organização e principais contribuições

No capítulo 2 Estabelecemos a boa-colocação global e resultados de estabilidade exponencial (local e uniforme) para o problema (6)-(8),  $j = 1, 2, 3$ . Os resultados obtidos no presente trabalho estendem aqueles estabelecidos em [3] no que concerne à existência de um termo de fonte semilinear. Além disso, melhoramos as hipóteses acerca de  $\mu(0)$ , onde  $\mu$  é o núcleo do termo de memória.

Os resultados obtidos foram redigidos na forma de artigo e este submetido em revista especializada da área, intitulado *Exponential stabilization of a semilinear third order in time equation with memory*.

## O modelo de Timoshenko

Equações diferenciais são fundamentais para descrever uma variedade de fenômenos que ocorrem em função do tempo. No que se refere a vibração de vigas, um modelo amplamente estudado é o sistema de Timoshenko [68, 69], que relaciona a chamada força de cisalhamento  $S$  e o momento fletor  $M$  de acordo com o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} = S_x, \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \end{cases} \quad (12)$$

em que  $\phi(x, t)$  é o deslocamento transversal da vibração,  $\psi(x, t)$  o ângulo de rotação de uma seção transversal com relação à seção normal no ponto  $x \in [0, L]$ ,  $L > 0$  o comprimento da viga considerada,  $\rho_1, \rho_2 > 0$  são constantes relacionadas às características físicas da viga e  $t \geq 0$ . De acordo com os pressupostos de Timoshenko [29, 64], ao considerarmos o modelo elástico ou conservativo, as leis constitutivas para a força de cisalhamento e o momento fletor são dadas por

$$\begin{cases} S = \kappa(\phi_x + \psi), \\ M = b\psi_x, \end{cases} \quad (13)$$

com  $\kappa > 0$  e  $b > 0$  constantes que dependem do cisalhamento e do módulo de elasticidade de Young, respectivamente. Ao combinar (12) e (13) temos

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\phi_x + \psi) = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (14)$$

A ausência de forças ou mecanismos que dissipam energia torna o sistema (14) conservativo. Além disso, conforme pontuado em [71], a estabilidade assintótica de (14) está intrinsicamente ligada aos parâmetros  $\rho_1, \rho_2, \kappa$  e  $b$ . Mais precisamente, o sistema (14) com dissipação em apenas uma de suas equações é exponencialmente estável se, e somente se, vale a relação

$$\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b},$$

caso contrário, ele decai polinomialmente (Ver [1]). Esse é o caso dos dois problemas apresentados a seguir.

Ao tratarmos de materiais viscoelásticos, é importante conhecer a história de deformação do material, pois essas informações exercem influência no sistema de Timoshenko. Para o caso com história passada, podemos considerar (14), por exemplo, com viscoelasticidade no momento fletor  $M$ , assumindo assim a forma

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} - b \int_{-\infty}^t g_2(t-s)\psi_{xx}(s)ds + \kappa(\phi_x + \psi) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

em que  $g_1$  é denominado o núcleo da memória. No caso de viscoelasticidade na força de cisalhamento  $S$  em (14), temos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x - \kappa \int_{-\infty}^t g_1(t-s)(\phi_x + \psi)_x(s)ds = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} - \kappa \int_{-\infty}^t g_1(t-s)(\phi_x + \psi)(s)ds + \kappa(\phi_x + \psi) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

em que  $g_2$  é o núcleo da memória.

Os sistemas (15) e (16) são denominados problemas viscoelásticos Timoshenko-Boltzmann e nascem da combinação das equações de vigas [50, 68, 69], da teoria de viscoelasticidade moderna postulada por Boltzmann [6, 7], e da teoria de materiais viscoelásticos com história passada [29, 31, 64]. Mais Detalhes sobre a incorporação de termos de memória em sistemas de Timoshenko podem ser encontrados em [35, Remark A.1].

---

<sup>2</sup>Essa relação é conhecida na literatura como igualdade de velocidade.



## O modelo estudado

Motivados pelos sistemas parcialmente viscoelásticos (15) e (16), consideramos um sistema viscoelástico completo com ambas as dissipações apresentadas, que é o objeto de estudo do capítulo 3 deste trabalho, isto é, estudamos o sistema de Timoshenko-Boltzmann dado por

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa[\phi_{xx} + \psi_x] + \kappa \int_0^\infty g_1(s)[\phi_{xx} + \psi_x](\cdot - s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + b \int_0^\infty g_2(s)\psi_{xx}(\cdot - s) ds + \kappa[\phi_x + \psi] \\ \quad - \kappa \int_0^\infty g_1(s)[\phi_x + \psi](\cdot - s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (17)$$

com condições de Dirichlet

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (18)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (19)$$

O comportamento assintótico das soluções do sistema (17)-(19) foi estudado inicialmente em [54]. Os autores mostraram que o semigrupo  $S(t)$  gerado pelas soluções generalizadas de (17)-(19) é exponencialmente estável em um espaço de Hilbert adequado  $\mathbb{H}$  (Veja Definição 1.57). Para isso, eles assumiram que as funções  $g_1$  e  $g_2$  satisfazem para todo  $s \in \mathbb{R}^+$  e para algum  $\nu > 0$  e  $m > 0$ :

$$(H1) \quad g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+);$$

$$(H2) \quad g_1(s), g_2(s) > 0;$$

$$(H3) \quad g_1'(s), g_2'(s) \leq 0;$$

$$(H4) \quad \int_0^\infty g_1(s) ds, \int_0^\infty g_2(s) ds \in (0, 1);$$

$$(H5) \quad g_1'(s) + \nu g_1(s) \leq 0, \quad g_2'(s) + \nu g_2(s) \leq 0;$$

$$(H6) \quad g_1(s) \leq m g_2(s).$$

Quase dez anos depois, em [38] foi estudada uma versão semilinear de (17)-(19). Sob as hipóteses (H1)-(H6) e assumindo adicionalmente que

$$(H7) \quad \lim_{s \rightarrow 0} g_1(s) < +\infty, \quad \lim_{s \rightarrow 0} g_2(s) < +\infty,$$

os autores estabeleceram a existência de um atrator uniforme para o sistema dinâmico gerado pelas soluções do problema estudado. Além disso, devido ao uso do método dos multiplicadores e da hipótese (H7), a estabilidade exponencial de  $S(t)$  foi obtida com uma taxa de decaimento explícita. Os detalhes podem ser encontrados em [38, Corolário 3.2].

Ao abordar o sistema (17)-(19) no Capítulo 3, nosso objetivo é mostrar que a estabilidade exponencial de  $S(t)$ , obtida em [38, 54], é válida para uma classe mais geral de núcleos de memória. Mais especificamente, mostraremos que o semigrupo  $S(t)$  é exponencialmente estável desde que os núcleos de memória sejam *admissíveis*, isto é, funções da forma  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , em que  $g$  é absolutamente contínua, não-crescente e integrável com  $\int_0^\infty g(s) ds \in (0, 1)$ . Precisamente, nossa contribuição à literatura, no que concerne ao problema (17), está relacionada aos seguintes objetivos alcançados nesse trabalho:

- Enfraquecer as hipóteses A1-A6 e obter os mesmos resultados apresentados em [54].
- Caracterizar a estabilidade exponencial em termos dos núcleos de memória  $g_1$  e  $g_2$ .

Vale observar que se  $g$  é um núcleo admissível então  $g'(s)$  existe e é não-positiva para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Equivalentemente, basta exigir que a hipótese (H2) seja válida para quase todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Mais ainda,  $g$  pode ser ilimitada em  $s = 0$ . Além disso, podemos enfraquecer mais ainda esta hipótese considerando núcleos admissíveis contendo um número finito de descontinuidades ou uma sequência infinita decrescente de descontinuidades [33, Observação 2.1]. Para estudar a estabilidade do semigrupo  $S(t)$ , usaremos núcleos que cumprem a  $\delta$ -condição, que são funções  $g$  tais que

$$g(t+s) \leq C e^{-\delta t} g(s),$$

para algum  $\delta > 0$ ,  $C \geq 1$ , todo  $t > 0$  e quase todo  $s > 0$ .

Um exemplo é a função

$$g(s) = \begin{cases} e^{-2s}, & \text{se } 0 < s \leq 1, \\ e^{-2}, & \text{se } 1 < s \leq \frac{3}{2}, \\ e^{-2s+1}, & \text{se } s > \frac{3}{2}, \end{cases}$$

que satisfaz a delta condição para  $C = 2$  e  $\delta = 1$ , como indicado na seguinte ilustração.

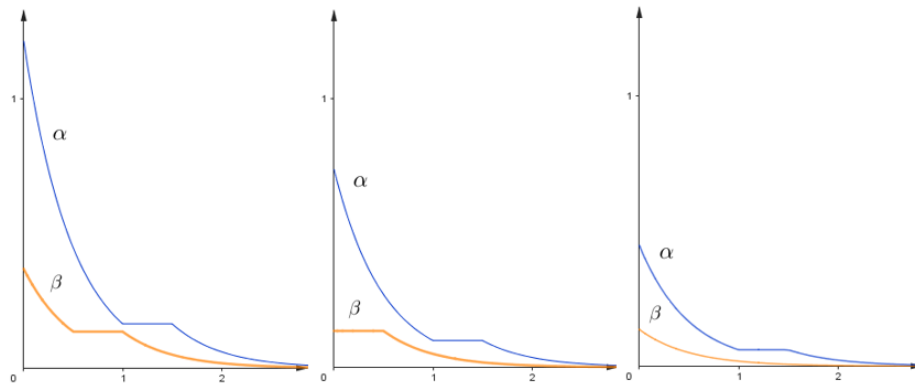


Figura 1: Funções  $\alpha(s) = 2e^{-\delta t}g(s)$  e  $\beta(s) = g(s+t)$ , para  $t$  igual a  $\frac{1}{2}$ ,  $1$  e  $\frac{3}{2}$ .

Núcleos de memória que satisfazem a  $\delta$ -condição permitem “zonas de achatamento”, isto é, partes de seu domínio em que são constantes, o que não é possível para funções que satisfazem a condição usual

$$g'(s) + \nu g(s) \leq 0, \quad \forall s > 0,$$

para algum  $\nu > 0$ .

Outro benefício da  $\delta$ -condição é a possibilidade de caracterização da estabilidade exponencial de semigrupos advindos de problemas viscoelásticos com história passada. Outros estudos relacionados a sistemas de Timoshenko podem ser encontrados em [5, 17, 18, 20, 22, 33, 35, 61, 62].

Os resultados obtidos no capítulo 3 também encontram-se submetidos, sob a forma de artigo, em revista especializada da área, cujo título é *Exponential characterization of a fully damped Timoshenko-Boltzmann system*.

## Resultados preliminares

Neste capítulo apresentaremos os resultados que serão utilizados ao longo de todo o trabalho. Mais especificamente, exibiremos resultados clássicos de Análise Funcional, espaços  $L^p$ , espaços de Sobolev e da teoria de Semigrupos. Grande parte dos resultados do presente capítulo não serão demonstrados, contudo indicaremos as referências nas quais encontram-se suas demonstrações.

### 1.1 Análise funcional

**Definição 1.1.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado. Dizemos que duas normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  são equivalentes (e denotamos  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ) se existem constantes  $c_1, c_2 > 0$  tais que*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

**Lema 1.2.** *Seja  $(X, \|\cdot\|_X)$  um espaço vetorial normado. Então, para todo  $C_0 > 0$  vale,*

$$\|f + g\|_X^2 + C_0\|g\|_X^2 \sim \|f\|_X^2 + \|g\|_X^2, \quad \forall f, g \in X.$$

*Demonstração.* Veja [52, Lema 2.6]. □

**Lema 1.3.** *Seja  $X$  um espaço vetorial normado. Suponha que  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  são normas equivalentes. Então*

$$(X, \|\cdot\|_1) \text{ é Banach} \iff (X, \|\cdot\|_2) \text{ é Banach.}$$

De agora em diante, consideremos  $X$  um espaço de Banach, com norma  $\|\cdot\|_X$  e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear, com domínio  $D(A)$ . Em particular, quando  $X$  for um espaço de Hilbert, denotaremos seu produto interno por  $(\cdot, \cdot)_X$ .

**Definição 1.4.** *Dizemos que  $X$  é reflexivo quando o funcional*

$$\begin{aligned} J : X &\rightarrow X'' \\ x &\mapsto J_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

*é sobrejetor.*

**Proposição 1.5.** *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

*Demonstração.* Veja [48, Teorema 4.6-6] □

**Definição 1.6.** Um funcional  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  é dito anti-linear se

$$f(\alpha u + \beta v) = \bar{\alpha}f(u) + \bar{\beta}f(v), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ademais, uma forma  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  é denominada sesquilinear se

- $a(\lambda u + v, w) = \lambda a(u, w) + a(v, w)$ ;
- $a(u, \lambda v + w) = \bar{\lambda}a(u, v) + a(u, w)$ ,

para todo  $u, v, w \in X$  e para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 1.7 (Lax-Milgram).** Sejam  $X$  um espaço de Hilbert real (complexo) e uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Então, para todo funcional linear (antilinear)  $f$  limitado, existe um único  $x \in X$  tal que  $a(x, y) = \langle f, y \rangle$ , para todo  $y \in X$ .

*Demonstração.* Para o caso real, ver [12], página 140, Corolário 5.8. Para o caso complexo, ver [60], página 529, Corolário 6.6.2.  $\square$

**Definição 1.8.** Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Um operador linear  $A$  é dito dissipativo se,

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

**Definição 1.9.** Seja  $A$  um operador não limitado, densamente definido em  $X$ . O conjunto resolvente de  $A$ , o qual denotamos por  $\rho(A)$ , é o conjunto formado por todos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que

- (R1)  $(\lambda I - A)^{-1}$  existe;
- (R2)  $(\lambda I - A)^{-1}$  é limitado;
- (R3)  $(\lambda I - A)^{-1}$  é densamente definido.

Definimos o espectro de  $A$  e denotamos por  $\sigma(A)$ , ao conjunto  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ .

**Definição 1.10.** Sob as hipóteses da definição 1.9, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &:= \{ \lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \text{ não existe} \}; \\ \sigma_c(A) &:= \{ \lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, satisfaz (R3), mas não vale (R2)} \}; \\ \sigma_r(A) &:= \{ \lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, mas não vale (R3)} \}. \end{aligned}$$

Os conjuntos  $\sigma_p(A)$ ,  $\sigma_c(A)$  e  $\sigma_r(A)$  são chamados espectro pontual, espectro contínuo e espectro residual de  $A$ , respectivamente.

**Definição 1.11.** O espectro pontual aproximado de  $A$  é o subconjunto de  $\sigma(A)$  definido por

$$\sigma_{ap}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C}; \text{existe } (x_n) \in D(A), \|x_n\|_X = 1 \text{ e } (I\lambda - A)x_n \rightarrow 0 \text{ em } X \}. \quad (1.1)$$

## 1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

A partir de agora,  $\Omega$  denotará um subconjunto aberto do espaço  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suficientemente regular  $\partial\Omega$  e  $|\Omega|$  sua medida de Lebesgue. Resultados e conceitos gerais da Teoria da Medida, especificamente, a medida de Lebesgue, podem ser consultados em [32].

**Definição 1.12.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Denotaremos por  $L^p(\Omega)$  o conjunto de todas as classes de funções mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|u|^p$  é integrável em  $\Omega$  no sentido de Lebesgue.*

O conjunto  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , é um espaço vetorial normado com norma

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{\infty} = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ é limitada quase sempre em } \Omega\}.$$

**Definição 1.13.** *Uma função mensurável  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é dita localmente integrável se*

$$\int_K u(x) dx < \infty, \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto.}$$

**Proposição 1.14** (Desigualdade de Young). *Sejam  $1 < p < \infty$  e  $q \in \mathbb{R}$  tais que  $1/p + 1/q = 1$ . Dados  $a, b \geq 0$ , então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Demonstração.* Ver [47], página 28, Lema 2.2.1. □

**Proposição 1.15** (Desigualdade de Young com  $\varepsilon$ ). *Dados  $a, b \geq 0$  e  $\varepsilon > 0$  vale*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

*Demonstração.* Basta notar que  $(2\varepsilon a - b)^2 \geq 0$ . □

**Definição 1.16.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que um número real  $q$  é **expoente conjugado** de  $p$  quando  $1/p + 1/q = 1$ .*

**Teorema 1.17** (Desigualdade de Hölder). *Seja  $1 \leq p \leq \infty$  e  $q$  o expoente conjugado de  $p$ . Se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$ , então  $uv \in L^1(\Omega)$  e  $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$ . No caso particular  $p = q = 2$  obtemos a **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** para o espaço  $L^2(\Omega)$ .*

*Demonstração.* Ver [2], página 24, Teorema 2.4. □

**Teorema 1.18.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . O espaço  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  é um espaço de Banach. Em particular,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

*Demonstração.* Ver [2], página 26, Teorema 2.16. □

**Proposição 1.19** (Desigualdade de Young para convoluções). *Sejam  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , a função*

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto F(y) = f(x - y)h(y)$$

*é integrável sobre  $\mathbb{R}^n$ . Definimos a convolução de  $f$  com  $h$  por*

$$(f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)h(y) dy.$$

*Então,  $f * h \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e*

$$\|f * h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demonstração.* Veja [32, Teorema 8.7]. □

### 1.3 Os Espaços de Sobolev

**Definição 1.20.** *O espaço das funções teste é o conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  munido da seguinte noção de convergência: dizemos que uma sequência de funções  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pertencente a  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para uma função  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  se, e somente se, existe um subconjunto compacto  $K$  de  $\Omega$  tal que*

- $\text{supp}(\phi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- $\text{supp}(\phi) \subset K;$
- $D^\alpha \phi_n \rightarrow D^\alpha \phi$  uniformemente sobre  $K$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ .

Denotaremos o espaço das funções teste por  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definição 1.21.** *Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ . O operador derivação de ordem  $\alpha$  é dado por*

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

onde  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ . No caso  $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$  temos  $D^0 = Id$ .

**Definição 1.22.** *Sejam  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$  e  $u, v \in L^p(\Omega)$ . Dizemos que  $v$  é a derivada fraca de ordem  $\alpha$  de  $u$  quando*

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

**Proposição 1.23** (Du Bois Raymond). *Seja  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Se*

$$\int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então  $u(x) = 0$  para quase todo  $x \in \Omega$ .

*Demonstração.* Ver [19], páginas 20 e 21, Proposição 4.  $\square$

**Proposição 1.24.** *Seja  $u \in L^p(\Omega)$ . Se  $v$  e  $w$  são derivadas fracas de ordem  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$  de  $u$ , então  $v = w$  quase sempre em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Basta usar a definição de derivada fraca de ordem  $\alpha$  para  $v$  e  $w$  e aplicar a Proposição 1.23.  $\square$

**Definição 1.25.** *Uma **distribuição** sobre  $\Omega$  é um funcional linear  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  que é contínuo no sentido do espaço das funções teste, isto é, se  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para a função nula em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então  $(\langle T, \phi_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para zero em  $\mathbb{R}$ . Denotaremos o espaço das distribuições por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

**Definição 1.26.** *Diremos que uma sequência de distribuições  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\Omega$  **converge** para uma distribuição  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  quando*

$$\langle T_n, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Definição 1.27.** *Seja  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ . A **derivada distribucional de ordem**  $\alpha$  de uma distribuição  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  é a distribuição*

$$\begin{aligned} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle. \end{aligned}$$

**Observação 1.28.** *Vale a pena notar que se  $u \in C^k(\Omega)$  então a derivada de ordem  $\alpha$  no sentido da distribuições e no sentido clássico coincidem para  $|\alpha| \leq k$ .*

**Proposição 1.29.** *Se  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , então  $D^\alpha T$  existe para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ . Mais ainda, o operador*

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

*é linear e contínuo no sentido da convergência definida em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

*Demonstração.* Ver [19], página 29.  $\square$

Se  $u \in L^p(\Omega)$ , então a derivada fraca de ordem  $\alpha$  (quando existe) coincide com as derivada de ordem  $\alpha$  no sentido distribucional.

**Definição 1.30.** *Sejam  $1 \leq p \leq \infty$  e  $m \in \mathbb{Z}_+$ . O **espaço de Sobolev**  $W^{m,p}(\Omega)$  é o conjunto de todas as funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que as derivadas fracas de ordem  $\alpha$  existem,  $|\alpha| \leq m$ . No caso  $p = 2$  denotamos  $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ . Note que se  $m = 0$  e  $p = 2$  então  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .*

**Teorema 1.31.** *Os espaços  $W^{m,p}(\Omega)$  são espaços de Banach com as normas definidas por*

$$\|u\|_{m,p} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty;$$



$$\|u\|_{m,\infty} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty, \quad p = \infty.$$

Em particular, os espaços  $H^m(\Omega)$  são espaços de Hilbert com produto interno definido por

$$((u, v))_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_2.$$

*Demonstração.* Ver [30], página 249, Teorema 2. □

**Teorema 1.32** (Imersões de Sobolev). *Suponha que  $\Omega$  seja limitado.*

- Se  $mp < N$ , então

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

- Se  $mp < N$  e  $1 \leq q' \leq q$ , então

$$W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

- Se  $mp = N$ ,  $1 \leq p < \infty$ , então

$$W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega).$$

*Demonstração.* Ver [2], página 85, Proposição 4.12. □

**Observação 1.33.** De acordo com [2], o Teorema 1.32 também é válido se trocarmos os espaços  $W^{m,p}(\Omega)$  pelos espaços  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , os quais veremos a seguir.

### 1.3.1 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

**Definição 1.34.** Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Denotaremos por  $W_0^{m,p}(\Omega)$  o fecho de  $C^\infty(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ , isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Além disso, no caso  $p = 2$  temos  $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$ .

Segue da própria definição que  $(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$  é um espaço de Banach.

**Definição 1.35.** Sejam  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  e  $\{e_1, \dots, e_N\}$  a base canônica do espaço  $\mathbb{R}^N$ . Definimos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := D^{e_i} u \in L^p(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

O *gradiente* de  $u$  é o vetor

$$\nabla u := \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in [L^p(\Omega)]^N = \underbrace{L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega)}_{N\text{-vezes}}.$$

**Observação 1.36.** Podemos reescrever a norma e o produto interno do espaço  $H^1(\Omega)$  da seguinte maneira:

$$\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2, \quad ((u, v))_1 = (u, v)_2 + (\nabla u, \nabla v)_2, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

onde

$$\|\nabla u\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2, \quad (\nabla u, \nabla v)_2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_2.$$

**Teorema 1.37** (Desigualdade de Poincaré). Se  $|\Omega| < \infty$  então existe uma constante  $c_p = c_p(\Omega) > 0$  tal que

$$\|u\|_2 \leq c_p \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (1.2)$$

onde  $c_p > 0$  é o primeiro autovalor do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.

*Demonstração.* Ver [12], página 290, Corolário 9.19. □

**Observação 1.38.** Uma aplicação direta da Desigualdade de Poincaré nos diz que no espaço  $H_0^1(\Omega)$  as normas

$$\|u\|_{1,2} = (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2} \quad e \quad \|u\|_{1,2} = \|\nabla u\|_2$$

são equivalentes.

