UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Equação da onda com memória e retardo no tempo: Boa colocação e estabilidade assintótica

Cintya Akemi Okawa

Orientadora: Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria

Maringá - PR

2024

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Equação da onda com memória e retardo no tempo: Boa colocação e estabilidade assintótica

Cintya Akemi Okawa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria.

Maringá - PR

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Okawa, Cintya Akemi
O412e Equação da onda com memória e retardo no tempo : boa colocação e estabilidade assintótica / Cintya Akemi Okawa. -- Maringá, 2024.
vi, 91 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Josiane Cristina de Oliveira Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2024.

1. Equação da onda. 2. Memória com história passada. 3. Retardo no tempo. I. Faria, Josiane Cristina de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.39
Edilson Damasio CRB9-1.123

CINTYA AKEMI OKAWA

EQUAÇÃO DA ONDA COM MEMÓRIA E RETARDO NO TEMPO: BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Higídio Portillo Oquendo - UFPR
Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM

Aprovada em: 01 de março de 2024.
Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (https://meet.google.com/snm-xfzp-fqz)

Aos meus pais, Alberto e Elisabete.

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é, senão, uma gota de água no mar, mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota"

Madre Teresa de Calcutá.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me iluminado e dado forças para chegar até aqui e por ter colocado pessoas incríveis para estarem comigo.

Aos meus pais, Alberto Hiroshi Okawa e Elisabete Satie Nohama Okawa, por terem me ensinado a importância dos estudos, por me apoiarem e estarem comigo em cada passo do meu caminho e por todos os "Gambatte". Às minhas irmãs, Mayza e Luyza, por serem minhas companheiras de vida.

À minha orientadora, Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria, por toda sua calma e paciência que sempre me fizeram ficar menos ansiosa e mais confiante. Agradeço toda a sua orientação, conselhos e disposição que possibilitaram o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos matemáticos e não matemáticos, por me ouvirem e apoiarem, pelos melhores e piores conselhos possíveis, por cada risada escandalosa que me tiraram, até mesmo quando eu estava muito triste e frustrada, e por serem minha rede de apoio.

Aos professores Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti e Dr. Higidio Portillo Oquendo, por aceitarem fazer parte da banca deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou a construção desta dissertação.

Resumo

Este trabalho apresenta a boa colocação e a estabilidade assintótica da equação da onda com memória com história passada e termo de retardo dado pelo seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
& u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds + ku_t(x,t-\tau) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \\
& u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \\
& u(x,t) = u_0(x,t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0],
\end{aligned}
$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suave, $u_0 : \Omega \times (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ descreve a história passada de u, a constante $\tau > 0$ é o retardo no tempo, k é um número real e o núcleo da memória $\mu : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função localmente absolutamente contínua que satisfaz: $\mu(0) = \mu_0 > 0$; $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$ e $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, para algum $\alpha > 0$. Para a boa colocação do problema é utilizada a teoria dos semigrupos lineares e para a estabilidade assintótica é aplicada a técnica do multiplicador.

Palavras-chave: Equação da onda, memória com história passada, retardo no tempo.

Abstract

This work presents the well posedness and the asymptotic stability of the wave equation with memory with past history and time delay term given by the following problem:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds + ku_t(x,t-\tau) = 0 \quad \text{on} \quad \Omega \times (0,+\infty)\\
&u(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty)\\
&u(x,t) = u_0(x,t) \quad \text{on} \quad (-\infty, 0],
\end{aligned}
$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an open bounded set with a smooth boundary, $u_0 : \Omega \times (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ describes the past history of u, the constant $\tau > 0$ is the time delay, k is a real number and the memory kernel $\mu : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ is a locally absolutely continuous function satisfying: $\mu(0) = \mu_0 > 0$; $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$ and $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, for some $\alpha > 0$. For the well-posedness of the problem is used the linear semigroups theory and for the asymptotic stability is applied the multiplier method.

Key words: Wave equation, memory with past history, time delay.

SUMÁRIO

Introdução

As equações diferenciais surgem da tentativa de descrever eventos reais em termos matemáticos, geralmente como um conjunto de regras simples o suficiente para se extrair informações úteis sobre o fenômeno estudado, mas que ainda mantenha suas principais características. Fenômenos físicos como eletrostática, eletrodinâmica, eletromagnetismo, dinâmica dos fluidos, difusão do calor e propagação de ondas podem ser descritos por equações diferenciais.

Equações diferenciais que descrevem como alguns sistemas se comportam ao longo do tempo são chamadas de equações de evolução, como, por exemplo, a equação da onda. Nos últimos anos, problemas relacionados à boa colocação e estabilidade ou instabilidade de equações de evolução com retardo no tempo ou termo de memória com história passada têm atraído atenção considerável.

Esta dissertação é baseada no artigo [2], em que os autores estudam a estabilidade assintótica da equação da onda com memória com história passada e termo de retardo no tempo dado pelo seguinte problema:

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds + ku_t(x,t-\tau) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \tag{2}$$

$$u(x,t) = u_0(x,t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0], \tag{3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suave, $u_0 : \Omega\times(-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ descreve a história passada de u, a constante $\tau > 0$ é o retardo no tempo, k é um número real e o núcleo da memória $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função localmente absolutamente contínua que satisfaz:

(i) $\mu(0) = \mu_0 > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$;

(iii) $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, para algum $\alpha > 0$.

Já existem vários trabalhos na literatura quanto ao estudo da equação (1) sem o termo de retardo, isto é, com $k = 0$,

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds = 0. \tag{4}$$

No trabalho pioneiro [8], Dafermos apresenta o estudo da equação da onda viscoelástica não linear unidimensional e mostra que a energia do problema tende à zero assintoticamente sob a condição de fronteira de Dirichlet. No entanto, nenhuma taxa de decaimento é dada. Considerando as condições (i) - (iii), trabalhos como [16], [10] e [22], mostram o decaimento exponencial das soluções de (4).

O problema com memória no lugar da memória com história passada, isto é,

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{t} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds = 0, \tag{5}$$

também recebeu atenção considerável, possuindo assim uma vasta literatura. Citamos, por exemplo, os trabalhos [1], [5] e [27].

Ainda, existem trabalhos, como [21], considerando o problema apenas com o termo de retardo e substituindo o termo de memória por Bu_t

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + Bu_t(x,t) + ku_t(x,t-\tau) = 0, \tag{6}$$

em que B é um operador dado. Neste sentido, diferentes resultados de estabilidade ou instabilidade para (6) são obtidos, dependendo da relação entre o operador B e a constante k. Nesta mesma direção, citamos também [11].

Quanto ao problema envolvendo tanto um termo de memória com história passada, quanto um termo de retardo, citamos o trabalho [13] que apresenta a boa colocação e a estabilidade exponencial para uma equação mais geral que a considerada em (1).

Este trabalho está organizado em três capítulos. No primeiro, apresentamos resultados e conceitos necessários para o desenvolvimento dos demais. O segundo capítulo apresenta a boa colocação do problema em estudo. Como o problema original não é autônomo, combinamos as técnicas apresentadas em [12] e [17] para obter um problema autônomo equivalente ao problema original. Ao obter este problema autônomo, utilizamos a teoria dos semigrupos de operadores lineares, apresentada no primeiro capítulo, para provar a existência e unicidade de solução para o problema (1)-(3).

Já no último capítulo, apresentamos uma exposição didática dos resultados de estabilidade exponencial obtidos em [2]. Utilizamos a técnica do multiplicador para conseguir a estabilidade da solução, no entanto, esta prática necessita que a energia associada ao problema seja decrescente. Como não temos esta garantia para a energia associada à solução do problema original, introduzimos um problema perturbado e provamos a estabilidade exponencial para a solução deste problema. Por fim, utilizando resultados da teoria de semigrupos lineares, conseguimos concluir a estabilidade exponencial para a solução do problema original estimando um limite para a amplitude de $|k|$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo serão apresentadas definições, resultados e notações que serão utilizadas no decorrer dos demais capítulos.

No que segue, consideraremos Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Espaços L^p

Definição 1.1. Seja $1 \leq p < +\infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre Ω, isto é, tais que

$$\int_\Omega |f|^p < +\infty.$$

Dado $f \in L^p(\Omega)$, definimos a norma em $L^p(\Omega)$ como

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.2. Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser essencialmente limitada se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c,$$

quase sempre em Ω.

Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções reais mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω.

Dado $f \in L^\infty(\Omega)$, definimos a norma em $L^\infty(\Omega)$ como

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|f(x)| = \inf\{c;\ |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Lema 1.1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam A e B números reais não negativos, $p > 1$ e $q < +\infty$, $q \neq 0$, verificando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Prova. Ver [14], página 27, Lema 2.2.1. ■

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young com ε)**.** *Sejam A, B números reais não negativos e $\varepsilon > 0$, então*

$$AB \leq \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon}.$$

Prova. Sejam A, B números reais não negativos e $\varepsilon > 0$. Notemos que $(2\varepsilon A - B)^2 \geq 0$, e como

$$(2\varepsilon A - B)^2 = 4\varepsilon^2 A^2 - 4\varepsilon AB + B^2,$$

temos que

$$AB \leq \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon},$$

como desejado. ■

Lema 1.2 (Desigualdade de Holder)**.** *Suponhamos que $p > 1$ e sejam $f \in L^P$ e $g \in L^q$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Prova. Ver [4], página 92, Teorema 4.6. ■

Observação 1.1. Os índices p e q dos Lemas 1.1 e 1.2 são chamados índices conjugados. Além disso, $p = 2$ é o único índice autoconjugado, o que implica que o produto de duas funções em L^2 é L^1-integrável. Dessa forma, utilizando também as propriedades da integral de Lebesgue, obtemos o próximo resultado.

Corolário 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz). *Se $f, g \in L^2$, então fg é integrável e*

$$\left|\int fg\right| \leq \int |fg| \leq ||f||_2||g||_2.$$

Lema 1.3 (Desigualdade de Minkowski). *Se $f, g \in L^p$, $p \geq 1$, então $f + g \in L^p$ e*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Prova. Ver [14], página 28, Lema 2.2.3. ■

Definição 1.3. Um espaço vetorial normado $(X, ||\cdot||)$ é um espaço de Banach se X é completo na norma $||\cdot||$, isto é, se toda sequência de Cauchy converge.

Definição 1.4. Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto interno, tal que H é um espaço de Banach relativamente à norma induzida pelo produto interno.

Teorema 1.1 (Fischer-Riesz). *L^p é um espaço de Banach, para qualquer $1 \leq p < +\infty$.*

Prova. Ver [4], página 93, Teorema 4.8. ■

Corolário 1.2. *$L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Definição 1.5. Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subset$ de Ω.

Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ converge para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0,$$

em que p_K é a projeção sobre K. É possível mostrar que $L^p_{loc}(\Omega)$ é um espaço de Fréchet, isto é, um espaço localmente completo que é metrizável e que

$$L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega).$$

Definiremos a seguir outros espaços que serão utilizados no estudo do problema em interesse.

Definição 1.6. Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $L^p(0,+\infty;X)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis $f : [0,+\infty) \longrightarrow X$, tais que a aplicação $t \longmapsto ||f(t)||_X$ pertence a $L^p(0,+\infty)$, isto é,

$$L^p(0,+\infty;X) = \int_0^{+\infty} ||f(t)||^p_X dt < +\infty.$$

Para cada $f \in L^p(0,+\infty;X)$, a norma de f neste espaço é dada por

$$||f||_{L^p(0,+\infty;X)} = \left(\int_0^{+\infty} ||f(t)||^p_X dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.7. Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $L^\infty(0,+\infty;X)$ o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis $f : [0,+\infty) \longrightarrow X$, tais que a aplicação $t \longmapsto ||f(t)||_X$ pertence a $L^\infty(0,+\infty)$, isto é, possui supremo essencial finito em $(0,+\infty)$. Para cada $f \in L^\infty(0,+\infty)$, a norma de f é dada por

$$||f||_{L^\infty(0,+\infty;X)} = \sup_{x\in(0,+\infty)} \text{ess}||f(x)||_X.$$

Em particular, se H é um espaço de Hilbert, então o espaço $L^2(0,+\infty;H)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno definido como

$$(u,v)_{L^2(0,+\infty;H)} = \int_0^{+\infty} (u(t),v(t))_H dt.$$

Definição 1.8. Sejam X um espaço de Banach e μ uma função mensurável positiva. Denotamos por $L^p_\mu(0,+\infty;X)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço de Banach com peso μ das (classes de) funções mensuráveis $f : [0,+\infty) \longrightarrow X$, tais que a aplicação $t \longmapsto \mu(t)||f(t)||_X$

pertence a $L^p(0,+\infty)$, isto é,

$$L^p_\mu(0,+\infty;X) = \int_0^{+\infty} \mu(t)||f(t)||^p_X dt < +\infty.$$

Para cada $f \in L^p_\mu(0,+\infty;X)$, definimos a norma de f neste espaço como

$$||f||_{L^p_\mu(0,+\infty;X)} = \left(\int_0^{+\infty} \mu(t)||f(t)||^p_X dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, se H é um espaço de Hilbert, então o espaço $L^2_\mu(0,+\infty;H)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno definido como

$$(u,v)_{L^2_\mu(0,+\infty;H)} = \int_0^{+\infty} \mu(t)(u(t),v(t))_H dt.$$

1.2 Espaço das Distribuições

O objetivo desta seção é definir o espaço das distribuições. Este conceito é necessário para a definição dos espaços de Sobolev que são imprescindíveis para o estudo em questão.

Primeiramente, vamos estabelecer algumas notações. Denotaremos por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ os pontos do $\mathbb{R}^n$, por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ as n-uplas de números inteiros não negativos e escreveremos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$. Denotaremos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

o operador derivação. Quando $\alpha = 0 = (0,0,\ldots,0)$ o operador D^0 representará o operador identidade. Além disso, dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, diremos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 1.9. Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de u, denotado por $supp(u)$, como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, isto é,

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Se $supp(u)$ for um conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que u possui suporte compacto.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto, isto é,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); supp(\varphi) \text{ é compacto}\}.$$

Uma função que pertence a $C_0^\infty(\Omega)$ é chamada de função teste de Ω.

Definição 1.10. O espaço das funções teste de Ω, que denotaremos por $D(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência:

Dizemos que uma sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se, e somente se, existe um compacto K de Ω tal que

(i) $supp(\varphi_n) \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $supp(\varphi) \subset K$;

(ii) para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$, uniformemente sobre K.

Definição 1.11. Seja $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear sobre $D(\Omega)$. Dizemos que T é uma distribuição sobre Ω se T é contínua no sentido da convergência em $D(\Omega)$. Representaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T aplicado em $\varphi \in D(\Omega)$.

Desta forma, dadas uma sequência (φ_ν) de $D(\Omega)$ que converge para 0 em $D(\Omega)$ e T uma distribuição sobre $D(\Omega)$, então a sequência $\langle T, \varphi_\nu \rangle$ converge para 0 em $\mathbb{R}$.

Definição 1.12. O espaço das distribuições sobre Ω, que denotaremos por $D'(\Omega)$, é o espaço vetorial de todas as distribuições sobre Ω munido da seguinte noção de convergência:

Dizemos que uma sequência de distribuições sobre Ω, (T_ν), converge para uma distribuição T se

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in D(\Omega)$.

Exemplo 1.1. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então T_u dada por

$$T_u : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

é uma distribuição sobre Ω.

Vamos agora introduzir a noção de derivada no sentido das distribuições:

Definição 1.13. Sejam $T \in D'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T é definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega).$$

Observação 1.2. Uma distribuição $T \in D'(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

De posse de tais conceitos, a seguir vamos definir os espaços de Sobolev.

1.3 Espaços de Sobolev

Definição 1.14. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo D^α a derivada no sentido das distribuições. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definimos a norma de u como

$$||u||_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx.$$

O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), ||\cdot||_{m,p})$ é denominado espaço de Sobolev.

Quando $p = 2$, representamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m$ por se tratar de um espaço de Hilbert, como veremos a seguir.

Proposição 1.2. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Ver [7], página 66, Proposição 2.2. ∎

Corolário 1.3. *Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno dado por*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_2,$$

em que $(\cdot, \cdot)_2$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$.

Quando $m = 1$ temos o espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_2 + (\nabla u, \nabla v)_2,$$

e da norma induzida

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} = ||u||^2_2 + ||\nabla u||^2_2.$$

Definição 1.15. Definimos o espaço $W^{m,p}_0(\Omega)$ como sendo o fecho de $C^\infty_0(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C^\infty_0(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W^{m,p}_0(\Omega).$$

Quando $p = 2$, representamos $W^{m,2}_0(\Omega) = H^m_0$, além disso, se $m = 1$ obtemos o espaço $H^1_0(\Omega)$.

Teorema 1.2. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ em $\partial\Omega$.*

Prova. Ver [4], página 217, Teorema 8.12. ■

Do Teorema acima temos que se $u \in H^1_0(\Omega)$, então $u = 0$ em $\partial\Omega$.

A seguir, enunciamos a desigualdade de Poincaré que será utilizada com frequência no Capítulo 3.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$||u||_{0,p} \leq C||u||_{1,p},$$

para todo $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Prova. Ver [14], página 70, Teorema 2.3.4. ■

Da desigualdade de Poincaré, obtemos que no espaço $H^1_0(\Omega)$ as normas

$$||u||^2_{1,2} = ||u||^2_2 + ||\nabla u||^2_2$$

e

$$|u|_{1,2} = ||\nabla u||_2$$

são equivalentes.

Por fim, vamos definir o dual dos espaços de Sobolev.

Definição 1.16. Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Além disso, o dual topológico de H_0^m é representado por $H^{-m}(\Omega)$.

1.4 Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, será feita uma breve abordagem sobre a teoria dos semigrupos de operadores lineares, que será utilizada para mostrar a existência e unicidade de solução para o problema em estudo.

No que segue, denotaremos por $X = (X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach real e $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos em X, isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &= \{L : X \longrightarrow X; L \text{ é linear e contínuo}\}\\ &= \{L : X \longrightarrow X; L \text{ é linear e limitado}\}.\end{aligned}$$

Sobre este espaço, podemos definir a norma

$$||L||_{\mathcal{L}(X)} = \sup\{||L(x)||; ||x|| \leq 1\},$$

que faz $\mathcal{L}(X)$ ser um espaço normado completo, ou seja, um espaço de Banach.

Definição 1.17. Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares de X se:

(i) $S(0) = I$, em que I é o operador identidade de X;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Definição 1.18. Dizemos que o semigrupo $S(\cdot)$ é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \to 0^+} ||S(t) - I|| = 0.$$

Exemplo 1.2. Vamos definir a exponencial de um operador linear limitado e mostrar que esta aplicação define um semigrupo uniformemente contínuo. Com efeito, seja $L : X \longrightarrow X$ um operador linear e limitado. Notemos que

$$||L \circ L(x)|| \leq ||L||_{\mathcal{L}(X)} ||L(x)|| \leq ||L||^2_{\mathcal{L}(X)} ||x||,$$

dessa forma

$$\begin{aligned} ||L \circ L||_{\mathcal{L}(X)} &= \sup\{||L \circ L(x)||; ||x|| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{||L||^2_{\mathcal{L}(X)} ||x||; ||x|| \leq 1\} \leq ||L||^2_{\mathcal{L}(X)}. \end{aligned}$$

Assim, denotando $L^k = \underbrace{L \circ L \circ \cdots \circ L}_{k}$, temos

$$||L^k||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||L||^k_{\mathcal{L}(X)},$$

de onde é possível mostrar que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} L^n, \; L^0 = I$$

é absolutamente convergente e portanto convergente. Assim, definimos a exponencial de um operador limitado L como

$$e^L = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} L^n,$$

e tomando $t \in \mathbb{R}_+$, segue

$$e^{tL} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tL)^n}{n!}.$$

Mostraremos agora que e^{tL} define um semigrupo uniformemente contínuo. De fato, consideremos $S(t) := e^{tL}$, temos que

$$S(0) = e^{0L} = I,$$

e o segundo item da definição é consequência da fórmula

$$\frac{(t+s)^n}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{t^i}{i!}\frac{t^j}{j!}.$$

Já a continuidade uniforme segue da seguinte estimativa

$$||e^{tA} - I|| \leq t||A|| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t||A||)^{n-1}}{(n-1)!n} \leq t||A||e^{||A||t}.$$

Observação 1.3. Dizemos que o operador L do exemplo anterior é o gerador do semigrupo e^{tL}.

Teorema 1.4. *Seja A um operador linear em X. Um semigrupo e^{tA} é uniformemente contínuo se, e somente se, A é limitado.*

Prova. Ver [23], página 52, Teorema 2.5.1. ∎

Para tratarmos de semigrupos gerados por operadores não limitados, introduzimos a seguinte definição.

Definição 1.19. Dizemos que um semigrupo $T(\cdot)$ é de classe C_0, ou fortemente contínuo, se

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \text{ forte em } X.$$

Observação 1.4. Todo semigrupo uniformemente contínuo é fortemente contínuo. Dessa forma, o Exemplo 1.2 nos mostra que todo operador linear limitado é gerador de um semigrupo C_0.

