

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(MESTRADO)

LAURA MASSUDA CREMA

**ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA UMA
EQUAÇÃO DO CALOR LOGARÍTMICA EM ÁLGBRAS DE BANACH
COMUTATIVAS¹**

MARINGÁ

2024

¹ O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

LAURA MASSUDA CREMA

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA UMA EQUAÇÃO DO
CALOR LOGARÍTMICA EM ÁLGEBRAS DE BANACH COMUTATIVAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. César Adolfo Hernández Melo

MARINGÁ

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

C915e Crema, Laura Massuda
Estabilidade de soluções de equilíbrio para uma equação do calor logarítmica em álgebras de Banach comutativas / Laura Massuda Crema. -- Maringá, 2024.
64 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. César Adolfo Hernández Melo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2024.

1. Equações diferenciais. 2. Soluções de equilíbrio. 3. Estabilidade. 4. Álgebras de Banach. I. Hernández Melo, César Adolfo, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.3

Edilson Damasio CRB9-1.123

LAURA MASSUDA CREMA

**ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA UMA EQUAÇÃO DO CALOR
LOGARÍTMICA EM ÁLGEBRAS DE BANACH COMUTATIVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. César Adolfo Hernández Melo - UEM (Presidente)

Prof. Dr. Luis Fernando López Ríos - UNAM / México

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo - UEM

Aprovada em: 27 de fevereiro de 2024.

Local de defesa: Bloco F67 – Auditório do Departamento de Matemática.

Em memória de Iracema Massuda e Irineu Crema.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, por sua infinita graça e misericórdia. Ele tem me sustentado nos momentos mais difíceis, renovando minhas forças.

Agradeço aos meus familiares pela compreensão, cuidado e apoio nos momentos de dúvida e ansiedade. Em especial, agradeço aos meus irmãos Jano e Fernanda por sempre acreditarem em mim, e à minha mãe Geneci, fiel ouvinte e conselheira, que sempre me deu espaço e confiança para sonhar (e viver) coisas maiores que eu imaginava.

Agradeço ao meu orientador professor Dr. César Adolfo Hernández Melo por todo o apoio e incentivo no desenvolvimento dessa dissertação, pela paciência, dedicação e pela motivação para elaboração deste trabalho.

Agradeço aos membros da banca examinadora, professor Dr. Luis Fernando López Ríos e professor Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo, por aceitarem contribuir com este trabalho, dispondo de seu tempo e conhecimento.

Agradeço aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Matemática PMA-UEM e também aos professores do Departamento de Matemática da Unioeste, *campus* Cascavel, por serem parte fundamental da minha formação acadêmica.

Agradeço a todos os amigos e colegas com quem pude compartilhar minhas angústias e alegrias, por todo o companheirismo e boas memórias.

Agradeço à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

*A sabedoria é a coisa principal; adquiere, pois, a sabedoria;
sim, com tudo o que possuis, adquiere o conhecimento.
(Provérbios 4:7)*

RESUMO

Este trabalho busca estudar a estabilidade de soluções de equilíbrio de uma equação do calor não linear com não linearidade do tipo logarítmica, em que a incógnita da equação é uma função que toma valores em uma álgebra de Banach comutativa X . Para isso, consideramos inicialmente o caso $X = \mathbb{R}$ e verificamos a existência de uma classe de soluções de equilíbrio que decaem a zero no infinito. Provamos a instabilidade destas soluções no caso real utilizando duas abordagens: uma delas algébrica e a outra analítica. A primeira delas consiste na análise espectral do operador linear associado ao equilíbrio. A segunda abordagem consiste na análise do comportamento de uma curva de soluções da equação que passa pela solução de equilíbrio. A última abordagem nos garante a instabilidade de qualquer solução de equilíbrio não trivial. Após isso, analisamos o caso geral, isto é, o caso em que X é uma álgebra de Banach comutativa qualquer. Nesse caso, obtemos uma classe análoga de equilíbrios e para essas soluções, realizamos a análise espectral do operador linearizado no equilíbrio, obtendo a instabilidade linear das soluções. De modo análogo ao caso real, provamos também a instabilidade para uma solução de equilíbrio qualquer.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Soluções de equilíbrio. Estabilidade. Álgebras de Banach.

ABSTRACT

This work seeks to study the stability of equilibrium solutions of a nonlinear heat equation with logarithmic nonlinearity, in which the unknown of the equation is a function that takes values in a commutative Banach algebra X . To do this, we initially consider the case $X = \mathbb{R}$ and verify the existence of a class of equilibrium solutions that decay to zero at infinity. We prove the instability of these solutions in the real case using two approaches: one of them algebraic and the other analytical. The first approach consists in the spectral analysis of the linear operator associated with the equilibrium. The second approach consists of analyzing the behavior of a curve of solutions of the equation passing through the equilibrium solution. The last approach guarantees the instability of any non-trivial equilibrium solution. After that, we analyze the general case, that is, the case in which X is any commutative Banach algebra. In this case, we obtain an analogous class of equilibriums and for these solutions, we do the spectral analysis of the linearized operator in the equilibrium, obtaining the linear instability of the solutions. Similarly to the real case, we also prove the instability for any equilibrium solution.

Key-words: Differential equations. Equilibrium solutions. Stability. Banach algebras.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Curvas de nível de Ψ	36
--	----

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	FATOS BÁSICOS SOBRE ÁLGEBRAS DE BANACH	16
1.1	ÁLGEBRAS DE BANACH	16
1.2	NOÇÕES BÁSICAS SOBRE ESPECTRO	22
1.3	FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS E ANALÍTICAS EM ÁLGEBRAS DE BANACH	23
1.4	FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARITMO EM ÁLGEBRAS DE BANACH	27
2	EQUAÇÃO DO CALOR LOGARÍTMICA: CASO REAL	31
2.1	ESTABILIDADE VIA LINEARIZAÇÃO	31
2.2	SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO	34
2.3	INSTABILIDADE DE UMA CLASSE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO	37
2.3.1	Abordagem algébrica	38
2.3.2	Abordagem analítica	40
2.4	INSTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO TRIVIAIS .	44
3	EQUAÇÃO DO CALOR LOGARÍTMICA: ÁLGEBRAS DE BA- NACH	46
3.1	SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO	46
3.2	INSTABILIDADE DE UMA CLASSE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO	51
3.2.1	Abordagem algébrica	54
3.2.2	Abordagem analítica	56
3.3	INSTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO TRIVIAIS .	58
3.4	INSTABILIDADE NÃO LINEAR IMPLICA INSTABILIDADE LINEAR	60
	REFERÊNCIAS	63

INTRODUÇÃO

As equações de reação-difusão são equações diferenciais parciais (EDPs) que surgem ao modelar diversos processos químicos, físicos ou biológicos envolvendo a interação de elementos em um meio. Convencionalmente, algumas equações desta classe tomam a forma

$$u_t = \alpha u_{xx} + f(u), \quad (1)$$

em que u é uma função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ em \mathbb{R} , α é um parâmetro real positivo e f , denominado termo de reação, é uma função suave definida em um conjunto aberto de \mathbb{R} .