**Definição 1.39.** Seja  $e_i \in \mathbb{Z}_+^N$  o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, \dots, N$ . O **Laplaciano** é o operador

$$D(-\Delta) = H^2(\Omega), \quad -\Delta u := - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

onde  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} := D^{2e_i} u$ .

**Teorema 1.40** (Teorema de Green). Para todo  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  e  $v \in H^1(\Omega)$ , vale

$$(-\Delta u, v)_2 = (\nabla u, \nabla v)_2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x) d\partial\Omega.$$

*Demonstração.* Ver [19], página 413, Proposição 7. □

### 1.3.2 Espaços com Peso

Seja  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função absolutamente contínua e integrável.

**Definição 1.41.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $1 \leq p < \infty$ . Definimos o **espaço com peso  $g$**  por

$$L_g^p(\mathbb{R}^+; X) := \left\{ \eta : [0, \infty) \rightarrow X \mid \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_X^p ds < \infty \right\}. \quad (1.3)$$

**Observação 1.42.** Se  $1 \leq p < \infty$ , então o espaço  $L_g^p(\mathbb{R}^+; X)$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+; X)} := \left( \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_X^p ds \right)^{1/p}.$$

Em particular, se  $X$  é um espaço de Hilbert, então  $\mathbb{M}_g(X) = L^2_g(\mathbb{R}^+; X)$  é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(\eta, \zeta)_{\mathbb{M}_g(X)} := \int_0^\infty g(s)(\eta(s), \zeta(s))_X ds.$$

**Proposição 1.43.** *Seja  $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$  uma função não-crescente. Se  $\eta \in \mathbb{M}_g(X)$ , então a função*

$$\Upsilon\eta(s) := \int_0^s e^{-(s-y)}\eta(y)dy, \quad (1.4)$$

pertence a  $\mathbb{M}_g(X)$  e

$$\|\Upsilon\eta\|_{\mathbb{M}_g(X)} \leq \|\eta\|_{\mathbb{M}_g(X)}.$$

*Demonstração.* Temos do fato que  $g$  é não-crescente que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)\|\Upsilon\eta(s)\|_X^2 ds &\leq \int_0^\infty g(s) \left( \int_0^s e^{-(s-y)}\|\eta(y)\|_X dy \right)^2 ds \\ &\leq \int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-(s-y)}[g(y)]^{1/2}\|\eta(y)\|_X dy \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $e^{-\cdot} \in L^1(\mathbb{R}^+)$  e  $[g(\cdot)]^{1/2}\|\eta(\cdot)\|_X \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , aplicando a desigualdade de Young para convoluções (Proposição 1.19) obtemos

$$\int_0^\infty g(s)\|\Upsilon\eta(s)\|_X^2 ds \leq \int_0^\infty \left( \int_0^s e^{-(s-y)}[g(y)]^{1/2}\|\eta(y)\|_X dy \right)^2 ds \leq \|\eta\|_{\mathbb{M}_g(X)}^2.$$

Portanto,  $\Upsilon\eta \in \mathbb{M}_g(X)$ . □

## 1.4 Teoria de semigrupos

**Definição 1.44.** *Uma família de operadores lineares limitados  $T(t) : X \rightarrow X$ , é denominada semigrupo de operadores lineares limitados em  $X$  se*

- i)  $T(0) = I$  ( $I$  é o operador identidade em  $X$ );
- ii)  $T(t + s) = T(t) \circ T(s)$  para todo  $t, s \geq 0$  (Propriedade de semigrupos).

Além disso,  $T(t)$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , ou um  $C_0$ -semigrupo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Por fim, dizemos que um  $C_0$ -semigrupo  $T(t)$  é de contrações se

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0,$$

em que  $\mathcal{L}(X)$  é o espaço de operadores lineares limitados definidos em  $X$ .

**Definição 1.45.** Seja  $T(t)$  um semigrupo de operadores lineares limitados. O operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A)$$

é o gerador infinitesimal de  $T(t)$ . Nesse caso, denotamos  $T(t) = e^{tA}$ .

**Teorema 1.46** (Lumer-Phillips). Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear. Se

- i)  $A$  é dissipativo,
- ii)  $A$  densamente definido em  $X$ ,
- iii) existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\lambda_0 I - A$  é sobrejetor,

então  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$ .

*Demonstração.* Consultar [63, Teorema 4.3]. □

**Proposição 1.47.** Seja  $A$  um operador dissipativo tal que  $I - A$  é sobrejetor. Se  $X$  é reflexivo, então  $A$  é densamente definido.

*Demonstração.* Consultar [63, Teorema 4.6]. □

**Corolário 1.48.** Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear definido em um espaço de Hilbert  $X$ . Se

- i)  $A$  é dissipativo,
- ii)  $I - A$  é sobrejetor,

então  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$ .

*Demonstração.* Segue do Teorema 1.46 e da Proposição 1.47. □

**Lema 1.49.** Suponha que  $A$  seja um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $T(t)$  definido em  $X$ , e seja  $x \in D(A)$ . Então  $T(t)x \in C^1([0, \infty), X)$  e, além disso, para todo  $t \geq 0$ ,

$$x - T(t)x = \int_0^t AT(\tau)x d\tau = \int_0^t T(\tau)Ax d\tau,$$

e

$$\frac{d}{dt}[T(t)x] + A(T(t)x) = 0.$$

*Demonstração.* Veja [74, Lema 2.1.1]. □

**Observação 1.50.** Segue do Lema 1.49 que, se  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações, então para cada  $x \in D(A)$ ,  $U(t) = T(t)x$  é uma solução clássica para o seguinte problema abstrato de valor inicial (conhecido como problema abstrato de Cauchy)

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, & t > 0, \\ U(0) = x. \end{cases} \quad (1.5)$$

No entanto, se  $x \notin D(A)$ , o problema (1.5) não possui uma solução no sentido clássico. Neste caso, pode-se definir uma solução generalizada de (1.5).

**Definição 1.51.** Uma função  $U \in C([0, \infty), X)$  é uma solução generalizada de (1.5) se existe  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \in D(A)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $x_n \rightarrow U(0)$  com  $T(t)x_n \rightarrow U(t)$  uniformemente em intervalos limitados, quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Observação 1.52.** A solução generalizada independe da sequência  $\{x_n\}$  e é única. Se  $U(0) \in D(A)$ , a solução generalizada é a solução clássica de (1.5). Portanto, se  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações e  $x \in X$ , então  $U(t) = T(t)x$  é a única solução generalizada de (1.5).

**Proposição 1.53.** Para todo  $x \in X$ , o problema (1.5) admite uma única solução generalizada  $U \in C(0, \infty, X)$ . Além disso, se  $x \in D(A)$ , então  $U$  é a solução clássica de (1.5) e

$$U \in C^1(0, \infty, X) \cap C(0, \infty, D(A)).$$

*Demonstração.* Segue das Observações 1.50 e 1.52. □

A Proposição 1.53 pode ser estendida para perturbações localmente Lipschitz. De fato, consideremos o problema de Cauchy não homogêneo

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU + F(U), & t > 0, \\ U(0) = x. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Definição 1.54.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Um operador  $F : X \rightarrow X$  é dito **localmente Lipschitz** quando para toda constante  $L > 0$ , existe uma constante  $M_L > 0$  tal que se  $\|x\|_X \leq L$ ,  $\|y\|_X \leq L$ , então

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq M_L \|x - y\|_X.$$

**Teorema 1.55.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Suponhamos que  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$  e que  $F : X \rightarrow X$  é um operador localmente Lipschitz. Então, para todo  $x \in X$  existe  $t_{\max} > 0$  tal que o problema (1.6) admite uma única **solução generalizada** em  $[0, t_{\max})$ , isto é, existe um único  $U \in C([0, t_{\max}), X)$  satisfazendo

$$U(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(U(\tau)) d\tau.$$

Além disso, se  $x \in D(A)$ , então

$$U \in C^1([0, t_{\max}), X) \cap C([0, t_{\max}), D(A))$$

é solução clássica de (1.6)

*Demonstração.* Ver [74], página 53, Teorema 2.5.4.  $\square$

**Teorema 1.56.** *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 1.55 sejam satisfeitas. Então*

(i)  $t_{\max} = \infty$  ou

(ii)  $t_{\max} < \infty$  e

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \|U(t)\|_X = \infty. \quad (1.7)$$

*Demonstração.* Ver [74], página 54, Teorema 2.5.5.  $\square$

**Definição 1.57.** *Seja  $T(t) : X \rightarrow X$  um semigrupo. Dizemos que  $T(t)$  é exponencialmente estável se existe  $M \geq 1$  e  $\gamma > 0$  tais que*

$$\|T(t)x\|_X \leq Me^{-\gamma t}\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

**Teorema 1.58 (Gearhart-Pruss).** *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contração, ou seja  $T(t) = e^{tA}$ . Então,  $T(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se,*

i)  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ ;

ii)  $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ .

*Demonstração.* Veja [34, 65].  $\square$

**Teorema 1.59.** *Seja  $T(t)$  um semigrupo de operadores limitados em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Se  $X$  é reflexivo, então*

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma_{ap}(A) \cap i\mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Por um lado, da [21, Seção 5] temos

$$\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \sigma_{ap}(A). \quad (1.8)$$

Por outro lado, da [4, Proposição 2.2], temos

$$\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Logo, combinando (1.8) e (1.9)

$$i\mathbb{R} \cap \underbrace{(\sigma_c(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A))}_{=\sigma(A)} = i\mathbb{R} \cap (\sigma_c(A) \cup \sigma_p(A)) \subseteq i\mathbb{R} \cap \sigma_{ap}(A) \subseteq i\mathbb{R} \cap \sigma(A),$$

e o resultado segue.  $\square$

## Uma equação de Moore-Gibson-Thompson semilinear

### 2.1 O modelo

Neste capítulo, consideramos  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^3$  com fronteira suave  $\partial\Omega$  e consideremos a seguinte equação de Moore-Gibson-Thompson semilinear com termo de memória

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} - \Delta \left[ c^2 u - \int_{-\infty}^t \mu(t-s) \Theta_j(u, u_t)(s) ds + bu_t \right] + f(u_t + \alpha_j u) = 0, \quad (2.1)$$

com

$$\Theta_j(u, u_t) = \begin{cases} u & \text{se } j = 1, \\ u_t & \text{se } j = 2, \\ \zeta u + u_t & \text{se } j = 3, \end{cases} \quad (2.2)$$

condição de fronteira de Dirichlet

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times [0, \infty) \quad (2.3)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & u_{tt}(x, 0) = u_2(x), \\ \Theta_j(u, u_t)(x, t) = \vartheta_j(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (-\infty, 0). \end{cases} \quad (2.4)$$

Aqui,  $\alpha, b > 0$  e  $c \neq 0, \zeta \in [\frac{c^2}{b}, \alpha)$ . Para simplificar a escrita, adotaremos as seguintes notações que são definidas e relacionados à nossa equação de acordo com cada tipo de memória a ser considerada:

Tipo de memória \ Parâmetros	1	2	3
$\alpha_j$	$\alpha$	$\alpha$	$\zeta$
$\beta_j$	$b$	$b - \rho$	$b - \rho$
$\gamma_j$	$c^2 - \rho$	$c^2$	$c^2 - \zeta\rho$
$\varkappa_j$	$b - \frac{c^2}{\alpha}$	$b - \rho - \frac{c^2}{\alpha}$	$b - \frac{c^2}{\zeta}$

Tabela 2.1: Parâmetros indexados de acordo com o tipo de memória.

### Hipóteses

(H<sub>1</sub>)  $\mu \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$  tem massa total  $\rho := \int_0^\infty \mu(s)ds > 0$  e  $\mu(0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \mu(s) < +\infty$ . Além disso,  $\mu'$  é uma função absolutamente contínua,  $\mu'' \geq 0$  quase sempre em  $\mathbb{R}^+$  e existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $s > 0$ ,

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0. \quad (2.5)$$

(H<sub>2</sub>)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $f(0) = 0$  e

$$0 \leq \widehat{f}(s) := \int_0^s f(\tau)d\tau \leq f(s)s + \frac{\omega_j}{2}a_j|s|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

em que  $a_j \in [0, c_p)$ , onde  $c_p$  é dado em (1.2), e  $\omega_j := \frac{\gamma_j}{\alpha_j} > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Adicionalmente, supomos que  $f$  satisfaz

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq k_0(1 + |s_1|^2 + |s_2|^2)|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

para alguma constante  $k_0 > 0$ .

(H<sub>3</sub>) Os parâmetros  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  e  $\varkappa_j$ , apresentados na Tabela 2.1, são estritamente positivos para  $j = 1, 2, 3$ .

**Observação 2.1.1.** A hipótese (H<sub>2</sub>) fornece um controle para o crescimento de  $f$  e sua primitiva  $\widehat{f}$ . Além disso, da desigualdade (2.7), é possível observar que o operador de Nemytskii  $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  é localmente Lipschitziano. De fato, seja  $R > 0$  e  $u, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\|\nabla u\|, \|\nabla \tilde{u}\| \leq R$ . De (11), pode-se usar a desigualdade de Hölder com  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  juntamente com a imersão  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  para obtermos

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u})\|^2 &= \int_\Omega |f(u(x)) - f(\tilde{u}(x))|^2 dx \\ &\leq c \int_\Omega (1 + |u(x)|^4 + |\tilde{u}(x)|^4) |u(x) - \tilde{u}(x)|^2 dx \\ &\leq c (1 + \|\nabla u\|^4 + \|\nabla \tilde{u}\|^4) \|\nabla u - \nabla \tilde{u}\|^2 \\ &\leq c_R \|\nabla u - \nabla \tilde{u}\|^2, \end{aligned}$$

com  $c_R = 1 + 2R^4 > 0$ , o que comprova a afirmação.

De maneira usual no estudo de equações com memória, introduzimos a variável de deslocamento de história passada  $\eta_j = \eta_j^t(x, s)$  [25]:

$$\eta_j^t(x, s) := \Theta_j(u, u_t)(x, t) - \Theta_j(u, u_t)(x, t - s), \quad (x, t, s) \in \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^+, \quad j = 1, 2, 3,$$



e procedendo formalmente, obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \eta_{jt} + \eta_{js} = \Theta_j(u_t, u_{tt}) \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_j^t(x, 0) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \eta_j^t(x, s) = 0, (x, t) \in \Omega \times [0, \infty), \\ \eta_j^0(x, s) = \eta_{j0}(x, s) := \Theta_j(u_0, u_1)(x, 0) - \Theta_j(u_0, u_1)(x, -s), (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.8)$$

De (2.1)-(2.8) podemos reescrever o problema (2.1)-(2.4) como o seguinte sistema autônomo

$$\begin{cases} u_{ttt} + \alpha u_{tt} - \Delta \left[ \gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j u_t \right] + f(u_t + \alpha_j u) = 0, \\ \eta_{jt} + \eta_{js} = \Theta_j(u_t, u_{tt}), \end{cases} \quad (2.9)$$

para  $(x, t, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , com condições de fronteira de Dirichlet

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0, \infty), \quad \eta_j = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^+, \quad \eta_j^t(x, 0) = 0, (x, t) \in \Omega \times [0, \infty), \quad (2.10)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x, 0) = u_2(x), \\ \eta_j^0(x, s) = \eta_{j0}(x, s), (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.11)$$

Ao longo deste capítulo, usaremos  $c$  para denotar todas as constantes universais positivas e  $c_R$  para denotar todas as constantes positivas dependendo de um determinado número real  $R > 0$ . Também usaremos o índice  $j$  para abranger os três tipos de memória e sempre que julgarmos necessário, eles serão estudados separadamente. No que segue os resultados obtidos são relativos ao caso

$$\varkappa_j > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Esclarecemos aqui que nossa contribuição à literatura se refere a boa-colocação global e resultados de estabilidade exponencial (local e uniforme) para o problema (2.9)-(2.11), estendendo aqueles estabelecidos em [3] no que concerne à existência de um termo de fonte semilinear. Além disso, melhoramos as hipóteses acerca de  $\mu(0)$  (ver seção 2.5), onde  $\mu$  é o núcleo do termo de memória, e também para  $\delta$  no caso  $j = 2$ , dado pela relação (2.5).

Na seção 2.4 serão apresentadas algumas observações a respeito do caso  $\varkappa_3 = 0$ , isto é, o regime crítico com a memória do tipo 3.

## 2.2 Existência e unicidade de solução

Seja  $\mathbb{M} := \mathbb{M}_{-\mu'}(H_0^1(\Omega)) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_0^1(\Omega) \mid - \int_0^\infty \mu'(s) \|\eta(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds < \infty \right\}$ . Para  $j = 1, 2, 3$ , considere o espaço de Hilbert  $\langle \mathbb{H}_j; (\cdot, \cdot)_{\mathbb{H}_j}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}_j} \rangle$  dado por

$$\mathbb{H}_j := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{M},$$

em que

$$(U, \tilde{U})_{\mathbb{H}_1} = \varkappa_1(\nabla v, \nabla \tilde{v}) + (w + \alpha v, \tilde{w} + \alpha \tilde{v}) + \omega_1(\nabla v + \alpha \nabla u, \nabla \tilde{v} + \alpha \nabla \tilde{u}) \\ + (\eta_1, \tilde{\eta}_1)_{\mathbb{M}} + \frac{1}{\alpha}(\alpha \eta_1 + v, \alpha \tilde{\eta}_1 + \tilde{v})_{\mathbb{M}_\mu},$$

$$(U, \tilde{U})_{\mathbb{H}_2} = \varkappa_2(\nabla v \nabla \tilde{v}) + (w + \alpha v, \tilde{w} + \alpha \tilde{v}) + \omega_2(\nabla v + \alpha \nabla u, \nabla \tilde{v} + \alpha \nabla \tilde{u}) \\ + (\eta_2, \tilde{\eta}_2)_{\mathbb{M}_\mu},$$

$$(U, \tilde{U})_{\mathbb{H}_3} = \varkappa_3(\nabla v, \nabla \tilde{v}) + (w + \zeta v, \tilde{w} + \zeta \tilde{v}) + \omega_3(\nabla v + \zeta \nabla u, \nabla \tilde{v} + \zeta \nabla \tilde{u}) \\ + (\eta_3, \tilde{\eta}_3)_{\mathbb{M}_\mu} + \zeta(\alpha - \zeta)(v, \tilde{v}),$$

e  $\|U\|_{\mathbb{H}_j}^2 = (U, U)_{\mathbb{H}_j}$  para  $U = (u, v, w, \eta_j)$  e  $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\eta}_j) \in \mathbb{H}_j$ . Notemos que as normas  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_j}$  são equivalentes às normais usuais dos espaços  $\mathbb{H}_j$ . Isso pode ser mostrado utilizando o Lema 1.2

Denotando  $v := u_t$ ,  $w := u_{tt}$  e  $U = U_j := (u, v, w, \eta_j)^T$  podemos reescrever o sistema (2.9)-(2.11) como

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}_j U + \mathcal{F}_j(U), & t > 0, \\ U(0) = (u_0, u_1, u_2, \eta_{j0})^T := U_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

em que o operador  $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \subset \mathbb{H}_j \rightarrow \mathbb{H}_j$  é dado por

$$\mathcal{A}_j U = \begin{bmatrix} v \\ w \\ -\alpha w + \Delta \left[ \gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j v \right] \\ \Theta_j(v, w) - \eta_{js} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

com domínio formado por todas as funções  $(u, v, w, \eta_j) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times D(\mathcal{L})$  tais que

$$\gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j v \in H^2(\Omega),$$

e o operador não linear  $\mathcal{F}_j : \mathbb{H}_j \rightarrow \mathbb{H}_j$  é dado por

$$\mathcal{F}_j(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f(v + \alpha_j u) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Aqui,  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$  é o operador linear

$$\mathcal{L}\eta = -\eta_s, \quad \eta \in D(\mathcal{L}) = \{\eta \in \mathbb{M} \mid \eta_s \in \mathbb{M}, \eta(0) = 0\}.$$

Uma vez que o problema (2.12) é autônomo e composto por uma perturbação do tipo

Lipschitziana de um operador linear, podemos aplicar as ferramentas da teoria clássica de semigrupos de operadores lineares para estabelecer a existência e unicidade de soluções deste, conforme o Teorema abaixo.

**Teorema 2.1.** *Considerando as hipóteses  $(\mathbf{H}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_2)$  e  $(\mathbf{H}_3)$  e assumindo  $\delta \geq \frac{\alpha\rho}{2\kappa_2}$ , para  $j = 2$ , temos que:*

(i) *Se  $U_0 \in \mathbb{H}_j$ , então o problema (2.12) tem uma única solução generalizada  $U \in C([0, \infty), \mathbb{H}_j)$  dada por*

$$U(t) = e^{tA_j}U_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A_j}\mathcal{F}_j(U(\tau))d\tau, \quad t \geq 0,$$

*onde  $e^{tA_j}$  denota o  $C_0$ -semigrupo gerado por  $A_j$ .*

(ii) *Se  $U_0 \in D(A_j)$ , então, a respectiva solução generalizada  $U$  é clássica e satisfaz*

$$U \in C([0, \infty), D(A_j)) \cap C^1([0, \infty), \mathbb{H}_j).$$

No entanto, para provarmos o resultado desejado demonstraremos alguns resultados preliminares. O primeiro resultado garante que o operador  $A_j$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$  semigrupo de contrações em  $\mathbb{H}_j$ . Para prová-lo, precisamos do seguinte lema auxiliar.

**Lema 2.2.** *Seja  $\Theta_j(\cdot, \cdot)$  definido em (2.2). Então:*

- (i)  $\|\nabla\Theta_j(\phi, \tilde{\phi})\| \leq (1 + \zeta)(\|\nabla\phi\| + \|\nabla\tilde{\phi}\|), \quad \forall \phi, \tilde{\phi} \in H_0^1(\Omega);$
- (ii)  $|(\nabla\Theta_j(\phi, \tilde{\phi}), \nabla\psi)| \leq (1 + \zeta)(\|\nabla\phi\| + \|\nabla\tilde{\phi}\|)\|\nabla\psi\|, \quad \forall \phi, \tilde{\phi}, \psi \in H_0^1(\Omega);$
- (iii)  $(\nabla\Theta_j(\phi, \phi), \nabla\phi) \geq \|\nabla\phi\|^2, \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$

*Demonstração.* A demonstração de (i) – (iii) segue do fato de que

$$\|\nabla\Theta_j(\phi, \tilde{\phi})\| = \begin{cases} \|\nabla\phi\|, & j = 1 \\ \|\nabla\tilde{\phi}\|, & j = 2, \\ \|\zeta\nabla\phi + \nabla\tilde{\phi}\|, & j = 3 \end{cases} \quad \forall \phi, \tilde{\phi} \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$(\nabla\Theta_j(\phi, \phi), \nabla\phi) = \begin{cases} \|\nabla\phi\|^2, & j = 1 \\ \|\nabla\phi\|^2, & j = 2, \\ (1 + \zeta)\|\nabla\phi\|^2, & j = 3 \end{cases} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

□

**Proposição 2.3.** *Considerando as hipóteses  $(\mathbf{H}_1)$  e  $(\mathbf{H}_3)$  e assumindo*

$$\delta \geq \frac{\alpha\rho}{2\kappa_2}, \quad j = 2,$$

*o operador  $A_j$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$  semigrupo de contrações em  $\mathbb{H}_j$ .*

*Demonstração.* De acordo com o Corolário 1.48, o resultado será provado se mostrarmos que

- (i)  $\mathcal{A}_j$  é um operador dissipativo e
- (ii)  $I - \mathcal{A}_j$  é sobrejetor.