Proposição 1.3. *Seja $S(\cdot)$ um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln S(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln S(t)}{t} = \omega_0,$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$||S(t)|| \leq Me^{\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Prova. Ver [19], página 29, Proposição 1.26. ∎

Definição 1.20. Dizemos que um semigrupo $S(\cdot)$ é limitado se existe $M \geq 1$ tal que

$$||S(t)|| \leq M.$$

Se $M = 1$, dizemos que $S(\cdot)$ é um semigrupo de contrações.

No exemplo a seguir, exibiremos um semigrupo de contrações. Retornaremos a este semigrupo no Exemplo 1.5 em que mostraremos que o mesmo é também de classe C_0. Estes exemplos serão importantes no estudo em questão.

Exemplo 1.3. Denotemos $\mathcal{M} = L^2_\mu(0, +\infty; H^1_0(\Omega))$ o espaço de Hilbert com peso μ, em que $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função localmente absolutamente contínua que satisfaz:

(i) $\mu(0) = \mu_0 > 0$;

(ii) $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$;

(iii) $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, para algum $\alpha > 0$.

Seja $t \geq 0$, consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} V(t) : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \eta &\longmapsto V(t)\eta : [0, +\infty) \longrightarrow H^1_0(\Omega) \\ &\qquad\qquad s \longmapsto (V(t)\eta)(s), \end{aligned}$$

em que

$$(V(t)\eta)(s) = \begin{cases} \eta(s-t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases}.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $V(t)$ está bem definida para todo $t \geq 0$. De fato, como para todo $\eta \in \mathcal{M}$, μ é decrescente, realizando uma mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mu(s)||\nabla(V(t)\eta)(s)||_2^2 ds &= \int_t^{+\infty} \mu(s)||\nabla\eta(s-t)||_2^2 ds \\ &\leq \int_t^{+\infty} \mu(s-t)||\nabla\eta(s-t)||_2^2 ds \\ &= \int_0^{+\infty} \mu(s)||\nabla\eta(s)||_2^2 ds = ||\eta||^2_{\mathcal{M}} < \infty. \end{aligned}$$

Da definição 1.8 temos que $V(t)\eta \in \mathcal{M}$ e, além disso,

$$||V(t)\eta||_{\mathcal{M}} \leq ||\eta||_{\mathcal{M}}, \text{ para todo } \eta \in \mathcal{M}. \tag{1.1}$$

Mostraremos agora que

$$\begin{aligned} V(\cdot) : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}) \\ t &\longmapsto V(t) \end{aligned}$$

é um semigrupo de contrações em $\mathcal{M}$. Inicialmente, vamos verificar que a aplicação $V(t)$ é linear, para todo $t \geq 0$. De fato, dados η, $\xi \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} [V(t)(\eta + \alpha\xi)](s) &= \begin{cases} (\eta + \alpha\xi)(s - t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \eta(s - t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases} + \alpha \begin{cases} \xi(s - t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases} \\ &= (V(t)\eta)(s) + \alpha(V(t)\xi)(s), \end{aligned}$$

para todo $s \geq 0$ e, dessa forma, $V(.)$ está bem definido. Notemos que, dados $s \geq 0$ e $\eta \in \mathcal{M}$,

$$(V(0)\eta)(s) = \begin{cases} \eta(s - 0), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} = \eta(s),$$

logo, $V(0)\eta = \eta$ e da arbitrariedade de $\eta \in \mathcal{M}$ temos que $V(0) = I$. Agora, dados t_1, $t_2 \geq 0$ e $\eta \in \mathcal{M}$, temos que

$$\begin{aligned} (V(t_2)(V(t_1)\eta)(s) &= \begin{cases} (V(t_1)\eta)(s - t_2), & s \geq t_2 \\ 0, & s < t_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \eta(s - t_2 - t_1), & s - t_2 \geq t_1 \\ 0, & s - t_2 < t_1 \\ 0, & s < t_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} \eta(s-(t_1+t_2)), & s \geq t_1+t_2 \\ 0, & s < t_1+t_2 \end{cases} \\
&= (V(t_1+t_2)\eta)(s),
\end{aligned}
$$

qualquer que seja $s \geq 0$, de onde $V(t_2)V(t_1) = V(t_1+t_2)$ e assim provamos que $V(\cdot)$ é de fato um semigrupo em $\mathcal{M}$.

Por (1.1), temos que

$$
||V(t)||_{L(\mathcal{M})} \leq 1, \text{ para todo } t \geq 0,
$$

portanto $V(\cdot)$ é semigrupo de contrações.

Definição 1.21. Dizemos que A é gerador infinitesimal de um semigrupo $T(\cdot)$ se

$$
D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\},
$$

e para cada $x \in D(A)$ temos

$$
Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} T(t)x|_{t=0}.
$$

Desta forma, dado um semigrupo é razoavelmente simples encontrar seu gerador infinitesimal, basta apenas avaliar o limite da definição. O problema inverso é mais complexo. Como já vimos anteriormente, todo operador linear e contínuo, isto é, limitado, é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. No entanto, o argumento utilizado não é válido quando o operador não é limitado. Dessa forma, estudaremos o Teorema de Hille-Yosida que nos fornece condições necessárias e suficientes para que um operador não limitado seja gerador infinitesimal de um semigrupo.

1.4.1 Teorema de Hille-Yosida

Primeiramente, vamos introduzir algumas definições que serão necessárias para estabelecermos o Teorema de Hille-Yosida. Nesta seção, denotaremos por H um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot,\cdot)_H$ e H' seu dual.

Definição 1.22. Seja A um operador em H. Definimos o conjunto resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, e dado por

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; w \longmapsto (\lambda I - A)^{-1}w \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Se $\lambda \in \rho(A)$, então $(\lambda I - A)^{-1}$ é chamado de operador resolvente. Além disso, o conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ é chamado de espectro de A.

Definição 1.23. Dizemos que um operador A é dissipativo se

$$Re(AU, U)_H \leq 0, \text{ para todo } U \in H,$$

em que Re indica a parte real do número complexo.

Teorema 1.5. *Seja $S(\cdot)$ o semigrupo gerado por um operador A. Então, $S(\cdot)$ é um semigrupo de contrações se, e somente se, A é dissipativo.*

Prova. Ver [23], página 64, Teorema 2.7.1. ∎

Definição 1.24. Seja A um operador não limitado de H. Dizemos que A satisfaz as condições do Teorema de Hille-Yosida se

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = H$;

(ii) $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda > 0$,

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Lema 1.4. *Seja A um operador não limitado satisfazendo as condições do Teorema de Hille-Yosida. Então, para todo $x \in X$*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x.$$

Prova. Ver [23], página 66, Lema 2.7.1. ∎

Lema 1.5. *Sejam A um operador não limitado satisfazendo as condições do Teorema de Hille-Yosida e $A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}$ a aproximação de Yosida de A. Então, e^{tA_λ} é um* *semigrupo de contrações tal que*

$$||e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x|| \leq ||A_\lambda x - A_\mu x||, \text{ para todo } \mu, \lambda, t > 0.$$

Prova. Ver [23], página 67, Lema 2.7.2. ■

Com os resultados acima, podemos enunciar o Teorema de Hille-Yosida que nos fornece condições necessárias e suficientes para que um operador não limitado A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Teorema 1.6 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear A não limitado é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações se, e somente se,*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = H$;

(ii) $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda > 0$,

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova. Ver [23], página 65, Teorema 2.7.2. ■

Observação 1.5. Para simplificar a notação, denotaremos $A \in G(M, w)$ para indicar que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados $S(\cdot)$ que satisfaz

$$||S(t)|| \leq Me^{wt},$$

para todo $t \geq 0$. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4. *Se $A \in G(1, 0)$ e $B \in \mathcal{L}(X)$ então $A + B \in G(1, ||B||)$.*

Prova. Ver [18], página 34, Teorema 1.6.2. ■

1.4.2 Teorema de Lumer-Phillips

Vimos anteriormente que, em um espaço de Hilbert H, um semigrupo $S(\cdot)$ gerado por um operador A é de contrações se, e somente se, A é dissipativo. Vamos ver agora uma caracterização útil dos operadores dissipativos e algumas propriedades. A partir dessa caracterização e utilizando o Teorema de Hille-Yosida, obtemos o Teorema de Lumer-Phillips, que aplicaremos na busca por solução de equações diferenciais.

Teorema 1.7. *Um operador A é dissipativo se, e somente se,*

$$||(\lambda I - A)x|| \geq \lambda ||x||, \text{ para todo } x \in D(A),\ \lambda > 0.$$

Prova. Ver [23], página 89, Teorema 2.12.1. ■

Lema 1.6. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Então, $\rho(A)$ é um conjunto aberto.*

Prova. Ver [6], página 341, Lema 5.134. ■

Teorema 1.8 (Lumer-Phillips)**.** *Seja A um operador linear com domínio denso em H.*

(a) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações, então $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

(b) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = H$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Prova. Ver [23], página 89, Teorema 2.12.2. ■

Para os Exemplos 1.4, 1.5 e 1.6, denotemos $\mathcal{M} = L^2_\mu(0, +\infty; H^1_0(\Omega))$ o espaço de Hilbert com peso μ, em que $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função localmente absolutamente contínua que satisfaz:

(i) $\mu(0) = \mu_0 > 0$;

(ii) $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$;

(iii) $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, para algum $\alpha > 0$.

Exemplo 1.4. Vamos definir o seguinte operador

$$\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \tag{1.2}$$

$$\eta \longmapsto \mathcal{L}\eta = -\eta_s,$$

com

$$D(\mathcal{L}) = \{\eta \in \mathcal{M}; \eta_s \in \mathcal{M} \text{ e } \eta(0) = 0\}.$$

Mostraremos que $\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(\cdot)$ em $\mathcal{M}$. Do Teorema de Lumer-Phillips, basta provarmos que $\mathcal{L}$ é dissipativo em $\mathcal{M}$ e que $I - \mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ é um operador sobrejetivo. De fato, seja $\eta \in D(\mathcal{L})$. Temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}} &= -\int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega \nabla\eta_s(s)\nabla\eta(s)dxds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mu(s)\frac{d}{ds}||\nabla\eta(s)||_2^2 ds \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0 \\ b\to +\infty}} \int_a^b \mu(s)\frac{d}{ds}||\nabla\eta(s)||_2^2 ds \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0 \\ b\to +\infty}} \left[\mu(b)||\nabla\eta(b)||_2^2 - \mu(a)||\nabla\eta(a)||_2^2 - \int_a^b \mu'(s)||\nabla\eta||_2^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Como $\mu' < 0$, então μ é uma função decrescente e, além disso, por hipótese, é também positiva, logo $\lim\limits_{b\to+\infty} \mu(b) = 0$, de onde obtemos

$$\lim_{b\to+\infty} \mu(b)||\nabla\eta(b)||_2^2 = 0.$$

Também das propriedades de μ e utilizando a desigualdade de Holder, obtemos que para qualquer $a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
0 \le \mu(a)||\nabla\eta(a)||_2^2 &= \mu(a)\left|\left|\int_0^a \nabla\eta_s(s)ds\right|\right|_2^2 \\
&\le \mu(a)\left(\int_0^a ||\nabla\eta_s(s)||_2 ds\right)^2 \\
&\le \left(\int_0^a (\mu(s))^{\frac{1}{2}}||\nabla\eta_s(s)||_2 ds\right)^2 \\
&\le \left[\left(\int_0^a 1ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a \mu(s)||\nabla\eta_s(s)||_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&= a\int_0^a \mu(s)||\nabla\eta_s(s)||_2^2 ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq a \int_0^{+\infty} \mu(s) ||\nabla \eta_s(s)||_2^2 ds \\
&= a||\eta_s(s)||_{\mathcal{M}},
\end{aligned}
$$

e como $\eta_s \in \mathcal{M}$, temos que

$$\lim_{a\to 0} \mu(a)||\nabla \eta(a)||_2^2 = 0,$$

donde, como $\mu' < 0$,

$$(\mathcal{L}\eta, \eta)_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\int_a^b \mu'(s)||\nabla \eta||_2^2 ds \leq 0,$$

e assim, $\mathcal{L}$ é dissipativo.

Agora, provaremos que o operador $I - \mathcal{L}$ é sobrejetor, isto é, dado $\beta \in \mathcal{M}$, vamos mostrar que existe $\eta \in D(\mathcal{L})$ tal que

$$(I - \mathcal{L})\eta = \beta,$$

ou seja,

$$\eta + \eta_s = \beta. \tag{1.3}$$

Com efeito, seja $s > 0$ dado. Vamos multiplicar (1.3) por e^α e integrar no intervalo $(0, s)$, obtendo

$$\int_0^s \eta(\alpha)e^\alpha d\alpha + \int_0^s \eta_\alpha(\alpha)e^\alpha d\alpha = \int_0^s \beta(\alpha)e^\alpha d\alpha, \qquad \alpha > 0, \tag{1.4}$$

e, integrando por partes o segundo termo do lado esquerdo de (1.4), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^s \eta_\alpha(\alpha)e^\alpha d\alpha &= (\eta(\alpha)e^\alpha)_0^s - \int_0^s \eta(\alpha)e^\alpha d\alpha \\
&= \eta(s)e^s - \eta(0) - \int_0^s \eta(\alpha)e^\alpha d\alpha.
\end{aligned}
$$

Assim, substituindo em (1.4), temos

$$\eta(s)e^s - \eta(0) = \int_0^s \beta(\alpha)e^\alpha d\alpha,$$

ou ainda

$$\eta(s) = \int_0^s \beta(\alpha)e^{\alpha - s} d\alpha + \eta(0)e^{-s}. \tag{1.5}$$

Dessa forma, η dada em (1.5) é uma candidata a ser solução de (1.3) em $D(\mathcal{L})$, bastando supor que $\eta(0) = 0$, e assim podemos reescrever (1.5) como

$$\eta(s) = \int_0^s \beta(\alpha)e^{\alpha - s}d\alpha. \tag{1.6}$$

Mostraremos que η definida em (1.6) pertence a $D(\mathcal{L})$ e satisfaz (1.3). De fato, utilizando propriedades de norma e a desigualdade de Holder, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mu(s)||\eta(s)||^2_{H_0^1}ds &= \int_0^{+\infty} \mu(s) \left|\left|\int_0^s e^{\alpha - s}\beta(\alpha)d\alpha\right|\right|^2_{H_0^1} ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(s) \left(\int_0^s e^{\alpha - s}||\beta(\alpha)||_{H_0^1}d\alpha\right)^2 ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(s) \left[\left(\int_0^s e^{2\alpha - 2s}d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s ||\beta(\alpha)||^2_{H_0^1}d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 ds \\
&= \int_0^{+\infty} \mu(s) \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2s}}{2}\right) \int_0^s ||\beta(\alpha)||^2_{H_0^1}d\alpha ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^s ||\beta(\alpha)||^2_{H_0^1}d\alpha ds \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mu(s)e^{-2s} \int_0^s ||\beta(\alpha)||^2_{H_0^1}d\alpha ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^s \int_0^{+\infty} \mu(s)||\beta(\alpha)||^2_{H_0^1}ds d\alpha \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mu(s)e^{-2s} \int_0^s ||\beta(\alpha)||^2_{H_0^1}d\alpha ds \\
&= \left(\frac{1 - e^{-2s}}{2}\right) \int_0^s \int_0^{+\infty} \mu(s)||\beta(\alpha)||^2_{H_0^1}d\alpha ds < \infty,
\end{aligned}$$

pois $\beta \in \mathcal{M}$. Assim, obtemos que $\eta \in \mathcal{M}$ e, como já havíamos determinado que $\eta(0) = 0$, resta mostrar que $\eta_s \in \mathcal{M}$. Com efeito, dado $s > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\eta_s(s) &= \frac{d}{ds}\left(\int_0^s e^{\alpha - s}\beta(\alpha)d\alpha\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(e^{-s}\int_0^s e^{\alpha}\beta(\alpha)d\alpha\right) \\
&= -e^{-s}\int_0^s e^{\alpha}\beta(\alpha)d\alpha + e^{-s}\frac{d}{ds}\left(\int_0^s e^{\alpha}\beta(\alpha)d\alpha\right) \\
&= -\int_0^s e^{\alpha - s}\beta(\alpha)d\alpha + e^{-s}e^{s}\beta(s) = -\eta(s) + \beta(s),
\end{aligned}$$

logo, $\eta_s \in \mathcal{M}$ e consequentemente $\eta \in D(\mathcal{L})$, além disso η satisfaz (1.3), como desejado.

Portanto $\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(\cdot)$ de classe C_0 de contrações.

Exemplo 1.5. Dado $t \geq 0$, consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} V(t) : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \eta &\longmapsto V(t)\eta : [0, +\infty) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad s \longmapsto (V(t)\eta)(s), \end{aligned}$$

em que

$$(V(t)\eta)(s) = \begin{cases} \eta(s-t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases}.$$

Já vimos, no Exemplo 1.3, que $V(\cdot)$ é um semigrupo de contrações. Mostraremos agora que $V(\cdot)$ é de classe C_0. Com efeito, sejam $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tal que $t_n \to 0$ quando $t \to \infty$, e $\eta \in \mathcal{M}$. Vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} V(t_n) = V(0) = I. \tag{1.7}$$

De fato, temos que

$$||V(t_n)\eta - \eta||^2_{\mathcal{M}} = \int_0^{+\infty} \mu(s)||\nabla[V(t_n)\eta(s) - \eta(s)]||_2^2 ds$$

e da definição de $V(t_n)$, obtemos

$$||V(t_n)\eta - \eta||^2_{\mathcal{M}} = \int_0^{t_n} \mu(s)||\nabla\eta(s)||_2^2 ds + \int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\eta(s-t_n) - \eta(s)]||_2^2 ds. \tag{1.8}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Temos que $\mathcal{L}$ definido no Exemplo 1.4 é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações em $\mathcal{M}$, e portanto $D(\mathcal{L})$ é denso em $\mathcal{M}$, de onde existe $\xi \in D(\mathcal{L})$ tal que

$$||\eta - \xi||^2_{\mathcal{M}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notemos agora que podemos escrever o segundo termo do lado direito de (1.8) como

$$\int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\eta(s-t_n) - \eta(s)]||_2^2 ds = \int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\eta(s-t_n) - \xi(s-t_n) + \xi(s-t_n) -$$

$$- \xi(s) + \xi(s) - \eta(s)]||_2^2 ds$$

$$\leq \underbrace{\int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\eta(s-t_n) - \xi(s-t_n)]||_2^2 ds}_{A_n} + \underbrace{\int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\xi(s-t_n) - \xi(s)]||_2^2 ds}_{B_n}$$
$$+ \underbrace{\int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\xi(s) - \eta(s)]||_2^2 ds}_{C_n}. \tag{1.9}$$

Vamos estimar cada um dos termos de (1.9). Fazendo uma mudança de variáveis e utilizando o fato de μ ser decrescente, obtemos que

$$\begin{aligned} A_n = \int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\eta(s-t_n) - \xi(s-t_n)]||_2^2 ds &= \int_0^{+\infty} \mu(s+t_n)||\nabla[\eta(s) - \xi(s)]||_2^2 ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\eta(s) - \xi(s)]||_2^2 ds \\ &= ||\eta - \xi||_{\mathcal{M}}^2 < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Agora, da definição de $\mathcal{L}$ em (1.2), temos que

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\cdot - t) - \varphi(\cdot)}{t}, \tag{1.11}$$

e como $\xi \in D(\mathcal{L})$, então existe $k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{t_n^2} &= \int_{t_n}^{\infty} \mu(s) \left|\left| \frac{\nabla[\xi(s-t_n) - \xi(s)]}{t_n} \right|\right|_2^2 ds \\ &\leq \int_0^{\infty} \mu(s) \left|\left| \frac{\nabla[\xi(s-t_n) - \xi(s)]}{t_n} \right|\right|_2^2 ds \leq k. \end{aligned}$$

Além disso, como $t_n^2 \to 0$ quando $n \to \infty$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$t_n^2 < \frac{\varepsilon}{3k},$$

assim

$$B_n = \frac{B_n}{t_n^2} t_n^2 < k\frac{\varepsilon}{3k} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Resta estimar o último termo. Novamente, das propriedades de μ, obtemos

$$\begin{aligned} C_n = \int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\xi(s)-\eta(s)]||_2^2 ds &\leq \int_0^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\xi(s)-\eta(s)]||_2^2 ds \\ &\leq ||\xi-\eta||_{\mathcal{M}}^2 < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Dessa forma, voltando em (1.9), temos que

$$\int_{t_n}^{+\infty} \mu(s)||\nabla[\eta(s-t_n)-\eta(s)]||_2^2 ds < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Logo, obtemos de (1.8) que

$$\lim_{n\to\infty} ||V(t_n)\eta-\eta||_{\mathcal{M}}^2 = 0,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} V(t_n)\eta = \eta,$$

para todo $\eta \in \mathcal{M}$, como queríamos. Portanto, $V(\cdot)$ é um semigrupo C_0 de contrações.