Para determinados termos de reação, a equação (1) acima representa diferentes fenômenos. Por exemplo, considerando o termo de reação $f(u) = \beta u(1-u)$, $\beta > 0$, obtemos a equação Fisher-KPP, que aparece nos trabalhos de Fisher [15] e Kolmogoroff, Petrovsky e Piscounoff [29] a respeito de dinâmicas populacionais para descrever o espalhamento de uma mutação vantajosa. A reação $f(u) = u(1-u)(u-\beta)$ com $0 < \beta < 1$ nos fornece a equação conhecida como ZFK-Nagumo, referência aos trabalhos de Zeldovich e Frank-Kamenetskii [37] e Nagumo, Arimoto e Yoshizawa [34], nos quais essa equação é utilizada para descrever a propagação da chama e como um modelo para a condução nervosa, respectivamente [1].

Dentre os modelos de reação-difusão, temos também a equação de Allen-Cahn [4], que descreve o processo de separação de fases em ligas metálicas, cujo termo de reação é $f(u) = u^3 - u$. Além de ser um modelo para estudar transições de fase em ligas metálicas pela abordagem de interface difusa, essa equação tem sido utilizada para estudar problemas físicos, como crescimento de cristais, segmentação de imagens e movimento por fluxos de curvatura média, conforme destacado por Hussain et al. [25].

Podemos ainda mencionar a equação de Newell-Whitehead-Segel (NWS), obtida quando $f(u) = u(1-u^2)$, uma equação diferencial parcial não linear que descreve a formação de padrões e modela uma ampla gama de fenômenos físicos, químicos e biológicos, incluindo a convecção de Rayleigh-Bénard, o comportamento de osciladores químicos, a formação da pelagem de animais e a distribuição espacial de vegetação em regiões áridas [19].

Diversos problemas matemáticos inerentes às equações de reação-difusão na forma (1) foram abordados na literatura. Por exemplo, temos o texto de Meyer e Needham [33] que estuda a existência e unicidade de soluções locais e globais para o problema de Cauchy associado à equações parabólicas com não linearidade não Lipschitziana. A existência de atratores globais e o estudo de sua estrutura interna [6], o *blow-up* de soluções [16] e a existência de padrões metaestáveis [11] também despertaram o interesse da comunidade matemática

A estabilidade de soluções de uma equação de reação-difusão também é tema de diversos trabalhos, como por exemplo [18], [27] e [31], que abordam a estabilidade de soluções do tipo onda viajante. A estabilidade de soluções de equilíbrio foi estudada nos trabalhos de Hernández [21], que investiga soluções de equilíbrio periódicas e não periódicas para uma equação do calor não linear, e Hernández e Mayorga [23], que trata a instabilidade de soluções de equilíbrio de uma família não linear de equações de reação-difusão localizadas. Uma discussão mais ampla sobre propriedades e problemas que concernem à equação (1) pode ser encontrada em [20] e suas referências.

Equações diferenciais com não linearidade logarítmica (não necessariamente do tipo reação-difusão) aparecem na Física no contexto da mecânica ondulatória e da óptica, nos trabalhos de Bialynicki-Birula e Mycielski [9] e Bialynicki-Birula e Mycielski [8]. Do ponto de vista matemático, além dos trabalhos [10] e [12] que estudam o problema de Cauchy para a equação logarítmica de Schrödinger, temos o trabalho de Chen, Luo e Liu [13], que estuda o problema de Cauchy com condições de contorno de Dirichlet associado a uma equação do calor, que é uma equação do tipo reação-difusão.

O trabalho de Alfaro e Carles [2] considera a equação do calor com uma não linearidade logarítmica no termo de reação f , estabelecendo a existência e unicidade de soluções globais do problema de Cauchy para uma classe de dados iniciais adequada. Além disso, os autores investigam o comportamento das soluções do problema de Cauchy ao longo do tempo. Em particular, demonstra-se a existência de dados iniciais tais que a solução decai para zero super exponencialmente e dados iniciais tais que a solução cresce super exponencialmente.

Mencionamos também o trabalho de Hernández e Demetrio [22], que estuda a equação

$$u_t = \alpha u_{xx} + wu + k \log(u^2)u, \quad w \in \mathbb{R}, \quad k > 0. \quad (2)$$

Nesse artigo é apresentada a fórmula explícita para uma família de soluções de equilíbrio que decaem a zero no infinito, e a instabilidade dessa família de soluções é obtida através da análise espectral do operador que aproxima as soluções da equação em torno das soluções de equilíbrio. Também é apresentado um resultado sobre a instabilidade de uma solução de equilíbrio não trivial.

Considerando a ampla literatura existente a respeito de equações de reação-difusão, desejamos estudar o problema da equação do calor com não linearidade logarítmica em um cenário mais amplo, isto é, estudar essa equação considerando a incógnita u da equação como uma função definida do conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ no conjunto X , sendo X uma álgebra de Banach comutativa com unidade $e \in X$, e f uma função suave definida de um conjunto aberto $\Omega \subset X$ para X . Mais exatamente, o objetivo dessa dissertação é estudar a existência

e a estabilidade de soluções de equilíbrio da equação do calor logarítmica

$$u_t = u_{xx} + wu + \text{Log}(u^2)u, \quad (3)$$

em que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$, $w \in X$ denota um parâmetro fixado e Log denota a função logaritmo definida na álgebra de Banach X , vide seção 1.4. Com isso, estendemos os resultados apresentados em [22], que aborda a equação (3) no caso particular $X = \mathbb{R}$.

É importante notar que existem poucos trabalhos na literatura que analisam a dinâmica de equações diferenciais nas quais a incógnita assume valores em álgebras de Banach. Destacamos o trabalho de Almkvist [5], que estuda a existência e estabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$u'(t) = a(t)u(t) \quad \text{com} \quad u(0) = e, \quad (4)$$

em que u e a são funções de \mathbb{R}^+ em uma álgebra de Banach X , $a(t)$ uma função Bochner integrável².

A seguir, enunciamos os principais resultados desta dissertação. Lembrando que uma solução de equilíbrio da equação (3) é uma solução da equação que não depende da variável t , demonstramos a existência de uma família de soluções de equilíbrio que decaem a zero no infinito. Mais exatamente:

Teorema. *Seja X uma álgebra de Banach comutativa com unidade e , $w \in X$ tal que $\|e - w\| < \log 2$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, a função $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por*

$$\phi_r(x) = \text{Exp}\left(\frac{e - w}{2}\right) \exp\left(\frac{-(x + r)^2}{2}\right) \quad (5)$$

é uma solução de equilíbrio da equação (3).