*Prova de (i).* Nesse momento, é conveniente estudarmos os três casos separadamente.

$j = 1$ . Seja  $U = (u, v, w, \eta_1) \in D(\mathcal{A}_1)$ . Aplicando o Teorema de Green e a fórmula de integração por partes, segue que:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_1 U, U)_{\mathbb{H}_1} &= \varkappa_1(\nabla w, \nabla v) - \left( \nabla \left[ \gamma_1 u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_1(s) ds + \beta_1 v \right], \nabla(w + \alpha v) \right) \\
&\quad + \omega_1(\nabla w + \alpha \nabla v, \nabla v + \alpha \nabla u) - \int_0^\infty \mu'(s)(\nabla v - \nabla \eta_{1s}(s), \nabla \eta_1(s)) ds \\
&\quad + \int_0^\infty \mu(s)(\nabla v - \nabla \eta_{1s}(s), \alpha \nabla \eta_1(s) + \nabla v) ds \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \mu(s)(\nabla w, \alpha \nabla \eta_1(s) + \nabla v) ds \\
&= -\alpha \int_0^\infty \mu(s)(\nabla \eta_1(s), \nabla v) ds + \alpha \int_0^\infty \mu(s)(\nabla v, \nabla \eta_1(s)) ds \\
&\quad - \int_0^\infty \mu'(s)(\nabla v, \nabla \eta_1(s)) ds + \int_0^\infty \mu'(s)(\nabla \eta_1(s), \nabla v) ds \\
&\quad + \int_0^\infty \mu(s)(\nabla w, \nabla \eta_1(s)) ds - \int_0^\infty \mu(s)(\nabla \eta_1(s), \nabla w) ds \\
&\quad + \underbrace{\left( \varkappa_1 - \beta_1 + \omega_1 + \frac{\rho}{\alpha} \right)}_{=0} (\nabla w, \nabla v) + \underbrace{(\omega_1 \alpha - \gamma_1)}_{=0} (\nabla u, \nabla w) \\
&\quad + \underbrace{(\omega_1 \alpha^2 - \gamma_1 \alpha)}_{=0} (\nabla u, \nabla v) + (\rho + \omega_1 \alpha - \beta_1 \alpha) \|\nabla v\|^2 \\
&\quad - \alpha \int_0^\infty \mu(s)(\nabla \eta_{1s}(s), \nabla \eta_1(s)) ds \\
&\quad + \int_0^\infty \mu'(s)(\nabla \eta_{1s}(s), \nabla \eta_1(s)) ds \\
&= -\alpha \varkappa_1 \|\nabla v\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu''(s) \|\nabla \eta_1(s)\|^2 ds - \frac{\alpha}{2} \|\nabla \eta_1(s)\|_{\mathbb{M}}^2 \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que  $\mathcal{A}_1$  é dissipativo.

$j = 2$ . De maneira análoga ao caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_2 U, U)_{\mathbb{H}_2} &= \varkappa_2 (\nabla w, \nabla v) - \left( \nabla \left[ \gamma_2 u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_2(s) ds + \beta_2 v \right], \nabla w + \alpha \nabla v \right) \\
&\quad + \omega_2 (\nabla w, \nabla v) + \alpha \omega_2 (\nabla w, \nabla u) + \omega_2 \alpha \|\nabla v\|^2 + \omega \alpha^2 (\nabla v, \nabla u) + (w, \eta_2)_{\mathbb{M}_\mu} \\
&\quad - (\eta_{2s}, \eta_2)_{\mathbb{M}_\mu} \\
&= \underbrace{(\varkappa_2 - \beta_2 + \omega_2)}_{=0} (\nabla w, \nabla v) + \underbrace{(-\gamma_2 + \alpha \omega_2)}_{=0} (\nabla u, \nabla w) + \underbrace{(\omega \alpha^2 - \gamma_2 \alpha)}_{=0} (\nabla u, \nabla v) \\
&\quad - \alpha \int_0^\infty \mu(s) (\nabla \eta_2(s), \nabla v) ds + \alpha (\omega_2 - \beta_2) \|\nabla v\|^2 \\
&\quad - \int_0^\infty \mu(s) (\nabla \eta_{2s}(s), \nabla \eta_2(s)) ds \\
&= -\alpha (\eta_2, v)_{\mathbb{M}_\mu} + \alpha (\omega_2 - \beta_2) \|\nabla v\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla \eta_2\|_{\mathbb{M}}^2. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

para todo  $U = (u, v, w, \eta_2) \in D(\mathcal{A}_2)$ .

Nesse ponto, vale ressaltar que, como o sinal do primeiro termo da última igualdade é desconhecido, foi adotado em [3] a seguinte estimativa:

$$\delta \geq \frac{\alpha \rho}{2\sigma \varkappa_2}, \quad \text{para } \sigma \in (0, 1).$$

Aqui destacamos nossa contribuição, melhorando ligeiramente essa estimativa, ao considerar

$$\delta \geq \frac{\alpha \rho}{2\varkappa_2}, \quad \text{ou seja, } \varkappa_2 - \frac{\alpha \rho}{2\delta} \geq 0. \tag{2.16}$$

Desta forma, somando e subtraindo  $\frac{\alpha^2 \rho}{2\delta} \|\nabla v\|^2$  e  $\frac{\delta}{2} \|\eta_2\|_{\mathbb{M}_\mu}^2$  em (2.15) e usando (2.16), segue que:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_2 U, U)_{\mathbb{H}_2} &= -\alpha \left( \varkappa_2 - \frac{\alpha \rho}{2\delta} \right) \|\nabla v\|^2 - \frac{1}{2} \left[ \|\eta_2\|_{\mathbb{M}}^2 - \delta \|\eta_2\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \right] \\
&\quad - \frac{\alpha^2 \rho}{2\delta} \|\nabla v\|^2 - \alpha (\eta_2, v)_{\mathbb{M}_\mu} - \frac{\delta}{2} \|\eta_2\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \\
&= -\alpha \left( \varkappa_2 - \frac{\alpha \rho}{2\delta} \right) \|\nabla v\|^2 - \frac{1}{2} \left[ \|\eta_2\|_{\mathbb{M}}^2 - \delta \|\eta_2\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \right] \\
&\quad - \left\| \sqrt{\frac{\delta}{2}} \eta_2 + \frac{\alpha}{\sqrt{2\delta}} v \right\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

$j = 3$  : Repetindo o mesmo processo dos casos anteriores, inferimos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_3 U, U)_{\mathbb{H}_3} &= \varkappa_3(\nabla w, \nabla v) - \alpha \|w\|^2 - \alpha \zeta(w, v) + \zeta \|w\|^2 + \zeta^2(w, v) \\
&\quad - \left( \nabla \left[ \gamma_3 u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_3(s) ds + \beta_3 v \right], \nabla(w + \zeta v) \right) \\
&\quad + \omega_3(\nabla w, \nabla v) + \omega_3 \zeta(\nabla w, \nabla v) + \omega_3 \zeta \|\nabla v\|^2 + \omega_3 \zeta^2(\nabla v, \nabla u) \\
&\quad + \zeta(v, \eta_3)_{\mathbb{M}_\mu} + (w, \eta_3)_{\mathbb{M}_\mu} - (\eta_{3s}, \eta_3)_{\mathbb{M}_\mu} + \zeta \alpha(w, v) - \zeta^2(w, v) \\
&= \underbrace{(\varkappa_3 - \beta_3 + \omega_3)}_{=0}(\nabla w, \nabla v) + \underbrace{(\omega_3 \zeta^2 - \gamma_3 \zeta)}_{=0}(\nabla u, \nabla v) + \underbrace{(\omega_3 \zeta - \gamma_3)}_{=0}(\nabla u, \nabla w) \\
&\quad - \int_0^\infty \mu(s)(\nabla \eta_3(s), \nabla w) ds + \int_0^\infty \mu(s)(\nabla w, \nabla \eta_3(s)) ds \\
&\quad + \zeta \int_0^\infty \mu(s)(\nabla v, \nabla \eta_3(s)) ds - \zeta \int_0^\infty \mu(s)(\nabla \eta_3(s), \nabla v) ds \\
&\quad + (\zeta - \alpha) \|w\|^2 + (\zeta \omega_3 - \beta_3 \zeta) \|\nabla v\|^2 - \int_0^\infty \mu(s)(\nabla \eta_{3s}(s), \nabla \eta_3(s)) ds \\
&= -(\alpha - \zeta) \|w\|^2 - \zeta \varkappa_3 \|\nabla v\|^2 - \frac{1}{2} \|\eta_3\|_{\mathbb{M}}^2 \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

para todo  $U = (u, v, w, \eta_3) \in D(\mathcal{A}_3)$ .

Portanto, a prova da dissipatividade está completa.

*Prova de (ii).* Seja  $f_j = (f_j^1, f_j^2, f_j^3, f_j^4) \in \mathbb{H}_j$ . Devemos mostrar a existência de um vetor  $U_j = (u, v, w, \eta_j) \in D(\mathcal{A}_j)$  tal que

$$\begin{cases} u - v = f_j^1, \\ v - w = f_j^2, \\ w + \alpha w - \Delta \left[ \gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j v \right] = f_j^3, \\ \eta_{js} + \eta_j - \Theta_j(v, w) = f_j^4. \end{cases} \quad (2.17)$$

O processo de construção de uma solução de (2.52) com a regularidade desejada é extensa e por isso vamos seguir os passos descritos abaixo:

Passo 1: Construir um vetor  $u \in H_0^1(\Omega)$  utilizando o Teorema de Lax-Milgram.

Passo 2: Construir vetores  $v, w \in H_0^1(\Omega)$  que satisfazem as equações (2.17)<sub>1</sub> e (2.17)<sub>2</sub>.

Passo 3: Construir uma função  $\eta_j \in D(\mathcal{L})$  que verifica a equação (2.17)<sub>4</sub>.

Passo 4: Mostrar que

$$\gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j v \in H^2(\Omega)$$

e que a equação (2.17)<sub>3</sub> é satisfeita.

No que segue, denotaremos por  $c$  todas as constantes positivas que dependem apenas

dos parâmetros do sistema (2.17).

*Passo 1:* Considere, para todo  $j = 1, 2, 3$ , a forma sesquilinear

$$\begin{aligned} \Lambda_j : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, \tilde{u}) &\longmapsto \Lambda_j(u, \tilde{u}) = (1 + \alpha)(u, \tilde{u}) + (\gamma_j + \beta_j)(\nabla u, \nabla \tilde{u}) + C_\mu(\nabla \Theta_j(u, u), \nabla \tilde{u}) \end{aligned}$$

e o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_j : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{u} &\longmapsto \mathcal{J}_j(\tilde{u}) = (1 + \alpha)(f_j^1 + f_j^2, \tilde{u}) + \beta_j(\nabla f_j^1, \nabla \tilde{u}) + (f_j^3, \tilde{u}) - (\Upsilon f_j^4, \tilde{u})_{\mathbb{M}_\mu} \\ &\quad + C_\mu(\nabla \Theta_j(f_j^1, f_j^1 + f_j^2), \nabla \tilde{u}), \end{aligned}$$

onde  $C_\mu = \int_0^\infty \mu(s)(1 - e^{-s})ds$  e  $\Upsilon$  é dado em (1.4).

A fim de utilizar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.7), provaremos que, para todo  $j = 1, 2, 3$ :

- $\Lambda_j$  é contínua e coerciva em  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ;
- $\mathcal{J}_j$  é contínuo em  $H_0^1(\Omega)$ .

De fato, do Lema 2.2, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Poincaré, temos:

$$\begin{aligned} |\Lambda_j(u, \tilde{u})| &\leq (1 + \alpha)|(u, \tilde{u})| + (\gamma_j + \beta_j)|(\nabla u, \nabla \tilde{u})| + C_\mu|(\nabla \Theta_j(u, u), \nabla \tilde{u})| \\ &\leq (1 + \alpha)\|u\|\|\tilde{u}\| + (\gamma_j + \beta_j)\|\nabla u\|\|\nabla \tilde{u}\| + C_\mu(1 + \zeta)(\|\nabla u\| + \|\nabla u\|)\|\nabla \tilde{u}\| \\ &\leq \frac{(1 + \alpha)}{\lambda^2}\|\nabla u\|\|\nabla \tilde{u}\| + (\gamma_j + \beta_j)\|\nabla u\|\|\nabla \tilde{u}\| + 2C_\mu(1 + \zeta)\|\nabla u\|\|\nabla \tilde{u}\| \\ &\leq C\|\nabla u\|\|\nabla \tilde{u}\|, \end{aligned}$$

para todo  $u, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ , que prova a continuidade de  $\Lambda_j$ . Além disso, para  $u \in H_0^1(\Omega)$  segue que:

$$\begin{aligned} \Lambda_j(u, u) &= (1 + \alpha)(u, u) + (\gamma_j + \beta_j)(\nabla u, \nabla u) + C_\mu(\nabla \Theta_j(u, u), \nabla u) \\ &\geq (1 + \alpha)\|u\|^2 + (\gamma_j + \beta_j)\|\nabla u\|^2 + C_\mu\|\nabla u\|^2 \\ &\geq C_\mu\|\nabla u\|^2, \end{aligned}$$

o que prova a coercividade de  $\Lambda_j$ .

Agora, para todo  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  vemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{J}_j(\tilde{u})| &\leq (1 + \alpha)|(f_j^1 + f_j^2, \tilde{u})| + \beta_j |(\nabla f_j^1, \nabla \tilde{u})| + |(f_j^3, \tilde{u})| + |(\Upsilon f_j^4, \tilde{u})_{\mathbb{M}_\mu}| \\
&\quad + C_\mu |(\nabla \Theta_j(f_j^1, f_j^1 + f_j^2), \nabla \tilde{u})| \\
&\leq \frac{(1 + \alpha)}{\lambda} \|f_j^1 + f_j^2\| \|\nabla \tilde{u}\| + \beta_j \|\nabla f_j^1\| \|\nabla \tilde{u}\| + \frac{1}{\lambda} \|f_j^3\| \|\nabla \tilde{u}\| \\
&\quad + \rho^{1/2} \|\Upsilon f_j^4\|_{\mathbb{M}_\mu} \|\nabla \tilde{u}\| + C_\mu \|\nabla \Theta_j(f_j^1, f_j^1 + f_j^2)\| \|\nabla \tilde{u}\| \\
&\leq \frac{(1 + \alpha)}{\lambda} \|f_j^1 + f_j^2\| \|\nabla \tilde{u}\| + \beta_j \|\nabla f_j^1\| \|\nabla \tilde{u}\| + \frac{1}{\lambda} \|f_j^3\| \|\nabla \tilde{u}\| \\
&\quad + \rho^{1/2} \|f_j^4\|_{\mathbb{M}_\mu} \|\nabla \tilde{u}\| + (1 + \zeta)(\|f_j^1\| + \|f_j^1 + f_j^2\|) \|\nabla \tilde{u}\| \\
&\leq c \|\nabla \tilde{u}\|.
\end{aligned}$$

Aqui, utilizamos novamente o Lema 2.2, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Poincaré, além da Proposição 1.43. Assim, pelo Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.7) existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$\Lambda_j(u, \tilde{u}) = \mathcal{J}_j(\tilde{u}), \quad \forall \tilde{u} \in H_0^1(\Omega). \quad (2.18)$$

*Passo 2:* Defina

$$v = u - f_j^1, \quad w = u - f_j^1 - f_j^2. \quad (2.19)$$

Por definição, as equações (2.17)<sub>1</sub> e (2.17)<sub>2</sub> são satisfeitas. Além disso, como  $u, f_j^1, f_j^2 \in H_0^1(\Omega)$ , obtemos que  $v, w \in H_0^1(\Omega)$ .

*Passo 3:* Defina

$$\eta_j(s) = \Upsilon f_j^4(s) + (1 - e^{-s})\Theta_j(v, w), \quad s > 0. \quad (2.20)$$

Afirmamos que  $\eta_j \in D(\mathcal{L})$  e satisfaz (2.17)<sub>4</sub>. De fato, temos

$$\eta_j(0) = \underbrace{\Upsilon f_j^4(0)}_{=0} + (1 - e^0)\Theta_j(v, w) = 0.$$

Além disso, pela Proposição 1.43 e do Lema 2.2 segue que

$$\begin{aligned}
\|\eta_j\|_{\mathbb{M}} &\leq \|\Upsilon f_j^4\|_{\mathbb{M}} + \left( \int_0^\infty -\mu'(s)(1 - e^{-s})^2 ds \right)^{1/2} \|\nabla \Theta_j(v, w)\| \\
&\leq \|f_j^4\|_{\mathbb{M}} + \mu(0)^{1/2}(1 + \zeta)(\|\nabla v\| + \|\nabla w\|) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$



Na sequência, vamos calcular  $\eta_{js}$  em termos de funções conhecidas:

$$\begin{aligned}
\eta_{js}(s) &= \frac{d}{ds} \left[ \int_0^s e^{-(s-r)} f_j^4(r) dr + (1 - e^{-s}) \Theta_j(v, w) \right] \\
&= - \int_0^s e^{-(s-r)} f_j^4(r) dr + f_j^4(s) + e^{-s} \Theta_j(v, w) \\
&= - \int_0^s e^{-(s-r)} f_j^4(r) dr + f_j^4(s) + e^{-s} \Theta_j(v, w) - \Theta_j(v, w) + \Theta_j(v, w) \\
&= - \left[ \int_0^s e^{-(s-r)} dr + (1 - e^{-s}) \Theta_j(v, w) \right] + f_j^4(s) + \Theta_j(v, w) \\
&= -\eta_j + f_j^4(s) + \Theta_j(v, w),
\end{aligned}$$

para todo  $s > 0$ . Então,  $\eta_{js} \in \mathbb{M}$  e a equação (2.17)<sub>4</sub> é satisfeita.

*Passo 4:* De (2.18), (2.19) e (2.20) temos

$$\left\langle \Delta \left[ \gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j v \right], \tilde{u} \right\rangle = \langle (1 + \alpha)w - f_j^3, \tilde{u} \rangle, \quad \forall \tilde{u} \in H_0^1(\Omega),$$

o que implica que

$$\Delta \left[ \gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j v \right] = (1 + \alpha)w - f_j^3 \quad \text{em } H^{-1}(\Omega). \quad (2.21)$$

Por outro lado, como  $(1 + \alpha)w - f_j^3 \in L^2(\Omega)$ , segue de (2.21) que

$$\gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s) \eta_j(s) ds + \beta_j v \in H^2(\Omega).$$

Mais ainda, rearranjando os elementos de (2.21), concluímos que a equação (2.17)<sub>3</sub> é satisfeita, o que finaliza a prova de (ii). Portanto, a prova da Proposição 2.3 está concluída.  $\square$

Agora estamos em condições de provar o Teorema de existência.

### Demonstração do Teorema 2.1

Observemos inicialmente que, para cada  $j = 1, 2, 3$ ,  $\mathcal{F}_j$  é uma função localmente Lipschitziana em  $\mathbb{H}_j$ . De fato, seja  $R > 0$  e  $U, \tilde{U} \in \mathbb{H}_j$  tal que  $\|U\|_{\mathbb{H}_j}, \|\tilde{U}\|_{\mathbb{H}_j} \leq R$ . Da observação 2.1.1, inferimos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_j(U) - \mathcal{F}_j(\tilde{U})\|_{\mathbb{H}_j} &= \|f(v + \alpha_j u) - f(\tilde{v} + \alpha_j \tilde{u})\| \\
&\leq C_R \|\nabla(v + \alpha_j u) - \nabla(\tilde{v} + \alpha_j \tilde{u})\| \\
&\leq C_R \|U - \tilde{U}\|_{\mathbb{H}_j}
\end{aligned}$$

para algum  $C_R > 0$ . Assim, de posse da Proposição 2.3 podemos aplicar o Teorema 1.55 para garantir a existência de uma função  $U_j$ , satisfazendo (i) e (ii) em um intervalo maximal  $[0, t_{\max})$ ,

onde  $t_{\max}$  satisfaz a seguinte propriedade: se  $t_{\max} < +\infty$ , então

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \|U_j(t)\|_{\mathbb{H}_j} = +\infty. \quad (2.22)$$

Com o intuito de provar que a solução  $U_j$  é global, ou equivalentemente, que  $t_{\max} = +\infty$ , provemos que  $U_j$  não cumpre (2.22). Para isso, é suficiente mostrar que  $U_j(t)$  é uniformemente limitada em  $\mathbb{H}_j$ . As contas realizadas abaixo serão feitas para a solução clássica, as quais serão válidas para soluções generalizadas via argumentos de densidade.

Consideremos o funcional de energia associado ao problema (2.9)-(2.11):

$$E_j(U(t)) := \|U(t)\|_{\mathbb{H}_j}^2 + 2 \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(x) + \alpha_j u(x)) dx, \quad (2.23)$$

onde  $U(t) = (u(t), u_t(t), u_{tt}(t), \eta_j^t) \in \mathbb{H}_j$  e  $t \geq 0$ . Multiplicando (2.9)<sub>1</sub> por  $u_{tt} + \alpha_j u_t$ , integrando por partes e usando (2.9)<sub>2</sub>, obtemos

$$\frac{d}{dt} E_j(U(t)) = -2D_j(U(t)), \quad t \in (0, t_{\max}), \quad (2.24)$$

onde  $D_j$  é definido por:

$$D_j(U) = \begin{cases} \alpha \varkappa_1 \|\nabla u_t\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\eta_1\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu''(s) \|\nabla \eta_1(s)\|^2 ds, & j = 1, \\ \alpha \nu \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2} \left[ \|\eta_2\|_{\mathbb{M}}^2 - \delta \|\eta_2\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \right] + \left\| \sqrt{\frac{\delta}{2}} \eta_2 + \frac{\alpha}{\sqrt{2\delta}} u_t \right\|_{\mathbb{M}_\mu}^2, & j = 2, \\ \zeta \varkappa_3 \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta_3\|_{\mathbb{M}}^2 + (\alpha - \zeta) \|u_{tt}\|^2, & j = 3, \end{cases} \quad (2.25)$$

sendo

$$\nu = \left( \varkappa_2 - \frac{\alpha \rho}{2\delta} \right). \quad (2.26)$$

Integrando (2.24) em  $(0, t)$ ,  $t \in (0, t_{\max})$ , tendo em conta que  $D_j(U(t)) \geq 0$  e usando (H<sub>2</sub>), deduzimos

$$\|U(t)\|_{\mathbb{H}_j}^2 \leq E_j(U(t)) \leq E_j(U(0)) \leq C \left( 1 + \|U_0\|_{\mathbb{H}_j}^4 \right), \quad \forall t \in (0, t_{\max}), \quad (2.27)$$

o que prova a limitação desejada. Logo, (2.22) não é válido, o que implica que  $t_{\max} = +\infty$ . Portanto, a prova do Teorema 2.1 está completa.