Teorema 1.9. *Sejam $T(\cdot)$ e $S(\cdot)$ dois semigrupos C_0 e sejam A e B seus respectivos geradores infinitesimais. Se $A \equiv B$, então $T(t) \equiv S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Prova. Ver [20], Teorema 2.6, página 6. ■

Exemplo 1.6. Consideremos o operador $\mathcal{L}$ como no Exemplo 1.4 e $V(\cdot)$ como no Exemplo 1.5. Vimos que o operador $\mathcal{L}$ é o gerador do semigrupo C_0 de contrações $S(\cdot)$. Neste exemplo, vamos utilizar o Teorema 1.9 para mostrar que $S(\cdot)$ coincide com o semigrupo $V(\cdot)$.

Denotando por $\mathcal{L}_0$ o gerador infinitesimal de $V(\cdot)$, precisamos verificar que $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_0|_{D(\mathcal{L})}$. Para isto, provaremos que $D(\mathcal{L}) \subset D(\mathcal{L}_0)$ e que $\mathcal{L}_0\eta = \mathcal{L}\eta$, para todo $\eta \in D(\mathcal{L})$. Com efeito, seja $\eta \in D(\mathcal{L})$, e notemos que

$$\frac{(V(t)\eta)(s)-\eta(s)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\eta(s-t)-\eta(s)}{t}, & s \geq t \\ -\dfrac{\eta(s)}{t}, & s < t \end{cases}.$$

Agora, utilizando a desigualdade $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, a desigualdade de Minkowisk e o fato de μ ser decrescente, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|\frac{V(t)\eta-\eta}{t}-\mathcal{L}\eta\right|\right|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^{+\infty}\mu(s)\left|\left|\frac{\nabla[(V(t)\eta)(s)-\eta(s)]}{t}-\nabla(\mathcal{L}\eta)(s)\right|\right|_2^2 ds\\
&= \int_0^t \mu(s)\left|\left|-\frac{\nabla\eta(s)}{t}+\nabla\eta_s(s)\right|\right|_2^2 ds + \int_t^{+\infty}\mu(s)\left|\left|\frac{\nabla[\eta(s-t)-\eta(s)]}{t}-\nabla(\mathcal{L}\eta)(s)\right|\right|_2^2 ds\\
&\leq \int_0^t \mu(s)\left|\left|-\frac{\nabla\eta(s)}{t}+\nabla\eta_s(s)\right|\right|_2^2 ds + \int_0^{+\infty}\mu(s)\left|\left|\frac{\nabla[\eta(s-t)-\eta(s)]}{t}-\nabla(\mathcal{L}\eta)(s)\right|\right|_2^2 ds\\
&\leq 2\int_0^t \mu(s)\left|\left|\frac{\nabla\eta(s)}{t}\right|\right|_2^2 ds + 2\int_0^t \mu(s)\left|\left|\nabla\eta_s(s)\right|\right|_2^2 ds + \left|\left|\frac{\eta(\cdot-t)-\eta(\cdot)}{t}-\mathcal{L}\eta\right|\right|_{\mathcal{M}}^2. \quad (1.12)
\end{aligned}
$$

Vamos olhar para a primeira integral em (1.12), uma vez que nosso objetivo é aplicar limite com $t \to 0$. Como $\eta \in D(\mathcal{L})$, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e a desigualdade de Holder, fazendo uma mudança na ordem de integração e utilizando o fato de μ ser decrescente, temos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_0^t \mu(s)\left|\left|\frac{\nabla\eta(s)}{t}\right|\right|_2^2 ds &= \frac{1}{t^2}\int_0^t \mu(s)\left(\int_0^s ||\nabla\eta_s(y)||_2 dy\right)^2 ds\\
&\leq \frac{1}{t^2}\int_0^t \mu(s)\left[\left(\int_0^s ||\nabla\eta_s(y)||_2^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^s 1dy\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 ds\\
&= \frac{1}{t^2}\int_0^t s\mu(s)\int_0^s ||\nabla\eta_s(y)||_2^2 dyds\\
&= \frac{1}{t^2}\int_0^t ||\nabla\eta_s(y)||_2^2\int_y^t s\mu(s)dsdy\\
&\leq \frac{1}{t^2}\int_0^t \mu(y)||\nabla\eta_s(y)||_2^2\left[\frac{s^2}{2}\right]_y^t dy\\
&= \frac{1}{t^2}\int_0^t \mu(y)||\nabla\eta_s(y)||_2^2\left(\frac{t^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \mu(y)||\nabla\eta_s(y)||_2^2 dy - \frac{1}{2t^2}\int_0^t y^2\mu(y)||\nabla\eta_s(y)||_2^2 dy\\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^t \mu(y)||\nabla\eta_s(y)||_2^2 dy,
\end{aligned}
$$

e dessa forma,

$$
0 \leq \lim_{t\to 0} 2\int_0^t \mu(s)\left|\left|\frac{\nabla\eta(s)}{t}\right|\right|_2^2 ds \leq \lim_{t\to 0}\int_0^t \mu(y)||\nabla\eta_s(y)||_2^2 dy = 0.
$$

Portanto, da definição do operador $\mathcal{L}$ e por (1.12), obtemos

$$\lim_{t\to 0}\left|\left|\frac{V(t)\eta-\eta}{t}-\mathcal{L}\eta\right|\right|^2_{\mathcal{M}}=0,$$

isto é,

$$\lim_{t\to 0}\frac{V(t)\eta-\eta}{t}=\mathcal{L}\eta,\ \text{em}\ \mathcal{M}.$$

Por outro lado, como $\mathcal{L}_0$ é o gerador infinitesimal de $V(\cdot)$, por definição temos que

$$\mathcal{L}_0\eta=\lim_{t\to 0}\frac{V(t)\eta-\eta}{t}=\mathcal{L}\eta,$$

ou seja, $\eta\in D(\mathcal{L}_0)$, e da arbitrariedade de $\eta\in D(\mathcal{L})$ temos que $D(\mathcal{L})\subset D(\mathcal{L}_0)$. Além disso, $\mathcal{L}_0\eta=\mathcal{L}\eta$, para todo $\eta\in D(\mathcal{L})$. Deste modo, $V(t)\equiv S(t)$, para todo $t\geq 0$.

Para encerrarmos essa seção, enunciaremos a seguir um resultado que será importante na discussão da existência e estabilidade do problema em estudo nesta dissertação.

Teorema 1.10. *Seja X um espaço de Banach e seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 $T(\cdot)$ em X, satisfazendo $||T(t)||\leq Me^{\omega t}$. Se B é um operador linear limitado em X, então $A+B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 $S(\cdot)$ em X, satisfazendo $||S(t)||\leq Me^{(\omega+M||B||)t}$.*

Prova. Ver [20], página 76, Teorema 1.1. ■

1.5 Problema de Cauchy abstrato

Estudaremos agora o problema de Cauchy abstrato e definiremos como serão consideradas as soluções deste problema. Esta seção será dividida entre o problema homogêneo e o não homogêneo.

1.5.1 Problema Homogêneo

Sejam $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear de X. Para cada $u_0 \in X$, vamos considerar o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} . \tag{1.13}$$

Definição 1.25. Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ é

(a) uma solução clássica (forte ou regular) de (1.13) se:

- (i) u satisfaz (1.13);
- (ii) u é contínua para todo $t \geq 0$;
- (iii) u é continuamente diferenciável para $t > 0$;
- (iv) $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$.

(b) uma solução generalizada (ou *mild*) de (1.13) se:

- (i) u satisfaz (1.13);
- (ii) u é contínua para todo $u \geq 0$;
- (iii) $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ para todo $t \geq 0$;
- (iv) $u(t) = A\int_0^t u(s)ds + u_0$.

Teorema 1.11. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(\cdot)$ de classe C_0. Então,*

(a) para cada $u_0 \in D(A)$ existe uma única função

$$u \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X),$$

solução regular do problema de Cauchy dado em (1.13). Além disso, se $S(\cdot)$ for um semigrupo de contrações, temos que

$$||u(t)|| \leq ||u_0||, \; e \; \left|\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|\right| = ||Au(t)|| \leq ||Au_0||, \; para\; todo\, t \geq 0.$$

(b) se $u_0 \in X$, existe uma única solução generalizada do problema de Cauchy dado em (1.13).

Prova. Ver [19], Teorema 2.3, página 110. ■

1.5.2 Problema Não Homogêneo

Sejam X um espaço de Banach e $f : [0,T) \longrightarrow X$ uma função contínua. Para cada $u_0 \in X$, consideraremos o problema de Cauchy abstrato não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Vamos assumir, nesta seção, que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(\cdot)$ de classe C_0, desta forma a equação homogênea correspondente, isto é, a equação com $f \equiv 0$, possui uma única solução para cada valor inicial $u_0 \in D(A)$.

Definição 1.26. Uma função $u : [0,T) \longrightarrow X$ é dita solução clássica de (1.14) se:

(i) u satisfaz (1.14) em $[0,T)$;

(ii) u for contínua em $[0,T)$;

(iii) u for continuamente diferenciável em $(0,T)$;

(iv) $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0,T)$.

Sejam $t \in [0,T)$, u uma solução clássica de (1.14) e consideremos a função $v : [0,t] \longrightarrow X$ dada por $v(s) = S(t-s)u(s)$ que é diferenciável para $0 < s < t$. Temos que

$$\frac{d}{ds}v(s) = S(t-s)\frac{d}{ds}u(s) - S(t-s)Au(s), \quad s \in (0,t).$$

Logo,

$$\frac{d}{ds}v(s) = S(t-s)[Au(s) + f(s)] - S(t-s)Au(s), \quad s \in (0,t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{ds}v(s) = S(t-s)f(s).$$

Se $f \in L^1(0,T;X)$, então $S(t-s)f(s)$ é integrável e integrando esta última identidade no intervalo $(0,t)$ obtemos

$$v(t) - v(0) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

ou ainda,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \tag{1.15}$$

Assim, as soluções clássicas de (1.14) são necessariamente desta forma. Consequentemente, obtemos:

Corolário 1.4. *Se $f \in L^1(0,T;X)$, então para cada $x \in X$ o problema (1.14) possui no máximo uma solução. Se o problema possui solução, esta é dada por (1.15).*

Para $f \in L^1(0,T;X)$, a identidade (1.15) tem sentido quer u seja ou não solução clássica de (1.14). Por isso, temos a seguinte definição:

Definição 1.27. Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, consideremos $u_0 \in X$ e $f \in L^1(0,T;X)$. A função $u \in C^0([0,T];X)$ dado por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds; \quad 0 \leq t \leq T,$$

é dita solução generalizada (mild) do problema (1.14) sobre $[0,T]$.

Teorema 1.12. *O sistema (1.14) tem uma solução clássica para cada $u_0 \in D(A)$ se, e somente se, a função v dada por*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{1.16}$$

for continuamente diferenciável para todo $t > 0$.

Prova. Ver [19], Teorema 2.15, página 136. ■

Corolário 1.5. *Se $v(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e Av é contínua, então o problema (1.14) tem uma solução clássica para todo $u_0 \in D(A)$.*

Prova. Ver [19], Corolário 2.16, página 137. ■

Proposição 1.5. *Sejam A gerador infinitesimal de um semigrupo $S(\cdot)$ de classe C_0, $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ uma função contínua e suponhamos que f satisfaça uma das seguintes condições:*

(i) f é continuamente diferenciável para todo $t \geq 0$;

(ii) $f(t) \in D(A)$, para todo $t \geq 0$ e Af é integrável (em $L^1_{loc}(0, +\infty; X)$).

Então, para todo $u_0 \in D(A)$, (1.14) tem uma única solução clássica.

Prova. Ver [19], Proposição 2.17, página 138. ∎

Definição 1.28. Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(\cdot)$ de classe C_0. Uma função u diferenciável quase sempre sobre $[0, T]$ e tal que $u' \in L^1(0, T; X)$ é dita solução forte do problema (1.14) se $u(0) = u_0$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ quase sempre sobre $[0, T]$.

Notemos que se $A \equiv 0$ e $f \in L^1(0, T; X)$ o problema (1.14) não possui, em geral, solução clássica, a menos que f seja contínua. Contudo, terá sempre uma solução forte dada por

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s)ds.$$

Uma questão natural é determinar quando uma solução generalizada (mild) de (1.14) é uma solução forte. Dessa forma, temos os seguintes resultados:

Teorema 1.13. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(\cdot)$ de classe C_0 e consideremos $f \in L^1(0, T; X)$. Tomando*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

e supondo que $v(t)$ satisfaça uma das duas condições:

(i) $v(t)$ é diferenciável quase sempre sobre $[0, T]$ e $v'(t) \in L^1(0, T; X)$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ quase sempre sobre $[0, T]$ e $Av(t) \in L^1(0, T; X)$.

Então, (1.14) possui uma solução forte u sobre $[0, T]$ para algum $u_0 \in D(A)$. Reciprocamente, se (1.14) possui uma solução forte u sobre $[0, T]$ para algum $u_0 \in D(A)$, então $v(t)$ satisfaz (i) e (ii).

Prova. Ver [19], Teorema 2.19, página 139. ■

Corolário 1.6. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(\cdot)$ de classe C_0. Se f é diferenciável quase sempre em $[0,T]$ e $f' \in L^1(0,T;X)$ então, para todo $u_0 \in D(A)$ o problema (1.14) possui uma única solução forte em $[0,T]$.*

Prova. Ver [19], Corolário 2.20, página 141. ■

Exemplo 1.7. Denotemos $\mathcal{M} = L^2_\mu(0,+\infty;H^1_0(\Omega))$ o espaço de Hilbert com peso μ, em que $\mu : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função localmente absolutamente contínua que satisfaz:

(i) $\mu(0) = \mu_0 > 0$;

(ii) $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$;

(iii) $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, para algum $\alpha > 0$.

Sejam $\mathcal{L}$ definido como no Exemplo 1.4 e $\eta_0 \in D(\mathcal{L})$. Como vimos no Exemplo 1.4, $\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(\cdot)$, assim podemos considerar o seguinte problema de Cauchy abstrato não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\eta(t) = \mathcal{L}\eta(t) + w(t), & t > 0 \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases}, \tag{1.17}$$

em que $w \in L^1(0,t_0;H^1_0(\Omega))$.

No Exemplo 1.6, vimos uma identificação para o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{L}$. Dessa forma, conseguimos exibir a solução de (1.17). Da Definição 1.27, temos que

$$\eta = S(t)\eta_0 + \int_0^t S(t-\tau)w(\tau)d\tau, \tag{1.18}$$

é uma solução mild do problema (1.17). Mais ainda, se $w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{M}$ for diferenciável quase sempre em $[0,t_0]$ e $w' \in L^1(0,t_0;H^1_0(\Omega))$, então, pelo Corolário 1.6, temos que (1.14) possui uma única solução forte, além disso, a função η^t dada por

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \eta_0(s-t) + \int_0^t w(y)dy & s \geq t \\ \int_{t-s}^t w(t)dy & s < t \end{cases} \tag{1.19}$$

pertence a $C([0,t_0];\mathcal{M})$ e satisfaz (1.17) no sentido forte. Ou seja, (1.19) é solução forte de (1.17).

1.6 Resultados Auxiliares

Os resultados desta seção são ferramentas importantes para as análises desenvolvidas nos capítulos subsequentes.

Definição 1.29. Seja H um espaço vetorial com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $|\cdot|$. Dizemos que uma forma bilinear $a: H\times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é

(i) contínua, se existe constante $C>0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|, \text{ para todo } u,v\in H;$$

(ii) coerciva, se existe uma constante $\alpha>0$ tal que

$$a(v,v)\geq \alpha|v|^2, \text{ para todo } v\in H.$$

Teorema 1.14 (Lax-Milgram)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $a(u,v): H\times H\longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para todo $\varphi\in H'$, existe um único $u\in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle_{H',H}, \text{ para todo } v\in H.$$

Além disso, se $a(u,v)$ for simétrica, então u se caracteriza por:

$$\left\{\text{Existe um único } u\in H \text{ tal que } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle\varphi,v\rangle_{H',H} = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(u,v)-\langle\varphi,v\rangle_{H',H}\right\}\right\}.$$

Prova. Ver [6], página 179, Corolário 4.15. ■

Teorema 1.15 (Fundamental do Cálculo)**.** *Seja f uma função integrável em $[a,b]$, e suponha que*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Então $F'(x) = f(x)$ para quase todo $x \in [a, b]$.

Prova. Ver [24], página 107, Teorema 10. ■

Teorema 1.16 (Fubini)**.** *Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espaços de medida σ-finitas e π a medida em $Z = X \times Y$ dada pelo produto de μ por ν. Se a função $F : Z = X \times Y \longrightarrow R$ é integrável com relação a π, então*

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu, \qquad\qquad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

são mensuráveis e

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu.$$

Em outros símbolos,

$$\int_X \left[\int_Y F d\nu \right] d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left[\int_X F d\mu \right] d\nu.$$

Prova. Ver [3], página 119, Teorema 10.10. ■

Teorema 1.17. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com ∂U de classe C^1 e $u, v \in C^1(\overline{U})$. Então*

$$\int_U u_{x_i} v dx = -\int_U u v_{x_i} dx + \int_{\partial U} u v \nu^i dS,$$

$i = 1, \ldots, n.$

Prova. Ver [9], página 628, Teorema 2. ■

Observação 1.6. Do Teorema 1.2, temos que se $u, v \in H_0^1(U)$, então

$$\int_U u_{x_i} v dx = -\int_U u v_{x_i} dx.$$

Teorema 1.18 (Fórmulas de Green)**.** *Sejam $u, v \in C^2(\overline{U})$. Então*

(i) $\displaystyle\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS;$

(ii) $\displaystyle\int_U Dv \cdot Du dx = -\int_U u \Delta v dx + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS;$

(iii) $\displaystyle\int_U u \Delta v dx - v \Delta u dx = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$

Prova. Ver [9], página 628, Teorema 3. ■

Teorema 1.19. *Seja $V(\cdot)$ uma função decrescente não negativa definida sobre $[0, +\infty)$. Se*

$$\int_S^{+\infty} V(t)dt \leq CV(S), \text{ para todo } S > 0,$$

para alguma constante $C > 0$, então

$$V(t) \leq V(0)e^{1-t/C}, \text{ para todo } t > 0.$$

Prova. Ver [15], página 103, Teorema 8.1. ■

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

No que segue, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira suave. Estamos interessados em estudar a boa colocação e o comportamento assintótico da equação da onda com termo de memória e termo de retardo dado pelo seguinte problema:

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds + ku_t(x,t-\tau) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \tag{2.2}$$

$$u(x,t) = u_0(x,t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0], \tag{2.3}$$

em que $u_0 : \Omega \times (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ descreve a história passada de u, a constante $\tau > 0$ é o retardo, k é um número real e o núcleo da memória $\mu : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função localmente absolutamente contínua que satisfaz:

(i) $\mu(0) = \mu_0 > 0$;

(ii) $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = \tilde{\mu} < 1$;

(iii) $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, para algum $\alpha > 0$.

Para mostrar a existência da solução para o problema (2.1)-(2.3) utilizaremos a teoria de semigrupos lineares; no entanto, como este problema é não autônomo, é necessário realizar uma mudança de variáveis de modo a obter um operador que não dependa de t. Dessa forma estudaremos um problema auxiliar equivalente e provaremos a existência e unicidade da solução para este.

2.1 Problema equivalente

Com o objetivo de provar, através da teoria de semigrupos lineares, a existência e unicidade da solução para o problema em estudo, será realizada uma mudança de variáveis para obter um problema que, conforme será mostrado posteriormente, é equivalente a (2.1)-(2.3). Os cálculos realizados nesta seção são formais. Além disso, utilizamos a mudança de variáveis com relação ao termo de memória seguindo as ideias de Dafermos [8] e Grasseli e Pata [12], e a mudança com relação ao termo de retardo como feito por Nicaise e Pignotti em [17].