Intuitivamente, uma solução de equilíbrio é estável se qualquer solução do problema de Cauchy gerada por dados iniciais que estão próximos da solução de equilíbrio se mantém próxima do equilíbrio para todo tempo $t > 0$. Uma forma de analisar a estabilidade das soluções de equilíbrio ϕ dadas em (5) é analisar o espectro do operador linear

$$\mathcal{L}g = \frac{d^2}{dx^2}g + 3g - (x + r)^2g, \quad g \in D(\mathcal{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, X),$$

em que $D(\mathcal{L})$ denota o domínio do operador e $C_b(\mathbb{R}, X)$ denota a álgebra de Banach das funções limitadas de \mathbb{R} em X . Temos o seguinte resultado a respeito do espectro do operador \mathcal{L} :

² A integral de Bochner estende a definição de integral de Lebesgue para funções que assumem valores em um espaço de Banach.

Teorema. *O espectro pontual do operador linear \mathcal{L} é dado pela seqüência de autovalores $\lambda_n = -2(n-1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ou seja,*

$$\{2, 0, -2, -4, \dots, -2(n-1), \dots\} = \sigma_p(\mathcal{L}) \subset \sigma(\mathcal{L}).$$

Além disso, o autoespaço associado a cada um dos autovalores λ_n é gerado por uma única autofunção.

Já que o operador \mathcal{L} tem um autovalor positivo, a solução de equilíbrio dada em (5) é linearmente instável. Na verdade, vamos provar o seguinte resultado mais geral:

Teorema. *Qualquer solução de equilíbrio ϕ não trivial da equação (3) é instável. Mais precisamente, existe $\epsilon > 0$, uma seqüência de funções g_n e uma seqüência de tempos $t_n > 0$ tais que*

$$g_n \rightarrow \phi, \quad e \quad \|u_n(\cdot, t_n) - \phi(\cdot)\| > \epsilon.$$

Aqui u_n denota uma seqüência de soluções da equação do calor logarítmica tal que $u_n(\cdot, 0) = g_n(\cdot)$.

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 1 vamos apresentar os conceitos e propriedades que serão utilizados ao longo do texto. Na seção 1.1 vamos definir o conceito de álgebra de Banach e apresentar alguns exemplos desses espaços. Vamos tratar de propriedades de elementos das álgebras de Banach, como a existência de inverso, e na seção 1.2 trataremos do espectro de um elemento. Na seção 1.3 vamos tratar de funções definidas em álgebras de Banach, especificamente do conceito de diferenciabilidade. Ainda nesta seção, vamos mencionar séries de potências definidas em álgebras de Banach. Por fim, a seção 1.4 irá discutir propriedades das funções exponencial e logaritmo definidas em álgebras de Banach.

O Capítulo 2 discute a existência e estabilidade de soluções de equilíbrio para a equação do calor logarítmica, no caso em que a incógnita é uma função que assume valores reais, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Na seção 2.1 descrevemos de forma geral o método utilizado para determinar a estabilidade de soluções de equilíbrio. Na seção 2.2 iremos formalizar o conceito de solução de equilíbrio para a equação logarítmica e obter uma fórmula explícita para os equilíbrios que decaem a zero no infinito. Nesta seção ainda descreveremos o comportamento de outras classes de equilíbrios a partir da análise das curvas de nível da função Hamiltoniana associada à equação diferencial em questão. Já na seção 2.3, faremos a análise espectral do operador \mathcal{L} associado a solução de equilíbrio que decai a zero no infinito, obtendo a instabilidade linear para essa classe de equilíbrios. Essa análise será feita por meio de duas abordagens: uma delas algébrica e outra analítica. Na seção 2.4, demonstraremos um resultado mais geral que garante a instabilidade de uma solução de equilíbrio qualquer.

Por fim, no Capítulo 3 estudamos a equação do calor logarítmica com a incógnita sendo uma função que toma valores em uma álgebra de Banach, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$. De maneira análoga ao caso real, na seção 3.1 vamos tratar das soluções de equilíbrio para a equação, provando a existência de uma família de equilíbrios que decaem a zero no infinito. Na seção 3.2, iremos provar a instabilidade linear dessa família de equilíbrios a partir da análise espectral do operador \mathcal{L} associado ao equilíbrio, novamente utilizando abordagens algébrica e analítica. A instabilidade de uma solução de equilíbrio qualquer será demonstrada na seção 3.3, e na seção 3.4 apresentaremos a relação entre o problema linear e o não linear, verificando que uma família de soluções da equação diferencial não linear gera a solução instável da equação linear dada pelo operador \mathcal{L}_ϕ associado ao equilíbrio.

1 FATOS BÁSICOS SOBRE ÁLGEBRAS DE BANACH

Neste primeiro capítulo, vamos definir o conceito de álgebra de Banach e estudar algumas propriedades de elementos nestes espaços. Também vamos estudar o comportamento de funções $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ que assumem valores em álgebras de Banach e enunciar alguns resultados que dizem respeito a diferenciabilidade de tais funções.

1.1 ÁLGEBRAS DE BANACH

Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ sobre os números reais ou complexos, munido de uma multiplicação entre vetores,

$$* : X \times X \rightarrow X$$

tal que $(X, +, \cdot, *)$ é uma álgebra associativa e para quaisquer $x, y \in X$,

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

Se a álgebra possui unidade $e \in X$, $\|e\| = 1$, e se quaisquer dois elementos desse espaço comutam, dizemos que a álgebra é comutativa.

Como veremos nos exemplos a seguir, muitos dos espaços conhecidos da Análise são álgebras de Banach.

Exemplo 1.

(a) O conjunto \mathbb{C} dos números complexos

$$\mathbb{C} = \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

munido da estrutura algébrica e norma usual é uma álgebra de Banach comutativa sobre \mathbb{C} .

(b) O conjunto \mathbb{H} dos quatérnios, dado por

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

e munido da estrutura algébrica e norma usual é uma álgebra de Banach real, não comutativa.

(c) O conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com entradas reais, quando munido de uma norma matricial sub-multiplicativa, é uma álgebra de Banach não comutativa.

(d) O espaço das seqüências limitadas ℓ^∞ , munido de sua norma usual

$$\|(x_i)\| = \|(x_1, x_2, x_3, \dots)\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

é uma álgebra de Banach comutativa.