## 2.3 Estabilidade exponencial

Nesta seção estudaremos a estabilidade exponencial do funcional de energia  $E_j(U(t))$  dado em (2.23). De (2.24) pode-se ver que  $E_j(U(t))$  é não crescente com  $E_j(U(t)) \leq E_j(U(0))$  para todo  $t > 0$ , desde que as hipóteses do Teorema 2.1 de existência sejam válidas.

A prova do nosso resultado principal (Teorema 2.4) se baseia em algumas estimativas técnicas envolvendo a solução clássica  $U = (u, u_t, u_{tt}, \eta_j)$  de (2.9)-(2.11).

Todos os resultados abaixo permanecem válidos para soluções generalizadas, uma vez que eles podem ser obtidos por argumentos de densidade.

Para não carregar a notação do trabalho e simplificar a leitura do mesmo, em alguns momentos o índice  $j = 1, 2, 3$ , que indexa o tipo de memória abordada, será omitido. O principal resultado dessa seção é o seguinte.

**Teorema 2.4** (Estabilidade exponencial). *Assuma as hipóteses  $(\mathbf{H}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_2)$  e  $(\mathbf{H}_3)$ .*

- (i) (Estabilidade - memória do tipo 1) *Para qualquer  $R > 0$  tal que  $\|U_0\|_{\mathbb{H}_1} \leq R$ , existem  $c_0 > 0$  e  $\varrho_1 = \varrho_1(R) > 0$  tal que*

$$E_1(U(t)) \leq c_0 E_1(U(0)) e^{-\varrho_1 t},$$

*para todo  $t > 0$ .*

- (ii) (Estabilidade - memória do tipo 2) *Assuma, além disso, que*

$$\delta > \frac{\alpha \rho}{2\kappa_2}.$$

*Então, para qualquer  $R > 0$  tal que  $\|U_0\|_{\mathbb{H}_2} \leq R$ , existe  $\varrho_2 = \varrho_2(R) > 0$  tal que*

$$E_2(U(t)) \leq c_0 E_2(U(0)) e^{-\varrho_2 t},$$

*para todo  $t > 0$ .*

- (iii) (Estabilidade uniforme - memória do tipo 3) *Existe  $\varrho_3 > 0$  tal que*

$$E_3(U(t)) \leq c_0 E_3(U(0)) e^{-\varrho_3 t},$$

*para todo  $t > 0$ .*

### 2.3.1 Estimativas técnicas

Com o intuito de utilizar o método da perturbação de energia, introduzimos a seguir os funcionais que atuarão como perturbações e apresentamos uma estimativa adequada para cada um deles. Nos próximos Lemas,  $c_p$  denotará a constante proveniente da desigualdade de Poincaré, dada em (1.2).

**Lema 2.5.** *O funcional*

$$\Phi_j(t) = (u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), u_t(t) + \alpha_j u(t)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.28)$$

satisfaz as estimativas

$$|\Phi_j(t)| \leq cE_j(U(t)) \quad (2.29)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_j(t) &\leq -\omega_j \left(1 - \frac{a_j}{c_p}\right) \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2 + \frac{2\alpha}{\alpha_j} \|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{\alpha_j}{4\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_j}\right)^2 \|u_{tt}(t)\|^2 + (\omega_j - \beta_j)^2 \frac{c_p}{\omega_j a_j} \|\nabla u_t(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{\rho c_p}{\omega_j a_j} \|\eta_j^t\|_{M_\mu}^2 - \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \alpha_j u(t)) dx, \end{aligned} \quad (2.30)$$

para todo  $t > 0$ .

*Demonstração.* Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Young e a desigualdade de Poincaré, segue que:

$$\begin{aligned} |\Phi_j(t)| &\leq \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\| \|u_t(t) + \alpha_j u(t)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2c_p} \|\nabla u_t(t) + \alpha \nabla u_t(t)\|^2 \\ &\leq c (\|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 + \omega_j \|\nabla u_t(t) + \alpha \nabla u_t(t)\|^2) \\ &\leq cE_j(U(t)) \end{aligned}$$

para todo  $j = 1, 2, 3$ . Por outro lado, derivando  $\Phi_j(t)$  com respeito a  $t$ , usando a equação (2.9)<sub>1</sub> e usando a técnica de integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_j(t) &= -\omega_j \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2 + \frac{\alpha}{\alpha_j} \|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 \\ &\quad - \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \alpha_j u(t)) dx + \sum_{i=1}^4 J_i(t), \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que

$$\begin{aligned} J_1(t) &:= (\omega_j - \beta_j) (\nabla u_t(t), \nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)), \\ J_2(t) &:= - \int_0^\infty \mu(s) (\nabla \eta_j^t(s), \nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)) ds, \\ J_3(t) &:= \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_j}\right) (u_{tt}(t), u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)), \\ J_4(t) &:= - \int_{\Omega} \left[ f(u_t(t) + \alpha_j u(t)) (u_t(t) + \alpha_j u(t)) - \widehat{f}(u_t(t) + \alpha_j u(t)) \right] dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{\omega_j a_j}{4c_p} > 0$ , temos

$$|J_1(t)| \leq \frac{c_p(\omega_j - \beta_j)^2}{\omega_j a_j} \|\nabla u_t(t)\|^2 + \frac{\omega_j a_j}{4c_p} \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2$$

e

$$\begin{aligned} |J_2(t)| &\leq \left( \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta_j^t(s)\| ds \right) \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\| \\ &\leq \frac{\rho c_p}{\omega_j a_j} \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \frac{\omega_j a_j}{4c_p} \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2. \end{aligned}$$

Para estimar  $J_3(t)$ , aplicamos a desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{\alpha}{\alpha_j} > 0$  para obter

$$|J_3(t)| \leq \frac{\alpha_j}{4\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_j}\right)^2 \|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{\alpha}{\alpha_j} \|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2.$$

Nesse ponto, consideremos a desigualdade (2.6) para obter

$$\begin{aligned} |J_4(t)| &\leq \frac{\omega_j a_j}{2} \|u_t(t) + \alpha_j u(t)\|^2 \\ &\leq \frac{\omega_j a_j}{2c_p} \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2. \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas de  $J_1(t)$ ,  $J_2(t)$ ,  $J_3(t)$  e  $J_4(t)$  em (2.31), concluímos o resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.6.** *Considerando o seguinte funcional*

$$\begin{aligned} \Psi_j(t) &= -(u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), \int_0^\infty \mu(s) \eta_j^t(s) ds) \\ &\quad - \left( \frac{\alpha_j - \zeta}{\alpha - \zeta} \right) \left( \frac{1 - (-1)^j}{2\alpha} \right) \rho(u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), u_t(t)), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Então,

$$|\Psi_j(t)| \leq c E_j(U(t)) \tag{2.32}$$

e para cada  $R > 0$ , existe  $c_R > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_j(t) &\leq -\frac{\rho}{2} m \|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + 4\varepsilon \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2 \\ &\quad + c_R \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left[ \|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \right], \end{aligned} \tag{2.33}$$

para qualquer  $\varepsilon > 0$  e  $t > 0$ , em que  $m = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha} \right\}$ .

*Demonstração.* Utilizando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Young e a desigualdade

de Poincaré, segue para  $j = 1$  que:

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(t)| &\leq \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\| \left\| \int_0^\infty \mu(s) \eta_1^t(s) ds \right\| + \frac{\rho}{\alpha} \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\| \|u_t(t)\| \\
&\leq \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2\alpha} \right) \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty \mu(s) \|\eta_1^t(s)\| ds \right)^2 + \frac{1}{2c_p} \|\nabla u_t(t)\|^2 \\
&\leq \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2\alpha} \right) \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 + \frac{\rho}{2c_p^2} \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta_1^t(s)\|^2 ds + \frac{1}{2c_p} \|\nabla u_t(t)\|^2 \\
&\leq \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2\alpha} \right) \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 - \frac{\rho}{2c_p^2 \delta} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta_1^t(s)\|^2 ds + \frac{1}{2c_p} \|\nabla u_t(t)\|^2 \\
&\leq cE_1(U(t)).
\end{aligned}$$

Para  $j = 2, 3$ , segue que

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(t)| &\leq \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\| \left\| \int_0^\infty \mu(s) \eta_1^t(s) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty \mu(s) \|\eta_1^t(s)\| ds \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 + \frac{\rho}{2c_p^2} \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta_1^t(s)\|^2 ds \\
&\leq cE_j(U(t)).
\end{aligned}$$

Derivando  $\Psi_j(t)$  com respeito a  $t$ , usando o sistema (2.9) e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi_j(t) &= \left\| \int_0^\infty \mu(s) \nabla \eta_j^t(s) ds \right\|^2 + (\beta_j - \omega_j) \int_0^\infty \mu(s) (\nabla u_t(t), \nabla \eta_j^t(s)) ds \\
&\quad + \omega_j \int_0^\infty \mu(s) (\nabla \eta_j^t(s), \nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)) ds \\
&\quad + \int_0^\infty \mu(s) (f(u_t(t) + \alpha_j u(t)), \eta_j^t(s)) ds \\
&\quad + \int_0^\infty \mu(s) (u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), \eta_{js}^t(s)) ds \\
&\quad - \rho (u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), \Theta_j(u_t, u_{tt})(t)) \\
&\quad - \left( \frac{\alpha_j - \zeta}{\alpha - \zeta} \right) \left( \frac{1 - (-1)^j}{2\alpha} \right) \rho \frac{d}{dt} (u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), u_t(t)). \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Sejam  $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$  duas constantes a serem determinadas posteriormente. Usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young, podemos estimar os primeiros quatro elementos de (2.34) como segue abaixo:

- $\left\| \int_0^\infty \mu(s) \nabla \eta_j^t(s) ds \right\|^2 \leq \rho \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2,$
- $\int_0^\infty \mu(s) (\nabla u_t(t), \nabla \eta_j^t(s)) ds \leq \frac{1}{2} \left[ \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \rho \|\nabla u_t\|^2 \right],$
- $\int_0^\infty \mu(s) (\nabla \eta_j^t(s), \nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)) ds \leq \frac{\rho}{4\varepsilon} \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \varepsilon \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2,$

$$\bullet \int_0^\infty \mu(s)(f(u_t(t) + \alpha_j u(t)), \eta_j^t(s)) ds \leq \frac{C_R}{4\varepsilon} \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \varepsilon \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2.$$

Além disso, o quinto termo de (2.34) pode ser estimado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \mu(s)(u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), \eta_j^t(s)) ds \\ & \leq \tilde{\varepsilon} \|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + \frac{\mu(0)}{2c_p} \left( \frac{2\tilde{\varepsilon} + 1}{2\tilde{\varepsilon}} \right) \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{(\alpha - \alpha_j)}{c_p} \|\nabla u_t\|^2. \end{aligned}$$

Então, coletando as estimativas acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_j(t) & \leq \tilde{\varepsilon} \|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + 2\varepsilon \|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2 \\ & \quad + c \|\nabla u_t(t)\|^2 + c_R \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right) \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + K_j(t), \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que

$$\begin{aligned} K_j(t) & = -\rho(u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), \Theta_j(u_t, u_{tt})(t)) \\ & \quad - \left( \frac{\alpha_j - \zeta}{\alpha - \zeta} \right) \left( \frac{1 - (-1)^j}{2\alpha} \right) \rho \frac{d}{dt} (u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), u_t(t)). \end{aligned}$$

Neste momento, trataremos separadamente os três casos de memória.

Caso  $j = 1$ . Calculando  $\frac{d}{dt}(u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), u_t(t))$  e usando (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} K_1(t) & = -\frac{\rho}{\alpha_1} \|u_{tt}(t) + \alpha_1 u_t(t)\|^2 + \frac{\rho \omega_1}{\alpha_1} (\nabla u_t(t) + \alpha_1 \nabla u(t), \nabla u_t(t)) \\ & \quad + \frac{\rho}{\alpha_1} \int_0^\infty \mu(s) (\nabla \eta_1^t(s), \nabla u_t(t)) ds + \frac{\rho}{\alpha_1} (\beta_1 - \omega_1) \|\nabla u_t(t)\|^2 \\ & \quad + \frac{\rho}{\alpha_1} (f(u_t(t) + \alpha_1 u(t), u_t(t))). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young, deduzimos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \omega_1}{\alpha_1} (\nabla u_t(t) + \alpha_1 \nabla u(t), \nabla u_t(t)) & \leq \varepsilon \|\nabla u_t(t) + \alpha_1 \nabla u(t)\|^2 + \frac{\rho^2 \omega_1^2}{4\alpha_1^2 \varepsilon} \|\nabla u_t(t)\|^2, \\ \frac{\rho}{\alpha_1} \int_0^\infty \mu(s) (\nabla \eta_1^t(s), \nabla u_t(t)) ds & \leq \frac{\rho^2}{2\alpha_1} \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \frac{\rho}{2\alpha_1} \|\nabla u_t(t)\|^2, \\ \frac{\rho}{\alpha_1} (f(u_t(t) + \alpha_1 u(t), u_t(t))) & \leq \frac{c_R}{4\varepsilon} \|\nabla u_t(t)\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_t(t) + \alpha_1 \nabla u(t)\|^2, \end{aligned}$$

Combinando essas estimativas com (2.36),

$$\begin{aligned} K_1(t) & \leq -\frac{\rho}{\alpha_1} \|u_{tt}(t) + \alpha_1 u_t(t)\|^2 + 2\varepsilon \|\nabla u_t(t) + \alpha_1 \nabla u(t)\|^2 + c \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \\ & \quad + c_R \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \|\nabla u_t(t)\|^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

De (2.35)<sub>j=1</sub>, (2.37) e escolhendo  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\rho}{2\alpha_1} > 0$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_1(t) &\leq -\frac{\rho}{2\alpha_1}\|u_{tt}(t) + \alpha_1 u_t(t)\|^2 + 4\varepsilon\|\nabla u_t(t) + \alpha_1 \nabla u(t)\|^2 \\ &\quad + c_R \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left[\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2\right] \\ &\leq -m\frac{\rho}{\alpha_1}\|u_{tt}(t) + \alpha_1 u_t(t)\|^2 + 4\varepsilon\|\nabla u_t(t) + \alpha_1 \nabla u(t)\|^2 \\ &\quad + c_R \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left[\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2\right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Casos  $j = 2, 3$ . Uma simples aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Young nos permite deduzir que

$$\begin{aligned} K_j(t) &= -\rho\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + \rho\alpha_j(u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t), u_t(t)) \\ &\leq -\frac{\rho}{2}\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + \frac{\rho\alpha_j^2}{2c_p}\|\nabla u_t(t)\|^2 \\ &\leq -m\rho\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + \frac{\rho\alpha_j^2}{2c_p}\|\nabla u_t(t)\|^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Combinando (2.39) com (2.35)<sub>j=2,3</sub> e escolhendo  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\rho}{4} > 0$ , deduzimos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_j(t) &\leq -\frac{\rho}{4}\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + 2\varepsilon\|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2 \\ &\quad + c\|\nabla u_t(t)\|^2 + c_R \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \\ &\leq -\frac{\rho}{2}m\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 + 2\varepsilon\|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2 \\ &\quad + c\|\nabla u_t(t)\|^2 + c_R \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Assim, de (2.38) e (2.40) chegamos ao resultado desejado.  $\square$

**Lema 2.7.** *Seja  $R > 0$  dado. Então, o funcional*

$$G_j(t) := \frac{\rho\alpha_j}{6\alpha}m\Phi_j(t) + \Psi_j(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.41)$$

satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G_j(t) &\leq -\frac{\rho\alpha_j\omega_j}{24} \left(1 - \frac{a_j}{c_p}\right) m\|\nabla u_t(t) + \alpha_j \nabla u(t)\|^2 - \frac{\rho}{6}m\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{\rho\alpha_j}{6\alpha}m \int_{\Omega} \hat{f}(u_t(t) + \alpha_j u(t))dx + \frac{\rho}{24} \left(\frac{\alpha_j}{\alpha} - 1\right)^2 m\|u_{tt}(t)\|^2 \\ &\quad + c_R \left[\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2\right], \end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ , em que  $m = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right\}$ .



*Demonstração.* Derivando  $G_j(t)$  e levando em conta as estimativas (2.30) e (2.33), segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_j(t) &= \frac{\rho\alpha_j}{6\alpha}m\frac{d}{dt}\Phi_j(t) + \frac{d}{dt}\Psi_j(t) \\
&\leq -\left[\frac{\rho\alpha_j\omega_j}{6\alpha}\left(1 - \frac{a_j}{c_p}\right)m - 4\varepsilon\right]\|\nabla u_t(t) + \alpha_j\nabla u(t)\|^2 \\
&\quad - \frac{\rho}{6}m\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 - \frac{\rho\alpha_j}{6\alpha}m\int_{\Omega}\widehat{f}(u_t(t) + \alpha_j u(t))dx \\
&\quad + \frac{\rho}{24}\left(\frac{\alpha_j}{\alpha} - 1\right)^2 m\|u_{tt}(t)\|^2 + c_R\left[\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2\right]. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\varepsilon := \frac{\rho\alpha_j\omega_j}{32\alpha}\left(1 - \frac{a_j}{c_p}\right)m > 0,$$

obtemos de (2.42) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_j(t) &\leq -\frac{\rho\alpha_j\omega_j}{24}\left(1 - \frac{a_j}{c_p}\right)m\|\nabla u_t(t) + \alpha_j\nabla u(t)\|^2 - \frac{\rho}{6}m\|u_{tt}(t) + \alpha_j u_t(t)\|^2 \\
&\quad - \frac{\rho\alpha_j}{6\alpha}m\int_{\Omega}\widehat{f}(u_t(t) + \alpha_j u(t))dx + \frac{\rho}{24}\left(\frac{\alpha_j}{\alpha} - 1\right)^2 m\|u_{tt}(t)\|^2 \\
&\quad + c_R\left[\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2\right].
\end{aligned}$$

□

Agora, estamos em condições de provar o resultado principal desta seção.

### 2.3.2 Demonstração do Teorema 2.4

Consideremos o funcional de energia perturbada

$$\mathcal{E}_j(t) := \begin{cases} N_j E_j(U(t)) + G_j(t), & j = 1, 2, \\ N_3 E_3(U(t)) + \Phi_3(t), & j = 3, \end{cases} \tag{2.43}$$

em que  $N_j$  é uma constante positiva a ser determinada posteriormente,  $G_j(t)$  é dado em (2.41) e  $\Phi_3$  é definido em (2.28). Tal funcional satisfaz a seguinte propriedade: para cada  $j = 1, 2, 3$ , existe  $N_j > 0$  tal que

$$\tilde{c}_1 E_j(U(t)) \leq \mathcal{E}_j(t) \leq \tilde{c}_2 E_j(U(t)). \tag{2.44}$$

De fato, para  $j = 1, 2$ , ao considerar (2.29) <sub>$j=1,2$</sub>  e (2.32) <sub>$j=1,2$</sub> , segue que

$$|\mathcal{E}_j(t) - N_j E_j(t)| = |G_j(t)| \leq \frac{\rho\alpha_j m}{6\alpha}|\Phi_j(t)| + |\Psi_j(t)| \leq c E_j(U(t)).$$

Para  $j = 3$ , de (2.32) <sub>$j=3$</sub>  segue que

$$|\mathcal{E}_3(t) - N_3 E_3(t)| = |\Psi_3(t)| \leq c E_j(U(t)), \quad j = 1, 2, 3.$$

Assim, em todo caso temos

$$(N_j - c)E_j(U(t)) \leq \mathcal{E}_j(t) \leq (N_j + c)E_j(U(t)), \quad j = 1, 2, 3.$$

Portanto, (2.44) segue tomando  $N_j > c$  na estimativa anterior.

Vamos separar a prova de acordo com cada valor de  $j$ .