Desta forma, vamos introduzir as variáveis

$$\eta^t(x,s) := u(x,t) - u(x,t-s), \tag{2.4}$$

e

$$z(x,\rho,t) := u_t(x,t-\tau\rho), \quad x \in \Omega, \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0. \tag{2.5}$$

Derivando (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \eta^t_t(x,s) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial}{\partial x}t - \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t-s)\frac{\partial}{\partial t}x + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t-s)\frac{\partial}{\partial t}(t-s)\right] \\ &= u_t(x,t) - u_t(x,t-s), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta^t_s(x,s) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial}{\partial s}x + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial}{\partial s}t - \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t-s)\frac{\partial}{\partial s}x + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t-s)\frac{\partial}{\partial s}(t-s)\right] \\ &= u_t(x,t-s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\eta^t_t = u_t(x,t) - u_t(x,t-s) \qquad \text{e} \qquad \eta^t_s = u_t(x,t-s),$$

donde

$$\eta^t_t(x,s) = -\eta^t_s(x,s) + u_t(x,t), \tag{2.6}$$

para $x \in \Omega$, $s > 0$ e $t > 0$. Ainda, da forma como definimos a variável η^t em (2.4) e utilizando (ii), podemos reescrever o termo de memória como

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta u(x,t-s)ds &= \int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta(u(x,t)-\eta^t(x,s))ds\\ &= \int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta u(x,t)ds - \int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\eta^t(x,s)ds\\ &= \tilde{\mu}\Delta u(x,t) - \int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\eta^t(x,s)ds.\end{aligned}$$

Agora, por (2.5), temos que

$$\begin{aligned}z_t(x,\rho,t) &= \frac{\partial u_t}{\partial x}(x,t-\tau\rho)\frac{\partial}{\partial t}x + \frac{\partial u_t}{\partial t}(x,t-\tau\rho)\frac{\partial}{\partial t}(t-\tau\rho)\\ &= u_{tt}(x,t-\tau\rho),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}z_\rho(x,\rho,t) &= \frac{\partial u_t}{\partial x}(x,t-\tau\rho)\frac{\partial}{\partial \rho}(x) + \frac{\partial u_t}{\partial t}(x,t-\tau\rho)\frac{\partial}{\partial \rho}(t-\tau\rho)\\ &= -\tau u_{tt}(x,t-\tau).\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos escrever

$$z_\rho(x,\rho,t) = -\tau u_{tt}(x,t-\tau\rho) = -\tau z_t(x,\rho,t),$$

donde obtemos

$$z_\rho(x,\rho,t) + \tau z_t(x,\rho,t) = 0, \tag{2.7}$$

com $x\in\Omega$, $\rho\in(0,1)$ e $t>0$. Desta forma, podemos reescrever o termo de retardo como

$$ku_t(x,t-\tau) = kz(x,1,t).$$

Agora, vamos analisar como ficam as condições iniciais e de fronteira do problema com as mudanças realizadas e quais são as condições com relação às novas variáveis. Por (2.4) e (2.2) temos que

$$\eta^t(x,s) = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega\times(0,+\infty).$$

Por (2.5), obtemos

$$z(x,0,t) = u_t(x,t) \qquad \text{em} \qquad \Omega \times (0,+\infty).$$

Olhando para (2.3),

$$u(x,0) = u_0(x,0) := u_0(x) \qquad \text{em} \qquad \Omega$$

e

$$u_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} u_0(x,t)|_{t=0} := u_1(x).$$

Por (2.3) e (2.4), temos que

$$\begin{aligned}\eta^0(x,s) =& u(x,0) - u(x,-s)\\ & u_0(x,0) - u_0(x,-s) = \eta_0(x,s) \qquad \text{em} \qquad \Omega \times (0,+\infty),\end{aligned}$$

e novamente por (2.3), mas agora considerando a mudança de variáveis (2.5), obtemos

$$z(x,\rho,0) = u_t(x,-\tau\rho) = u_{0_t}(x,-\tau\rho) = \frac{\partial}{\partial t} u_0(x,-\tau\rho) := z^0(x,-\tau\rho).$$

Tomando $-\tau\rho = s$, como $\rho \in (0,1)$, temos que $s \in (-\tau,0)$, donde

$$z^0(x,s) = \frac{\partial}{\partial t} u_0(x,s), \qquad \text{com} \qquad x \in \Omega \qquad \text{e} \qquad s \in (-\tau,0).$$

Considerando as mudanças de variáveis feitas, reescrevemos o problema (2.1)-(2.3) como

$$u_{tt}(x,t) = (1-\tilde{\mu})\Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(x,s)ds - kz(x,1,t) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \tag{2.8}$$

$$\eta_t^t(x,s) = -\eta_s^t(x,s) + u_t(x,t) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \times (0,+\infty) \tag{2.9}$$

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,1) \times (0,+\infty) \tag{2.10}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \tag{2.11}$$

$$\eta^t(x,s) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty),\ t \geq 0 \tag{2.12}$$

$$z(x,0,t)=u_t(x,t) \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,+\infty) \tag{2.13}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x,0)=u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.14}$$

$$\eta^0(x,s)=\eta_0(x,s) \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,+\infty) \tag{2.15}$$

$$z(x,\rho,0)=z^0(x,-\tau\rho), \quad \text{com} \quad x\in\Omega,\ \rho\in(0,1) \tag{2.16}$$

em que

$$u_0(x)=u_0(x,0), \quad x\in\Omega, \tag{2.17}$$

$$u_1(x)=\frac{\partial u_0}{\partial t}(x,t)|_{t=0}, \quad x\in\Omega, \tag{2.18}$$

$$\eta_0(x,s)=u_0(x,0)-u_0(x,-s), \quad x\in\Omega, \quad s\in(0,+\infty), \tag{2.19}$$

$$z^0(x,s)=\frac{\partial u_0}{\partial t}(x,s), \quad x\in\Omega, \quad s\in(-\tau,0). \tag{2.20}$$

Mostraremos agora que os problemas (2.1)-(2.3) e (2.8)-(2.16) são equivalentes. Ressaltamos que os cálculos são formais. De fato, se u satisfaz (2.1)-(2.3), considerando a mudança de variáveis e a análise que realizamos anteriormente, temos que u, η^t e z satisfazem (2.8)-(2.16). Suponhamos agora que u, η^t e z satisfazem o problema equivalente e vamos reescrever η^t e z em função de u. Para isto, denotando $\mathcal{M}=L^2_\mu(0,+\infty;H^1_0(\Omega))$ e tomando $t_0>0$, analisaremos as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} \eta^t_t(x,s)=-\eta^t_s(x,s)+u_t(x,t), & t\in[0,t_0] \\ \eta^0(x,s)=\eta_0(x,s), & \eta_0\in\mathcal{M} \\ \eta^t(x,0)=0, & x\in\partial\Omega \text{ e } t\in[0,t_0] \end{cases}, \tag{2.21}$$

e

$$\begin{cases} z_\rho(x,\rho,t)+\tau z_t(x,\rho,t)=0 \\ z(x,0,t)=u_t(x,t), \\ z(x,\rho,0)=u_0'(x,-\tau\rho) \end{cases}. \tag{2.22}$$

Primeiramente, mostraremos que existe $\eta\in C([0,t_0],\mathcal{M})$ solução de (2.21). Note que, podemos reescrever (2.21) como o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\eta(t) = \mathcal{L}\eta(t) + u_t(t), \quad t > 0 \\ \eta(0) = \eta_0 \end{cases}, \tag{2.23}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ &\longmapsto \mathcal{L}\eta = -\eta_s, \end{aligned}$$

com

$$D(\mathcal{L}) = \{\eta \in \mathcal{M}; \eta_s \in \mathcal{M} \text{ e } \eta(0) = 0\}.$$

Observe que o operador $\mathcal{L}$ é o mesmo operador visto no Exemplo 1.4, o qual é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Um estudo detalhado sobre este problema de Cauchy pode ser encontrado em [12], o qual mostra que, sob condições adequadas, ele possui uma única solução forte dada por

$$\eta(s) = \begin{cases} \eta_0(s-t) + \int_0^t u_t(\tau)d\tau, & s \geq t \\ \int_{t-s}^t u_t(\tau)d\tau, & s < t \end{cases}.$$

Assim, por (2.17), (2.19) e do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$\begin{aligned} \eta(x,s) &= \begin{cases} u_0(x,0) - u_0(x,t-s) + u(x,t) - u(x,0), & s \geq t \\ u(x,t) - u(x,t-s), & s < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} u(x,t) - u_0(x,t-s), & s \geq t \\ u(x,t) - u(x,t-s), & s < t \end{cases}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Agora, resolveremos o problema (2.22) pelo método das características. Considerando $(2.22)_2$, seja γ a curva parametrizada por

$$\gamma(s) = (x(s), \rho(s), t(s)).$$

Logo, para $\gamma(0) = (x(0), \rho(0), t(0)) = (\overline{x}, 0, \overline{t})$ temos o seguinte sistema característico

$$\begin{cases} x'(s) = 0, & x(0) = \overline{x} \\ \rho'(s) = 1, & x(0) = 0 \\ t'(s) = \tau, & t(0) = \overline{t} \\ \dfrac{d}{ds}[z(x(s), \rho(s), t(s))] = 0 \end{cases},$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} x(s) = \overline{x} \\ \rho(s) = s \\ t(s) = \tau s + \overline{t} \\ z(x(s), \rho(s), t(s)) = c \end{cases}, \tag{2.25}$$

donde obtemos que

$$s = \rho, \quad \overline{t} = t - \tau\rho \quad \text{e} \quad \overline{x} = x.$$

Dessa forma, temos de (2.22)$_2$ que

$$z(\overline{x}, 0, \overline{t}) = u_t(\overline{x}, \overline{t}) = u_t(x, t - \tau\rho),$$

e de (2.25)$_4$

$$z(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho). \tag{2.26}$$

Além disso, desta última igualdade temos que

$$z(x, \rho, 0) = u_0(x, -\tau\rho)$$

e, como

$$\frac{\partial}{\partial t} u_0(x, -\tau\rho) = u_0(x, -\tau\rho) = z(x, \rho, 0)$$

então z dado em (2.26) satisfaz (2.22)$_3$, e portanto z é solução de (2.22).

De posse das soluções dos problemas (2.21) e (2.22), vamos retornar à equivalência dos problemas. Como supomos anteriormente, temos que u, η^t e z satisfazem (2.8)-(2.16), e queremos mostrar que u satisfaz o problema original. À luz do exposto, η^t satisfaz (2.9) e dessa forma, da expressão de η solução da equação diferencial (2.21), obtemos que

$$\eta^t(x,s) = \begin{cases} u(x,t) - u_0(x,t-s), & s \geq t \\ u(x,t) - u(x,t-s), & s < t \end{cases}.$$

Também, como z satisfaz o problema equivalente, então z é solução da equação diferencial (2.22) e pelo que mostramos anteriormente, temos que

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho). \tag{2.27}$$

Notemos que a condição (2.11) do problema equivalente coincide com a condição (2.2) do problema original, portanto, u satisfaz esta condição. Agora, para $s \in (0,+\infty)$, utilizando (2.19), (2.15), (2.24) e (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} u_0(x,0) &= \eta_0(x,s) + u_0(x,-s) \\ &= \eta^0(x,s) + u_0(x,-s) \\ &= u(x,0) - u(x,-s) + u_0(x,-s) \\ &= u_0(x,0) - u(x,-s) + u_0(x,-s), \end{aligned}$$

donde

$$u(x,-s) = u_0(x,-s),\ s \in (0,+\infty),$$

logo

$$u(x,t) = u_0(x,t),\ t \in (-\infty,0),$$

e assim, u satisfaz (2.3).

Finalmente, utilizando (2.24), (2.27) e as propriedades da função μ em (2.8), obtemos que

$$u_{tt}(x,t) = (1-\tilde{\mu})\Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(x,s)ds - kz(x,1,t) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty)$$

$$= \Delta u(x,t) - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t)ds + \int_0^t \mu(s)\Delta\eta^t(x,s)ds + \int_t^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(x,s)ds -$$

$$
\begin{aligned}
&- ku_t(x,t-\tau)\\
&= \Delta u(x,t) - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t)ds + \int_0^{t} \mu(s)\Delta u(x,t)ds + \int_0^{t} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds\\
&\quad + \int_t^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t)ds - \int_t^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds - ku_t(x,t-\tau)\\
&= \Delta u(x,t) - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t)ds + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t)ds\\
&\quad - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds - ku_t(x,t-\tau)\\
&= \Delta u(x,t) - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds - ku_t(x,t-\tau),
\end{aligned}
$$

donde,

$$
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds + ku_t(x,t-\tau) = 0.
$$

Logo, u satisfaz (2.1) e, consequentemente, satisfaz o problema original. Obtemos assim a equivalência (formal) entre os problemas. Dessa forma, para provar a existência e unicidade da solução para o problema original, vamos trabalhar com o problema equivalente.

2.2 Existência e unicidade de solução do problema equivalente

Nesta seção, vamos estudar a boa colocação do problema equivalente. Para tal, consideremos o espaço de fase como sendo o espaço de Hilbert

$$
\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L_\mu^2(0,+\infty; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0,1;L^2(\Omega)), \tag{2.28}
$$

munido do produto interno

$$
\begin{aligned}
((u_1,v_1,w_1,z_1)^T,(u_2,v_2,w_2,z_2)^T)_{\mathcal{H}} = (1-\tilde{\mu})(\nabla u_1,\nabla u_2) + (v_1,v_2) + (w_1,w_2)_{L_\mu^2(0,+\infty;H_0^1(\Omega))}\\
+ \tau|k|(z_1,z_2)_{L^2(0,1;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}
$$

Denotando $\mathcal{U} := (u, u_t, \eta^t, z)^T$, podemos reescrever o problema (2.8)-(2.16) como o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \mathcal{U}' = \mathcal{A}\mathcal{U}, \\ \mathcal{U}(0) = (u_0, u_1, \eta_0, z^0)^T, \end{cases} \tag{2.29}$$

em que o operador $\mathcal{A}$ é definido como

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ (1-\tilde{\mu})\Delta\cdot & 0 & \mathcal{I} & -kI \\ 0 & I & -\dfrac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\rho}{\tau}I \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

com $\mathcal{I}(f) = \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta f(s)ds$ e I o operador identidade. Dessa forma,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \eta^t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ (1-\tilde{\mu})\Delta u + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds - kz(\cdot,1,\cdot) \\ -\eta_s^t + u_t \\ -\dfrac{z_\rho}{\tau} \end{pmatrix},$$

e o domínio deste operador é dado por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \{(u, v, \eta, z)^T \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L_\mu^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, 1; L^2(\Omega)); \\ v = z(\cdot, 0, \cdot),\ (1-\tilde{\mu})u + \int_0^{+\infty} \mu(s)\eta^t(s)ds \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \eta_s \in L_\mu^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)), \partial_\rho z \in L^2(0, 1; L^2(\Omega))\}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Mostraremos a boa colocação do problema equivalente no teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Para qualquer dado inicial $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$ existe uma única solução $\mathcal{U} \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$ para o problema (2.29). Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então*

$$\mathcal{U} \in C([0, +\infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

Prova. Como o operador $\mathcal{A}$ não depende da variável t, o problema (2.29) é autônomo.

Desta forma, utilizaremos a teoria de semigrupos lineares. Nosso objetivo então é mostrar que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Seja $V = (a, b, c, d) \in D(\mathcal{A})$ vamos escrever $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{B}$, em que $\tilde{\mathcal{A}}(V) = \mathcal{A}(V) - |k|(0, b, 0, 0)^T$ e $\mathcal{B}(V) = |k|(0, b, 0, 0)^T$, com $D(\mathcal{B}) = \mathcal{H}$, e provar que $\tilde{\mathcal{A}}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Desta forma, pelo Teorema 1.10, segue que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0.

De fato, utilizaremos o Teorema de Lumer-Phillips para mostrar que $\tilde{\mathcal{A}}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Assim, precisamos provar que $\tilde{\mathcal{A}}$ é um operador dissipativo e que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - \tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$, isto é, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 I - \tilde{\mathcal{A}}$ é sobrejetor.

Provaremos primeiramente que $\tilde{\mathcal{A}}$ é dissipativo. Com efeito, seja $U = (u, v, \eta^t, z) \in \mathcal{H}$. Usando a definição do produto interno no espaço $\mathcal{H}$, a fórmula de Green, que $v(x,t) = z(x, 0, t)$ por definição, as propriedades da função μ e a desigualdade de Young, temos que

$$(\tilde{\mathcal{A}}U, U)_{\mathcal{H}} = \left(\begin{array}{ccc} v & & u \\ (1-\tilde{\mu})\Delta u + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds - |k|v - kz(\cdot, 1, \cdot) & , & v \\ -\eta_s^t + v & & \eta^t \\ -\tau^{-1} z_\rho & & z \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\tilde{\mu}) \int_\Omega \nabla v(x,t) \nabla u(x,t) dx + (1-\tilde{\mu}) \int_\Omega \Delta u(x,t) v(x,t) dx \\
&\quad + \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \Delta \eta^t(x,s) v(x,t) ds dx - |k| \int_\Omega v(x,t) v(x,t) dx \\
&\quad - k \int_\Omega z(x,1,t) v(x,t) dx - \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega \nabla \eta_s^t(x,s) \nabla \eta^t(x,s) dx ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega \nabla v(x,t) \nabla \eta^t(x,s) dx ds - |k| \int_0^1 \int_\Omega z_\rho(x,\rho,t) z(x,\rho,t) dx d\rho \\
&= (1-\tilde{\mu}) \int_\Omega \nabla v(x,t) \nabla u(x,t) dx - (1-\tilde{\mu}) \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla v(x,t) dx \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega \nabla v(x,t) \nabla \eta^t(x,s) dx ds - |k| \int_\Omega |v(x,t)|^2 dx - k \int_\Omega z(x,1,t) v(x,t) dx \\
&\quad - \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \nabla \eta_s^t(x,s) \nabla \eta^t(x,s) ds dx + \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \nabla v(x,t) \nabla \eta^t(x,s) ds dx -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- |k| \int_0^1 \int_\Omega z_\rho(x,\rho,t) z(x,\rho,t) dx d\rho \\
&\leq -|k| \, ||v(x,t)||_2^2 + \frac{k}{2} \int_\Omega |z(x,1,t)|^2 dx + \frac{k}{2} \int_\Omega |v(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'(s) ||\nabla \eta^t(x,s)||_2^2 ds \\
&- \frac{|k|}{2} \int_0^1 \frac{d}{d\rho} ||z(x,\rho,t)||^2 d\rho \\
&\leq -|k| \, ||v(x,t)||_2^2 + \frac{|k|}{2} ||z(x,1,t)||_2^2 + \frac{|k|}{2} ||v(x,t)||_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'(s) ||\nabla \eta^t(x,s)||_2^2 ds \\
&- \frac{|k|}{2} (||z(x,1,t)||_2^2 - ||z(x,0,t)||_2^2) \\
&\leq -|k| \, ||v(x,t)||_2^2 + \frac{|k|}{2} ||v(x,t)||_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'(s) ||\nabla \eta^t(x,s)||_2^2 ds + \frac{|k|}{2} ||v(x,t)||_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu'(s) ||\nabla \eta^t(x,s)||_2^2 ds \leq 0,
\end{aligned}
$$

visto que μ é decrescente. Logo $\tilde{\mathcal{A}}$ é dissipativo.

Agora, provaremos que $Im(I - \tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$. Dessa forma, tomando $(f,g,h,l)^T \in \mathcal{H}$ devemos exibir $(u,v,\eta,z)^T \in D(\tilde{\mathcal{A}})$ tal que

$$
\begin{cases}
u - v = f \\
v - (1-\tilde{\mu})\Delta u - \displaystyle\int_0^{+\infty} \mu(s) \Delta \eta(s) ds + |k| v + kz(.,1,.) = g \\
\eta + \eta_s - v = h \\
z + \tau^{-1} z_\rho = l
\end{cases} . \tag{2.32}
$$

Nos cálculos que seguem, vamos prosseguir formalmente. Seja $s > 0$. Multiplicando (2.32)$_3$ por e^s, temos

$$
e^s \eta(x,s) + e^s \eta_s(x,s) - e^s v(x,t) = e^s h(s),
$$

e integrando em relação à variável s no intervalo $(0,s)$, obtemos

$$
\int_0^s e^\alpha \eta(x,\alpha) d\alpha + \int_0^s e^\alpha \eta_\alpha(x,\alpha) d\alpha - v(x,t) \int_0^s e^\alpha d\alpha = \int_0^s e^\alpha h(\alpha) d\alpha, \quad \alpha > 0. \tag{2.33}
$$

Calculando a segunda integral do lado direito de (2.33), temos que

$$
\int_0^s \eta_\alpha(x,\alpha) e^\alpha d\alpha = [\eta(\alpha) e^\alpha]_0^s - \int_0^s e^\alpha \eta(\alpha) d\alpha
$$

$$= e^s\eta(x,s) - \int_0^s e^\alpha \eta(\alpha)d\alpha,$$

uma vez que $\eta(x,0) = 0$. Assim, obtemos que

$$e^s\eta(x,s) - v(x,t)(e^s - 1) = \int_0^s e^\alpha h(\alpha)d\alpha,$$

donde

$$\eta(x,s) = \int_0^s e^{\alpha - s}h(\alpha)d\alpha + v(x,t)(1 - e^{-s}). \tag{2.34}$$

Agora, multiplicando $(2.32)_4$ por $\tau e^{\tau\rho}$, obtemos

$$e^{\tau\rho}z(x,\rho,t) + e^{\tau\rho}z_\rho(x,\rho,t) = \tau e^{\tau\rho}l(\rho),$$

que podemos escrever como

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(e^{\tau\rho}z(x,\rho,t)) = \tau e^{\tau\rho}l(\rho).$$

Integrando esta identidade com relação à variável ρ no intervalo $(0,\rho)$, temos

$$\int_0^\rho \frac{\partial}{\partial\rho}(e^{\tau r}z(x,r,t))dr = \tau\int_0^\rho e^{\tau r}l(r)dr,$$

donde

$$[e^{\tau r}z(x,r,t)]_0^\rho = \tau\int_0^\rho e^{\tau r}l(r)dr,$$

e assim,

$$e^{\tau\rho}z(x,\rho,t) - z(x,0,t) = \tau\int_0^\rho e^{\tau r}l(r)dr.$$

Como $z(x,0,t) = v(x,t) = u(x,t) - f$, temos

$$z(x,\rho,t) = \tau e^{-\tau\rho}\int_0^\rho e^{\tau r}l(r)dr + e^{-\tau\rho}u(x,t) - e^{-\tau\rho}f. \tag{2.35}$$

Em particular, obtemos que

$$z(x,1,t) = \tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r}l(r)dr + e^{-\tau}u(x,t) - e^{-\tau}f. \tag{2.36}$$

Agora, substituindo (2.32)$_1$, (2.34) e (2.36) em (2.32)$_2$, temos que

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - f - (1-\tilde{\mu})\Delta u(x,t) - \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^s e^{\alpha - s}\Delta h(\alpha) d\alpha ds - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t) ds \\
+ \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta f ds + \int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s}\Delta u(x,t) ds - \int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s}\Delta f ds \\
+ |k| u(x,t) - |k| f + k\tau e^{-\tau} \int_0^1 e^{\tau r} l(r) dr + k e^{-\tau} u(x,t) - k e^{-\tau} f = g,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
(1{+}|k| + k e^{-\tau}) u(x,t) - \Delta u(x,t) + \overbrace{\int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s} ds}^{a_1>0} \Delta u(x,t) \\
= g + \underbrace{\int_0^{+\infty} \mu(s)(e^{-s}-1)\Delta f ds + (1 + k e^{-\tau} + |k|) f}_{:=f^*} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^s e^{\alpha - s} \Delta h(\alpha) d\alpha ds}_{:=h^*} \\
\underbrace{- k\tau e^{-\tau} \int_0^1 e^{\tau r} l(r) dr}_{:=l^*} .
\end{aligned}
$$

Motivados pela expressão acima, vamos definir a seguinte forma bilinear

$$
J : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}
$$

$$
J(a,b) = (1 + |k| + k e^{-\tau}) \int_\Omega ab\, dx + (1 - a_1) \int_\Omega \nabla a \nabla b\, dx,
$$

para todo $a, b \in H_0^1(\Omega)$.