Se E é um espaço topológico e X é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , podemos definir

$$C_b(E, X) = \{f : E \rightarrow X; f \text{ é contínua e limitada}\}.$$

Podemos munir esse espaço das operações usuais de adição e multiplicação de funções e multiplicação de uma função por um número complexo, bem como podemos definir uma norma

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

para cada $f \in C_b(E, X)$.

Lema 1. Se E é um espaço topológico e X é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , então $C_b(E, X)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $C_b(E, X)$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in E$ e $m, n \geq n_0$, vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.1)$$

Isso implica que para todo $x \in E$, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em X . Como X é completo, existe $f(x) \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Defina

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow X \\ x &\mapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Assim, para $m \geq n_0$ fixado e $x \in E$ arbitrário,

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E portanto, concluímos que para todo $x \in E$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x)| \leq \|f_m\| + \frac{\varepsilon}{2},$$

de onde f é limitada.

Temos também que f é contínua. Dado $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n \geq n_0$,

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como f_{n_0} é contínua, existe V_x aberto em E contendo x tal que, para todo $y \in V_x$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dessa forma, para todo $y \in V_x$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, f é contínua em $x \in E$, o que implica que $f \in C_b(E, X)$. Além disso, $f_n \rightarrow f$, pois dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \quad \text{sempre que } n \geq n_0.$$

□

Exemplo 2.

(a) Seja X uma álgebra de Banach. O espaço $C_b(\mathbb{R}, X)$ das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ contínuas e limitadas é uma álgebra de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$. O lema anterior nos garante que $C_b(\mathbb{R}, X)$ é espaço de Banach. Considerando a operação de multiplicação usual, dados $f, g \in C_b(\mathbb{R}, X)$, temos que

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x) \cdot g(x)\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Além disso, sendo e_X a identidade de X , temos que a função $f_e : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por $f_e(x) = e_X$ é a identidade em $C_b(\mathbb{R}, X)$, e $\|f_e\|_\infty = 1$.

(b) Seja X uma álgebra de Banach. O espaço $C_0(\mathbb{R}, X)$ das funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ tais que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, isto é, funções que tendem a zero no infinito, é uma álgebra de Banach (sem unidade). Como $C_0(\mathbb{R}, X) \subset C_b(\mathbb{R}, X)$, basta provar que $C_0(\mathbb{R}, X)$ é um subespaço fechado de $C_b(\mathbb{R}, X)$.

Para isso, tome $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $C_0(\mathbb{R}, X)$ tal que $f_n \rightarrow f$, $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Como $f_{n_0} \in C_0(\mathbb{R}, X)$, existe K subconjunto compacto de \mathbb{R} tal que

$$\|f_{n_0}(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus K.$$

Assim, dado $x \in \mathbb{R} \setminus K$,

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x)\| \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}(x)\| < \varepsilon.$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe K compacto tal que $\|f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus K$, de onde $f \in C_0(\mathbb{R}, X)$, e o conjunto é fechado.

Além disso, espaços de operadores também são álgebras de Banach.

Exemplo 3. Considere E um espaço de Banach complexo e $\mathcal{B}(E)$ o espaço dos operadores lineares limitados em E , munido da norma usual

$$T \mapsto \|T\| = \sup\{\|Tx\|; \|x\| = 1\}.$$

Considerando a composição de operadores em $\mathcal{B}(E)$, temos que $\mathcal{B}(E)$ é uma álgebra de Banach não comutativa. De fato,

$$\|ST\| = \sup_{\|x\|=1} \|S(T(x))\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|S\| \|T(x)\| = \|S\| \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \|S\| \|T\|.$$

Com intuito de mostrar a riqueza da teoria de álgebras de Banach para leitores pouco familiarizados com este tópico, vamos apresentar algumas propriedades de elementos em uma álgebra de Banach.

Proposição 1. Seja X uma álgebra de Banach e $x \in X$ um elemento tal que $\|x\| < 1$. Então o elemento $e - x$ é invertível em X com

$$(e - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \quad (1.2)$$

Além disso,

$$\|(e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

Demonstração. Inicialmente vamos verificar que a série converge. Seja

$$s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n$$

a n -ésima soma parcial da série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Como

$$\|s_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|x^k\| \leq \sum_{k=0}^n \|x\|^k = \frac{1 - \|x\|^{n+1}}{1 - \|x\|} \leq \frac{1}{1 - \|x\|},$$

a série é absolutamente convergente, e portanto $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge. Agora, considerando que

$$(e - x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = e - x^{n+1},$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, segue que

$$(e - x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = e,$$

de onde

$$(e - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Dessa maneira,

$$\|(e - x)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x\|^k = \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

□

Proposição 2. *Considere $GL(X)$ o grupo de elementos invertíveis de uma álgebra de Banach X . Então:*

(a) $GL(X)$ é um conjunto aberto.

(b) $(GL(X), *)$ é um grupo topológico. Isto é, a aplicação multiplicação

$$\begin{aligned} M : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

e a aplicação inversa

$$\begin{aligned} I : GL(X) &\rightarrow X \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

são contínuas.

Demonstração.

(a) Para provar que $GL(X)$ é um conjunto aberto, considere $x \in GL(X)$ e tome $y \in \mathcal{B}$, com

$$\mathcal{B} = \left\{ y \in X; \|x - y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|} \right\}$$

Sabemos que

$$y = x - (x - y) = x(e - x^{-1}(x - y)).$$

Mas como X é uma álgebra de Banach

$$\|x^{-1}(x - y)\| \leq \|x^{-1}\| \|x - y\| < 1.$$

Pela proposição 1, $e - x^{-1}(x - y) \in GL(X)$, e como y é o produto de dois elementos invertíveis, segue que y é invertível. Dessa forma, $\mathcal{B} \subset GL(X)$, o que garante que $GL(X)$ é aberto.

- (b) Para verificar que a multiplicação é contínua, tome $x, y \in X$ e x_n, y_n seqüências em X tais que $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Provaremos que $M(x_n, y_n) \rightarrow M(x, y)$. De fato, como y_n é limitada,

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &\leq \|(x_n - x)y_n\| + \|x(y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Então $x_n y_n \rightarrow xy$ quando $n \rightarrow \infty$, o que garante que M é uma aplicação contínua.