**Prova item (i).**

Calculando a derivada de  $\mathcal{E}_1(t)$ , usando (2.25) <sub>$j=1$</sub>  e o Lema 2.7, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t) &= N_1 \frac{d}{dt} E_1(U(t)) + \frac{d}{dt} G_1(t) \\ &\leq -2N_1 \alpha \varkappa_1 \|\nabla u_t(t)\|^2 - \alpha N_1 \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2 - N_1 \int_0^\infty \mu''(s) \|\nabla \eta_1^t(s)\|^2 ds \\ &\quad - \frac{\rho \alpha \omega_1}{24} \left(1 - \frac{a_1}{c_p}\right) m \|\nabla u_t(t) + \alpha \nabla u(t)\|^2 - \frac{\rho}{6} m \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{\rho}{6} m \int_\Omega \widehat{f}(u_t(t) + \alpha u(t)) dx + c_R \|\nabla u_t(t)\|^2 + c_R \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \\ &\leq -\frac{\rho \alpha \omega_1}{24} \left(1 - \frac{a_1}{c_p}\right) m \|\nabla u_t(t) + \alpha \nabla u(t)\|^2 - \frac{\rho}{6} m \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{\rho}{6} m \int_\Omega \widehat{f}(u_t(t) + \alpha u(t)) dx - (N_1 \alpha \varkappa_1 - c_R) \|\nabla u_t(t)\|^2 \\ &\quad - \left(\frac{N_1 \alpha}{2} - \frac{c_R}{\delta}\right) \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2 - \frac{N_1}{2} \int_0^\infty \mu''(s) \|\nabla \eta_1^t(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Tomando  $N_1 > \frac{c_R}{\alpha} \max\left\{\frac{1}{\varkappa_1}, \frac{2}{\delta}\right\} > 0$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t) &\leq -c_R \|\nabla u_t(t) + \alpha \nabla u(t)\|^2 - c_R \|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 \\ &\quad - c_R \int_\Omega \widehat{f}(u_t(t) + \alpha u(t)) dx - c_R \|\nabla u_t(t)\|^2 - c_R \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Utilizando (2.5), podemos estimar

$$\begin{aligned} -\|\nabla u_t(t)\|^2 - \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2 &= -\frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2 - \frac{1}{2} (\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2) \\ &\leq -\frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2 - \frac{1}{2} \min\left\{1, \frac{1}{\delta}\right\} (\|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2). \end{aligned}$$

Mais ainda, aplicando o Lema 1.2, observamos que, para todo  $c_1, c_2 > 0$ , existem  $q > p > 0$  tais que

$$\begin{aligned} p \left[ \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 \right] &\leq \|c_1 \eta_j^t + c_2 u_t(t)\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 \\ &\leq q \left[ \|\eta_j^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

o que implica que

$$-\|\nabla u_t(t)\|^2 - \|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2 \leq -\frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|\eta_1^t\|_{\mathbb{M}}^2 - c(\|\alpha\eta_j^t + u_t(t)\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2), \quad (2.47)$$

para algum  $c > 0$ . De (2.45) e (2.47) segue que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t) \leq -c_R E_1(U(t)). \quad (2.48)$$

Neste momento, escolhemos  $N_1 > \frac{c_R}{\alpha} \max\left\{\frac{1}{\varkappa_1}, \frac{2}{\delta}\right\} > 0$  tal que  $N_1$  também satisfaça (2.44). Desta forma, combinando (2.44) e (2.48), concluímos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t) \leq -\varrho_1 \mathcal{E}_1(t), \quad (2.49)$$

para algum  $\varrho_1 = \varrho_1(R) > 0$ . Portanto, de (2.44) e (2.49) chegamos ao resultado desejado com

$$c_0 := \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} > 0. \quad (2.50)$$

**Prova item (ii).**

Calculando a derivada de  $\mathcal{E}_2(t)$  e usando (2.25) <sub>$j=2$</sub> , juntamente com o Lema 2.7 e (2.26), segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_2(t) &= N_2 \frac{d}{dt}E_2(U(t)) + \frac{d}{dt}G_2(t) \\ &\leq -2N_2\alpha\tau\|\nabla u_t(t)\|^2 - N_2(\|\eta_2^t\|_{\mathbb{M}}^2 - \delta\|\eta_2^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2) - 2N_2 \left\| \sqrt{\frac{\delta}{2}}\eta_2^t + \frac{\alpha}{\sqrt{2\delta}}u_t(t) \right\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \\ &\quad - \frac{\rho\alpha\omega_2}{24} \left(1 - \frac{a_2}{c_p}\right) m \|\nabla u_t(t) + \alpha\nabla u(t)\|^2 - \frac{\rho}{6}m\|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{\rho}{6}m \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \alpha u(t))dx + c_R(\|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\eta_2^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2) \\ &\leq -\frac{\rho\alpha_2\omega_2}{24} \left(1 - \frac{a_2}{c_p}\right) m \|\nabla u_t(t) + \alpha\nabla u(t)\|^2 - \frac{\rho}{6}m\|u_{tt}(t) + \alpha u_t(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{\rho}{6}m \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \alpha u(t))dx - (2N_2\alpha\tau - c_R)\|\nabla u_t(t)\|^2 \\ &\quad + c_R\|\eta_2^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 - 2N_2 \left\| \sqrt{\frac{\delta}{2}}\eta_2^t + \frac{\alpha}{\sqrt{2\delta}}u_t(t) \right\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 - N_2 \left[ \|\eta_2^t\|_{\mathbb{M}}^2 - \delta\|\eta_2^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \right]. \end{aligned}$$

Considerando  $N_2 > \frac{c_R}{\alpha\tau} > 0$  e usando (2.46) <sub>$j=2$</sub>  concluímos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_2(t) \leq -c_R E_2(U(t)).$$

Agora, escolhendo  $N_2 > \frac{c_R}{\alpha\tau} > 0$  de tal forma que (2.44) também seja válida, segue que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_2(t) \leq -\varrho_2 \mathcal{E}_2(t), \quad (2.51)$$

para algum  $\varrho_2 = \varrho_2(R) > 0$ . Assim, de (2.51) e (2.44) chegamos ao resultado desejado com  $c_0$  dado em (2.50)

**Prova item (iii).**

Pelo Lema 2.5 e (2.25) <sub>$j=3$</sub> , deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_3(t) &\leq -\omega_3 \left(1 - \frac{a_3}{c_p}\right) \|\nabla u_t(t) + \zeta \nabla u(t)\| - \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \zeta u(t)) dx \\ &\quad + \frac{2\alpha}{\zeta} \|u_{tt}(t) + \zeta u_t(t)\|^2 + \frac{\zeta}{4\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{\zeta}\right)^2 \|u_{tt}(t)\|^2 + (\omega_3 - \beta_3)^2 \frac{c_p}{\omega_3 a_3} \|\nabla u_t(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{\rho c_p}{\omega_3 a_3} \|\eta_3^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \\ &\leq -\omega_3 \left(1 - \frac{a_3}{c_p}\right) \|\nabla u_t(t) + \zeta \nabla u(t)\|^2 - \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \zeta u(t)) dx \\ &\quad + cD_3(U(t)), \end{aligned} \quad (2.52)$$

para alguma constante  $c > 0$ . Assim, de (2.24) <sub>$j=3$</sub>  e (2.52) segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_3(t) &= N_3 \frac{d}{dt} E_3(U(t)) + \frac{d}{dt} \Phi_3(t) \\ &\leq -(2N_3 - c) D_3(U(t)) \\ &\quad - \omega_3 \left(1 - \frac{a_3}{c_p}\right) \|\nabla u_t(t) + \zeta \nabla u(t)\|^2 - \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \zeta u(t)) dx \\ &\leq -(2N_3 - c) (\zeta \varkappa_3 \|\nabla u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta_3^t\|_{\mathbb{M}}^2 + (\alpha - \zeta) \|u_{tt}(t)\|^2) \\ &\quad - \omega_3 \left(1 - \frac{a_3}{c_p}\right) \|\nabla u_t(t) + \zeta \nabla u(t)\|^2 - \int_{\Omega} \widehat{f}(u_t(t) + \zeta u(t)) dx. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -\|\nabla u_t(t)\|^2 - \|u_{tt}(t)\|^2 &= -\frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_{tt}(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_{tt}(t)\|^2 \\ &\leq -\frac{c_p}{2\zeta} \|\zeta u_t(t)\|^2 - \|u_{tt}(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_{tt}(t)\|^2 \\ &\leq -c(\|u_{tt}(t)\|^2 + \|\zeta u_t(t)\|^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 + \|u_{tt}(t)\|^2) \\ &\leq -c(\|u_{tt}(t) + \zeta u_t(t)\|^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 + \|u_{tt}(t)\|^2). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Assim, combinando (2.53) com (2.54), escolhendo  $N_3 > \frac{c}{2} > 0$  e usando (2.25) <sub>$j=3$</sub> , deduzimos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_3(t) \leq -cE_3(U(t)).$$

Portanto, tomando  $N_3 > \frac{c}{2} > 0$  de tal forma que (2.44) também seja válida, obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_3(t) \leq -\varrho_3 \mathcal{E}_3(t), \quad (2.55)$$

para algum  $\varrho_3 = \varrho_3(R) > 0$ . Logo, de (2.55) e (2.44) chegamos ao resultado desejado com  $c_0$  dado em (2.50) e, assim, a prova do Teorema 2.4 está completa.  $\square$

## 2.4 Observações adicionais

### 2.4.1 Estabilidade para MGT com memória tipo 3: caso crítico

A equação de Moore Gibson Thompson com memória do tipo 3 é exponencialmente estável no caso crítico  $\varkappa = 0$ . De fato, considerando os parâmetros

$$\alpha_3^* = \alpha = \frac{c^2}{b}, \quad \beta_3^* = b - \rho, \quad \gamma_3^* = \alpha_3^* \beta_3^*, \quad \varkappa_3^* = 0, \quad \omega_3^* = \beta_3^*,$$

o sistema (2.9)-(2.11) pode ser reescrito como uma equação de onda semilinear com memória:

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta \left[ \beta_3^* z + \int_0^\infty \mu(s) \eta(s) ds \right] + f(z) = 0, \\ \eta_t + \eta_s = z_t, \end{cases}$$

onde,

$$z := u_t + \alpha_3^* u. \quad (2.56)$$

Agora, consideramos para  $N > 0$ ,

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) := N \tilde{E}(z(t)) + G_3(t), \quad N > 0,$$

sendo  $G_3(t)$  definido como (2.41)<sub>j=3</sub> e

$$\tilde{E}(z(t), z_t(t), \eta^t) := \frac{1}{2} \|z_t(t)\|^2 + \frac{\beta_3^*}{2} \|\nabla z(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta^t\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 + \int_\Omega F(z(x)) dx.$$

Note que, para qualquer  $R > 0$  tal que  $\tilde{E}(0) \leq R$ , existe  $N = N(R) > 0$ , grande o suficiente que verifica

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{E}}_N(t) \leq -c \tilde{\mathcal{E}}_N(t), & t > 0, \\ \frac{\tilde{c}_0}{2} \tilde{E}(z(t)) \leq \tilde{\mathcal{E}}_N(t) \leq \frac{3\tilde{c}_0}{2} \tilde{E}(z(t)), & t > 0, \end{cases}$$

para algumas constantes  $c > 0$  e  $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_0(R) > 0$ , implicando que  $\tilde{E}(z(t))$  decai exponencialmente para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Por outro lado, uma vez que a norma

$$\begin{aligned} |(u(t), u_t(t), u_{tt}(t), \eta^t)|_{\mathbb{H}_3}^2 &:= \tilde{E}(u_t(t) + \alpha u(t), u_{tt}(t) + \alpha u_t(t), u_{ttt}(t) + \alpha u_{tt}(t), \eta^t) \\ &\quad - \int_\Omega F(u_t(x, t) + \alpha u(x, t)) dx + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|^2 \end{aligned}$$

seja equivalente à norma usual de  $\mathbb{H}_3$ , podemos resolver a EDO (2.56) para obter uma estabilidade exponencial para  $E_3(U(t))$ . Veja [52, Seção 5] para mais detalhes.

### 2.4.2 Boa colocação e estabilidade em $\tilde{\mathbb{H}}_j$

Conforme apontado em [3], é possível obter resultados de existência e estabilidade (exponencial) para (2.9)-(2.11) em um espaço de fase alternativo, a saber,

$$\tilde{\mathbb{H}} := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{M}_\mu,$$

em que  $\mathbb{M}_\mu := \mathbb{M}_\mu(H_0^1(\Omega))$ . Para isso, consideremos as seguintes suposições para  $\mu$ :

( $\tilde{\mathbf{H}}_1$ )  $\mu \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$  com massa total  $\rho := \int_0^\infty \mu(s)ds > 0$ ,  $\mu'$  uma função absolutamente contínua e existe  $\delta > 0$  tal que

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0, \quad s > 0. \quad (2.57)$$

No que segue  $\tilde{\mathbb{H}}_j$  denotará o espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$  equipado pela topologia dada pelo produto interno

$$(U, \tilde{U})_{\tilde{\mathbb{H}}_j} := \begin{cases} (U, \tilde{U})_{\mathbb{H}_1} - \int_0^\infty \mu'(s)(\nabla\eta_1(s), \nabla\tilde{\eta}_1(s))ds, & j = 1, \\ (U, \tilde{U})_{\mathbb{H}_j}, & j = 2, 3. \end{cases}$$

Como provado em [3], se são válidas ( $\tilde{\mathbf{H}}_1$ ), ( $\mathbf{H}_2$ ) e  $\delta \geq \frac{\alpha\rho}{2\kappa_2\nu}$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , então o operador  $\tilde{\mathcal{A}}_j := \mathcal{A}_j$ , cuja lei de formação é definida em (2.13) e com domínio

$$D(\tilde{\mathcal{A}}_j) = \left\{ \begin{array}{l} (u, v, w, \eta_j) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times D(\mathcal{L}_\mu); \\ \gamma_j u + \int_0^\infty \mu(s)\eta_j(s)ds + \beta_j v \in H^2(\Omega) \end{array} \right\},$$

em que  $\mathcal{L}_\mu : D(\mathcal{L}_\mu) \subset \mathbb{M}_\mu \rightarrow \mathbb{M}_\mu$  é o operador linear

$$\mathcal{L}_\mu\eta = -\eta_s, \quad \eta \in D(\mathcal{L}_\mu) = \{\eta \in \mathbb{M}_\mu \mid \eta_s \in \mathbb{M}_\mu, \eta(0) = 0\},$$

gera um semigrupo de contração em  $\tilde{\mathbb{H}}_j$ . Eles também obtiveram a seguinte relação

$$(\tilde{\mathcal{A}}_j U, U)_{\tilde{\mathbb{H}}_j} = -\tilde{D}_j(U), \quad \forall U = (u, v, w, \eta_j) \in D(\tilde{\mathcal{A}}_j),$$

em que

$$\tilde{D}_j(U) = \begin{cases} \alpha\kappa\|\nabla v\|^2 - \int_0^\infty \mu'(s)(\nabla\eta_1(s), \nabla v)ds + \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \mu'(s)\|\nabla\eta_1(s)\|^2 ds, & j = 1, \\ D_j(U), & j = 2, 3. \end{cases} \quad (2.58)$$

Devido as hipóteses assumidas, segue que o operador  $\tilde{\mathcal{A}}_j$  é dissipativo para  $j = 2, 3$ . No entanto, para verificar a dissipatividade de  $\tilde{\mathcal{A}}_1$ , os autores em [3] assumiram adicionalmente que

$$\mu(0) \leq \nu_0\alpha^2\kappa, \quad (2.59)$$

para algum  $\nu_0 \in (0, 1]$ . Então, combinando (2.59) com uma desigualdade de Young adequada, obtiveram

$$(\tilde{\mathcal{A}}_1 U, U)_{\tilde{\mathbb{H}}_1} \leq - \left( \alpha \varkappa - \frac{\mu(0)}{\nu_0 \alpha} \right) \|\nabla v\|^2 - \frac{\delta \alpha}{2} (1 - \nu_0) \|\eta_1\|_{\mathbb{M}_\mu}^2,$$

que implica a dissipatividade de  $\tilde{\mathcal{A}}_1$ .

Motivados por estes cálculos, podemos melhorar minimamente as condições sobre  $\mu(0)$  para que  $\tilde{\mathcal{A}}_1$  ainda seja dissipativo. Com efeito, suponhamos que

$$\mu(0) \leq 2\alpha^2 \varkappa. \quad (2.60)$$

Adicionando e subtraindo  $\frac{\mu(0)}{2\alpha} \|\nabla v\|^2$  em (2.58) <sub>$j=1$</sub>  e usando (2.57), obtemos

$$(\tilde{\mathcal{A}}_1 U, U)_{\mathbb{H}_1} \leq - \left( \alpha \varkappa - \frac{\mu(0)}{2\alpha} \right) \|\nabla v\|^2 - \frac{\delta}{2\alpha} \|v + \alpha \eta_1\|_{\mathbb{M}_\mu}^2 \leq 0,$$

o que prova a dissipatividade desejada. Portanto, reescrevendo (2.9)-(2.11) como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U = \tilde{\mathcal{A}}_j U + \tilde{\mathcal{F}}_j(U), & t > 0, \\ U(0) = (u_0, u_1, u_2, \eta_{j0})^T = U_0, \end{cases} \quad (2.61)$$

onde  $\tilde{\mathcal{F}}_j = \mathcal{F}_j$  é dado em (2.14) e seguindo as ideias usadas na Seção 2.2, ampliamos (e melhoramos ligeiramente) os resultados estabelecidos em [3]. Os resultados são apresentados nos próximos Teoremas.

**Teorema 2.8** (Boa colocação). *Supondo  $(\tilde{\mathbf{H}}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_2)$ ,  $(\mathbf{H}_3)$  e assumindo que*

- $\mu(0) \leq 2\alpha^2 \varkappa$  acontece para  $j = 1$ ,
- $\delta \geq \frac{\alpha \rho}{2\varkappa_2}$  acontece para  $j = 2$ ,

obtemos

- (i) Se  $U_0 \in \tilde{\mathbb{H}}_j$ , então o problema (2.61) tem uma única solução generalizada  $U \in C([0, \infty), \tilde{\mathbb{H}}_j)$  dada por

$$U(t) = e^{t\tilde{\mathcal{A}}_j} U_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\tilde{\mathcal{A}}_j} \tilde{\mathcal{F}}_j(U(\tau)) d\tau, \quad t \geq 0,$$

onde  $e^{t\tilde{\mathcal{A}}_j}$  denota o  $C_0$  semigrupo gerado por  $\tilde{\mathcal{A}}_j$ .

- (ii) Se  $U_0 \in D(\tilde{\mathcal{A}}_j)$ , então a solução generalizada  $U$  é clássica e satisfaz

$$U \in C([0, \infty), D(\tilde{\mathcal{A}}_j)) \cap C^1([0, \infty), \tilde{\mathbb{H}}_j).$$

□

Agora, definindo

$$\tilde{E}_j(U(t)) := \|U(t)\|_{\mathbb{H}_j}^2 + 2 \int_{\Omega} F(u_t(x) + \alpha_j u(x)) dx,$$

e aplicando a mesma estratégia utilizada na Seção 2.3, estabelecemos o seguinte resultado de estabilidade.

**Teorema 2.9** (Estabilidade exponencial). *Suponha  $(\tilde{\mathbf{H}}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_2)$  e  $(\mathbf{H}_3)$ .*

(i) (Estabilidade - memória do tipo 1) *Assuma adicionalmente que*

$$\mu(0) < 2\alpha^2 \varkappa.$$

*Então, para  $R > 0$  satisfazendo  $\|U_0\|_{\tilde{\mathbb{H}}_1} \leq R$ , existem  $c_0 > 0$  e  $\varpi_1 = \varpi_1(R) > 0$  tais que*

$$\tilde{E}_1(U(t)) \leq c_0 \tilde{E}_1(U(0)) e^{-\varpi_1 t}, \quad t > 0.$$

(ii) (Estabilidade - memória do tipo 2) *Em adição, suponha que*

$$\delta > \frac{\alpha \rho}{2\varkappa_2}.$$

*Então, para  $R > 0$  satisfazendo  $\|U_0\|_{\tilde{\mathbb{H}}_2} \leq R$ , existem  $c_0 > 0$  e  $\varpi_2 = \varpi_2(R) > 0$  tais que*

$$\tilde{E}_2(U(t)) \leq c_0 \tilde{E}_2(U(0)) e^{-\varpi_2 t}, \quad t > 0.$$

(iii) (Estabilidade uniforme - memória do tipo 3) *Existem  $c_0 > 0$  e  $\varpi_3 > 0$  tais que*

$$\tilde{E}_3(U(t)) \leq c_0 \tilde{E}_3(U(0)) e^{-\varpi_3 t}, \quad t > 0.$$

□

**Observação 2.4.1.** Ao contrário dos resultados obtidos nas Seções 2.2 e 2.3, considerando a topologia de  $\mathbb{H}_j$ , nenhuma informação sobre  $\mu''$  é necessária. Por outro lado, ao assumir a desigualdade (2.60), restringimos o valor de  $\mu(0)$  em função de  $\varkappa$ . No caso linear e com memória finita ( $t_0 = 0$  e  $f \equiv 0$ ), a desigualdade (2.60) pode ser melhorada para núcleos de memória não necessariamente convexos, veja por exemplo [23].



## Um modelo de Timoshenko-Boltzmann completamente dissipativo

Dado  $L > 0$ , considere o seguinte sistema de Timoshenko-Boltzmann

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa [\phi_{xx} + \psi_x] + \kappa \int_0^\infty g_1(s) [\phi_{xx} + \psi_x](\cdot - s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + b \int_0^\infty g_2(s) \psi_{xx}(\cdot - s) ds + \kappa [\phi_x + \psi] \\ \quad - \kappa \int_0^\infty g_1(s) [\phi_x + \psi](\cdot - s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.1)$$

com condições de Dirichlet

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.3)$$

Considerando as variáveis de *deslocamento da história passada*

$$\begin{cases} \eta^t(x, s) := \phi(x, t) - \phi(x, t - s), & (x, t, s) \in [0, L] \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta^t(x, s) := \psi(x, t) - \psi(x, t - s), & (x, t, s) \in [0, L] \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

podemos reescrever (3.1)-(3.3) como um sistema autônomo equivalente, dado por,

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - \kappa \omega_1 [\phi_{xx} + \psi_x] - \kappa \int_0^\infty g_1(s) [\eta_{xx} + \zeta_x](s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \omega_2 \psi_{xx} - b \int_0^\infty g_2(s) \zeta_{xx}(s) ds + \kappa \omega_1 [\phi_x + \psi] \\ \quad + \kappa \int_0^\infty g_1(s) [\eta_x + \zeta](s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s = \phi_t, & \text{em } [0, L] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta_t + \zeta_s = \psi_t, & \text{em } [0, L] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.4)$$

com condições de fronteira

$$\begin{cases} \phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, \\ \eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, & (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta^t(x, 0) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta^t(0, s) = \zeta^t(L, s) = 0, & (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta^t(x, 0) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.5)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L), \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), & (x, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \zeta^0(x, s) = \zeta_0(x, s), & (x, s) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.6)$$

em que

$$\omega_1 := 1 - \int_0^{+\infty} g_1(s) ds \quad \text{e} \quad \omega_2 := 1 - \int_0^{+\infty} g_2(s) ds.$$

Com o intuito de estudar a existência de solução do sistema (3.4)-(3.6) e sua estabilidade exponencial, consideraremos as seguintes definições de núcleo admissível e de  $\delta$ -condição, proposta por Conti, Dell'Oro e Pata em [21], que serão utilizadas com recorrência durante o texto.

**Definição 3.1.** Uma função  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é um núcleo admissível se  $g$  é absolutamente contínua, não-crescente e integrável com

$$\int_0^{\infty} g(s) ds \in (0, 1).$$

**Definição 3.2.** Uma função  $g$  satisfaz a  $\delta$ -condição para algum  $\delta > 0$  se existe  $C \geq 1$  tal que

$$g(t + s) \leq C e^{-\delta t} g(s)$$

para todo  $t > 0$  e para quase todo  $s > 0$ .

O capítulo está organizado em duas partes: na Seção 3.1, mostramos a boa colocação de (3.4)-(3.6), o que garante a existência do semigrupo solução  $S(t)$  e demonstra o Teorema 3.5. A Seção 3.2 é dedicada a caracterização da estabilidade exponencial do semigrupo relacionado ao sistema (3.4)-(3.6) em termos do comportamento dos núcleos de memória  $g_1$  e  $g_2$ .

### 3.1 Existência e unicidade de solução

Para abordar (3.4)-(3.6), consideremos os espaços

$$\{0\} \neq \mathbb{W}_i := \begin{cases} \mathbb{M}_{g_1}(H_0^1(0, L)), & i = 1, \\ \mathbb{M}_{g_1}(L^2(0, L)) \cap \mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0, L)), & i = 2, \end{cases}$$

equipados com os respectivos produtos interno e normas

$$\begin{cases} (\eta, \xi)_{\mathbb{W}_1} := \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s), \xi_x(s)) ds, \\ \|\eta\|_{\mathbb{W}_1} := \|\eta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(H_0^1(0,L))}, \\ (\zeta, \vartheta)_{\mathbb{W}_2} := \int_0^\infty g_2(s)(\zeta_x(s), \vartheta_x(s)) ds + \int_0^\infty g_1(s)(\zeta(s), \vartheta(s)) ds, \\ \|\zeta\|_{\mathbb{W}_2}^2 := \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2. \end{cases}$$

**Observação 3.1.1.** Utilizando as mesmas ideias de [37, Sect. 3], pode-se mostrar que o operador

$$\mathcal{L}_i : D(\mathcal{L}_i) \subset \mathbb{W}_i \rightarrow \mathbb{W}_i$$

dado por

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}_i) = \{\xi \in \mathbb{W}_i; \xi_s \in \mathbb{W}_i, \xi(0) = 0\}, \\ \mathcal{L}_i \xi = -\xi_s, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

gera um semigrupo de translações  $R_i(t) : \mathbb{W}_i \rightarrow \mathbb{W}_i$  definido por

$$[R_i(t)\xi](s) := \begin{cases} \xi(s-t), & s > t, \\ 0, & 0 < s \leq t. \end{cases}$$

Com a expressão explícita para  $R_i(t)$  é possível escrever o deslocamento de história  $\eta$  e  $\zeta$  em termos de  $\phi$  e  $\psi$

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \eta^0(s-t) + \phi(t) - \phi_0, & s \geq t, \\ \phi(t) - \phi(t-s), & s < t, \end{cases} \quad (3.7)$$

e

$$\zeta^t(s) = \begin{cases} \zeta^0(s-t) + \psi(t) - \psi_0, & s \geq t, \\ \psi(t) - \psi(t-s), & s < t. \end{cases} \quad (3.8)$$

Como consequência pode-se recuperar no sentido variacional o problema original (3.1)-(3.3) de (3.4)-(3.6).