Nosso objetivo é utilizar o Teorema de Lax-Milgran e, para isto, mostraremos que J é contínua e coerciva. Com efeito, dados $a, b \in H_0^1(\Omega)$, utilizando a desigualdade de Poincaré, temos

$$
\begin{aligned}
|J(a,b)| &\leq \left|1 + |k| + k e^{-\tau}\right| \int_\Omega |ab| dx + |1 - a_1| \int_\Omega |\nabla a \nabla b| dx \\
&\leq (1 + |k| + |k| e^{-\tau}) \|a\|_2 \|b\|_2 + |1 - a_1| \|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2 \\
&\leq (1 + |k| + |k| e^{-\tau}) c_1 \|\nabla a\|_2 c_2 \|\nabla b\|_2 + |1 - a_1| \|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2 \\
&= c_3 \|\nabla a\|_2 \|\nabla b\|_2 \\
&= c_3 \|a\|_{H_0^1(\Omega)} \|b\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

em que $c_3 = c_1c_2(1+|k|+|k|e^{-\tau}) + a_1 + 1$. Da arbitrariedade de $a, b \in H_0^1(\Omega)$, temos que J é contínua.

Agora, dado $a \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$
\begin{aligned}
J(a,a) &= (1+|k|+ke^{-\tau})\int_\Omega |a|^2dx + (1-a_1)\int_\Omega |\nabla a|^2 dx \\
&\geq (1-a_1)\int_\Omega |\nabla a|^2dx \\
&= c_4\|\nabla a\|_2^2 \\
&= c_4\|a\|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

uma vez que $(1+|k|+ke^{-\tau})\|a\|_{L^2(\Omega)} > 0$, e considerando $c_4 = 1-a_1 > 0$, pois $a_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mu(s)e^{-s}ds \leq \int_0^{+\infty}\mu(s)ds = \tilde{\mu} < 1$. Como $a \in H_0^1(\Omega)$ é qualquer, temos que J é coerciva.

A seguir, provaremos que $f^*, g, h^*, l^* \in H^{-1}(\Omega)$. Temos que $g \in H^{-1}(\Omega)$, desde que identifiquemos $L^2(\Omega)$ com seu dual $(L^2(\Omega))'$. De fato, como definimos anteriormente, temos que $g \in L^2(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, temos que $(L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$, tendo o desejado. Concluiremos agora que $f^*, h^*, l^* \in H^{-1}(\Omega)$. Notemos, que

$$
\int_0^{+\infty}\mu(s)|e^{-s-1}|\,||\nabla f||_2 ds \leq c_5 < +\infty,
$$

pois $e^{-s} \leq 1$, $s > 0$, e $f \in H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, utilizando propriedades de dualidade e as desigualdade de Holder e de Poincaré, temos que

$$
\begin{aligned}
|\langle f^*, \varphi\rangle| &= \left|\left\langle \int_0^{+\infty}\mu(s)(e^{-s}-1)\Delta f ds + (1+ke^{-\tau}+|k|)f, \varphi\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \int_0^{+\infty}\mu(s)(e^{-s}-1)\Delta f ds, \varphi\right\rangle + \big\langle (1+ke^{-\tau}+|k|)f, \varphi\big\rangle\right| \\
&\leq \left|-\left\langle \int_0^{+\infty}\mu(s)(e^{-s}-1)\nabla f ds, \nabla\varphi\right\rangle\right| + \left|\big\langle (1+ke^{-\tau}+|k|)f, \varphi\big\rangle\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty}\mu(s)|e^{-s}-1|\int_\Omega |\nabla f\nabla\varphi|dxds + (1+ke^{-\tau}+|k|)\int_\Omega |f\varphi|dx \\
&\leq \int_0^{+\infty}\mu(s)|e^{-s}-1|\left(\int_\Omega|\nabla f|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\nabla\varphi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}ds \\
&\quad + (1+ke^{-\tau}+|k|)\left(\int_\Omega|f|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\varphi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ||\nabla\varphi||_2 \int_0^{+\infty} \mu(s)|e^{-s} - 1|\, ||\nabla f||_2 ds + (1 + ke^{-\tau} + |k|)||f||_2||\varphi||_2 \\
&\leq c_5||\nabla\varphi||_2 + (1 + k^{-\tau} + |k|)c_6||\nabla f||_2 c_7||\nabla\varphi||_2 \\
&= c_8||\nabla\varphi||_2.
\end{aligned}
$$

Por densidade, a desigualdade acima é válida para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, donde segue que $f^* \in H^{-1}(\Omega)$.

Agora, como μ é decrescente, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\int_0^s \mu(s)e^{\alpha-s}\|\nabla h(\alpha)\|_2 d\alpha ds &= \int_0^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} \mu(s)e^{\alpha-s}\|\nabla h(\alpha)\|_2 ds d\alpha \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(\alpha)\|\nabla h(\alpha)\|_2 \int_\alpha^{+\infty} e^{\alpha-s} ds d\alpha,
\end{aligned}
$$

e assim, como

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^{+\infty} e^{\alpha-s} ds d\alpha &= \lim_{b\to+\infty} \int_\alpha^b e^{\alpha-s} ds \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{\alpha-s}\right)_\alpha^b = \lim_{b\to+\infty} -e^{\alpha-b} + 1 = 1
\end{aligned}
$$

e $h \in L^2_\mu(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$, temos que

$$
\int_0^{+\infty}\int_0^s \mu(s)e^{\alpha-s}\|\nabla h(\alpha)\|_2 d\alpha ds \leq \int_0^{+\infty} \mu(s)||\nabla h(\alpha)||_2 d\alpha = c_9 < +\infty.
$$

Desta forma, dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, das propriedades de dualidade e utilizando a desigualdade de Holder, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle \int_0^{+\infty}\int_0^s \mu(s)e^{\alpha-s}\Delta h(\alpha) d\alpha ds, \varphi \right\rangle\right| \\
&\quad = \left| -\left\langle \int_0^{+\infty}\int_0^s \mu(s)e^{\alpha-s}\nabla h(\alpha) d\alpha ds, \nabla\varphi \right\rangle\right| \\
&\quad = \int_0^{+\infty}\int_0^s \mu(s)e^{\alpha-s} \int_\Omega |\nabla h(\alpha)\nabla\varphi| dx d\alpha ds \\
&\quad \leq \int_0^{+\infty}\int_0^s \mu(s)e^{\alpha-s} \left(\int_\Omega |\nabla h(\alpha)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha ds \\
&\quad = \|\nabla\varphi\|_2 \int_0^{+\infty}\int_0^s \mu(s)e^{\alpha-s}\|\nabla h(\alpha)\|_2 d\alpha ds \\
&\quad \leq c_9\|\nabla\varphi\|_2,
\end{aligned}
$$

e, por densidade, a desigualdade acima é válida para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Assim, $h^* \in H^{-1}(\Omega)$.

Similarmente, dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ qualquer, usando as desigualdades de Holder e de Poincaré, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle k\tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r} l(r)dr, \varphi\right\rangle\right| &\leq |k|\tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r}\int_\Omega |l(r)\varphi| dx dr \\
&\leq |k|\tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r}\left(\int_\Omega |l(r)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dr \\
&= |k|\tau e^{-\tau}\|\varphi\|_2 \int_0^1 e^{\tau r}\|l(r)\|_2 dr \\
&\leq |k|\tau e^{-\tau} c_{10}\|\nabla\varphi\|_2 \int_0^1 e^{\tau r}||l(r)||_2 dr \\
&\leq |k|\tau e^{-\tau} c_{10}\|\varphi\|_2 \left(\frac{e^{2\tau}-1}{2\tau}\right)||l(r)||_{L^2(0,1;L^2(\Omega))} \\
&= c_{11}\|\nabla\varphi\|_2,
\end{aligned}
$$

uma vez que $l \in L^2(0,1;L^2(\Omega))$. Novamente, por densidade, a desigualdade é válida para $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Logo, $l^* \in H^{-1}(\Omega)$.

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgran, temos que existe um único $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(\hat{u}, w) = \langle f^* + g + h^* + l^*, w\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Agora, vamos definir

$$\hat{v} = \hat{u} - f. \tag{2.37}$$

Dessa forma, como por hipótese $f \in H_0^1(\Omega)$, temos que $\hat{u}, \hat{v} \in H_0^1(\Omega)$ e ainda $\hat{u}$ e $\hat{v}$ satisfazem (2.32)$_1$. Além disso, motivados por (2.34), definimos

$$\hat{\eta}(s) = \underbrace{\int_0^s h(\alpha)e^{\alpha - s}d\alpha}_{A} + \underbrace{(1 - e^{-s})(\hat{u} - f)}_{B}. \tag{2.38}$$

Provaremos que $\hat{\eta} \in L_\mu^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$. Para isto, precisamos mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \mu(s)\|\hat{\eta}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds < +\infty.$$

Como $\hat{\eta}(s) = A + B$ e pela desigualdade de Minkowski temos que $\|\hat{\eta}(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|A + B\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \|A\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|B\|^2_{H^1_0(\Omega)}$, então vamos mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \mu(s)\|A\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds < +\infty \text{ e } \int_0^{+\infty} \mu(s)\|B\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds < +\infty.$$

Com efeito, dado $s > 0$, notemos que, aplicando a desigualdade de Holder, o Teorema de Fubini e o fato de μ ser decrescente, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mu(s)\|A\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds &= \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega \left(\int_0^s \nabla h(\alpha) e^{\alpha - s} d\alpha \right)^2 dxds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega \left(\left(\int_0^s |\nabla h(\alpha)|^2 e^{\alpha - s} d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s e^{\alpha - s} d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 dxds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega \int_0^s |\nabla h(\alpha)|^2 e^{\alpha - s} d\alpha dxds \\
&= \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^s e^{\alpha - s} \int_\Omega |\nabla h(\alpha)|^2 dxd\alpha ds \\
&= \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^s e^{\alpha - s} \|\nabla h(\alpha)\|_2^2 d\alpha ds \\
&= \int_0^{+\infty} \int_\alpha^{+\infty} \mu(s) e^{\alpha - s} \|\nabla h(\alpha)\|_2^2 ds d\alpha \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(\alpha) \|\nabla h(\alpha)\|_2^2 \int_\alpha^{+\infty} e^{\alpha - s} ds d\alpha \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(\alpha) \|h(\alpha)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\alpha < +\infty,
\end{aligned}$$

pois $h \in L^2_\mu(0, +\infty; H^1_0(\Omega))$. Temos também que, utilizando novamente a desigualdade de Minkowski

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mu(s)\|B\|^2_{H^1_0(\Omega)} ds &= \int_0^{+\infty} \mu(s)(1 - e^{-s}) \int_\Omega |(\nabla \hat{u} - \nabla f)|^2 dxds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mu(s)(1 - e^{-s}) \int_\Omega |\nabla \hat{u}|^2 dx + \int_\Omega |\nabla f|^2 dxds \\
&= \int_0^{+\infty} \mu(s)(1 - e^{-s}) ||\nabla \hat{u}||_2^2 + ||\nabla f||_2^2 ds \\
&\leq c_{12}(||\hat{u}||_{H^1_0(\Omega)} + ||f||_{H^1_0(\Omega)}) < +\infty,
\end{aligned}$$

pois, $\hat{u}, f \in H^1_0(\Omega)$.

Logo,

$$\int_0^{+\infty} \mu(s)\|\hat{\eta}\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \leq \int_0^{+\infty} \mu(s)\|h\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds + c_{12}(||\hat{u}||_{H_0^1(\Omega)} + ||f||_{H_0^1(\Omega)}) < +\infty,$$

donde $\hat{\eta}(s) \in L^2_\mu(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$. Além disso, como

$$\hat{\eta}(s)e^s = \int_0^s e^\alpha h(\alpha)d\alpha + (e^s - 1)(\hat{u} - f),$$

então, derivando a expressão acima com relação a variável s, temos que

$$\hat{\eta}_s(s)e^s + \hat{\eta}(s)e^s = e^s h(s) + e^s(\hat{u} - f) = h(s)e^s + e^s\hat{v},$$

e dividindo por e^s, obtemos

$$\hat{\eta}_s(s) + \hat{\eta}(s) - \hat{v} = h(s).$$

Dessa igualdade e por (2.38) observamos que $\hat{\eta}$ satisfaz $(2.32)_3$, $\hat{\eta}_s \in L^2_\mu(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$ e $\hat{\eta}(0) = 0$.

Agora, motivados por (2.35) vamos definir, para $\rho \in (0, 1)$

$$\hat{z}(x, \rho, t) = \underbrace{e^{-\tau\rho}(\hat{u} - f)}_{C} + \underbrace{\tau e^{-\tau\rho}\int_0^\rho e^{\tau r} l(r)dr}_{D}. \tag{2.39}$$

Queremos mostrar que $\hat{z} \in L^2(0, 1; L^2(\Omega))$, isto é, precisamos mostrar que

$$\int_0^1 \|\hat{z}\|_2^2 d\rho < +\infty.$$

Como anteriormente, temos que $\hat{z} = C + D$ e então, pela desigualdade de Minkowski, $\|\hat{z}(s)\|_2^2 = \|C + D\|_2^2 \leq \|C\|_2^2 + \|D\|_2^2$. Assim vamos mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \|C\|_2^2 d\rho < +\infty$ e $\displaystyle\int_0^1 \|D\|_2^2 d\rho < +\infty$. Com efeito, dado $\rho \in (0, 1)$, utilizando a desigualdade de Minkowski e a hipótese de que $\hat{u}, f \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|C\|_2^2 d\rho &= \int_0^1 \int_\Omega |e^{-\tau\rho}(\hat{u} - f)|^2 dx d\rho \\ &\leq \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \int_\Omega |\hat{u}|^2 dx + \int_\Omega |f|^2 dx d\rho\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 e^{-2\tau\rho}(||\hat{u}||_2^2 + ||f||_2^2)d\rho \\
&= c_{13}(||\hat{u}||_2^2 + ||f||_2^2) < +\infty.
\end{aligned}
$$

Também, utilizando a desigualdade de Holder, o fato de $\rho \in (0,1)$ e a hipótese $l \in L^2(0,1;L^2(\Omega))$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 ||D||_2^2 d\rho &= \int_0^1 \int_\Omega \left(\tau e^{-\tau\rho} \int_0^\rho e^{\tau r} l(r)dr\right)^2 dxd\rho \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \tau^2 e^{-2\tau\rho} \left(\int_0^\rho e^{\tau r} l(r)dr\right)^2 dxd\rho \\
&\leq \tau^2 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \int_\Omega \left[\left(\int_0^\rho e^{2\tau r}dr\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\rho l^2(r)dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dxd\rho \\
&= \tau^2 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \int_\Omega \left(\int_0^\rho e^{2\tau r}dr\right)\left(\int_0^\rho l^2(r)dr\right) dxd\rho \\
&= \tau^2 \int_0^1 e^{-2\tau\rho}\left(\frac{e^{2\tau\rho}-1}{2\tau}\right)\int_\Omega\int_0^\rho l^2(r)drdxd\rho \\
&= \frac{\tau}{2}\left[\int_0^1 e^{-2\tau\rho+2\tau\rho} - e^{-2\tau\rho}\int_0^\rho\int_\Omega l^2(r)dxdrd\rho\right] \\
&\leq \frac{\tau}{2}\int_0^1 \left(1-e^{-2\tau\rho}\right)\int_0^1 ||l(r)||_2^2 drd\rho \\
&= \frac{\tau}{2}\int_0^1 \left(1-e^{-2\tau\rho}\right)||l(r)||^2_{L^2(0,1;L^2(\Omega))}d\rho = c_{14}||l(r)||^2_{L^2(0,1;L^2(\Omega))} < +\infty,
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
\int_0^1 ||\hat{z}||_2 d\rho \leq c_{13}(||\hat{u}||_2^2 + ||f||_2^2) + c_{14}||l(r)||^2_{L^2(0,1;L^2(\Omega))} < +\infty,
$$

donde $\hat{z} \in L^2(0,1;L^2(\Omega))$. Além disso, como

$$
\hat{z} = e^{\tau\rho}(\hat{u}-f) + \tau e^{-\tau\rho}\int_0^\rho e^{\tau r}l(r)dr = e^{\tau\rho}\hat{v} + \tau e^{-\tau\rho}\int_0^\rho e^{\tau r}l(r)dr
$$

e

$$
\tau^{-1}\hat{z}_\rho = -e^{-\tau\rho}\hat{v} - \tau e^{-\tau\rho}\int_0^\rho e^{\tau r}l(r)dr + e^{-\tau\rho}e^{\tau\rho}l(r),
$$

então

$$
\hat{z} + \tau^{-1}\hat{z}_\rho = l,
$$

logo $\hat{z}$ satisfaz $(2.32)_4$, $\hat{z}_\rho \in L^2(0,1;L^2(\Omega))$ e $\hat{z}(x,0,t)=\hat{v}$.

Queremos agora mostrar que $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{z}$ satisfazem $(2.32)_2$. Já vimos que

$$J(\hat{u},w)=\langle f^*+g+h^*+l^*,w\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}, \qquad \forall w\in H_0^1(\Omega),$$

logo, da definição de J e da definição de $f^*+g+h^*+l^*$, temos

$$\begin{aligned}&(1+|k|+ke^{-\tau})\int_\Omega \hat{u}wdx+(1-a_1)\int_\Omega \nabla\hat{u}\nabla wdx=\\ &\Big\langle g+\int_0^{+\infty}\mu(s)(e^{-s}-1)\Delta fds+(1+ke^{-\tau}+|k|)f+\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_0^s e^{\alpha-s}\Delta h(\alpha)d\alpha ds\\ &\quad -k\tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r}l(r)dr,w\Big\rangle,\end{aligned}\tag{2.40}$$

em que $a_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mu(s)e^{-s}ds$.