Resta provar que a aplicação inversa também é contínua. Para isso, considere $x \in GL(X)$ e x_n uma seqüência em $GL(X)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Provaremos que $x_n^{-1} \rightarrow x^{-1}$.

$$\begin{aligned} \|x_n^{-1} - x^{-1}\| &= \|x^{-1} - x_n^{-1}\| \\ &= \|x^{-1}(x_n - x)x_n^{-1}\| \\ &\leq \|x^{-1}\| \|x_n - x\| \|x_n^{-1}\|. \end{aligned}$$

Para garantir que $\|x_n^{-1} - x^{-1}\| \rightarrow 0$, é suficiente provar que $\|x_n^{-1}\|$ é limitada. De fato, já que $x_n \rightarrow x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{1}{2\|x^{-1}\|} \text{ para todo } n \geq k.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \|x_n^{-1}\| &\leq \|x_n^{-1} - x^{-1}\| + \|x^{-1}\| \\ &= \|x_n^{-1}(x - x_n)x^{-1}\| + \|x^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_n^{-1}\| + \|x^{-1}\| \text{ para todo } n \geq k, \end{aligned}$$

Então, se $n \geq k$

$$\|x_n^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|.$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$

$$\|x_n^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2 \|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

o que garante a continuidade da aplicação inversa.

□

Como veremos adiante, a teoria de álgebras de Banach está relacionada com a Análise Complexa [3], em especial com a teoria das funções analíticas em conjuntos abertos de \mathbb{C} . Para mais detalhes a respeito das álgebras de Banach, o leitor interessado pode consultar [17], [26], [30], [35] e suas referências.

1.2 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE ESPECTRO

Nesta seção vamos tratar brevemente da teoria espectral para elementos de uma álgebra de Banach X .

Definição 1. *Seja X uma álgebra de Banach complexa e $x \in X$. O espectro $\sigma(x)$ do elemento $x \in X$ é definido como*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda e - x \text{ não é invertível em } X\}.$$

O raio espectral de x é o número $r(x)$ definido por

$$r(x) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Nos exemplos a seguir, vamos determinar o espectro de um elemento em uma álgebra de Banach.

Exemplo 4.

- (a) *Considere a álgebra de Banach $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ com entradas complexas. Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda I$ é invertível se, e somente se, λ não é um autovalor de A . Ou seja, $\sigma(A)$ é o conjunto de autovalores da matriz A .*
- (b) *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Considere $C(X, \mathbb{C})$ a álgebra de Banach das funções contínuas de X em \mathbb{C} . Para $f \in C(X, \mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda e$ é invertível quando f não assume o valor λ . Portanto, $\sigma(f)$ é igual ao conjunto imagem de f .*

Temos os seguintes resultados referentes ao espectro de um elemento.

Proposição 3. *Seja X uma álgebra de Banach complexa e $x \in X$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) $\sigma(x) \neq \emptyset$.
- (b) $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$.
- (c) $\sigma(x)$ é um conjunto fechado.

Isto é, $\sigma(x)$ é um subconjunto não-vazio, compacto, contido no disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$.

Demonstração. Vamos demonstrar os itens (b) e (c). Uma demonstração do item (a) pode ser encontrada em [3], capítulo 4.

(b) Seja λ um número complexo tal que $|\lambda| > \|x\|$. Temos que

$$x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x).$$

Como

$$\|\lambda^{-1}x\| = |\lambda|^{-1}\|x\| < 1,$$

segue da Proposição 1 que $e - \lambda^{-1}x \in GL(X)$ e assim, $x - \lambda e \in GL(X)$. Consequentemente, $\lambda \notin \sigma(x)$, de onde

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

(c) Já provamos que $GL(X)$, o grupo de elementos invertíveis de X , é um conjunto aberto (Proposição 2), então $X \setminus GL(X)$ é fechado. Como $\sigma(x)$ é a imagem inversa de $X \setminus GL(X)$ com respeito à aplicação contínua $\lambda \mapsto x - \lambda e$, garantimos que $\sigma(x)$ é um conjunto fechado.

□

Proposição 4. *Seja X uma álgebra de Banach e $x \in X$. Temos a seguinte fórmula para o raio espectral.*

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração. Uma demonstração da Proposição 4 pode ser encontrada em [3], capítulo 4. □

Quando $T \in \mathcal{B}(E)$, isto é, T é um operador limitado, o espectro de T como operador linear em E é igual ao seu espectro como elemento da álgebra de Banach $\mathcal{B}(E)$. Também podemos definir espectro para operadores não limitados [28]. Se $T : D(T) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear, não necessariamente limitado, de $D(T)$ em E , dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T se o conjunto

$$E(\lambda) = \{x \in D(T); Tx = \lambda x\}.$$

é não trivial, isto é, $E(\lambda) \neq \{0\}$. Nesse caso, $E(\lambda)$ é chamado autoespaço associado ao autovalor λ . Cada $x \in E(\lambda)$, $x \neq 0$ é chamado autovetor de T associado a λ . Os autovalores de T formam o espectro pontual $\sigma_p(T)$ do operador T . Temos que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

1.3 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS E ANALÍTICAS EM ÁLGEBRAS DE BANACH

Nesta seção vamos definir a derivada de uma função com valores em um álgebra de Banach, as séries de potência em uma álgebra de Banach e apresentar o conceito de função analítica.

Definição 2. *Sejam X, Y espaços de Banach, $\Omega \subset X$ um conjunto aberto e uma aplicação $f : \Omega \rightarrow Y$. Dizemos que f é Fréchet diferenciável em $a \in \Omega$, se existe uma transformação linear limitada $T_a : X \rightarrow Y$ tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} = 0.$$

Quando f é Fréchet diferenciável em um ponto a , a derivada de Fréchet T_a costuma ser denotada por $Df(a)$ ou simplesmente $f'(a)$. Dizemos que f é duas vezes diferenciável em a se f é diferenciável em uma vizinhança U_a de $a \in \Omega$ e a derivada da função $f' : U_a \subset \Omega \rightarrow Y$ existe em a . Quando f é duas vezes diferenciável, escrevemos $f''(a)$. Analogamente conseguimos definir derivadas de ordem superior. Temos também um outro conceito de diferenciabilidade, que generaliza a derivada direcional.

Definição 3. *Sejam X, Y espaços de Banach, $\Omega \subset X$ aberto e $f : \Omega \rightarrow Y$. A derivada de Gateaux $df_y(x)$ de $x \in \Omega$ na direção $y \in X$ é dada por*

$$df_y(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x+ty)|_{t=0}$$

Se o limite existe para todo $y \in X$, dizemos que f é Gateaux diferenciável em x .

Se f é Fréchet diferenciável, então também é Gateaux diferenciável, e as derivadas de Fréchet e Gateaux coincidem. A inversa não é válida. De modo geral, podemos estender os resultados já conhecidos sobre funções diferenciáveis para funções que assumem valores em espaços de Banach.