Agora, considere o espaço de fase

$$\mathbb{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathbb{W}_1 \times \mathbb{W}_2 \quad (3.9)$$

equipado com o produto interno

$$\begin{aligned} (z_1, z_2)_{\mathbb{H}} &= \kappa\omega_1(\phi_x^1 + \psi^1, \phi_x^2 + \psi^2) + b\omega_2(\psi_x^1, \psi_x^2) + \rho_1(u^1, u^2) + \rho_2(v^1, v^2) \\ &\quad + \kappa(\eta_x^1 + \zeta^1, \eta_x^2 + \zeta^2)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} + b(\zeta^1, \zeta^2)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} \end{aligned} \quad (3.10)$$

e norma

$$\|z\|_{\mathbb{H}}^2 = \kappa\omega_1\|\phi_x + \psi\|^2 + b\omega_2\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|u\|^2 + \rho_2\|v\|^2 + \kappa\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + b\|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \quad (3.11)$$

onde,  $z_i = (\phi^i, u^i, \psi^i, v^i, \eta^i, \zeta^i)$ ,  $z = (\phi, u, \psi, v, \eta, \zeta) \in \mathbb{H}$ , sendo esta norma equivalente à norma usual de (3.9). Assim, denotando  $u = \phi_t$ ,  $v = \psi_t$  e  $z_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0, \zeta_0)$ , podemos deduzir de (3.4)-(3.6) o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} z_t = \mathcal{A}z, & t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3.12)$$

em que o operador linear  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  é definido por

$$\mathcal{A}z = \begin{bmatrix} u \\ \frac{1}{\rho_1} \left[ \kappa\omega_1[\phi_{xx} + \psi_x] + \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{xx} + \zeta_x)(s) ds \right] \\ v \\ \frac{1}{\rho_2} \left[ b\omega_2\psi_{xx} + b \int_0^\infty g_2(s)\zeta_{xx}(s)ds - \kappa\omega_1(\phi_x + \psi) - \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s)ds \right] \\ u - \eta_s \\ v - \zeta_s \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

cujo domínio consiste de todo vetor  $z = (\phi, u, \psi, v, \eta, \zeta)$  pertencente ao espaço  $\mathbb{H}$  tal que

$$\left[ \omega_1\phi_x + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s)ds \right]_x, \left[ \omega_2\psi_x + \int_0^\infty g_2(s)\zeta_x(s)ds \right]_x \in L^2(0, L). \quad (3.14)$$

A fim de obtermos resultados de existência e unicidade para o problema (3.12), investigaremos a seguir algumas propriedades a cerca do operador  $\mathcal{A}$ . Com o intuito de aplicar o Corolário 1.48 mostraremos que  $\mathcal{A}$  é um operador dissipativo e  $I - \mathcal{A}$  é sobrejetor. Além disso, ressaltamos que a hipótese  $g_1(s) \leq mg_2(s)$  estará presente nos resultados a seguir para garantir a equivalência da norma (3.11) com a normal usual de (3.9).

**Lema 3.3** (Dissipatividade). *Sejam  $g_1, g_2$  núcleos admissíveis de acordo com a Definição 3.1 tais que  $g_1(s) \leq mg_2(s)$ , para quase todo  $s > 0$ . Então*

$$\operatorname{Re}(Az, z)_{\mathbb{H}} = \frac{b}{2} \int_0^\infty g_2'(s)\|\zeta_x(s)\|_2^2 ds + \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty g_1'(s)\|(\eta_x + \zeta)(s)\|_2^2 ds \leq 0,$$

para todo  $z \in D(\mathcal{A})$ .

*Demonstração.* Seja  $(\phi, u, \psi, v, \eta, \zeta) \in D(\mathcal{A})$ . Logo,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}z, z)_{\mathbb{H}} &= \rho_1 \left( \frac{1}{\rho_1} \left[ \kappa\omega_1(\phi_{xx} + \psi_x) + \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{xx} + \zeta_x)(s)ds \right], u \right) \\
&+ \rho_2 \left( \frac{1}{\rho_2} \left[ b\omega_2\psi_{xx} + b \int_0^\infty g_2(s)\zeta_{xx}(s)ds - \kappa\omega_1(\phi_x + \psi) \right], v \right) \\
&- \kappa\rho_2 \left( \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s)ds, v \right) + \kappa\omega_1(u_x + v, \phi_x + \psi) + b\omega_2(v_x, \psi_x) \\
&+ b(v - \zeta_s, \zeta)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} + \kappa(u_x - \eta_{sx} + v - \zeta_s, \eta_x + \zeta)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} \\
&= \kappa\omega_1(u_x + v, \phi_x + \psi) - \overline{\kappa\omega_1(u_x + v, \phi_x + \psi)} \\
&+ \kappa(u_x + v, \eta_x + \zeta)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} - \overline{\kappa(u_x + v, \eta_x + \zeta)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}} \\
&+ b\omega_2(v_x, \psi_x) - \overline{b\omega_2(v_x, \psi_x)} \\
&+ b(v, \zeta)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} - \overline{b(v, \zeta)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}} \\
&- \overline{b(\zeta_s, \zeta)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}} + \kappa(\eta_{sx} - \zeta_s, \eta_x + \zeta)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}.
\end{aligned}$$

Tendo em vista que, para  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w - \bar{w} = 2i \operatorname{Im} w$ , obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}z, z)_{\mathbb{H}} &= 2\kappa\omega_1 i \operatorname{Im}(u_x + v, \phi_x + \psi) + 2\kappa i \operatorname{Im}(u_x + v, \eta_x + \zeta)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} \\
&+ 2b\omega_2 i \operatorname{Im}(v_x, \psi_x) + 2bi \operatorname{Im}(v, \zeta)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} \\
&- b(\zeta_s, \zeta)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} + \kappa(\eta_{sx} - \zeta_s, \eta_x + \zeta)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real em ambos os lados, aplicando as técnicas de integração por partes e as condições de fronteira, obtemos

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathbb{H}} = \frac{b}{2} \int_0^\infty g_2'(s) \|\zeta_x(s)\|_2^2 ds + \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty g_1'(s) \|(\eta_x + \zeta)(s)\|_2^2 ds \leq 0.$$

Portanto,  $\mathcal{A}$  é dissipativo. □

**Lema 3.4** (Sobrejetividade). *Sejam  $g_1, g_2$  núcleos admissíveis de acordo com a Definição 3.1 tais que  $g_1(s) \leq m g_2(s)$ , para quase todo  $s > 0$ . Então, o operador  $I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  é sobrejetor.*

*Demonstração.* Seja  $f = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathbb{H}$ . Para mostrar a sobrejetividade desejada, precisamos encontrar um vetor  $z = (\phi, u, \psi, v, \eta, \zeta) \in D(\mathcal{A})$  tal que

$$\begin{cases} \phi - u = f^1, \\ u - \frac{1}{\rho_1} \left[ \kappa\omega_1(\phi_{xx} + \psi_x) + \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{xx} + \zeta_x)(s)ds \right] = f^2, \\ \psi - v = f^3, \\ v - \frac{1}{\rho_2} \left[ b\omega_2\psi_{xx} + b \int_0^\infty g_2(s)\zeta_{xx}(s)ds - \kappa\omega_1(\phi_x + \psi) - \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s)ds \right] = f^4, \\ \eta - [u - \eta_s] = f^5, \\ \zeta - [v - \zeta_s] = f^6. \end{cases}$$

(3.15)

O processo de construção de uma solução de (3.15) com a regularidade desejada é extensa e por isso vamos seguir os quatro passos descritos abaixo:

Passo 1: Construir um par  $(\phi, \psi) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$  utilizando o Teorema de Lax-Milgram.

Passo 2: Construir um par  $(u, v) \in H_0^1(0, L)$  satisfazendo as equações (3.15)<sub>1</sub> e (3.15)<sub>3</sub>.

Passo 3: Construir uma função  $\eta \in D(\mathcal{L}_1)$  que verifica a equação (3.15)<sub>5</sub> e  $\zeta \in D(\mathcal{L}_2)$  que verifica a equação (3.15)<sub>6</sub>.

Passo 4: Mostrar que (3.14) é válido e que as equações (3.15)<sub>2</sub> e (3.15)<sub>4</sub> são satisfeitas.

Seguindo esse algoritmo, temos.

*Passo 1:* Seja  $V := H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$  equipado com a norma

$$\|(\phi, \psi)\|_V = \|\phi_x + \psi\| + \|\psi_x\|.$$

Considere a forma sesquilinear

$$\Lambda : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\Lambda((\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})) = \rho_1(\phi, \tilde{\phi}) + \rho_2(\psi, \tilde{\psi}) + b(\omega_2 + c_{g_2})(\psi_x, \tilde{\psi}_x) + \kappa(\omega_1 + c_{g_1})(\phi_x + \psi, \tilde{\phi}_x + \tilde{\psi})$$

e o funcional linear  $F : V \longrightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\begin{aligned} F(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) &= \rho_1(f^1 + f^3, \tilde{\phi}) + \rho_2(f^2 + f^4, \tilde{\psi}) + bc_{g_2}(f_x^2, \tilde{\psi}_x) + \kappa c_{g_1}(f^2 + f_x^1, \tilde{\psi} + \tilde{\phi}_x) \\ &\quad - \kappa \left( \Upsilon(f_x^5 + f^6), \tilde{\phi}_x + \tilde{\psi} \right)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0, L))} - b \left( \Upsilon f^6, \tilde{\psi} \right)_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0(0, L))} \end{aligned}$$

em que

$$c_{g_i} := 1 - \int_0^\infty g_i(s) e^{-s} ds = \omega_i + \int_0^\infty g_i(s) (1 - e^{-s}) ds > 0, \quad i = 1, 2.$$

A fim de utilizar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.7), provaremos que:

- a)  $\Lambda$  é contínua e coerciva;
- b)  $F$  é contínua.

De fato, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
|\Lambda((\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}))| &\leq \rho_1 \|\phi\| \|\tilde{\phi}\| + \rho_2 \|\psi\| \|\tilde{\psi}\| + b(\omega_2 + c_{g_2}) \|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| \\
&\quad + \kappa(\omega_1 + c_{g_1}) \|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}\| \\
&\leq c \|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\phi}_x\| + c \|\psi_x\| \|\tilde{\phi}_x\| + c(\|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + \|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}\|) \\
&\leq c \|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}\| + c \|\psi_x\| \|\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}\| + c \|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\psi}_x\| + c \|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| \\
&\quad + c(\|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + \|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}\|) \\
&\leq c(\|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}\| + \|\phi_x + \psi\| \|\tilde{\psi}_x\| + \|\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}\| \|\psi_x\| + \|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\|) \\
&= c \|(\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|,
\end{aligned}$$

para todo  $(\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in V$ . Logo,  $\Lambda$  é contínua. Além disso, para todo  $(\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in V$  temos

$$\begin{aligned}
\Lambda((\phi, \psi), (\phi, \psi)) &= \rho_1 \|\phi\|^2 + \rho_2 \|\psi\|^2 + b(\omega_2 + c_{g_2}) \|\psi_x\|^2 + \kappa(\omega_1 + c_{g_1}) \|\phi_x + \psi\|^2 \\
&\geq b(\omega_2 + c_{g_2}) \|\psi_x\|^2 + \kappa(\omega_1 + c_{g_1}) \|\phi_x + \psi\|^2 \\
&\geq c \|(\phi, \psi)\|^2.
\end{aligned}$$

Assim,  $\Lambda$  é coerciva.

Utilizando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré e a Proposição 1.43, obtemos, para todo  $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in V$ ,

$$\begin{aligned}
|F(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})| &\leq \rho_1 \|f^1 + f^3\| \|\tilde{\phi}\| + \rho_2 \|f^2 + f^4\| \|\tilde{\psi}\| + bc_{g_2} \|f_x^2\| \|\tilde{\psi}_x\| \\
&\quad + \kappa c_{g_1} \|f^2 + f_x^1\| \|\tilde{\psi} + \tilde{\phi}_x\| + b(1 - \omega_2)^{1/2} \|\Upsilon f^6\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} \|\tilde{\psi}_x\| \\
&\quad + \kappa(1 - \omega_1)^{1/2} \|\Upsilon(f_x^5 + f^6)\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} \|\tilde{\psi} + \tilde{\phi}_x\| \\
&\leq c \|f\|_{\mathbb{H}} (\|\tilde{\phi}_x\| + \|\tilde{\psi}_x\| + \|\tilde{\psi} + \tilde{\phi}_x\|) \\
&\leq c \|(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_V,
\end{aligned}$$

o que prova a continuidade de  $F$ .

Agora, temos condições de aplicar o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.7) para garantir a existência de um par  $(\phi, \psi) \in V$  tal que

$$\Lambda((\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})) = F(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}), \quad \forall (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in V. \quad (3.16)$$

*Passo 2:* Defina

$$u = \phi - f^1 \quad \text{e} \quad v = \psi - f^3. \quad (3.17)$$

Por definição, as equações (3.15)<sub>1</sub> e (3.15)<sub>3</sub> são satisfeitas. Além disso, tendo em conta que  $\phi, f^1, \psi, f^3 \in H_0^1(0, L)$ , obtemos que  $u, v \in H_0^1(0, L)$ .

*Passo 3:* Defina

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})(\phi - f^1) + \Upsilon f^5(s) \quad \text{e} \quad \zeta(s) = (1 - e^{-s})(\psi - f^3) + \Upsilon f^6(s), \quad s > 0. \quad (3.18)$$

Afirmamos que  $\eta$  pertence a  $D(\mathcal{L}_1)$  e satisfaz (3.15)<sub>5</sub>. Com efeito, temos

$$\eta(0) = (1 - e^{-0})(\phi - f^1) + 0 = 0.$$

Aplicando a Proposição 1.43 no termo de convolução de  $\eta$ , obtemos

$$\|\eta\|_{\mathbb{W}_1} \leq (1 - \omega_1)^{1/2} \|\phi_x - f_x^1\| + \|\Upsilon f^5\|_{\mathbb{W}_1} \leq (1 - \omega_1)^{1/2} \|\phi_x - f_x^1\| + \|f^5\|_{\mathbb{W}_1} < \infty. \quad (3.19)$$

Na seqüência, vamos calcular  $\eta_s$  em termos de funções conhecidas. Note que

$$\begin{aligned} \eta_s(s) &= e^{-s}(\psi - f^1) + \frac{d}{ds} \int_0^s f^5(\tau) e^{-(s-r)} d\tau \\ &= e^{-s}(\psi - f^1) - \int_0^s f^5(\tau) e^{-(s-r)} d\tau + f^5(s) \\ &= - \left[ (1 - e^{-s})(\phi - f^1) + \int_0^s f^5(\tau) e^{-(s-r)} d\tau \right] + (\phi - f^1) + f^5(s) \\ &= -\eta(s) + u + f^5(s), \end{aligned}$$

para todo  $s > 0$ . Então,  $\eta \in D(\mathcal{L}_1)$  e a equação (3.15)<sub>5</sub> é satisfeita. De forma análoga, prova-se que  $\zeta \in D(\mathcal{L}_2)$  e que a equação (3.15)<sub>6</sub> é satisfeita.

*Passo 4:* Utilizando a equação (3.16) com o vetor  $(\tilde{\phi}, 0) \in V$  temos:

$$\begin{aligned} \rho_1(\phi, \tilde{\phi}) + \kappa(\omega_1 + c_{g_1})(\phi_x + \psi, \tilde{\phi}_x) &= \rho_1(f^1 + f^3, \tilde{\phi}) + \kappa c_{g_1}(f^2 + f_x^1, \tilde{\phi}_x) \\ &\quad - \kappa \left( \Upsilon(f_x^5 + f^6), \tilde{\phi}_x \right)_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}, \end{aligned}$$

Ou ainda, reorganizando os termos,

$$\begin{aligned} &\left( \kappa(\omega_1 + c_{g_1})(\phi_x + \psi) + \kappa \int_0^\infty g_1(s) [(\phi - f^1)_x(1 - e^{-s}) + \Upsilon f_x^5(s)] ds, \tilde{\phi}_x \right) \\ &+ \left( \kappa \int_0^\infty g_1(s) [(\psi - f^2)(1 - e^{-s}) + \Upsilon f^6(s)] ds, \tilde{\phi}_x \right) = -(\rho_1(\phi - f^1) - \rho_1 f^3, \tilde{\phi}). \end{aligned}$$

Utilizando agora (3.17) e (3.18), segue que:

$$\left( \kappa\omega_1(\phi_x + \psi) + \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s) ds, \tilde{\phi}_x \right) = (\rho_1 u - \rho_1 f^3, \tilde{\phi}).$$

Pela definição de derivada fraca,

$$\left[ \kappa\omega_1(\phi_x + \psi) + \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s) ds \right]_x = \rho_1 u - \rho_1 f^3,$$



ou seja,

$$\left[ \kappa \omega_1 \phi_x + \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s) ds \right]_x = \rho_1 u - \rho_1 f^3 - \kappa \omega_1 \psi_x \in L^2(0, L). \quad (3.20)$$

Analogamente, utilizando a equação (3.16) com o vetor  $(0, \tilde{\psi}) \in V$ , prova-se que

$$\begin{aligned} \left[ b \omega_2 \psi_x + b \int_0^\infty g_2(s) \zeta_x(s) ds \right]_x &= \kappa \omega_1 (\phi_x + \phi) + \rho_2 (v - f^4) \\ &+ \kappa \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s) ds \in L^2(0, L). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Portanto, de (3.20) e (3.21), as equações (3.15)<sub>2</sub> e (3.15)<sub>4</sub> são satisfeitas, bem como a condição (3.14), e assim, a prova do Lema em questão está completa.  $\square$

Portanto, uma vez que  $\mathbb{H}$  é reflexivo,  $\mathcal{A}$  é dissipativo e  $I - \mathcal{A}$  é sobrejetor, o Colorário 1.48 garante que o operador  $\mathcal{A}$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ . Desta forma, podemos utilizar a Proposição 1.53 para garantir a existência de uma solução generalizada  $z \in C(0, \infty, \mathbb{H})$  para o problema (3.12) dada por

$$z(t) = S(t)z_0, \quad t \geq 0$$

e, além disso, se  $z_0 \in D(\mathcal{A})$  então  $z$  é a solução clássica de (3.12). Mais precisamente, temos demonstrado o seguinte Teorema.

**Teorema 3.5** (Boa colocação). *Sejam  $g_1, g_2$  núcleos admissíveis de acordo com a Definição 3.1 tais que  $g_1(s) \leq m g_2(s)$ , para quase todo  $s > 0$ . Então, para todo  $z_0 \in \mathbb{H}$ , o problema (3.12) possui uma única solução generalizada  $z \in C(0, \infty; \mathbb{H})$  dada por*

$$z(t) = S(t)z_0, \quad t \geq 0. \quad (3.22)$$

Em particular, se  $z_0 \in D(\mathcal{A})$  então  $z$  é a solução clássica de (3.12) e

$$z \in C^1(0, \infty; \mathbb{H}) \cap C(0, \infty; D(\mathcal{A})).$$

$\square$

## 3.2 Estabilidade uniforme

Iniciamos essa seção com dois resultados auxiliares envolvendo núcleos admissíveis e que satisfazem a  $\delta$ -condição.

**Lema 3.6.** *Seja  $g$  um núcleo admissível de acordo com a Definição 3.1.*

(1) *Se  $\widehat{g}$  representa a Transformada de Fourier de  $g$  restrita a  $\mathbb{R}^+$ , isso é,*

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s} ds = \int_0^{\infty} g(s)(\cos(\lambda s) - i \operatorname{sen}(\lambda s)) ds,$$

então

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \widehat{g}(\lambda) = 0.$$

(2) *Existe  $\alpha > 0$  tal que o conjunto*

$$N_g := \{s \in \mathbb{R}^+, \alpha g'(s) + g(s) < 0\} \quad (3.23)$$

*tem medida de Lebesgue positiva.*

(3) *Se  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  então,*

$$I_g(\lambda) := \int_{N_g} g(s)(1 - \cos(\lambda s)) ds > 0. \quad (3.24)$$

*Demonstração.* Os resultados podem ser obtidos combinando ferramentas da Teoria de Medida e Integração. Veja, por exemplo, [17, 32].  $\square$

**Lema 3.7.** *Seja  $\langle V, \|\cdot\|_V, (\cdot, \cdot)_V \rangle$  um espaço de Hilbert. Se  $g$  satisfaz a  $\delta$ -condição para algum  $\delta > 0$ , então*

$$\int_0^{\infty} g(s) \left( \int_0^s \|\eta(\tau)\|_V d\tau \right)^2 ds \leq \frac{4C}{\delta^2} \|\eta\|_{\mathbb{M}_g(V)}^2, \quad (3.25)$$

*para todo  $\eta \in \mathbb{M}_g(V)$ .*

*Demonstração.* A prova é baseada em estimativas de integrais e na desigualdade de Young para convoluções [32] Teorema 8.7. Para mais detalhes da prova veja, por exemplo, [22] Lema 7.2 e [17] Lema 3.2.  $\square$

Com os resultados auxiliares estabelecidos acima, o próximo passo é encontrar uma estimativa adequada proveniente das equações resolventes associadas ao operador  $\mathcal{A}$ .

### 3.2.1 Estimativas técnicas para a equação resolvente

Para provar o Teorema de estabilidade, que será apresentado ao final do capítulo em questão, é necessário antes verificarmos algumas estimativas que serão apresentadas em uma série de Lemas.