Notemos que

$$\begin{aligned}&(1+|k|+ke^{-\tau})\int_\Omega \hat{u}wdx+(1-a_1)\int_\Omega\nabla\hat{u}\nabla wdx\\ &\qquad=\big\langle(1+|k|+ke^{-\tau})\hat{u}+(a_1-1)\Delta\hat{u},w\big\rangle.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\Big\langle g+\int_0^{+\infty}\mu(s)(e^{-s}-1)\Delta fds+(1+ke^{-\tau}+|k|)f+\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_0^s e^{\alpha-s}\Delta h(\alpha)d\alpha ds\\ &\quad -k\tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r}l(r)dr,w\Big\rangle\\ &=\Big\langle g+\int_0^{+\infty}\mu(s)e^{-s}\Delta[f+\hat{u}-\hat{u}]ds-\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta[f+\hat{u}-\hat{u}]ds+f+\hat{u}-\hat{u}\\ &\quad +ke^{-\tau}[f+\hat{u}-\hat{u}]+|k|[f+\hat{u}-\hat{u}]+\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_0^s e^{\alpha-s}\Delta h(\alpha)d\alpha ds\\ &\quad -k\tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r}l(r)dr,w\Big\rangle\\ &=\Big\langle g+\int_0^{+\infty}\mu(s)e^{-s}\Delta fds+\int_0^{+\infty}\mu(s)e^{-s}\Delta\hat{u}ds-\int_0^{+\infty}\mu(s)e^{-s}\Delta\hat{u}ds\\ &\quad -\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta fds-\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\hat{u}ds+\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta\hat{u}ds+f-\hat{u}+\hat{u}+ke^{-\tau}f+ke^{-\tau}\hat{u}\\ &\quad -ke^{-\tau}\hat{u}+|k|f+|k|\hat{u}-|k|\hat{u}+\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_0^s e^{\alpha-s}\Delta h(\alpha)d\alpha ds-k\tau e^{-\tau}\int_0^1 e^{\tau r}l(r)dr,w\Big\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\langle g + f - \hat{u} + \Delta\hat{u} + \int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s} \Delta\hat{u} ds - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\hat{u} ds + \hat{u} + ke^{-\tau}\hat{u} + |k|\hat{u} + \Delta\hat{u} \\
&\quad + |k|(f - \hat{u}) + \int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s}\Delta\hat{u} ds + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\hat{u} ds - \int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s}\Delta\hat{u} ds \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta f ds + \int_0^{+\infty} e^{-s}\Delta f ds - k\tau e^{-\tau} \int_0^1 e^{\tau r} l(r) dr - ke^{-\tau}\hat{u} + ke^{-\tau} f, w \Big\rangle \\
&= \langle g + f - \hat{u} + (a_1 - \tilde{\mu})\Delta\hat{u} + |k|(f - \hat{u}) + (1 + ke^{-\tau} + |k|)\hat{u} \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^s \Delta h(\alpha) e^{\alpha - s} d\alpha ds + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\hat{u} ds - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta f ds \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s}\Delta\hat{u} ds + \int_0^{+\infty} \mu(s) e^{-s}\Delta f ds - |k|\hat{u} + |k| f - ke^{-\tau}\hat{u} + ke^{-\tau} f \\
&\quad + k\tau e^{-\tau} \int_0^1 e^{\tau r} l(r) dr, w \Big\rangle \\
&= \langle g - \hat{v} + (a_1 - \tilde{\mu})\Delta\hat{u} + |k|\hat{v} + (1 + ke^{-\tau} + |k|)\hat{u} \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta \left[\int_0^s h(\alpha) e^{\alpha - s} d\alpha + \hat{u} - f - e^{-s}\hat{u} + e^{-s} f \right] ds \\
&\quad - |k|(\hat{u} - f) - ke^{-\tau}(\hat{u} - f) + k\tau e^{-\tau} \int_0^1 e^{\tau r} l(r) dr, w \Big\rangle \\
&= \Big\langle g - \hat{v} + (a_1 - \tilde{\mu})\Delta\hat{u} + (1 + ke^{-\tau} + |k|)\hat{u} - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\hat{\eta}(s) ds + |k|\hat{v} + k\hat{z}(x,1,t), w \Big\rangle .
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Substituindo (2.41) e (2.42) em (2.40), obtemos que

$$
\begin{aligned}
&(1 + |k| + ke^{-\tau})\hat{u} + (a_1 - 1)\Delta\hat{u} \\
&\quad = g - \hat{v} + (a_1 - \tilde{\mu})\Delta\hat{u} + (1 + ke^{-\tau} + |k|)\hat{u} - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\hat{\eta}(s) ds + |k|\hat{v} + k\hat{z}(x,1,t),
\end{aligned}
$$

donde

$$
g = \hat{v} - (1 - \tilde{\mu})\Delta\hat{u} - \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\hat{\eta}(s) ds - k\hat{z}(\cdot, 1, \cdot),
$$

e assim $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{z}$ satisfazem $(2.32)_2$, portanto $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}, \hat{z}) \in D(\mathcal{A})$ e (2.32) é satisfeito.

Logo, $\tilde{\mathcal{A}}$ é dissipativo e $Im(I - \tilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$, assim, pelo Teorema de Lumer-Phillips, temos que $\tilde{\mathcal{A}}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações, portanto $\tilde{\mathcal{A}} \in G(1, 0)$. Dessa forma, pela Proposição 1.4, como $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $||\mathcal{B}|| = |k|$, então $\tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{B} \in G(1, |k|)$, isto é, $\mathcal{A} \in G(1, |k|)$. Assim $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0.

Portanto, do Teorema 1.11, para cada $U_0 = (u_0, u_1, \eta_0, z^0) \in D(\mathcal{A})$ existe um único $U = (u, u_t, \eta^t, z)$ solução forte do problema de Cauchy abstrato (2.29). Além disso, para cada $U_0 = (u_0, u_1, \eta_0, z^0) \in \mathcal{H}$, existe um único $U = (u, u_t, \eta^t, z)$ tal que U é solução generalizada. ■

Capítulo 3

Estabilidade assintótica

Para o estudo da estabilidade assintótica da solução do problema (2.8)-(2.16), consideremos a energia associada à solução $U = (u, u_t, \eta^t, z)$, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1-\tilde{\mu}}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu(s)|\nabla \eta^t|^2 dx ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi. \qquad (3.1)$$

Dessa forma, obtemos também que

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mu'(s)\int_\Omega |\nabla \eta^t(x,s)|^2 dx ds - k\int_\Omega u_t(x,t-\tau)u_t(x,t)dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx. \qquad (3.2)$$

O objetivo agora é utilizar a técnica do multiplicador para provar a estabilidade da solução, a qual requer que a energia associada ao problema seja decrescente. Notemos que, por (3.2), não temos garantia de que a energia é decrescente. Dessa forma, vamos estudar primeiramente um problema perturbado que é próximo a (2.8)-(2.16) e mais fácil de trabalhar. De fato, consideremos então o seguinte problema:

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta u(x,t-s)ds + \theta|k|e^{\tau}u_t(x,t) + ku_t(x,t-\tau) = 0$$
$$\text{em } \Omega \times (0,+\infty) \quad (3.3)$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \qquad (3.4)$$

$$u(x,t) = u_0(x,t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0], \tag{3.5}$$

em que $\theta > 1$.

Fazendo as mesmas mudanças de variáveis realizadas na Seção 2.1, isto é,

$$\eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-\tau) \qquad \text{e} \qquad z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho), \tag{3.6}$$

podemos reescrever o problema (3.3)-(3.5) da seguinte forma

$$u_{tt}(x,t) - (1-\tilde{\mu})\Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(x,s)ds + \theta|k|e^{\tau}u_t(x,t) + kz(x,1,t) = 0$$
$$\text{em } \Omega \times (0,+\infty) \tag{3.7}$$

$$\eta_t^t(x,s) = -\eta_s^t(x,s) + u_t(x,t) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \times (0,+\infty) \tag{3.8}$$

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,1) \times (0,+\infty) \tag{3.9}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \tag{3.10}$$

$$\eta^t(x,s) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty),\ t \geq 0 \tag{3.11}$$

$$z(x,0,t) = u_t(x,t) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \tag{3.12}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.13}$$

$$\eta^0(x,s) = \eta_0(x,s) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \tag{3.14}$$

$$z(x,\rho,0) = z^0(x,-\tau\rho), \quad \text{com} \quad x \in \Omega, \rho \in (0,1) \tag{3.15}$$

em que

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= u_0(x,0), \quad x \in \Omega,\\
u_1(x) &= \frac{\partial u_0}{\partial t}(x,t)|_{t=0}, \quad x \in \Omega,\\
\eta_0(x,s) &= u_0(x,0) - u_0(x,-s), \quad x \in \Omega, \quad s \in (0,+\infty),\\
z^0(x,s) &= \frac{\partial u_0}{\partial t}(x,s), \quad x \in \Omega, \quad s \in (-\tau,0).
\end{aligned}$$

É possível mostrar de modo análogo ao capítulo anterior que estes problemas são equivalentes. Denominaremos (3.7)-(3.15) de problema perturbado.

Vamos escolher o espaço de fase $\mathcal{H}$ como sendo o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L_\mu^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, 1; L^2(\Omega)), \tag{3.16}$$

munido do produto interno

$$\begin{aligned}((u_1, v_1, w_1, z_1)^T, (u_2, v_2, w_2, z_2)^T)_{\mathcal{H}} = (1 - \tilde{\mu})(\nabla u_1, \nabla u_2) + (v_1, v_2) + (w_1, w_2)_{L_\mu^2(0,+\infty;H_0^1(\Omega))} \\ + \tau|k|(z_1, z_2)_{L^2(0,1;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Denotando $U = (u, u_t, \eta^t, z)^T$, podemos reescrever o problema (3.7)-(3.15) como o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U' = \mathcal{C}U \\ U(0) = (u_0, u_1, \eta_0, z^0)^T \end{cases}, \tag{3.17}$$

em que o operador $\mathcal{C}$ é definido como

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ (1-\tilde{\mu})\Delta\cdot & \theta|k|e^\tau I & \mathcal{I} & -kI \\ 0 & I & -\dfrac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\rho}{\tau}I \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

com $\mathcal{I}(f) = \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta f(s)ds$ e I o operador identidade. Dessa forma,

$$\mathcal{C}\begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \eta^t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ (1-\tilde{\mu})\Delta u + \theta|k|e^\tau u_t + \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds - kz(\cdot, 1, \cdot) \\ -\eta_s^t + u_t \\ -\tau^{-1}z_\rho \end{pmatrix},$$

e o domínio deste operador é dado por

$$D(\mathcal{C}) = \{(u, v, \eta, z)^T \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L_\mu^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \times L^2(0, 1; L^2(\Omega));$$

$$v = z(\cdot, 0, \cdot),\ (1-\tilde{\mu})u + \int_0^{+\infty} \mu(s)\eta^t(s)ds \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \eta_s \in L^2_\mu(0, +\infty; H_0^1(\Omega))\}. \tag{3.19}$$

Notemos que $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, em que $\mathcal{A}$ é o operador que definimos em (2.30) e $\mathcal{B}$ é dado da seguinte forma

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta|k|e^{\tau}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Temos que

$$||\mathcal{B}|| = \sup_{\substack{U \in \mathcal{H} \\ ||U||=1}} ||\mathcal{B}U|| = \sup_{\substack{U \in \mathcal{H} \\ ||U||=1}} ||\theta|k|e^{\tau}U|| = \theta|k|e^{\tau},$$

portanto, $\mathcal{B}$ é um operador limitado. Como vimos na prova do Teorema 2.1, $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Como $\mathcal{B}$ é um operador limitado, pelo Teorema 1.10, temos que $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Logo, o problema (3.17) possui solução.

Sendo assim, consideremos $U = (u, u_t, \eta^t, z) \in \mathcal{H}$ tal que U é solução de (3.7)-(3.15). Multiplicando (3.7) por $u_t(x,t)$ e integrando em $\Omega \times (0,T)$, $T > 0$, temos que

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_0^T \int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dxdt}_{A} - \underbrace{(1-\tilde{\mu}) \int_0^T \int_\Omega \Delta u(x,t)u_t(x,t)dxdt}_{B} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s)\Delta\eta^t(x,s)u_t(x,t)dsdxdt}_{C} + \theta|k|e^{\tau} \int_0^T \int_\Omega u_t(x,t)u_t(x,t)dxdt \\ &\quad + \underbrace{k \int_0^T \int_\Omega z(x,1,t)u_t(x,t)dxdt}_{D} = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Vamos calcular cada um dos termos acima. Temos que

$$A = \int_0^T \int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt}|u_t(x,t)|^2 dxdt.$$

Utilizando a fórmula de Green, a condição (3.10) e propriedades de derivação, obtemos

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^T \int_\Omega \Delta u(x,t) u_t(x,t) dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \nabla u(x,t) u_t(x,t) dx dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla u_t(x,t) dx dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt} |\nabla u_t(x,t)|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Pela identidade (3.8), podemos escrever

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \Delta\eta^t(x,s) u_t(x,t) ds dx dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \Delta\eta^t(x,s) (\eta_t^t(x,s) + \eta_s^t(x,s)) ds dx dt \\
&= \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \Delta\eta^t(x,s) \eta_t^t(x,s) ds dx dt}_{C1} + \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \Delta\eta^t(x,s) \eta_s^t(x,s) ds dx dt}_{C2}.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a fórmula de Green e a condição (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
C1 &= \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \Delta\eta^t(x,s) \eta_t^t(x,s) ds dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \int_0^{+\infty} \mu(s) \nabla\eta^t(x,s) \eta_t^t(x,s) ds dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \nabla\eta^t(x,s) \nabla\eta_t^t(x,s) ds dx dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \frac{d}{dt} |\nabla\eta^t(x,s)|^2 ds dx dt.
\end{aligned}$$

Similarmente ao raciocínio desenvolvido no Exemplo 1.4, temos que

$$C2 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu'(s) |\nabla\eta^t(x,s)|^2 ds dx dt.$$

Logo,

$$C = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \frac{d}{dt} |\nabla\eta^t(x,s)|^2 ds dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu'(s) |\nabla\eta^t(x,s)|^2 ds dx dt.$$

Por fim, pela definição de z em (3.6), temos que

$$D = \int_0^T \int_\Omega z(x,1,t)u_t(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega u_t(x,t-\tau)u_t(x,t)dxdt.$$

Portanto, substituindo A, B, C e D em (3.21), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + \frac{1-\tilde{\mu}}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu(s)\frac{d}{dt}|\nabla \eta^t(x,s)|^2 dxdsdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu'(s)|\nabla \eta^t(x,s)|^2 dxdsdt \\
&\quad + \theta|k|e^\tau \int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + k\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t-\tau)u_t(x,t)dxdt = 0. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando (3.9) por $e^{-\tau\rho}u_t(x,t-\tau\rho) = e^{-\tau\rho}z(x,\rho,t)$ e integrando em $\Omega \times (0,1) \times (0,T)$, temos

$$\int_0^T \int_0^1 \int_\Omega \tau z_t(x,\rho,t)z(x,\rho,t)e^{-\tau\rho}dxd\rho dt + \int_0^T \int_0^1 \int_\Omega z_\rho(x,\rho,t)e^{-\tau\rho}z(x,\rho,t)dxd\rho dt = 0$$

donde, integrando por partes em cada um dos termos, obtemos

$$\underbrace{\frac{\tau}{2}\int_0^T \int_0^1 e^{-\tau\rho}\int_\Omega \frac{d}{dt}|z(x,\rho,t)|^2 dxd\rho dt}_{G} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 e^{-\tau\rho}\int_\Omega \frac{d}{d\rho}|z(x,\rho,t)|^2 dxd\rho dt}_{H} = 0.$$

Vamos analisar cada um dos termos acima. Da forma como z foi definida em (3.6), temos que

$$G = \frac{\tau}{2}\int_0^T \int_0^1 e^{-\tau\rho}\int_\Omega \frac{d}{dt}|z(x,\rho,t)|^2 dxd\rho dt = \frac{\tau}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_0^1 e^{-\tau\rho}\int_\Omega |u_t(x,t-\tau\rho)|^2 dxd\rho dt$$

e, fazendo a mudança de variáveis $t-\tau\rho = \xi$, temos que $d\xi = -\tau d\rho$ e também $\tau\rho = t-\xi$. Além disso, quando $\rho = 0$ temos $\xi = t$, bem como quando $\rho = 1$ obtemos $\xi = t-\tau$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\tau}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_0^1 e^{-\tau\rho}\int_\Omega |u_t(x,t-\tau\rho)|^2 dxd\rho dt \\
&= \frac{\tau}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_t^{t-\tau} e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx - \frac{1}{\tau}d\xi dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_t^{t-\tau} e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dxd\xi dt.
\end{aligned}$$

Também, como

$$H = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 e^{-\tau\rho} \int_\Omega \frac{d}{d\rho}|z(x,\rho,t)|^2 dx d\rho dt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 e^{-\tau\rho} \frac{d}{d\rho}|z(x,\rho,t)|^2 d\rho dx dt$$

temos que, integrando por partes a integral com relação a variável ρ,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-\tau\rho}\frac{d}{d\rho}|z(x,\rho,t)|^2 d\rho &= \left[e^{-\tau\rho}|z(x,\rho,t)|^2\right]_0^1 + \tau \int_0^1 |z(x,\rho,t)|^2 e^{-\tau\rho} d\rho \\ &= e^{-\tau}|z(x,1,t)|^2 - |z(x,0,t)|^2 + \tau \int_0^1 |z(x,\rho,t)|^2 e^{-\tau\rho} d\rho \\ &= e^{-\tau}|u_t(x,t-\tau)|^2 - |u_t(x,t)|^2 - \int_t^{t-\tau} |u_t(x,\xi)|^2 e^{-(t-\xi)} d\xi.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}H = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega e^{-\tau}|u_t(x,t-\tau)|^2 dx dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx dt \\ - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \int_t^{t-\tau} |u_t(x,\xi)|^2 e^{-(t-\xi)} d\xi dx dt,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}G + H = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)} \int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi dt + \frac{e^{-\tau}}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx dt \\ - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)} \int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi dt = 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Multiplicando (3.23) por $\theta|k|e^\tau$ e somando com (3.22), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\Bigg[\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx + (1-\tilde{\mu})\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx + \int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dx ds \\ &+ \theta|k|e^\tau \int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi\Bigg] dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dx ds dt \\ &+ \theta|k|e^\tau \int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx dt + k\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t-\tau)u_t(x,t) dx dt \\ &+ \frac{\theta|k|}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx dt - \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx dt \\ &+ \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_0^T \int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi dt = 0.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Dessa forma, definimos a energia associada ao problema (3.7)-(3.15) como

$$F(t) = F(U,t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx + \frac{1-\tilde{\mu}}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu(s)|\nabla \eta^t(s)|^2 dx ds + \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,s)|^2 dx d\xi. \tag{3.25}$$

Logo, por (3.24), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) = {} & \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu'(s)|\nabla \eta^t(x,s)|^2 dx ds - \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx \\ & - k\int_\Omega u_t(x,t-\tau)u_t(x,t)dx - \frac{\theta|k|}{2}\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx \\ & - \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi < 0,\end{aligned} \tag{3.26}$$

ou seja, a energia definida em (3.25) é decrescente. Além disso, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1. *Para toda solução do problema* (3.7) − (3.15)*, a energia F é decrescente e a seguinte estimativa é válida*

$$\begin{aligned}F'(t) \le {} & \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu'(s)|\nabla \eta^t(x,s)|^2 dx ds - \frac{|k|(\theta e^\tau - 1)}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx \\ & - \frac{|k|(\theta-1)}{2}\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx - \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Prova. Seja $U = (u, u_t, \eta^t, z) \in \mathcal{H}$ uma solução de (3.7)-(3.15). Por (3.26), já temos que a energia F é decrescente. Agora, uma vez que é válida a desigualdade $2ab \le a^2 + b^2$ e $k \le |k|$, obtemos

$$\begin{aligned}F'(t) \le {} & \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu'(s)|\nabla \eta^t(x,s)|^2 dx ds - \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx \\ & + |k|\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx + |k|\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx - \frac{\theta|k|}{2}\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx \\ & - \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi \\ = {} & \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu'(s)|\nabla \eta^t(x,s)|^2 dx ds - \frac{|k|(\theta e^\tau - 1)}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx \\ & - \frac{|k|(\theta-1)}{2}\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2 dx - \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dx d\xi.\end{aligned}$$

■

Corolário 3.1. *Para toda solução do problema* (3.7) $-$ (3.15)*, tomando* $0 \leq S \leq T$*, temos*

$$-\frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt \leq F(S), \tag{3.28}$$

e então, como $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$*, obtemos*

$$\frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_\Omega |\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt \leq \frac{1}{\alpha}F(S). \tag{3.29}$$

Prova. Como cada termo do lado direito de (3.27) é negativo, temos que

$$F'(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxds.$$

Integrando no intervalo $[S,T]$, obtemos

$$\int_S^T F'(t)dt \leq \frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt,$$

donde

$$F(T) - F(S) \leq \frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt,$$

e assim,

$$F(S) - F(T) \geq -\frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt.$$

Como F é decrescente, concluímos então que

$$F(S) \geq -\frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt.$$

Além disso, como $\mu'(t) \leq -\alpha\mu(t)$, obtemos também que

$$F(S) \geq \frac{\alpha}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt,$$

donde

$$\frac{1}{\alpha}F(S) \geq \frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt.$$

■

Nosso objetivo agora é provar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Para qualquer $\theta > 1$ na definição (3.25), existem constantes positivas C e $\overline{k}$, que dependem do núcleo μ do termo de memória, do domínio Ω e do retardo no tempo τ, tais que se $|k| < \overline{k}$ então para qualquer solução do problema (3.7) − (3.15) a seguinte estimativa é válida*

$$\int_S^{+\infty} F(t)dt \leq C\, F(S) \text{ para todo } S > 0. \tag{3.30}$$

Para provar este teorema precisamos de alguns resultados auxiliares. Além disso, para podermos estender a estimativa exponencial referente ao problema (3.7)-(3.15) para o problema (2.8)-(2.16), precisamos determinar cuidadosamente todas as constantes envolvidas.