Proposição 5. *Sejam X, Y espaços de Banach, $\Omega \subset X$ aberto e $f : \Omega \rightarrow Y$. Se f é Fréchet diferenciável em $a \in \Omega$, então f é contínua em a .*

Demonstração. Seja $a \in \Omega$ tal que $Df(a)$ existe. Como a derivada de Fréchet é uma transformação linear limitada, para qualquer $h \in X$

$$\|Df(a)h\| \leq \|Df(a)\| \|h\|.$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)h}{\|h\|} = 0,$$

para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|h\| < \delta$,

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} < 1$$

e assim,

$$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\| < \|h\|.$$

Dessa forma, se $\|h\| < \delta$

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\| &= \|f(a+h) - f(a) - Df(a)h + Df(a)h\| \\ &\leq \|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\| + \|Df(a)h\| \\ &\leq \|h\| + \|Df(a)\| \|h\| \\ &= (1 + \|Df(a)\|) \|h\| \end{aligned}$$

Assim, f é uma função localmente Lipschitz e portanto, é contínua em a . \square

Lema 2. *Se X é uma álgebra de Banach, $\Omega \subset X$ é um conjunto aberto e*

$$\begin{aligned} \psi : \Omega \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto G(x) + H(y) \end{aligned}$$

com $G : \Omega \rightarrow X$ e $H : X \rightarrow X$ funções diferenciáveis em a e b , respectivamente, então ψ é diferenciável e

$$D\psi(a, b)(g, h) = DG(a)g + DH(b)h.$$

Demonstração. Temos que $D\psi(a, b)$ é transformação linear, pois $DG(a)$ e $DH(b)$ são transformações lineares contínuas. Além disso, considerando $\|(g, h)\| = \max\{\|g\|, \|h\|\}$, temos que, quando $\|g\|, \|h\| \rightarrow 0$,

$$\frac{\|\psi(a+g, b+h) - \psi(a, b) - (DG(a)g + DH(b)h)\|}{\|(g, h)\|} \rightarrow 0.$$

\square

Agora, vamos discutir noções básicas sobre séries em álgebras de Banach. Considerando X um espaço de Banach e $\{a_n\}$ uma sequência em X , dizemos que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

converge se a sequência de somas parciais $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ converge em X . Isto é, se existe $p \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq n$

$$\left\| p - \sum_{i=1}^m a_i \right\| < \varepsilon.$$

Lema 3. *Seja X um espaço vetorial normado e $\{a_n\}$ uma sequência em X . Se a série $\sum a_n$ converge em X , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

O seguinte teorema nos fornece um critério para convergência de séries em um espaço de Banach.

Teorema 1. *Seja X um espaço de Banach e $\{a_n\}$ uma sequência em X . Se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty,$$

então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Demonstração. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [32]. □

Podemos ainda analisar a convergência do produto de duas séries de potências.

Teorema 2 (Mertens). *Seja X uma álgebra de Banach e a_n, b_n sequências de elementos de X tais que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty.$$

Se uma das séries é absolutamente convergente, então

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Demonstração. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [32]. □

Vamos agora definir funções analíticas de um corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), para uma álgebra de Banach X , de maneira análoga ao que acontece na Análise Complexa.

Definição 4. *Seja X uma álgebra de Banach e $\Omega \subset \mathbb{K}$ um conjunto aberto. Dizemos que $f : \Omega \rightarrow X$ é analítica em Ω se para todo $a \in \Omega$, existe $R_a > 0$ de modo que f admite uma expansão local em séries de potência para todo $x \in B(a, R_a)$. Isto é, podemos escrever*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k, \tag{1.3}$$

com os coeficientes $a_k \in X$.

Podemos nos perguntar quais são as condições que garantem a convergência de uma série de potências. O seguinte teorema responde esse questionamento.

Teorema 3. *Seja \mathbb{K} um corpo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), X uma álgebra de Banach, $\{a_k\}$ uma sequência em X , $a \in \mathbb{K}$ e*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k$$

a série de potências definida pela sequência $\{a_k\}$ centrada em a .

(a) *Se $\limsup \|a_k\|^{\frac{1}{k}} = 0$, então a série dada em (1.3) é absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{K}$. Além disso, a convergência é uniforme em conjuntos limitados.*

- (b) Se $0 < \limsup \|a_k\|^{\frac{1}{k}} < \infty$, então a série dada em (1.3) é absolutamente convergente se $|x - a| < (\limsup \|a_k\|^{\frac{1}{k}})^{-1}$ e diverge se $|x - a| > (\limsup \|a_k\|^{\frac{1}{k}})^{-1}$. Além disso, a convergência é uniforme em bolas abertas $B(a, r)$ com $r < (\limsup \|a_k\|^{\frac{1}{k}})^{-1}$.
- (c) Se $\limsup \|a_k\|^{\frac{1}{k}} = \infty$, a série de potências dada em (1.3) converge somente quando $x = a$.

Demonstração. Detalhes da demonstração podem ser encontrados em [14], capítulo 7. \square

O número $R = \frac{1}{\limsup \|a_k\|^{\frac{1}{k}}}$ é chamado de raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - a)^k$.

É importante notar que se f é uma função analítica e está representada na forma (1.3), então f é infinitamente diferenciável e sua n -ésima derivada é dada por

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-a)^{k-n}.$$

1.4 FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARITMO EM ÁLGEBRAS DE BANACH

Nesta seção vamos definir as funções exponencial e logaritmo em uma álgebra de Banach comutativa, conforme feito por Salas [36].

Definição 5. *Seja X uma álgebra de Banach comutativa com unidade e . A função exponencial $\text{Exp} : X \rightarrow X$ é dada por*

$$\text{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \quad (1.4)$$

Na proposição a seguir, \exp denota a função exponencial usual, definida no conjunto dos números reais.

Proposição 6. *A função exponencial $\text{Exp} : X \rightarrow X$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) *A série de potências dada em (1.4) é absolutamente convergente para todo $x \in X$ e uniformemente convergente em conjuntos limitados de X . Além disso,*

$$\|\text{Exp}(x)\| \leq \exp(\|x\|)$$

(b) $\text{Exp}(0) = e$;

(c) $\text{Exp}(x + y) = \text{Exp}(x) \text{Exp}(y)$;

(d) *Para todo $x \in X$, $\text{Exp}(x)$ é invertível, sendo $\text{Exp}(-x)$ seu inverso;*

(e) Exp é diferenciável para qualquer $x \in X$, com $D \text{Exp}(x) : X \rightarrow X$ dada por

$$D \text{Exp}(x)h = \text{Exp}(x)h.$$

Demonstração.

(a) Segue da desigualdade

$$\|\text{Exp}(x)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|x\|^k = \exp(\|x\|) < \infty$$

(b) Imediato.

(c)

$$\begin{aligned} \text{Exp}(x + y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x + y)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} k! \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) \\ &= \text{Exp}(x) \text{Exp}(y) \end{aligned}$$

(d) É claro que

$$\text{Exp}(x) \text{Exp}(-x) = \text{Exp}(x - x) = \text{Exp}(0) = e.$$

(e) A prova segue da definição de derivada de Fréchet. Mais detalhes podem ser encontrados em [36].