Seja  $f = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathbb{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Suponha que existe  $z = (\phi, u, \psi, v, \eta, \zeta) \in D(\mathcal{A})$  tal que

$$i\lambda z - \mathcal{A}z = f, \quad (3.26)$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} i\lambda\phi - u = f^1, \\ i\lambda\rho_1 u - \kappa \left[ \omega_1(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s) ds \right]_x = \rho_1 f^2, \\ i\lambda\psi - v = f^3, \\ i\lambda\rho_2 v - b \left[ \omega_2\psi_x + \int_0^\infty g_2(s)\zeta_x(s) ds \right]_x \\ \quad + \kappa \left[ \omega_1(\phi_x + \psi) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \zeta)(s) ds \right] = \rho_2 f^4, \\ i\lambda\eta + \eta_s - u = f^5, \\ i\lambda\zeta + \zeta_s - v = f^6. \end{cases} \quad (3.27)$$

A seguir, denotamos por  $c$  algumas das constantes estruturais positivas que dependem de  $L, g_1, g_2, \rho_1, \rho_2, b$  e  $\kappa$ . Além disso, definimos

$$g_{1*}(\cdot) := \chi_{N_{g_1}}(\cdot)g_1(\cdot) \quad \text{e} \quad g_{2*}(\cdot) := \chi_{N_{g_2}}(\cdot)g_2(\cdot), \quad (3.28)$$

onde  $N_{g_i}$  é dado em (3.23).

**Lema 3.8.** *Existe  $c > 0$  tal que*

$$\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_{1*}}^2(L^2(0,L))}^2 + \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_{2*}}^2(H_0^1(0,L))}^2 \leq c\|f\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{H}}.$$

*Demonstração.* Da definição de  $N_{g_1}$  e  $N_{g_2}$  e levando em consideração que  $\mathcal{A}$  é um operador dissipativo, temos

$$\begin{aligned} & \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_{1*}}^2(L^2(0,L))}^2 + \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_{2*}}^2(H_0^1(0,L))}^2 \\ &= \int_{N_{g_1}} g_1(s)\|(\eta_x + \zeta)(s)\|^2 ds + \int_{N_{g_2}} g_2(s)\|\zeta_x(s)\|^2 ds \\ &\leq -\frac{1}{\delta} \int_{N_{g_1}} g_1'(s)\|(\eta_x + \zeta)(s)\|^2 ds - \frac{1}{\delta} \int_{N_{g_2}} g_2'(s)\|\zeta_x(s)\|^2 ds \\ &\leq c \left[ -\frac{b}{2} \int_0^\infty g_2'(s)\|\zeta_x(s)\|^2 ds - \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty g_1'(s)\|(\eta_x + \zeta)(s)\|^2 ds \right] \\ &= c \operatorname{Re} [i\lambda\|z\|_{\mathbb{H}}^2 - (\mathcal{A}z, z)_{\mathbb{H}}] \\ &\leq c\|f\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

e assim a prova está completa. □

**Lema 3.9.** *Existe  $c_1 > 0$  tal que*

$$\|\phi_x + \psi\|^2 \leq \frac{c_1}{I_{g_1}(\lambda)} \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} \right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}},$$

em que  $I_{g_1}(\lambda) = \int_{N_{g_1}} g_1(s)(1 - \cos(\lambda s)) ds$ .

*Demonstração.* Resolvendo as equações diferenciais (3.27)<sub>5</sub> e (3.27)<sub>6</sub> e usando (3.27)<sub>1</sub> e (3.27)<sub>3</sub> na expressão resultante para  $\eta$  e  $\zeta$ , deduzimos

$$\eta(s) = \int_0^s e^{-i\lambda(s-\tau)} f^5(\tau) d\tau + (1 - e^{-i\lambda s}) \left[ \phi - \frac{f^1}{i\lambda} \right] \quad (3.29)$$

e

$$\zeta(s) = \int_0^s e^{-i\lambda(s-\tau)} f^6(\tau) d\tau + (1 - e^{-i\lambda s}) \left[ \psi - \frac{f^3}{i\lambda} \right]. \quad (3.30)$$

Calculando o produto interno de  $\eta_x + \zeta$  dado por (3.29) e (3.30) com  $\phi_x + \psi$  em  $\mathbb{M}_{g_{1*}}(L^2(0, L))$ , temos

$$\begin{aligned} (\eta_x + \zeta, \phi_x + \psi)_{\mathbb{M}_{g_{1*}}(L^2(0, L))} &= \int_0^\infty g_{1*}(s) \left( \int_0^s e^{-i\lambda(s-t)} (f_x^5 + f^6)(\tau) d\tau, \phi_x + \psi \right) ds \\ &\quad + \int_0^\infty g_{1*}(s) (1 - e^{-i\lambda s}) \|\phi_x + \psi\|^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{i\lambda} \int_0^\infty g_{1*}(s) \left( (1 - e^{-i\lambda s}) (f_x^1 + f^3), \phi_x + \psi \right) ds. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\infty g_{1*}(s) (1 - e^{-i\lambda s}) \|\phi_x + \psi\|^2 ds &= \int_0^\infty g_{1*}(s) (1 - \cos(\lambda s)) ds \|\phi_x + \psi\|^2 \\ &= I_{g_1}(\lambda) \|\phi_x + \psi\|^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Assim, de (3.31) e (3.32) segue que

$$I_{g_1}(\lambda) \|\phi_x + \psi\|^2 = a_1, \quad (3.33)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &:= \operatorname{Re}(\eta_x + \zeta, \phi_x + \psi)_{\mathbb{M}_{g_{1*}}(L^2(0, L))} \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_0^\infty g_{1*}(s) \int_0^s e^{-i\lambda(s-\tau)} ((f_x^5 + f^6)(\tau), \phi_x + \psi) d\tau ds \\ &\quad + \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{i\lambda} \left( \int_0^\infty g_{1*}(s) (1 - e^{-i\lambda s}) ds \right) (f_x^1 + f^3, \phi_x + \psi) \right]. \end{aligned}$$

Então, do Lema 3.7 e Lema 3.8 e da desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|a_1| &\leq c\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1^*}(L^2(0,L))}\|\phi_x + \psi\| + \frac{c}{|\lambda|}\|f_x^1 + f^3\|\|\phi_x + \psi\| \\
&\quad + \left[ \int_0^\infty g_1(s) \int_0^s \|(f_x^5 + f^6)(\tau)\| d\tau ds \right] \|\phi_x + \psi\| \\
&\leq c\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1^*}(L^2(0,L))}\|\phi_x + \psi\| + \frac{c}{|\lambda|}\|f_x^1 + f^3\|\|\phi_x + \psi\| \\
&\quad + \left[ \int_0^\infty g_1(s) ds \right]^{1/2} \left[ \int_0^\infty g_1(s) \left( \int_0^s \|f_x^5 + f^6(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \right]^{1/2} \|\phi_x + \psi\| \\
&\leq c\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1^*}(L^2(0,L))}\|\phi_x + \psi\| + \frac{c}{|\lambda|}\|f_x^1 + f^3\|\|\phi_x + \psi\| \\
&\quad + c\|f_x^5 + f^6\|_{\mathbb{M}_{g_1}}\|\phi_x + \psi\| \\
&\leq c\|f\|_{\mathbb{H}}^{1/2}\|z\|_{\mathbb{H}}^{1/2}\|\phi_x + \psi\| + c\left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right)\|f\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{1}{2}I_{g_1}(\lambda) > 0$  obtemos

$$|a_1| \leq \frac{1}{2}I_{g_1}(\lambda)\|\phi_x + \psi\|^2 + c\left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)\|f\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{H}}.$$

Substituindo esta última estimativa em (3.33), segue que

$$\|\phi_x + \psi\|^2 \leq \frac{|a_1|}{I_{g_1}(\lambda)} \leq \frac{1}{2}\|\phi_x + \psi\|^2 + \frac{c}{I_{g_1}(\lambda)}\left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)\|f\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{H}},$$

o que implica

$$\|\phi_x + \psi\|^2 \leq \frac{2c}{I_{g_1}(\lambda)}\left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)\|f\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{H}}. \quad (3.34)$$

Assim, o resultado segue considerando  $c_1 := 2c$  em (3.34).  $\square$

**Lema 3.10.** *Existe  $c_2 > 0$  tal que*

$$\|\psi_x\|^2 \leq \frac{c_2}{I_{g_2}(\lambda)}\left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)\|f\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{H}},$$

em que  $I_{g_2}(\lambda) = \int_{N_{g_2}} g_2(s)(1 - \cos(\lambda s)) ds$ .

*Demonstração.* Calculando o produto interno de  $\zeta$  dado em (3.30) com  $\psi$  em  $\mathbb{M}_{g_2^*}(H_0^1(0, L))$ , temos

$$\begin{aligned}
(\zeta, \psi)_{\mathbb{M}_{g_2^*}(H_0^1(0,L))} &= \int_0^\infty g_2^*(s) \left( \int_0^s e^{-i\lambda(s-\tau)} f_x^6(\tau) d\tau, \psi_x \right) ds \\
&\quad + \int_0^\infty g_2^*(s) (1 - e^{-i\lambda s}) \|\psi_x\|^2 ds \\
&\quad - \frac{1}{i\lambda} \int_0^\infty g_2^*(s) (1 - e^{-i\lambda s}) (f_x^3, \psi_x) ds.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int_0^\infty g_2^*(s) (1 - e^{-i\lambda s}) \|\psi_x\|^2 ds &= \int_0^\infty g_2^*(s) (1 - \cos(\lambda s)) ds \|\psi_x\|^2 \\
&= I_{g_2}(\lambda) \|\psi_x\|^2.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Assim, de (3.35) e (3.36) segue que

$$I_{g_2}(\lambda) \|\psi_x\|^2 = a_2, \tag{3.37}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_2 &:= \operatorname{Re}(\zeta, \psi)_{\mathbb{M}_{g_2^*}(H_0^1(0,L))} + \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{i\lambda} \left( \int_0^\infty g_2^*(s) (1 - e^{-i\lambda s}) ds \right) (f_x^3, \psi_x) \right] \\
&\quad - \operatorname{Re} \int_0^\infty g_2^*(s) \int_0^s e^{-i\lambda(s-\tau)} (f_x^6(\tau), \psi_x) d\tau ds.
\end{aligned}$$

Novamente, aplicando o Lema 3.7 e Lema 3.8 e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|a_2| &\leq c \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2^*}(H_0^1(0,L))} \|\psi_x\| + \frac{c}{|\lambda|} \|f_x^3\| \|\psi_x\| + \left[ \int_0^\infty g_2(s) \int_0^s \|f_x^6(\tau)\| d\tau ds \right] \|\psi_x\| \\
&\leq c \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2^*}(H_0^1(0,L))} \|\psi_x\| + \frac{c}{|\lambda|} \|f_x^3\| \|\psi_x\| \\
&\quad + \left[ \int_0^\infty g_2(s) ds \right]^{1/2} \left[ \int_0^\infty g_2(s) \left( \int_0^s \|f_x^6(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \right]^{1/2} \|\psi_x\| \\
&\leq c \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2^*}(H_0^1(0,L))} \|\psi_x\| + \frac{c}{|\lambda|} \|f_x^3\| \|\psi_x\| + c \|f_x^6\|_{\mathbb{M}_{g_2}} \|\psi_x\| \\
&\leq c \|f\|_{\mathbb{H}}^{1/2} \|z\|_{\mathbb{H}}^{1/2} \|\psi_x\| + c \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} \right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{1}{2} I_{g_2}(\lambda) > 0$ , obtemos

$$|a_2| \leq \frac{1}{2} I_{g_2}(\lambda) \|\psi_x\|^2 + c \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)} \right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}.$$

Substituindo essa última estimativa em (3.37), segue que

$$\|\psi_x\|^2 \leq \frac{|a_2|}{I_{g_2}(\lambda)} \leq \frac{1}{2} \|\psi_x\|^2 + \frac{c}{I_{g_2}(\lambda)} \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)} \right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}},$$

o que implica

$$\|\psi_x\|^2 \leq \frac{2c}{I_{g_2}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}. \quad (3.38)$$

Assim, o resultado segue considerando  $c_2 := 2c$  em (3.38).  $\square$

**Lema 3.11.** *Existe  $c_3 > 0$  tal que*

$$\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 \leq c_3 \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}.$$

*Demonstração.* Calculando a norma de  $\eta_x + \zeta$  em  $\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))$  e usando (3.29) e (3.30), inferimos

$$\begin{aligned} a_3 := \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 &= \int_0^\infty g_1(s)(1 - e^{-i\lambda s})(\phi_x + \psi, (\eta_x + \zeta)(s)) ds \\ &\quad + \int_0^\infty g_1(s) \int_0^s e^{-i\lambda(s-\tau)} ((f_x^5 + f^6)(\tau), (\eta_x + \zeta)(s)) d\tau ds \\ &\quad - \frac{1}{i\lambda} \int_0^\infty g_1(s)(1 - e^{-i\lambda s})(f_x^1 + f^3, (\eta_x + \zeta)(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Do Lema 3.9 e usando a desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  temos que

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq c \|\phi_x + \psi\| \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} + \frac{c}{|\lambda|} \|f_x^1 + f^3\| \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} \\ &\quad + \int_0^\infty g_1(s) \int_0^s \|(f_x^5 + f^6)(\tau)\| \|(\eta_x + \zeta)(s)\| d\tau ds \\ &\leq c \left[ \frac{c_1}{I_{g_1}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right) \right]^{1/2} \|f\|_{\mathbb{H}}^{1/2} \|z\|_{\mathbb{H}}^{1/2} \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq \frac{c}{I_{g_1}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2} \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Assim, observando que

$$\max \left\{ \frac{1}{I_{g_i}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_i}(\lambda)}\right), 1 + \frac{1}{|\lambda|} \right\} \leq \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_i}(\lambda)}\right)^2, \quad i = 1, 2, \quad (3.40)$$

deduzimos

$$|a_3| \leq \frac{1}{2} \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}.$$

Combinando essa a última estimativa com (3.39), temos que

$$\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 \leq |a_3| \leq \frac{1}{2} \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}},$$

isto é,

$$\|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 \leq 2c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}, \quad (3.41)$$

e portanto, o resultado segue considerando  $c_3 := 2c$  em (3.41).  $\square$

**Lema 3.12.** *Existe  $c_4 > 0$  tal que*

$$\|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \leq c_4 \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}.$$

*Demonstração.* Calculando a norma de  $\zeta$  em  $\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))$  e usando (3.30), deduzimos

$$\begin{aligned} a_4 := \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 &= \int_0^\infty g_2(s)(1 - e^{-i\lambda s})(\psi_x, \zeta_x(s)) ds \\ &\quad + \int_0^\infty g_2(s) \int_0^s e^{-i\lambda(s-\tau)}(f_x^6(\tau), \zeta_x(s)) d\tau ds \\ &\quad - \frac{1}{i\lambda} \int_0^\infty g_2(s)(1 - e^{-i\lambda s})(f_x^3, \zeta_x(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora, usando o Lema 3.10 e a desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  temos que

$$\begin{aligned} |a_4| &\leq c\|\psi_x\| \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} + \frac{c}{|\lambda|} \|f_x^3\| \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} \\ &\quad + \int_0^\infty g_2(s) \int_0^s \|f_x^6(\tau)\| \|\zeta_x(s)\| d\tau ds \\ &\leq c \left[ \frac{c_2}{I_{g_2}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right) \right]^{1/2} \|f\|_{\mathbb{H}}^{1/2} \|z\|_{\mathbb{H}}^{1/2} \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq \frac{c}{I_{g_2}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2} \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Assim, usando (3.40), obtemos

$$|a_4| \leq \frac{1}{2} \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}.$$

combinando essa última estimativa com (3.42), segue que

$$\|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \leq |a_4| \leq \frac{1}{2} \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}},$$

ou seja,

$$\|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \leq 2c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}. \quad (3.43)$$

Portanto, o resultado segue considerando  $c_4 := 2c$  em (3.43).  $\square$



**Lema 3.13.** *Existe  $c_5 > 0$  tal que*

$$\rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 \leq c_5 \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}.$$

*Demonstração.* Calculando o produto interno em  $L^2(0, L)$  entre (3.27)<sub>2</sub> e  $\phi$ , e entre (3.27)<sub>4</sub> e  $\psi$ , em conjunto com as relações (3.27)<sub>1</sub> e (3.27)<sub>3</sub>, segue que

$$\begin{aligned} a_5 := \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 &= -\rho_1(u, f^1) - \rho_2(v, f^3) + b\omega_2 \|\psi_x\|^2 + \kappa\omega_1 \|\phi_x + \psi\|^2 \\ &\quad - \rho_1(f^2, \phi) - \rho_2(f^4, \psi) + b \int_0^\infty g_2(s) (\zeta_x(s), \psi_x) ds \\ &\quad + \kappa \int_0^\infty g_1(s) ((\eta_x + \zeta)(s), \phi_x + \psi) ds. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agora, aplicando os Lemas 3.9 - 3.12 e também a desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$  obtemos

$$\begin{aligned} |a_5| &\leq c \left[ \|u\| \|f^1\| + \|v\| \|f^3\| + \|f^2\| \|\phi\| + \|f^4\| \|\psi\| \right] \\ &\quad + c \left[ \|\psi_x\|^2 + \|\phi_x + \psi\|^2 + \|\psi_x\| \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} + \|\phi_x + \psi\| \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} \right] \\ &\leq c \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Portanto, considerando  $c_5 := c$  nessa última estimativa e a combinando com (3.44) chegamos ao resultado desejado.  $\square$

**Lema 3.14.** *Existe  $\tilde{c} > 0$  tal que*

$$\|z\|_{\mathbb{H}} \leq \tilde{c} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}},$$

onde  $z$  é dado em (3.26).

*Demonstração.* Pelos Lemas 3.9 - 3.13 obtemos que

$$\begin{aligned} \|z\|_{\mathbb{H}}^2 &= \kappa\omega_1 \|\phi_x + \psi\|^2 + b\omega_2 \|\psi_x\|^2 + \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \kappa \|\eta_x + \zeta\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + b \|\zeta\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \\ &\leq \frac{\kappa\omega_1 c_1}{I_{g_1}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} + \frac{b\omega_2 c_2}{I_{g_2}(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right) \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + c_5 \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} + \kappa c_3 \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + b c_4 \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)}\right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por outro lado, como

$$\frac{1}{I_{g_i}(\lambda)} \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_i}(\lambda)} \right) \leq \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_i}(\lambda)} \right)^2$$

e

$$1 \leq \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_i}(\lambda)} \right) \leq \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_i}(\lambda)} \right)^2 \leq \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)} \right)^2,$$

para todo  $i = 1, 2$ , podemos reescrever (3.45) da forma

$$\|z\|_{\mathbb{H}}^2 \leq (\kappa\omega_1c_1 + b\omega_2c_2 + c_5 + \kappa c_3 + bc_4) \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)} \right)^2 \|f\|_{\mathbb{H}} \|z\|_{\mathbb{H}}. \quad (3.46)$$

Utilizando a desigualdade de Young em (3.46) com um peso adequado segue o resultado desejado.  $\square$

Uma vez apresentados os lemas acima, o resultado principal deste capítulo é o próximo Teorema que, graças a  $\delta$ -condição (definição 3.2), conseguimos mostrar não somente a estabilidade exponencial da solução do problema em questão, mas também uma caracterização da mesma.

**Teorema 3.15.** *Sejam  $g_1, g_2$  núcleos admissíveis de acordo com a Definição 3.1 tais que  $g_1(s) \leq m g_2(s)$ , para quase todo  $s > 0$ . Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $S(t)$  é exponencialmente estável;
- (ii)  $g_1$  e  $g_2$  satisfazem a  $\delta$ -condição para algum  $\delta > 0$ .

#### Prova do Teorema 3.15: Suficiência

Consideremos, por hipótese, que  $g_1$  e  $g_2$  satisfazem a  $\delta$ -condição para algum  $\delta > 0$ . Nosso objetivo é mostrar que  $S(t)$  é exponencialmente estável. Para isso, vamos verificar que  $\mathcal{A}$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Gearhart-Pruss 1.58.

#### Afirmção 1: $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$

Vamos assumir, por contradição, que existe  $\lambda_* \in \mathbb{R}$  tal que  $i\lambda_* \notin \rho(\mathcal{A})$ . Assim, do Teorema 1.59 temos

$$i\lambda_* \in i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A}) = i\mathbb{R} \cap \sigma_{ap}(\mathcal{A}).$$

Da Definição 1.11 de  $\sigma_{ap}(\mathcal{A})$ , existe  $z_n = (\phi_n, u_n, \psi_n, v_n, \eta_n, \zeta_n) \in D(\mathcal{A})$  com  $\|z_n\|_{\mathbb{H}} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal que

$$f_n := i\lambda_* z_n - \mathcal{A}z_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{H}. \quad (3.47)$$

Agora, escrevendo  $f_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6)$ , podemos estudar a convergência de (3.47) ao

analisar os termos

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n^1 = i\lambda_*\phi_n - u_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \\ f_n^2 = i\lambda_*\rho_1 u_n - \kappa \left[ \omega_1(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{nx} + \zeta_n)(s) ds \right]_x \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \\ f_n^3 = i\lambda_*\psi_n - v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \\ f_n^4 = i\lambda_*\rho_2 v_n - b \left[ \omega_2\psi_{nx} + \int_0^\infty g_2(s)\zeta_{nx}(s) ds \right]_x \\ \quad + \kappa \left[ \omega_1(\phi_{nx} + \psi_n) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{nx} + \zeta_n)(s) ds \right] \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \\ f_n^5 = i\lambda_*\eta_n + \eta_{ns} - u_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{W}_1, \\ f_n^6 = i\lambda_*\zeta_n + \zeta_{ns} - v_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{W}_2. \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Vamos separar a prova em dois casos.

*Caso 1:*  $\lambda_* = 0$ . Nesse caso, obtemos imediatamente de (3.48)<sub>1</sub>, (3.48)<sub>3</sub>, (3.48)<sub>5</sub> e (3.48)<sub>6</sub> as seguintes convergências

$$u_n, v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad \eta_{ns} \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{W}_1 \text{ e } \zeta_{ns} \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{W}_2. \quad (3.49)$$

Na sequência, aplicamos o Lema 3.7 para obter

$$\begin{aligned} \|\eta_{nx} + \zeta_n\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0, L))} &\leq \left( \int_0^\infty g_1(s) \left( \int_0^s \|(\eta_{nxs} + \zeta_{ns})(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq c \|\eta_{nxs} + \zeta_{ns}\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0, L))} \end{aligned}$$

e

$$\|\zeta_n\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0, L))} \leq \left( \int_0^\infty g_2(s) \left( \int_0^s \|\zeta_{nxs}(\tau)\| d\tau \right)^2 ds \right)^{1/2} \leq c \|\zeta_{ns}\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0, L))}.$$

Assim, de (3.49) obtemos

$$\eta_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{W}_1 \text{ e } \zeta_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{W}_2. \quad (3.50)$$

Por outro lado, calculando o produto interno em  $L^2(0, L)$  de (3.48)<sub>2</sub> com  $\phi_n$ , e de (3.48)<sub>4</sub> com  $\psi_n$ , e somando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} b\omega_2\|\psi_{nx}\|^2 + \kappa\omega_1\|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 &= (f_n^2, \phi_n) + (f_n^4, \psi_n) - b \left( \int_0^\infty g_2(s)\zeta_{nx}(s) ds, \psi_{nx} \right) \\ &\quad - \kappa \left( \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{nx} + \zeta_n)(s) ds, \phi_{nx} + \psi_n \right). \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Hölder e pela limitação  $\|z_n\|_{\mathbb{H}} = 1$  temos que

$$\begin{aligned} \|\psi_{nx}\|^2 + \|\phi_{nx} + \psi_n\|^2 &\leq c \left[ \|f_n^2\| \|\phi_n\| + \|f_n^4\| \|\psi_n\| + \|\psi_{nx}\| \int_0^\infty g_2(s) \|\zeta_{nx}(s)\| ds \right] \\ &\quad + c \|\phi_{nx} + \psi_n\| \int_0^\infty g_1(s) \|(\eta_{nx} + \zeta_n)(s)\| ds \\ &\leq c \left[ \|f_n^2\| + \|f_n^4\| + \|\eta_{nx} + \zeta_n\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))} + \|\zeta_n\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))} \right]. \end{aligned}$$

De (3.48)<sub>2</sub>, (3.48)<sub>4</sub> e (3.50), obtemos

$$\psi_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L) \text{ e } \phi_{nx} + \psi_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (3.51)$$

Assim, de (3.49), (3.50) e (3.51) concluímos que  $\|z_n\| \rightarrow 0$  em  $\mathbb{H}$ , que contradiz a limitação  $\|z_n\|_{\mathbb{H}} = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Caso 2:*  $\lambda_* \neq 0$ . Desde que  $\lambda_* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f_n \in \mathbb{H}$  e  $z_n \in D(\mathcal{A})$  é uma solução de (3.47), estamos em condições de aplicar o Lema 3.14 para obter

$$\|z_n\|_{\mathbb{H}} \leq \tilde{c} \left( 1 + \frac{1}{|\lambda_*|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda_*)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda_*)} \right)^2 \|f_n\|_{\mathbb{H}} \rightarrow 0,$$

que contradiz novamente a limitação  $\|z_n\|_{\mathbb{H}} = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como chegamos a uma contradição em ambos os casos, concluímos que  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ , o que prova a afirmação 1.