De fato, primeiramente note que, pela definição da energia dada em (3.25), obtemos

$$\begin{aligned}\int_S^T F(t)dt &= \frac{1}{2}\int_S^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + \frac{1-\tilde{\mu}}{2}\int_S^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt \\ &+ \frac{1}{2}\int_S^T \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mu(s)|\nabla \eta^t(x,s)|^2 dxdsdt + \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_S^T \int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)} \int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dxd\xi dt.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Dessa forma, nos próximos lemas provaremos algumas desigualdades necessárias para estimar cada um dos termos do lado direito da igualdade acima com o intuito de obter a desigualdade (3.30)

No que segue, vamos denotar por C_p a constante de Poincaré, isto é, a menor constante positiva tal que

$$\int_\Omega w^2(x)dx \leq C_p \int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx, \text{ para todo } w \in H_0^1(\Omega). \tag{3.32}$$

Para limitar os dois primeiros termos do lado direito de (3.31) vamos precisar dos próximos resultados.

Lema 3.1. *Suponhamos que*

$$|k| < \frac{1-\tilde{\mu}}{2C_p(\theta e^\tau + 1)}, \tag{3.33}$$

então, para quaisquer $T \geq S \geq 0$, temos

$$(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt \leq C_0\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + C_1 F(S), \tag{3.34}$$

em que

$$C_0 := 2+\theta|k|e^\tau \qquad e \qquad C_1 := 4\left(1+\frac{\tilde{\mu}}{\alpha(1-\tilde{\mu})}+\frac{C_p}{1-\tilde{\mu}}+\frac{1}{2(\theta-1)}\right). \tag{3.35}$$

Prova. Multiplicando a equação (3.3) por $u(x,t)$ e integrando em $\Omega\times[S,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega u_{tt}(x,t)u(x,t)dxdt - \int_S^T\int_\Omega \Delta u(x,t)u(x,t)dxdt\\
&\quad + \int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta u(x,t-s)u(x,t)dsdxdt + \theta|k|e^\tau\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dxdt\\
&\quad + k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)u(x,t)dxdt = 0.
\end{aligned}$$

Agora, integrando por partes e da condição de contorno dada em (3.4), temos que

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx\right]_S^T - \int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)u_t(x,t)dxdt + \int_S^T\int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla u(x,t)dxdt\\
&\quad + \int_S^T\left[\int_{\partial\Omega}\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla u(x,t-s)u(x,t)dsdx\right.\\
&\quad \left. - \int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla u(x,t-s)\nabla u(x,t)dsdx\right]dt + \theta|k|e^\tau\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dxdt\\
&\quad + k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)u(x,t)dxdt = 0,
\end{aligned}$$

de onde segue, utilizando a definição de η^t dada em (3.6), que

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx\right]_S^T - \int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)u_t(x,t)dxdt + \int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dxdt\\
&- \int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla u(x,t)\nabla u(x,t)dsdxdt + \int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)\nabla u(x,t)dsdxdt\\
&+ \theta|k|e^\tau\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dxdt + k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)u(x,t)dxdt = 0,
\end{aligned}$$

e assim, das propriedades de μ, obtemos

$$(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt = \int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt - \theta|k|e^\tau\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[\int_\Omega u_t(x,t)u(x,t)dx\right]_S^T - k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)u(x,t)dxdt \\
&- \int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)\nabla u(x,t)dsdxdt.
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Queremos agora estimar a seguinte integral

$$
\int_S^T\left|\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)\nabla u(x,t)dsdx\right|dt.
$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, o Teorema de Fubini e a desigualdade de Young com β, temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T\left|\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)\nabla u(x,t)dsdx\right|dt \le \int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\left|\nabla\eta^t(x,s)\nabla u(x,t)\right|dsdxdt \\
&\quad\le \int_S^T\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dx\right)^{\frac12}dsdt \\
&\quad= \int_S^T\left(\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dx\right)^{\frac12}\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac12}dsdt \\
&\quad\le \frac12\int_S^T\int_\Omega|\nabla u^t(x,t)|^2dx + \left[\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac12}ds\right]^2dt \\
&\quad\le \frac{\beta}{2}\int_S^T\int_\Omega|\nabla u^t(x,t)|^2dxdt + \frac{1}{2\beta}\int_S^T\left[\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac12}ds\right]^2dt,
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

para $\beta > 0$ qualquer.

Agora, utilizando a desigualdade de Holder, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T\left[\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac12}ds\right]^2dt \\
&\le \int_S^T\left[\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)ds\right)^{\frac12}\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dxds\right)^{\frac12}\right]^2dt \\
&= \int_S^T\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)ds\right)\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dxds\right)dt \\
&= \tilde{\mu}\int_S^T\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_\Omega|\nabla\eta^t(x,s)|^2dxdsdt.
\end{aligned}
$$

Além disso, da estimativa feita em (3.29), obtemos

$$\int_S^T \left[\int_0^{+\infty} \mu(s) \left(\int_\Omega |\eta^t(x,s)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 dt \leq \frac{2\tilde{\mu}}{\alpha} F(S). \tag{3.38}$$

Então, por (3.37) e (3.38), segue que

$$\int_S^T \left| \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mu(s) \nabla \eta^t(x,s) \nabla u(x,t) ds dx \right| dt \leq \frac{\beta}{2} \int_S^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx dt + \frac{\tilde{\mu}}{\alpha\beta} F(S). \tag{3.39}$$

Para estimar o terceiro termo de (3.36) observemos que, pela definição da energia em (3.25),

$$F(T) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx + \frac{1-\tilde{\mu}}{2} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx,$$

donde

$$\frac{1-\tilde{\mu}}{2} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx \leq F(T) - \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx,$$

e assim

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx \leq \frac{F(T)}{1-\tilde{\mu}}. \tag{3.40}$$

Também, por (3.40), e utilizando também a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx \leq \frac{C_p}{2} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx \leq \frac{C_p}{1-\tilde{\mu}} F(T).$$

Assim, das desigualdades anteriores, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u_t(x,t) u(x,t) dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx \\ &\leq F(t) + \frac{C_p}{1-\tilde{\mu}} F(t) = F(t) \left(1 + \frac{C_p}{1-\tilde{\mu}} \right), \end{aligned} \tag{3.41}$$

e portanto, como já sabemos que F é decrescente, temos

$$- \left[\int_\Omega u_t(x,t) u(x,t) dx \right]_S^T \leq 2F(S) \left(1 + \frac{C_p}{1-\tilde{\mu}} \right). \tag{3.42}$$

Agora, utilizando (3.39), (3.42) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz note que, para qualquer $\beta > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dxdt &\leq \int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt + \frac{\beta}{2}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u^t(x,t)|^2dxdt \\
&+ \frac{\tilde{\mu}}{\alpha\beta}F(S) + 2F(S)\left(1+\frac{C_p}{1-\tilde{\mu}}\right) + \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt + \\
&+ \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_S^T\int_\Omega |u(x,t)|^2dxdt + \frac{|k|}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2dxdt \\
&+ \frac{|k|}{2}\int_S^T\int_\Omega |u(x,t)|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto, da desigualdade de Poincaré deduzimos que

$$
\begin{aligned}
(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dxdt &\leq \left(1+\frac{\theta|k|e^\tau}{2}\right)\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt \\
&+ \frac{\beta+(\theta e^\tau+1)|k|C_p}{2}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dxdt + \frac{\tilde{\mu}}{\alpha\beta}F(S) + 2F(S)\left(1+\frac{C_p}{1-\tilde{\mu}}\right) \\
&+ \frac{|k|}{2}\int_S^T\int_\Omega |u(x,t-\tau)|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Agora, notemos que por (3.27) e por F ser decrescente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{|k|}{2}\int_S^T\int_\Omega |u(x,t-\tau)|^2dxdt &= \frac{1}{\theta-1}\frac{|k|(\theta-1)}{2}\int_S^T\int_\Omega |u(x,t-\tau)|^2dxdt \\
&\leq \frac{1}{\theta-1}\int_S^T(-F'(t))dt \\
&= \frac{1}{\theta-1}\int_0^T(-F'(t))dt - \int_0^S(-F'(t))dt \\
&= \frac{1}{\theta-1}(F(S)-F(T)) \\
&\leq \frac{F(S)}{\theta-1}. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, vamos escolher $\beta = \dfrac{1-\tilde{\mu}}{2}$ e assim, utilizando a hipótese dada em (3.33) e considerando (3.43), temos

$$
\begin{aligned}
(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dxdt &\leq \left(1+\frac{\theta|k|e^\tau}{2}\right)\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt + \frac{1-\tilde{\mu}}{4} \\
&+ \frac{(\theta e^\tau+1)C_p}{2}\frac{1-\tilde{\mu}}{4C_p(\theta e^\tau+1)}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dxdt + \frac{\tilde{\mu}}{\alpha}\frac{2}{1-\tilde{\mu}}F(S) \\
&+ 2F(S) + \frac{C_p}{1-\tilde{\mu}}F(S) + \frac{1}{\theta-1}F(S),
\end{aligned}
$$

donde

$$(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt \leq 2\left(1+\frac{\theta|k|e^\tau}{2}\right)\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + \\ + 4\left(1+\frac{\tilde{\mu}}{\alpha(1-\tilde{\mu})}+\frac{C_p}{1-\tilde{\mu}}+\frac{1}{2(\theta-1)}\right)F(S),$$

e portanto

$$(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt \leq C_0\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + C_1 F(S),$$

com

$$C_0 = 2+\theta|k|e^\tau \qquad \text{e} \qquad C_1 = 4\left(1+\frac{\tilde{\mu}}{\alpha(1-\tilde{\mu})}+\frac{C_p}{1-\tilde{\mu}}+\frac{1}{2(\theta-1)}\right),$$

como desejado. ■

Lema 3.2. *Para quaisquer $T \geq S \geq 0$, a seguinte identidade é válida*

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\int_S^T |u_t(x,t)|^2 dxdt = &\left[\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right]_S^T \\ &-\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu'(s)\eta^t(x,s)dsdxdt \\ &+(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega \nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt \\ &+\int_S^T\int_\Omega\left|\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)ds\right|^2 dxdt \\ &+\theta|k|e^\tau\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt \\ &+k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Prova. Multiplicando a equação (3.3) por $\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)ds$ e integrando por partes em $[S,T]\times\Omega$, obtemos

$$\int_S^T\int_\Omega u_{tt}(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt - \int_S^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt \\ +\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta u(x,t-s)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt$$

$$
\begin{aligned}
&+\theta|k|e^{\tau}\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&+k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt=0.
\end{aligned}\tag{3.45}
$$

Integrando por partes o primeiro termo, utilizando (3.8) e as propriedades de $\tilde{\mu}$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_S^T\int_\Omega u_{tt}(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt &= \left[\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right]_S^T\\
&\quad-\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)(u_t(x,t)-\eta_s^t(x,s))dsdxdt\\
&=\left[\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right]_S^T-\tilde{\mu}\int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt\\
&\quad+\lim_{b\to+\infty}\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^b\mu(s)\eta_s^t(x,s)dsdxdt\\
&=\left[\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right]_S^T-\tilde{\mu}\int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt\\
&\quad+\lim_{b\to+\infty}\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\left(\left[\mu(s)\eta^t(x,s)\right]_0^b-\int_0^b\mu'(s)\eta^t(x,s)ds\right)dxdt\\
&=\left[\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right]_S^T-\tilde{\mu}\int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt\\
&\quad-\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu'(s)\eta^t(x,s)dsdxdt.
\end{aligned}\tag{3.46}
$$

Além disso, reescrevendo o segundo e terceiro termos de (3.45), utilizando a fórmula de Green, (3.8) e as propriedades μ, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega\left(-\Delta u(x,t)+\int_0^{+\infty}\mu(s)\Delta u(x,t-s)ds\right)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&=-\int_S^T\left[\int_{\partial\Omega}\nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx-\int_\Omega\nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdx\right]dt\\
&\quad+\int_S^T\left[\int_{\partial\Omega}\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla u(x,t-s)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right.\\
&\quad\left.-\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla u(x,t-s)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdx\right]dt\\
&=\int_S^T\int_\Omega\nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&\quad-\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla u(x,t-s)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&=\int_S^T\int_\Omega\nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt
\end{aligned}
$$

$$+\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,t-s)-\nabla u(x,t))ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt$$

$$\begin{aligned}
&=\int_S^T\int_\Omega\nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&\quad+\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,t-s)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&\quad-\tilde{\mu}\int_S^T\int_\Omega\nabla u(x,t)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&=(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega\nabla u(x,t)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&\quad+\int_S^T\int_\Omega\left|\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)ds\right|^2dxdt. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo (3.46) e (3.47) em (3.45) obtemos o desejado. ■

Lema 3.3. *Suponhamos que*

$$|k|<\frac{\tilde{\mu}}{2\theta}e^{-\tau},$$

então, para quaisquer $T\geq S\geq 0$ e $\varepsilon>0$, temos

$$\int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt\leq\varepsilon\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+C_2F(S), \qquad (3.48)$$

em que a constante $C_2:=C_2(\varepsilon)$ é definida por

$$C_2=\frac{4}{\tilde{\mu}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\theta-1}+\frac{\mu(0)}{\tilde{\mu}}C_p\right)+4C_p+\frac{2}{\alpha}\left(2+\frac{(1-\tilde{\mu})^2}{\tilde{\mu}\varepsilon_1}+C_p|k|(\theta e^\tau+1)\right), \qquad (3.49)$$

em que $\varepsilon_1=\dfrac{1-\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}\varepsilon$.

Prova. Para provar a desigualdade desejada, vamos estimar os termos do lado direito da identidade (3.44). Primeiramente, usando o Teorema de Fubini, a desigualdade de Holder e o fato de que $2ab\leq a^2+b^2$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_t(x,t)dx\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right|&\leq\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega u_t(x,t)\eta^t(x,s)dx\right)ds\\
&\leq\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}ds\\
&=\left(\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega|\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}ds
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx + \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)\left(\int_\Omega |\eta^t(x,s)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}ds\right)^2.$$

Pela definição da energia em (3.25), temos que $F(t) \geq \int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx$, assim, usando a desigualdade de Holder, as propriedades de μ e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right| \\
&\quad\leq F(t) + \frac{1}{2}\left[\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_\Omega |\eta^t(x,s)|^2dxds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&\quad= F(t) + \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)ds\right)\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_\Omega |\eta^t(x,s)|^2dxds\right) \\
&\quad\leq F(t) + \frac{C_p}{2}\tilde{\mu}\int_0^{+\infty}\mu(s)\int_\Omega |\nabla\eta^t(x,s)|^2dxds.
\end{aligned}$$

Novamente, da definição da energia, temos que

$$\left|\int_\Omega u_t(x,t)dx\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right| \leq F(t)(1+C_p\tilde{\mu}),$$

e dessa forma, como F é decrescente,

$$\begin{aligned}
\left[\int_\Omega u_t(x,t)dx\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdx\right]_S^T &\leq |F(T)(1+C_p\tilde{\mu}) - F(S)(1+C_p\tilde{\mu})| \\
&\leq 2F(S)(1+C_p\tilde{\mu}). \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Agora vamos estimar o segundo termo de (3.44). Para qualquer $\delta > 0$, utilizando a desigualdade de Holder e a desigualdade de Young com δ, temos

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu'(s)\eta^t(x,s)dsdxdt \\
&\leq \int_S^T\left(\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}\mu'(s)\eta^t(x,s)ds\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dt \\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt + \frac{1}{2\delta}\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}\mu'(s)\eta^t(x,s)ds\right)^2dxdt \\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt + \frac{1}{2\delta}\int_S^T\int_\Omega\left[\left(\int_0^{+\infty}\mu'(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{+\infty}\mu'(s)|\eta^t(x,s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2dxdt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + \frac{1}{2\delta}\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu'(s)ds\int_0^{+\infty}\mu'(s)|\eta^t(x,s)|^2 dsdxdt,$$

e então, do Teorema de Fubini, da desigualdade de Poincaré e do Corolário (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu'(s)\eta^t(x,s)dsdxdt\right| \leq \\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + \frac{\mu(0)}{2\delta}C_p\int_S^T\int_0^{+\infty}\mu'(s)\int_\Omega |\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxdsdt \\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt + \frac{\mu(0)}{\delta}C_p F(S). \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Para estimar o quarto termo de (3.44) observe que, por (3.29),

$$\begin{aligned}
\int_S^T\int_\Omega\left|\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)ds\right|^2 dxdt &\leq \int_0^{+\infty}\mu(s)ds\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dsdxdt \\
&= \tilde{\mu}\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dsdxdt \\
&\leq \frac{2\tilde{\mu}}{\alpha}F(S). \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

A seguir, utilizando (3.52), vamos estimar o terceiro termo de (3.44). De fato, para qualquer $\varepsilon > 0$, utilizando a desigualdade de Young com ε, obtemos

$$\begin{aligned}
(1-\tilde{\mu})&\int_S^T\int_\Omega \nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdxdt \\
&\leq (1-\tilde{\mu})\int_S^T\left|\int_\Omega \nabla u(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\nabla\eta^t(x,s)dsdx\right|dt \\
&\leq (1-\tilde{\mu})\frac{\varepsilon}{2}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{1-\tilde{\mu}}{2\varepsilon}\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)ds\int_0^{+\infty}\mu(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dsdxdt \\
&\leq (1-\tilde{\mu})\frac{\varepsilon}{2}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt + (1-\tilde{\mu})\frac{\tilde{\mu}}{\alpha\varepsilon}F(S). \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Agora vamos estimar as últimas duas integrais do lado direito de (3.44). Utilizando as desigualdades de Holder, de Poincaré e as propriedades de μ, temos

$$\theta|k|e^\tau\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt + k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \theta|k|e^{\tau}\int_S^T \left[\left(\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)|\eta^t(x,s)|^2ds\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt+\\
&\quad +|k|\int_S^T \left[\left(\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)|\eta^t(x,s)|^2ds\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt\\
&\leq \frac{\theta|k|e^{\tau}}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt+\frac{|k|}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2dxdt\\
&\quad +\frac{|k|(\theta e^{\tau}+1)}{2}\int_S^T\int_\Omega\left[\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{+\infty}\mu(s)|\eta^t(x,s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2dxdt\\
&\leq \frac{\theta|k|e^{\tau}}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt+\frac{|k|}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t-\tau)|^2dxdt\\
&\quad +\frac{|k|(\theta e^{\tau}+1)}{2}C_p\tilde{\mu}\int_S^T\int_\Omega\int_0^{+\infty}\mu(s)|\eta^t(x,s)|^2dsdxdt,
\end{aligned}
$$

de onde, utilizando (3.29) e (3.43), temos

$$
\begin{aligned}
&\theta|k|e^{\tau}\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt+k\int_S^T\int_\Omega u_t(x,t-\tau)\int_0^{+\infty}\mu(s)\eta^t(x,s)dsdxdt\\
&\quad\leq \frac{\theta|k|e^{\tau}}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt+\frac{1}{\theta-1}F(S)+\frac{\tilde{\mu}}{\alpha}C_p|k|(\theta e^{\tau}+1)F(S). \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Agora, substituindo (3.50)-(3.54) em (3.44), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mu}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt-\frac{\delta}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt-\frac{\theta|k|e^{\tau}}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt\\
&\leq 2F(S)(1+C_p\tilde{\mu})+\frac{\mu(0)}{\delta}C_pF(S)+(1-\tilde{\mu})\frac{\varepsilon}{2}\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+(1-\tilde{\mu})\frac{\tilde{\mu}}{\alpha\varepsilon}F(S)\\
&\quad+\frac{2\tilde{\mu}}{\alpha}F(S)+\frac{1}{\theta-1}F(S)+\frac{\tilde{\mu}}{\alpha}C_p|k|(\theta e^{\tau}+1)F(S),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&\left(\tilde{\mu}-\frac{\delta}{2}-\frac{\theta|k|e^{\tau}}{2}\right)\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dxdt\\
&\leq (1-\tilde{\mu})\frac{\varepsilon}{2}\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+2F(S)(1+C_p\tilde{\mu})+\frac{\mu(0)}{\delta}C_pF(S)+(1-\tilde{\mu})\frac{\tilde{\mu}}{\alpha\varepsilon}F(S)\\
&\quad+\frac{2\tilde{\mu}}{\alpha}F(S)+\frac{1}{\theta-1}F(S)+\frac{\tilde{\mu}}{\alpha}C_p|k|(\theta e^{\tau}+1)F(S).
\end{aligned}
$$

Fixando $\delta=\dfrac{\tilde{\mu}}{2}$ e utilizando a hipótese de que $|k|<\dfrac{\tilde{\mu}}{2\theta}e^{-\tau}$ temos, para qualquer $T\geq S\geq$

0,

$$\int_S^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt \leq \frac{\varepsilon}{\tilde{\mu}}(1-\tilde{\mu}) \int_S^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt + \frac{2}{\tilde{\mu}} \left(2(1+C_p\tilde{\mu}) + \frac{2\mu(0)}{\tilde{\mu}} C_p \right.$$
$$\left. + (1-\tilde{\mu})\frac{\tilde{\mu}}{\alpha\varepsilon} + \frac{2\tilde{\mu}}{\alpha} + \frac{1}{\theta-1} + \frac{\tilde{\mu}}{\alpha}\tilde{\mu}C_p|k|(\theta e^\tau + 1) \right) F(S).$$