□

Se X é uma álgebra não comutativa, a propriedade (c) continua válida com a hipótese que $xy = yx$. Observe que não temos nenhuma garantia que a função exponencial definida em X seja injetora. De fato, se observarmos os casos em que $X = M_2(\mathbb{R})$ ou mesmo $X = \mathbb{C}$ (que é uma álgebra comutativa), a função Exp não é injetora.

De modo semelhante, podemos definir a função logaritmo em uma álgebra de Banach comutativa.

Definição 6. *Seja X uma álgebra de Banach comutativa com unidade e . A função logaritmo $\text{Log} : B(e, 1) \subset X \rightarrow X$ é definida na bola aberta de raio unitário centrada na identidade, pela seguinte série de potências*

$$\text{Log}(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e-x)^k}{k} = -(e+x) - \frac{(e-x)^2}{2} - \frac{(e-x)^3}{3} \dots \quad (1.5)$$

Na proposição a seguir, \log denota a função logaritmo usual, definida no conjunto dos números reais.

Proposição 7. *A função logaritmo $\text{Log} : B(e, 1) \subset X \rightarrow X$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) *Se $\|e-x\| < 1$, a série de potências dada em (1.5) é absolutamente convergente. Log é uniformemente convergente em conjuntos limitados da forma $B(e, r)$ com $r < 1$, e além disso,*

$$-\log(\|x\|) \leq \|\text{Log}(x)\| \leq -\log(1 - \|e-x\|) \leq \frac{\|e-x\|}{1 - \|e-x\|}.$$

- (b) $\text{Log}(e) = 0$;

- (c) *Se $\|e-x\| < 1$, $\|e-y\| < 1$ e $\|e-xy\| < 1$, então*

$$\text{Log}(xy) = \text{Log } x + \text{Log } y;$$

- (d) *Log é diferenciável para todo $x \in X$ tal que $\|e-x\| < 1$, sendo que $D\text{Log}(x) : X \rightarrow X$ é dada por*

$$D\text{Log}(x)h = x^{-1}h.$$

Demonstração. Considerando que $\|e-x\| < 1$, o item (a) é consequência da seguinte desigualdade.

$$\left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e-x)^k}{k} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{(e-x)^k}{k} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|e-x\|^k}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|e-x\|^k = \frac{\|e-x\|}{1 - \|e-x\|}$$

As demonstrações das demais propriedades podem ser encontradas em [36]. □

Se X é uma álgebra de Banach não comutativa, a propriedade (c) é válida com as seguintes hipóteses adicionais: $xy = yx$, $\|\text{Log } x + \text{Log } y\| < \log 2$ e $\|\text{Log } xy\| < \log 2$.

Assim como no caso real, o seguinte resultado nos garante que a função logaritmo é a inversa da função exponencial.

Proposição 8. *Seja X uma álgebra de Banach comutativa e Exp, Log as funções exponencial e logaritmo acima definidas. As seguintes propriedades são válidas.*

(a) Se $\|e - x\| < 1$, então

$$\text{Exp}(\text{Log}(x)) = x.$$

(b) Se $\|x\| < \log(2)$, então

$$\text{Log}(\text{Exp}(x)) = x.$$

Demonstração. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [30]. \square

Mesmo quando a álgebra de Banach X não é comutativa, a Proposição 8 continua válida [30].

2 EQUAÇÃO DO CALOR LOGARÍTMICA: CASO REAL

Neste capítulo vamos estudar a existência e estabilidade de soluções de equilíbrio da equação do calor logarítmica

$$u_t = \alpha u_{xx} + wu + k \log(u^2)u, \quad w \in \mathbb{R}, \quad k > 0. \quad (2.1)$$

Especificamente, vamos demonstrar a existência de uma classe de soluções de equilíbrio que decaem a zero no infinito e verificar a instabilidade linear dessas soluções. Vamos ainda demonstrar a instabilidade de qualquer solução de equilíbrio não trivial da equação (2.1).

Inicialmente, faremos uma discussão geral sobre um método clássico para analisar a estabilidade de soluções de equilíbrio de equações de reação-difusão na forma

$$u_t = \alpha u_{xx} + f(u), \quad (2.2)$$

sendo $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ um parâmetro real positivo e f uma função que assume valores reais. Observe que na equação (2.1),

$$f(u) = wu + k \log(u^2)u, \quad w \in \mathbb{R}, \quad k > 0.$$

2.1 ESTABILIDADE VIA LINEARIZAÇÃO

Primeiramente, vamos definir o que é uma solução de equilíbrio para uma equação de reação-difusão na forma (2.2).

Definição 7. *Uma solução de equilíbrio da equação (2.2) é uma função $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 que satisfaz a equação*

$$\alpha \phi''(x) + f(\phi(x)) = 0,$$

para todo $x \in I$.

Desejamos definir a estabilidade de uma solução de equilíbrio. Para isso, vamos considerar Y um espaço de Banach no qual o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} + f(u) \\ u(0) = u_0 \in Y \end{cases} \quad (2.3)$$

está bem posto, isto é, o problema tem solução, a solução é única e o comportamento da solução depende continuamente das condições iniciais.

Definição 8. Dizemos que uma solução de equilíbrio $\phi \in Y$ é estável se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se

$$\|u_0 - \phi\| < \delta,$$

então

$$\|u(t) - \phi\| < \varepsilon$$

para todo $t > 0$. Caso contrário, dizemos que a solução de equilíbrio é instável. Aqui, $u(t)$ denota a solução do problema de Cauchy (2.3) associada ao dado inicial $u(0) = u_0$.

Informalmente, uma solução de equilíbrio é dita estável se qualquer solução do problema de Cauchy gerada por dados iniciais que estão próximos da solução de equilíbrio se mantém próxima do equilíbrio para todo tempo $t > 0$.

De modo geral, não é simples verificar a estabilidade (ou instabilidade) de uma solução de equilíbrio ϕ usando a definição. Uma técnica clássica para analisar a estabilidade dessas soluções é o estudo das propriedades espectrais do operador linear

$$\mathcal{L}_{f,\phi} = \alpha \frac{d^2}{dx^2} + f'(\phi)$$

que aproxima as soluções da equação (2.2) em torno das soluções de equilíbrio ϕ (consulte os teoremas 5.1.1 e 5.1.3 em [20] para detalhes).

Se o espectro de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ está contido no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq b\}$ para algum $b < 0$, dizemos que a solução de equilíbrio é **linearmente estável**. Se o espectro de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ intercepta o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z)\}$, a solução de equilíbrio é **linearmente instável**. Em particular, se o operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$ admite um autovalor com parte real positiva, a solução de equilíbrio é instável.