**Afirmação 2:**  $\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} < +\infty$ .

Seja  $f \in \mathbb{H}$  com  $\|f\|_{\mathbb{H}} = 1$ . Como  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ , para cada  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  podemos definir

$$z := (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} f \in D(\mathcal{A}).$$

Do Lema 3.14, obtemos

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} f\|_{\mathbb{H}} = \|z\|_{\mathbb{H}} \leq \tilde{c} \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{I_{g_1}(\lambda)} + \frac{1}{I_{g_2}(\lambda)} \right)^2.$$

Logo,

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \leq \tilde{c} \limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{|\lambda|} + (I_{g_1}(\lambda))^{-1} + (I_{g_2}(\lambda))^{-1} \right)^2. \quad (3.52)$$

Por outro lado, do Lema 3.6<sub>(1)</sub> temos que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_0^\infty g_i(s) (\cos(\lambda s) - i \operatorname{sen}(\lambda s)) ds = 0, \quad i = 1, 2.$$

Assim,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} (I_{g_i}(\lambda))^{-1} = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \left( \int_{N_{g_i}} g_i(s) ds - \int_{N_{g_i}} g_i(s) \cos(\lambda s) ds \right)^{-1} = \left( \int_{N_{g_i}} g_i(s) ds \right)^{-1},$$

para  $i = 1, 2$ . Combinando a expressão acima com (3.52), segue que

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \leq \tilde{c} \left[ 1 + \left( \int_{N_{g_1}} g_1(s) ds \right)^{-1} + \left( \int_{N_{g_2}} g_2(s) ds \right)^{-1} \right]^2 < +\infty,$$

o que prova a afirmação 2.

Portanto, as afirmações 1 e 2 nos possibilitam aplicar o Teorema de Gearhart-Pruss 1.58 para concluir que  $S(t) = e^{tA}$  é exponencialmente estável.

### 3.2.2 Prova do Teorema 3.15: Necessidade

Consideremos agora que  $S(t)$  é exponencialmente estável. Nosso objetivo é mostrar que  $g_1$  e  $g_2$  satisfazem a  $\delta$ -condição para algum  $\delta > 0$ .

Primeiro, vamos mostrar que  $g_1$  satisfaz a  $\delta$ -condição. Por hipótese, existem  $M \geq 1$  e  $\gamma > 0$  tais que

$$\|S(t)z_0\|_{\mathbb{H}} \leq M e^{-\gamma t} \|z_0\|_{\mathbb{H}}, \quad \forall z_0 \in \mathbb{H}. \quad (3.53)$$

Agora, seja  $\eta_0 \in \mathbb{M}_{g_1}(H_0^1(0, L))$  e

$$\tilde{z}(t) = S(t)(0, 0, 0, 0, \eta_0, 0) = (\tilde{\phi}(t), \tilde{u}(t), \tilde{\psi}(t), \tilde{v}(t), \tilde{\eta}^t, \tilde{\zeta}^t).$$

De (3.53) temos

$$\|\tilde{z}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq M^2 e^{-2\gamma t} \kappa \|\eta_0\|_{\mathbb{M}_{g_1}(H_0^1(0, L))}^2, \quad t > 0. \quad (3.54)$$

Observe que, por (3.7) e (3.54), temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g_1(t+s) \|\eta_{0x}(s)\|^2 ds &= \int_t^\infty g_1(s) \|\eta_{0x}(s-t)\|^2 ds \\ &= \int_t^\infty g_1(s) \|\tilde{\eta}_x^t(s) - \tilde{\phi}_x(t)\|^2 ds \\ &\leq \int_t^\infty g_1(s) \left( \|\tilde{\eta}_x^t(s)\| + \|\tilde{\phi}_x(t)\| \right)^2 ds \\ &\leq 2 \int_t^\infty g_1(s) \|\tilde{\eta}_x^t(s)\|^2 ds + 2 \int_t^\infty g_1(s) \|\tilde{\phi}_x(t)\|^2 ds \\ &\leq 2 \|\tilde{\eta}_x^t\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0, L))}^2 + 2(1 - \omega_1) \|\tilde{\phi}_x(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por outro lado, usando a hipótese de que  $g_1(s) \leq mg_2(s)$ , para quase todo  $s > 0$ , e da desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}
2\|\tilde{\eta}_x^t\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + 2(1-\omega_1)\|\tilde{\phi}_x(t)\|^2 &\leq 4\|\tilde{\eta}_x^t + \tilde{\zeta}^t\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + 4\|\tilde{\zeta}^t\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 \\
&\quad + 4(1-\omega_1)\|\tilde{\phi}_x(t) + \psi(t)\|^2 + 4(1-\omega_1)\|\psi(t)\|^2 \\
&\leq 4\|\tilde{\eta}_x^t + \tilde{\zeta}^t\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + 4mc_p\|\tilde{\zeta}^t\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \\
&\quad + 4(1-\omega_1)\|\tilde{\phi}_x(t) + \psi(t)\|^2 + 4(1-\omega_1)c_p\|\psi_x(t)\|^2 \\
&\leq \frac{4}{\kappa}\|\tilde{\eta}_x^t + \tilde{\zeta}^t\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0,L))}^2 + \frac{4mc_p}{b}\|\tilde{\zeta}^t\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0,L))}^2 \\
&\quad + \frac{4(1-\omega_1)}{\kappa\omega_1}\kappa\omega_1\|\tilde{\phi}_x(t) + \psi(t)\|^2 \\
&\quad + \frac{4(1-\omega_1)c_p}{b\omega_2}b\omega_2\|\psi_x(t)\|^2 \\
&\leq \xi\|\tilde{z}(t)\|_{\mathbb{H}}, \tag{3.56}
\end{aligned}$$

com  $\xi = \max\left\{\frac{4}{\kappa}, \frac{4mc_p}{b}, \frac{4(1-\omega_1)}{\kappa\omega_1}, \frac{4(1-\omega_1)c_p}{b\omega_2}\right\}$ . Desta forma, por (3.54), (3.55) e (3.56) temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g_1(t+s)\|\eta_{0x}(s)\|^2 ds &\leq \xi\|\tilde{z}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
&\leq \xi M^2 e^{-2\gamma t} \kappa \|\eta_0\|_{\mathbb{M}_{g_1}(H_0^1(0,L))}^2 \\
&= \int_0^\infty C e^{-2\gamma t} g_1(s)\|\eta_{0x}(s)\|^2 ds,
\end{aligned}$$

para  $C = \max\{\xi M^2 \kappa, 1\}$ . Ou seja,

$$\int_0^\infty [g_1(t+s) - C e^{-2\gamma t} g_1(s)] \|\eta_{0x}(s)\|^2 ds \leq 0, \tag{3.57}$$

onde  $C \geq 1$ . Por outro lado, para cada  $t > 0$ , definimos:

$$\mathbb{B}_t := \{s \in \mathbb{R}^+, g_1(t+s) - C e^{-2\gamma t} g_1(s) > 0\}.$$

Afirmamos que  $\text{med}(\mathbb{B}_t) = 0$ , para todo  $t > 0$ . De fato, suponha, por contradição, que existe  $t_0 > 0$  tal que  $\text{med}(\mathbb{B}_{t_0}) > 0$ . Então,

$$0 < \int_{\mathbb{B}_{t_0}} [g_1(t_0+s) - C e^{-2\gamma t_0} g_1(s)] ds < +\infty. \tag{3.58}$$

Por outro lado, considerando (3.57) para  $t_0$ , segue que

$$\int_0^\infty [g_1(t_0+s) - C e^{-2\gamma t_0} g_1(s)] \|\eta_{0x}(s)\|^2 ds \leq 0$$

Escolhendo, em particular,  $\eta_0(s) = \chi_{\mathbb{B}_{t_0}}(s)\phi^*$ , para algum  $\phi^* \in H_0^1(0,L)$  tal que  $\|\phi_x^*\| = 1$ , temos

$$\int_{\mathbb{B}_{t_0}} [g_1(t_0+s) - C e^{-2\gamma t_0} g_1(s)] ds \leq 0,$$

o que contradiz (3.58). Portanto,  $g_1$  satisfaz a  $\delta$ -condição com  $\delta = 2\gamma > 0$ .

Para mostrar que  $g_2$  também satisfaz a  $\delta$ -condição, consideremos a função  $\zeta_0 \in \mathbb{W}_2 = \mathbb{M}_{g_1}(L^2(0, L)) \cap \mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0, L))$  e

$$\tilde{z}(t) = S(t)(0, 0, 0, 0, 0, \zeta_0) = (\check{\phi}(t), \check{u}(t), \check{\psi}(t), \check{v}(t), \check{\eta}^t, \check{\zeta}^t).$$

De (3.53), temos que

$$\|\tilde{z}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq M^2 e^{-2\gamma t} b \|\zeta_0\|_{\mathbb{W}_2}^2, \quad t > 0. \quad (3.59)$$

Usando (3.8) e (3.59) deduzimos, de forma análoga a (3.55), que

$$\int_0^\infty g_2(t+s) \|\zeta_{0x}(s)\|^2 ds \leq C e^{-2\gamma t} \left[ \|\zeta_0\|_{\mathbb{M}_{g_1}(L^2(0, L))}^2 + \|\zeta_0\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0, L))}^2 \right] \quad (3.60)$$

para algum  $C \geq 1$ . Nesse momento, combinamos a hipótese de que  $g_1(s) \leq m g_2(s)$ , para quase todo  $s > 0$ , (3.60) e a desigualdade de Poincaré para obter

$$\int_0^\infty g_2(t+s) \|\zeta_{0x}(s)\|^2 ds \leq C e^{-2\gamma t} \|\zeta_0\|_{\mathbb{M}_{g_2}(H_0^1(0, L))}^2,$$

para algum  $C \geq 1$ . Desta forma, considerando para  $g_2$  passos análogos aos executados anteriormente para  $g_1$ , concluímos que  $g_2$  satisfaz a  $\delta$ -condição com  $\delta = 2\gamma > 0$ .

Do exposto acima, segue que a prova do Teorema 3.15 está completa.  $\square$

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] A. Soufyane. Stabilisation de la poutre de Timoshenko. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328**. 8 (1999) 731–734.
- [2] R. A. Adams, J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.
- [3] M. O. Alves, A. H. Caixeta, M. A. Jorge Silva, J. H. Rodrigues, Moore-Gibson-Thompson equation with memory in a history framework: a semigroup approach, *Z. Angew. Math. Phys.* **69** (2018) 106.
- [4] W. Arendt, C. J. Batty, Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **306**. 2 (1988) 837–852.
- [5] M. Astudillo, H. P. Oquendo. Stability results for a Timoshenko system with a fractional operator in the memory. *Applied Mathematics and Optimization.* **83.3** (2021) 1247-1275.
- [6] L. Boltzmann, Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, *Wien. Ber.* **70** (1874) 275–306.
- [7] L. Boltzmann, Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, *Wied. Ann.* **5** (1878) 430–432.
- [8] S. Boulaaras, A. Choucha, A. Scapellato, General Decay of the Moore-Gibson-Thompson Equation with Viscoelastic Memory of Type II, *J. Funct. Spaces.* **2022** (2022).
- [9] S. Boulaaras et. al, Solvability of the Moore-Gibson-Thompson equation with viscoelastic memory type II and integral condition, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **16.6** (2023) 1216-1241.
- [10] H. Bounadja, S. Messaoudi, A General Stability Result for a Viscoelastic Moore-Gibson-Thompson Equation in the Whole Space, *Appl. Math. Optim.* **84** (2021) 509-521.
- [11] H. Bounadja, B. Said Houari, Decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation with memory, *Evol. Equ. Control. Theory* **10.3** (2021).
- [12] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, V 2, Springer, 2011.
- [13] F. Bucci, I. Lasiecka, Feedback control of the acoustic pressure in ultrasonic wave propagation, *Optimization* **68** (2019) 1811-1854.
- [14] F. Bucci, L. Pandolfi, On the regularity of solutions to the Moore-Gibson-Thompson equation: a perspective via wave equations with memory, *J. Evol. Equ.* **20** (2020) 837- 867.
- [15] A. H. Caixeta, V. N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka, Global attractors for a third order in time nonlinear dynamics, *J. Differential Equations* **261.1** (2016) 113-147.



- [16] A. H. Caixeta, V. N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka, On long time behavior of Moore-Gibson-Thompson equation with molecular relaxation, *Evol. Equ. Control. Theory* **5.4** (2016) 661-676.
- [17] B. M. R. Calsavara, E. H. Gomes Tavares e M. A. Jorge Silva, Exponential stability for a thermo-viscoelastic Timoshenko system with fading memory, *J. Math. Anal. Appl.* **512.2** (2022) 126147.
- [18] M. M. Cavalcanti, W. J. Corrêa, V. D. Cavalcanti, M. J. Silva, J. P. Zanchetta. Uniform stability for a semilinear non-homogeneous Timoshenko system with localized nonlinear damping. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* **72** (2021) 1-20.
- [19] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, *Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, Eduem, Maringá, 2009.
- [20] V. V. Chepyzhov and V. Pata, Some remarks on stability of semigroups arising from linear viscoelasticity, *Asymp. Anal.* **46** (2006) 251-273.
- [21] M. Conti, F. Dell’Oro and V. Pata, Some unexplored questions arising in linear viscoelasticity. *J. Func. Anal.* **282** (2022) 109422.
- [22] M. Conti, F. Dell’Oro and V. Pata, Timoshenko systems with fading memory, *Dyn. Partial Differ. Eq.* **10** (2013) 367-377.
- [23] M. Conti, L. Liverani, V. Pata, On the Moore-Gibson-Thompson equation with memory with nonconvex kernels, *Indiana Univ. Math. J.* **17** (2023) 1-27.
- [24] M. Conti, L. Liverani, V. Pata, The MGT-Fourier model in the supercritical case, *J. Differential Equations* **301** (2021) 543-567.
- [25] C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **37** (1970) 297-308.
- [26] F. Dell’Oro, I. Lasiecka, V. Pata, A note on the Moore-Gibson-Thompson equation with memory of type II, *J. Evol. Equ.* **20** (2020) 1251-1268.
- [27] F. Dell’Oro, I. Lasiecka, V. Pata, The Moore-Gibson-Thompson equation with memory in the critical case, *J. Differ. Equ.* **261.7** (2016) 4188-4222.
- [28] F. Dell’Oro, V. Pata, On the Moore-Gibson-Thompson equation and its relation to linear viscoelasticity, *Appl. Math. Optim.* **76** (2017) 641-655.
- [29] A. D. Drozdov and V. B. Kolmanovskii, *Stability in Viscoelasticity* (North-Holland, 1994).
- [30] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, 2 ed, American Mathematical Society, 2010.
- [31] M. Fabrizio, C. Giorgi and V. Pata, A new approach to equations with memory, *Arch. Rational Mech. Anal.* **198** (2010) 189-232.
- [32] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, 1999.

- [33] S. Gatti, A. Miranville, V. Pata and S. Zelik, Attractors for semi-linear equations of viscoelasticity with very low dissipation, *Rocky Mount. J. Math.* **38** (2008) 1117-1138.
- [34] L. Gearhart. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **236** (1987) 385-394.
- [35] E. H. Gomes Tavares, M. A. Jorge Silva, T. F. Ma and H. P. Oquendo, Shearing viscoelasticity in partially dissipative Timoshenko-Boltzmann systems, *SIAM J. Math. Anal.* <https://doi.org/10.1137/23M1568375>.
- [36] E. H. Gomes Tavares, M. A. Jorge Silva, T. F. Ma, Unified stability analysis for a Volterra integro-differential equation under creation time perspective, *Z. Angew. Math. Phys.* **73** (2022) 118.
- [37] M. Grasselli, V. Pata, Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **50** (2002) 155-178.
- [38] M. Grasselli, V. Pata and G. Prouse, Longtime behavior of a viscoelastic Timoshenko beam, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **10** (2004) 337.
- [39] J. H. Hassan, S.A. Messaoudi, General decay rate for an abstract weakly dissipative Moore-Gibson-Thompson equation, *J. Integral Equ. Appl.* **34.1** (2022) 75-91.
- [40] P. M. Jordan, Nonlinear acoustic phenomena in viscous thermally relaxing fluids: Shock bifurcation and the emergence of diffusive solitons. (A) Lecture. The 9th International Conf. on Theoretical and Computational Acoustics (ICTCA 2009). Dresden, Germany, 9 September 2009. See also *J. Acoust. Soc. Am.*, vol 124, issue 4 (2008), 2491-2491.
- [41] P. M. Jordan, Second-sound phenomena in inviscid, thermally relaxing gases, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **19** (2014) 2189-2205.
- [42] B. Kaltenbacher, Mathematics of nonlinear acoustics, *Evol. Equ. Control Theory* **4** (2015) 447-491.
- [43] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, Exponential decay for low and higher energies in the third order linear Moore-Gibson-Thompson equation with variable viscosity, *Palest. J. Math.* **1** (2012) 1-10.
- [44] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, R. Marchand, Wellposedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, *Control Cybernet* **40** (2011) 971-988.
- [45] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, M. K. Pospieszalska, Well-posedness and exponential decay of the energy in the nonlinear Jordan-Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **22.11** (2012) 1250035.
- [46] B. Kaltenbacher, V. Nikolicaz, The Jordan-Moore-Gibson-Thompson equation: well-posedness with quadratic gradient nonlinearity and singular limit for vanishing relaxation time, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **29** (2019) 2523-2556.

- [47] S. Kesavan. *Functional Analysis*. Texts and readings in mathematics. Hindustan Book Agency, 2009.
- [48] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, V 17, John Wiley & Sons, 1978.
- [49] I. Lacheheb, S. A. Messaoudi, General Decay of the Cauchy Problem for a Moore-Gibson-Thompson Equation with Memory, *Mediterr. J. Math.* **18** (2021) 1-21.
- [50] J. E. Lagnese, Günter Leugering and E. J. P. G. Schmidt, Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures, Springer Science & Business Media, 2012.
- [51] I. Lasiecka, Global solvability of Moore-Gibson-Thompson equation with memory arising in nonlinear acoustics, *J. Evol. Equ.* **17** (2017) 411-441.
- [52] I. Lasiecka, X. Wang, Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I: Exponential decay of energy, *Z. Angew. Math. Phys.* **67** (2016) 17.
- [53] I. Lasiecka, X. Wang, Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part II: General decay of energy, *J. Differ. Equ.* **259** (2015) 7610-7635.
- [54] Z. Liu and C. Peng, Exponential stability of a viscoelastic Timoshenko beam, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **8** (1998) 343-351.
- [55] W. Liu, Z. Chen, General decay rate for a Moore-Gibson-Thompson equation with infinite history, *Z. Angew. Math. Phys.* **71** (2020) 43.
- [56] W. Liu, Z. Chen, D. Chen, New general decay results for a Moore-Gibson-Thompson equation with memory, *Appl. Anal.* **99.15** (2020) 2624-2642.
- [57] R. Marchand, T. McDevitt, R. Triggiani, An abstract semigroup approach to the third-order Moore-Gibson-Thompson partial differential equation arising in high-intensity ultrasound: structural decomposition, spectral analysis, exponential stability, *Math. Methods Appl. Sci.* **35** (2012) 1896-1929.
- [58] F. K. Moore, W. E. Gibson, Propagation of weak disturbances in a gas subject to relaxation effects, *Journal of the Aerospace Sciences* **27** (1960) 117-127.
- [59] K. Naugolnykh, L. Ostrovsky, Nonlinear wave processes in acoustics, *Cambridge University Press*, Cambridge (1998).
- [60] J. T. Oden, L. Demkowicz. *Applied functional analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [61] V. Pata, Exponential stability in linear viscoelasticity, *Quart. Appl. Math.* **64** (2006) 499-513.
- [62] V. Pata, Exponential stability in linear viscoelasticity with almost flat memory kernels, *Commun. Pure Appl. Anal.* **9** (2010) 721-730.
- [63] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci. 44. Springer, New York, 1983.

- 
- [64] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Monographs in Mathematics, Vol. 87 (Birkhäuser Verlag, 1993).
- [65] J. Prüss. On the spectrum of  $C_0$ -semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **284** (1984) 847-857.
- [66] P. Stokes, An examination of the possible effect of the radiation of heat on the propagation of sound, *Philos. Mag.* **1** (1851) 305-317.
- [67] P. A. Thompson, *Compressible-fluid dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [68] S. P. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philos. Magazine* **41** (1921) 744- 746.
- [69] S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering* (Van Nostrand, 1955).
- [70] Z. Tu, W. Liu. Well-posedness and exponential decay for the Moore-Gibson-Thompson equation with time-dependent memory kernel, *Math. Methods Appl. Sci.* (2023).
- [71] Q. Yuming, J. E. M. Rivera, M. To Fu. Smooth dynamics of a Timoshenko system with hybrid dissipation. *Asymptotic Analysis.* **131.1** (2023) 109-123.
- [72] H. Zhang, On long-time behavior of Moore-Gibson-Thompson equation with localized and degenerate memory effect, *Z. Angew. Math. Phys.* **72** (2021) 1-23.
- [73] H. Zhang, On the well-posedness and general decay results of Moore-Gibson-Thompson equation with memory, *Z. Angew. Math. Phys.* **73** (2022) 232.
- [74] S. Zheng, *Nonlinear evolution equations*. [S.l.]: CRC Press, 2004.