Agora, como $\tilde{\mu}$ é fixo, vamos considerar $\varepsilon_1 = \dfrac{1-\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}\varepsilon$. Logo, $\varepsilon = \dfrac{\tilde{\mu}\varepsilon_1}{1-\tilde{\mu}}$ e

$$\frac{1-\tilde{\mu}}{\varepsilon} = \frac{1-\tilde{\mu}}{\dfrac{\tilde{\mu}\varepsilon_1}{1-\tilde{\mu}}} = \frac{(1-\tilde{\mu})^2}{\tilde{\mu}\varepsilon_1},$$

donde, obtemos

$$\int_S^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt \leq \varepsilon \int_S^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt + C_1 F(S),$$

em que a constante C_2 depende de ε e

$$C_2 = \frac{4}{\tilde{\mu}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\theta-1} + \frac{\mu(0)}{\tilde{\mu}} C_p \right) + 4C_p + \frac{2}{\alpha} \left(2 + \frac{(1-\tilde{\mu})^2}{\tilde{\mu}\varepsilon_1} + C_p|k|(\theta e^\tau + 1) \right).$$

■

Lema 3.4. *Suponhamos que*

$$|k| < \min \left\{ \frac{1-\tilde{\mu}}{2C_p(\theta e^\tau + 1)}, \frac{\tilde{\mu}}{2\theta} e^{-\tau} \right\},$$

então, para quaisquer $T \geq S \geq 0$, é válido que

$$\frac{1-\tilde{\mu}}{2} \int_S^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt \leq C_4 F(S), \tag{3.55}$$

com

$$C_4 = C_0 C_3 + C_1 + C_3, \tag{3.56}$$

em que C_0 e C_1 são as constantes definidas em (3.35) e C_3 é a constante definida em (3.49) com $\varepsilon = \dfrac{1-\tilde{\mu}}{2(C_0+1)}$, isto é,

$$C_3 := C_2 \left(\frac{1-\tilde{\mu}}{2(C_0+1)} \right) = \frac{4}{\tilde{\mu}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\theta-1} + \frac{\mu(0)}{\tilde{\mu}} C_p \right) + 4C_p$$

$$+\frac{2}{\alpha}\left(2+\frac{1-\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}(6+2\theta|k|e^{\tau})+C_p|k|(\theta e^{\tau}+1)\right).$$

Prova. Considerando $|k|<\min\left\{\frac{1-\tilde{\mu}}{2C_p(\theta e^{\tau}+1)},\frac{\tilde{\mu}}{2\theta}e^{-\tau}\right\}$, temos que as hipóteses dos Lemas 3.1 e 3.3 são verificadas, desta forma, podemos usar a desigualdade (3.48) em (3.34), donde

$$\begin{aligned}(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt &\leq C_0\left(\varepsilon\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+C_2F(S)\right)+C_1F(S)\\ &=C_0\varepsilon\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+(C_0C_2+C_1)F(S).\end{aligned}\tag{3.57}$$

Agora, somando (3.48) e (3.57), obtemos

$$\begin{aligned}&(1-\tilde{\mu})\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+\int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt\\ &\qquad\leq C_0\varepsilon\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+(C_0C_2+C_1)F(S)+\varepsilon\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt\\ &\qquad\quad+C_2F(S),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}&\frac{1-\tilde{\mu}}{2}\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt\\ &\qquad\leq\frac{\varepsilon}{2}(C_0+1)\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+\frac{1}{2}(C_0C_2+C_1+C_2)F(S).\end{aligned}$$

Agora, fixemos

$$\varepsilon=\frac{1-\tilde{\mu}}{2(C_0+1)},$$

então

$$\begin{aligned}&\frac{1-\tilde{\mu}}{2}\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2dxdt\\ &\qquad\leq\frac{1-\tilde{\mu}}{4}\int_S^T\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dxdt+\frac{1}{2}(C_0C_3+C_1+C_3)F(S),\end{aligned}$$

e assim

$$\frac{1-\tilde{\mu}}{4}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}(C_0C_3 + C_1 + C_3)F(S),$$

portanto

$$\begin{aligned}\frac{1-\tilde{\mu}}{2}\int_S^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dxdt &\leq (C_0C_3 + C_1 + C_3)F(S)\\ &= C_4F(S),\end{aligned}$$

como gostaríamos. ■

Com estas estimativas, conseguimos provar o Teorema 3.1.

Prova. Seja $\theta > 1$. Notemos que por (3.27), como todos os termos do lado direito são positivos, então

$$\begin{aligned}-F'(t) \geq & -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_\Omega \mu'(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 dxds + \frac{|k|(\theta e^\tau - 1)}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx\\ &+ \frac{|k|(\theta-1)}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx + \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dxd\xi,\end{aligned}$$

donde

$$-F'(t) \geq \frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dxd\xi,$$

e assim

$$\frac{\theta|k|e^\tau}{2}\int_S^T\int_{t-\tau}^t e^{-(t-\xi)}\int_\Omega |u_t(x,\xi)|^2 dxd\xi dt \leq -\int_S^T F'(t)dt = F(S) - F(T) \leq F(S), \tag{3.58}$$

sendo que utilizamos novamente o fato de F ser decrescente.

Vamos denotar $\overline{k}$ como

$$\overline{k} = \min\left\{\frac{1-\tilde{\mu}}{2C_p(\theta e^\tau + 1)}, \frac{\tilde{\mu}}{2\theta}e^{-\tau}\right\}. \tag{3.59}$$

Dessa forma, se $|k| < \overline{k}$, as hipóteses dos Lemas 3.1, 3.3 e 3.4 são satisfeitas, e assim podemos usar as estimativas feitas em (3.55), (3.29) e (3.58) em (3.31), que resultam em

$$\int_S^T F(t)dt \leq C_4 F(S) + \frac{1}{\alpha}F(S) + F(S) = CF(S),$$

com $C = C_4 + \dfrac{1}{\alpha} + 1$. ■

Provaremos a seguir a estabilidade exponencial da solução do problema (2.8)-(2.16). Iniciemos com a prova da estabilidade exponencial do problema perturbado.

Proposição 3.2. *Para qualquer $\theta > 1$ na definição (3.25), existe uma constante positiva k_0 tal que para k satisfazendo $|k| < k_0$ existe $\tilde{\sigma} > 0$ tal que*

$$F(t) \leq F(0)e^{1-\tilde{\sigma}t}, \qquad t \geq 0, \tag{3.60}$$

para toda solução do problema (3.7) − (3.15). A constante k_0 depende apenas do núcleo μ do termo de memória, do retardo no tempo τ e do domínio Ω.

Prova. Seja $\theta > 1$. Pelo Teorema 3.1 temos que existem constantes C e $\overline{k}$ dadas por

$$C = C_4 + \frac{1}{\alpha} + 1$$

e

$$\overline{k} = \min\left\{\frac{1-\tilde{\mu}}{2C_p(\theta e^{\tau}+1)}, \frac{\tilde{\mu}}{2\theta}e^{-\tau}\right\},$$

as quais dependem do núcleo μ do termo de memória, do retardo no tempo τ e do domínio Ω tais que, se $|k| < \overline{k}$, então para qualquer solução do problema (3.7) − (3.15) a seguinte estimativa é válida

$$\int_S^{+\infty} F(t)dt \leq C\,F(S) \text{ para todo } S > 0.$$

Vimos na Proposição 3.1 que F é decrescente. Além disso, como

$$\begin{aligned}
C =& C(|k|) = C_4 + 1 + \frac{1}{\alpha}\\
&= C_0C_3 + C_1 + C_3 + 1 + \frac{1}{\alpha}\\
&= (2+\theta|k|e^{\tau})\left[\frac{4}{\tilde{\mu}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\theta-1}+\frac{\mu(0)}{\tilde{\mu}}C_p\right)+4C_p\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2}{\alpha}\left(2+\frac{1-\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}(6+2\theta|k|e^{\tau})+C_p|k|(\theta e^{\tau}+1)\right)\right]+
\end{aligned}$$

$$+4\left(1+\frac{\tilde{\mu}}{\alpha(1-\tilde{\mu})}+\frac{C_p}{1-\tilde{\mu}}+\frac{1}{2(\theta-1)}\right)$$
$$+\frac{4}{\tilde{\mu}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\theta-1}+\frac{\mu(0)}{\tilde{\mu}}C_p\right)+4C_p$$
$$+\frac{2}{\alpha}\left(2+\frac{1-\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}(6+2\theta|k|e^{\tau})+C_p|k|(\theta e^{\tau}+1)\right)+1+\frac{1}{\alpha}, \tag{3.61}$$

e $\tilde{\mu}<1$, $\theta>1$ e $\alpha>0$, todos os termos de (3.61) são positivos, logo $C>0$. Portanto, F satisfaz as hipóteses do Teorema 1.19, donde segue que

$$F(t)\leq F(0)e^{1-t/C}, \tag{3.62}$$

para todo $t\geq 0$. Dessa forma, tomando $k_0=\overline{k}$ e $\tilde{\sigma}=\dfrac{1}{C}$, temos o desejado. ■

De posse deste resultado, estamos aptos a demonstrar a estabilidade do problema (2.8)-(2.16).

Teorema 3.2. *Existem constantes $\tilde{C}$, $\mathbf{K}>0$ tais que, para k satisfazendo $|k|<\mathbf{K}$, existe $\sigma>0$ tal que*

$$E(t)\leq \tilde{C}E(0)e^{1-\sigma t}, \qquad t\geq 0, \tag{3.63}$$

para toda solução do problema (2.8)-(2.16). A constante $\mathbf{K}$ depende apenas do núcleo μ do termo de memória, do retardo no tempo τ e do domínio Ω.

Prova. Da Proposição 3.2, temos que para qualquer $\theta>1$, existe $k_0>0$ tal que para k satisfazendo $|k|<k_0$ existe $\tilde{\sigma}>0$ tal que

$$F(t)\leq F(0)e^{1-\tilde{\sigma}t}, \qquad t\geq 0.$$

Para podermos obter a desigualdade para a solução do problema original vamos utilizar o Teorema 1.10. Como vimos no começo deste capítulo, podemos escrever o problema perturbado (3.7)-(3.15) como o problema de Cauchy abstrato (3.17) e $\mathcal{C}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Dessa forma, como (3.62) é válida, $\mathcal{C}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ é um operador linear limitado e $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(\cdot)$, do Teorema 1.10, temos que

$$||S(t)||\leq e^{1-(1/C-\theta|k|e^{\tau})t}. \tag{3.64}$$

Agora, seja U solução do problema equivalente. Como este problema pode ser escrito como o problema de Cauchy abstrato (2.29), da definição de energia de solução, temos que

$$E(t) = \frac{1}{2}||U(t)||^2 = \frac{1}{2}||U(0)S(t)||^2,$$

que implica em

$$||S(t)|| = \frac{\sqrt{2}}{E(0)}(E(t))^{\frac{1}{2}},$$

e portanto

$$E(t) \leq \tilde{C}E(0)e^{1-(1/C-\theta|k|e^{\tau})t}. \tag{3.65}$$

Dessa forma, vamos denotar

$$\sigma = \frac{1}{C} - \theta|k|e^{\tau}.$$

Notemos que $\sigma > 0$ se

$$-\sigma = -\frac{1}{C} + \theta|k|e^{\tau} < 0.$$

isto é, se

$$|k| < \frac{1}{C\theta e^{\tau}},$$

em que $C = C(|k|)$ é a constante definida em (3.61).

Assim sendo, vamos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) &\longrightarrow (0, +\infty) \\ |k| &\longmapsto g(|k|) = \frac{1}{C(|k|)\theta e^{\tau}}. \end{aligned}$$

Já vimos que $C(|k|) > 0$ para todo k, dessa forma, obtemos que

$$0 < g(0).$$

Além disso, por (3.61), temos que g é uma função decrescente positiva contínua, logo quando $|k|$ tende para o infinito, $g(|k|)$ tende para 0. Portanto, existe uma única constante $\hat{k}$ tal que $\hat{k} = g(\hat{k})$. Denotemos então $\mathbf{K} = \min\{\hat{k}, k_0\}$. Dessa forma, podemos concluir que a desigualdade (3.63) é satisfeita para todo k tal que $|k| < \mathbf{K}$. ∎

Observação 3.1. Notemos que é possível explicitar um limitante inferior para $\mathbf{K}$. De fato, como vimos anteriormente

$$|k| < g(|k|) = \frac{1}{C\theta e^{\tau}},$$

que podemos reescrever como

$$|k| C\theta e^{\tau} < 1$$

e, da forma como definimos C, obtemos que

$$\begin{aligned}
\theta e^{\tau}|k|\left(C_4 + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) &= \theta e^{\tau}|k|\left[1 + \frac{1}{\alpha} + (C_3(C_0+1) + C_1)\right] \\
&= \theta e^{\tau}|k|\left\{1 + \frac{1}{\alpha} + \left[(3 + \theta|k|e^{\tau})\left[\frac{4}{\tilde{\mu}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\theta - 1} + \frac{\mu(0)}{\tilde{\mu}}C_p\right) + 4C_p\right.\right.\right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\alpha}\left(2 + \frac{1-\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}(6 + 2\theta|k|e^{\tau}) + C_p|k|(\theta e^{\tau} + 1)\right)\right] \\
&\quad \left.\left. + 4\left(1 + \frac{\tilde{\mu}}{\alpha(1-\tilde{\mu})} + \frac{C_p}{1-\tilde{\mu}} + \frac{1}{2(\theta-1)}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Agora, como $|k| < \overline{k}$, em que $\overline{k}$ é definida em (3.59), temos

$$\begin{aligned}
&\theta e^{\tau}|k|\left(C_4 + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \theta e^{\tau}|k|\left\{1 + \frac{1}{\alpha} + \left[\left(3 + \frac{\tilde{\mu}}{2}\right)\left(\frac{4}{\tilde{\mu}} + \frac{2}{\tilde{\mu}}\frac{1}{\theta-1} + \frac{4\mu(0)}{\tilde{\mu}^2}C_p + 4C_p - \frac{6}{\alpha} + \frac{12}{\alpha\tilde{\mu}}\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. - \frac{2\tilde{\mu}}{\alpha} + \frac{1-\tilde{\mu}}{\alpha}\right) + 4 + \frac{4\tilde{\mu}}{\alpha(1-\tilde{\mu})} + \frac{4C_p}{1-\tilde{\mu}} + \frac{2}{\theta-1}\right]\right\} \\
&= \theta e^{\tau}|k|\left[1 + \frac{1}{\alpha}\left(-8 + \frac{36}{\tilde{\mu}} - \frac{23}{2}\tilde{\mu} - \frac{3}{2}\tilde{\mu}^2 + 4\frac{\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}\right) + 6 + \frac{12}{\tilde{\mu}} + \frac{6}{\tilde{\mu}(\theta-1)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{12\mu(0)}{\tilde{\mu}^2}C_p + \frac{2\mu(0)}{\tilde{\mu}}C_p + 12C_p + \frac{3}{\theta-1} + 2\tilde{\mu}C_p + \frac{4C_p}{1-\tilde{\mu}}\right].
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\theta e^{\tau}|k|C \leq \theta e^{\tau}|k|\left(1 + \frac{1}{\alpha}\gamma_1 + \gamma_2\right),$$

em que

$$\gamma_1 = \gamma_1(\tilde{\mu}) = \frac{36}{\tilde{\mu}} - 8 - \frac{23}{2}\tilde{\mu} - \frac{3}{2}\tilde{\mu}^2 + 4\frac{\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} \tag{3.66}$$

e

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= \gamma_2(\mu(0), \tilde{\mu}, \theta, C_p) \\
&= 6 + \frac{12}{\tilde{\mu}} + \frac{6}{\tilde{\mu}(\theta-1)} + \frac{12\mu(0)}{\tilde{\mu}^2}C_p + \frac{2\mu(0)}{\tilde{\mu}}C_p + 12C_p + \frac{3}{\theta-1} + 2\tilde{\mu}C_p + \frac{4C_p}{1-\tilde{\mu}}.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Portanto, deduzimos o seguinte limitante inferior para $\mathbf{K}$

$$
\mathbf{K} \geq \frac{e^{-\tau}}{\theta(1 + \frac{1}{\alpha}\gamma_1 + \gamma_2)},
$$

γ_1 e γ_2 como em (3.66) e (3.67), respectivamente.

Exemplo 3.1. Consideremos o núcleo da memória como $\mu(t) = e^{-2t}$. Primeiramente, notemos que μ é localmente absolutamente contínua e

(i) $\mu(0) = 1 > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2} < 1$;

(iii) $\mu'(t) \leq -2e^{-2t}$.

Logo, μ satisfaz as condições que foram impostas nesta dissertação. Dessa forma, temos que $\mu(0) = 1$, $\tilde{\mu} = \dfrac{1}{2}$ e $\alpha = 2$ e o problema é dado por

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} e^{-2s}\Delta u(x,t-s)ds + ku_t(x,t-\tau) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty) \\
&u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty) \\
&u(x,t) = u_0(x,t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0].
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

À luz do exposto, fixando $\theta = 2$, obtemos

$$
\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{495}{8}
$$

e

$$
\gamma_2\left(1, \frac{1}{2}, 2, C_p\right) = 45 + 73C_p.
$$

Dessa forma, para esta escolha do núcleo de memória, obtemos

$$\mathbf{K} \geq \frac{8e^{-\tau}}{1231 + 1168C_p}.$$

Referências Bibliográficas

[1] AASSILA, M.; CAVALCANTI, M. M.; SORIANO, J. A. Asymptotic Stability and Energy Decay Rates for Solutions of the Wave Equation with Memory in a Star-Shaped Domain. In: **SIAM Journal on Control and Optimization**. Vol. 38, No. 5, 1581-1602. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[2] ALABAU-BOUSSOUIRA, F.; NICAISE, S.; PIGNOTTI, C. Exponential Stability of the Wave Equation with Memory and Time Delay. In: **Inverse and Control Problems for Evolution Equations**. Switzerland: Springer, 2014.

[3] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[4] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

[5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; MARTINEZ, P. General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems. In: **Nonlinear Analysis**. 68, 177-193. 2008.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: UEM/DMA, 2010.

[7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: UEM/DMA, 2011.

[8] DAFERMOS, C. M. Asymptotic Stability in Viscoelasticity. **Arch. Rational Mech.** Anal. Vol. 37. 1970

[9] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. University of California. Berkeley, 1998.

[10] GIORGI, C.; RIVERA, J. E. M. Global Attractors for a Semilinear Hyperbolic Equation in Viscoelasticity. In: **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 260, 83-99. Academic Press, 2001.

[11] GONZALES MARTINEZ, V. H.; MARCHIORI, T. D.; SOUZA FRANCO, A. Y. de. Exponential Stabilization of a Parabolic-Hyperbolic System with Localized Damping and Delay. In **Journal of Dynamical and Control Systems**. 29, 1101-1127. Springer, 2023.

[12] GRASSELLI, M.; PATA, V. Uniform Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory. In **Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications**, Vol. 50, 155-178. Switzerland: Birkhauser Verlag Basel, 2002.

[13] GUESMIA, A. Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay. In **IMA Journal of Mathematical Control and Information**. Oxford University Press, 2013.

[14] KESAVAN, S. **Functional Analysis**. 2 ed. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2023.

[15] KOMORNIK, V. **Exact Controllability and Stabilization**: The Multiplier Method. Paris: Masson, 1994.

[16] LIU, Z.; ZHENG, S. On the exponential Stability of Linear Viscoelasticity and Thermoviscoelasticity. In: **Quarterly of Applied Mathematics**. V. 54. 21-31. 1996.

[17] NICAISE, S.; PIGNOTTI, C. Stability and Instability Results of the Wave Equation with a Delay Term in the Boundary or Internal Feedbacks. In **SIAM Journal on Control and Optimization**, Vol. 45, No. 5, 1561-1585. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

[18] OQUENDO, H. P. **Semigrupos de Operadores Lineares**. Notas de aula. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

[19] PALOMINO, J. A. S.; CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações**. Maringá: UEM/DMA, 2016.

[20] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations** (Applied mathematical sciences; v. 44). New York: Springer-Verlag, 1983.

[21] PIGNOTTI, C. A note on stabilization of locally damped wave equations with time delay. In **Systems & Control Letters**. Elsevier, 2011.

[22] RIVERA, J. E. M; NASO, M. G. Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory. In: **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 326, 691-707. Elsevier, 2007.

[23] RIVERA, J. E. M. **Estabilização de Semigrupos & Aplicações**. Série de Métodos Matemáticos. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008

[24] ROYDEN, H. L. **Real Analysis**. 3 ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.

[25] SOUZA FRANCO, A. Y. de. **Estabilidade Exponencial para o Modelo da Onda com Memória Localizada e História Passada**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2018.

[26] TAVARES, E. H. G. **Modelos de Vigas Viscoelásticas extensíveis**: Boa Colocação e Estabilidade. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2016.

[27] VICENTE, A. Wave equation with acoustic/memory boundary conditions. In: **Boletim Sociedade Paranaense de Matemática**. V. 27. 29-39. 2009.