Observação 1. Se λ é um autovalor do operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$ associado à autofunção v , a função

$$v(x, t) = \exp(\lambda t)v(x) \tag{2.4}$$

é uma solução da equação linear $v_t = \mathcal{L}_{f,\phi}v$. De fato,

$$\mathcal{L}_{f,\phi} \exp(\lambda t)v(x) = \exp(\lambda t) (\mathcal{L}_{f,\phi}v(x)) = \lambda \exp(\lambda t)v(x) = \frac{d}{dt} \exp(\lambda t)v(x).$$

Em particular, quando $\lambda > 0$, a solução da equação linear $v_t = \mathcal{L}_{f,\phi}v$ dada em (2.4) se afasta de zero à medida em que $t \rightarrow \infty$, o que implica na instabilidade da solução trivial $v = 0$.

Temos o seguinte resultado em relação ao espectro do operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$.

Lema 4. Seja ϕ uma solução de equilíbrio não constante da equação (2.2) e $\mathcal{L}_{f,\phi}$ o operador definido anteriormente. Então $\lambda = 0$ é um autovalor de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ com autofunção associada ϕ' .

Demonstração. Uma vez que ϕ é uma solução de equilíbrio da equação (2.2),

$$\alpha\phi'' + f(\phi) = 0,$$

e derivando a igualdade com respeito à x , temos

$$\frac{d}{dx}(\alpha\phi'' + f(\phi)) = \alpha\frac{d^2}{dx^2}\phi' + f'(\phi') = \mathcal{L}_{f,\phi}\phi' = 0.$$

□

O seguinte lema nos fornece condições suficientes sobre o termo de reação f para que uma solução de equilíbrio não trivial ϕ da equação (2.2) seja autofunção para o operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$.

Lema 5. *Se ϕ é uma solução de equilíbrio não trivial para a equação de reação-difusão*

$$u_t = \alpha u_{xx} + f(u),$$

e ϕ é uma autofunção do operador linear

$$\mathcal{L}_{f,\phi} = \alpha\frac{d^2}{dx^2} + f'(\phi),$$

associada ao autovalor λ , isto é, $\mathcal{L}_{f,\phi}\phi = \lambda\phi$, então

$$f(\phi) = \lambda\phi \log(\phi) + c\phi.$$

Demonstração. Como ϕ é uma solução de equilíbrio da equação (2.2),

$$\alpha\phi'' + f(\phi) = 0.$$

Além disso, como ϕ é autofunção de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ com autovalor associado λ ,

$$\alpha\frac{d^2}{dx^2}\phi + f'(\phi)\phi = \lambda\phi,$$

Assim, segue que f deve ser solução da seguinte equação diferencial

$$-f(\phi) + f'(\phi)\phi = \lambda\phi,$$

ou equivalentemente,

$$f'(\phi) - f(\phi)\phi^{-1} = \lambda.$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante

$$\exp\left(\int -\phi^{-1}d\phi\right) = \phi^{-1},$$

temos

$$\frac{d}{d\phi}[\phi^{-1}f(\phi)] = \lambda\phi^{-1}$$

de onde

$$\begin{aligned}\phi^{-1}f(\phi) &= \lambda \log(\phi) + c \\ f(\phi) &= \lambda\phi \log(\phi) + c\phi,\end{aligned}$$

com c constante. □

Concluimos essa seção relacionando o estudo da estabilidade de soluções de equilíbrio da equação de reação-difusão (2.2) com o estudo de máximos e mínimos de um funcional não linear.

Observação 2. *Assumindo que $f(u) = F'(u)$, podemos escrever a equação (2.2) na forma gradiente*

$$u_t = \alpha u_{xx} + f(u) = -\nabla E(t)$$

em que E é o seguinte funcional:

$$E[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \alpha (u')^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} F(u) dx.$$

Formalmente, soluções da equação (2.2) satisfazem

$$\frac{dE[u]}{dt} = - \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2(x, t) dx \leq 0.$$

Neste contexto, as soluções de equilíbrio da equação (2.2) são pontos críticos do funcional energia E . O operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$ é o Hessiano do funcional E no ponto de equilíbrio ϕ . Além disso, se o espectro de $\mathcal{L}_{f,\phi}$ está contido no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq b\}$ para algum $b < 0$, então a solução de equilíbrio é um mínimo local estrito do funcional E . Ou seja, informalmente, se ϕ é um ponto de mínimo local estrito de E , então ϕ é estável.

2.2 SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO

De acordo com a Definição 7, uma solução de equilíbrio para a equação logarítmica (2.1) é uma função $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 que satisfaz a equação

$$\alpha\phi''(x) + w\phi(x) + k \log(\phi^2(x)) \phi(x) = 0. \quad (2.5)$$

Multiplicando a equação (2.5) por ϕ' e integrando em relação à x , vemos que ϕ deve satisfazer

$$[\phi']^2 + (r - s)\phi^2 + s\phi^2 \log(\phi^2) = c \quad (2.6)$$

ou equivalentemente,

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{c + (s - r)\phi^2 - s\phi^2 \log(\phi^2)}} = x \quad (2.7)$$

onde $r = \frac{w}{\alpha}$, $s = \frac{k}{\alpha}$ e c é uma constante de integração.

Evaluar a integral em (2.7) para qualquer valor de c é uma tarefa difícil. Porém, se assumimos que ϕ e ϕ' decaem a zero no infinito, podemos concluir de (2.6) que a constante c deve ser igual a zero. Dessa forma, podemos calcular a integral e ainda, determinar ϕ explicitamente como função de x .

Lema 6. *Para cada $d \in \mathbb{R}$, a função*

$$\phi_d(x) = \exp\left(\frac{k-w}{2k}\right) \exp\left(-\frac{k(x+d)^2}{2\alpha}\right) \quad (2.8)$$

é uma solução de equilíbrio da equação (2.1) que decai a zero quando $x \rightarrow \infty$.

Demonstração. Para determinar ϕ_d , basta resolver a integral em (2.7). Fazendo a substituição

$$u = s - r - 2s \log(\phi), \quad du = -2s \frac{1}{\phi} d\phi,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{\sqrt{(s-r)\phi^2 - s\phi^2 \log(\phi^2)}} &= -\frac{1}{2s} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{1}{2s} 2\sqrt{u} + C \\ &= -\frac{1}{s} \sqrt{s-r-2s \log(\phi)} + C. \end{aligned}$$

Dessa maneira, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s} \sqrt{s-r-2s \log(\phi)} &= x+d, \\ \frac{1}{s^2} (s-r-2s \log(\phi)) &= (x+d)^2. \end{aligned}$$

Já que $r = \frac{w}{\alpha}$, $s = \frac{k}{\alpha}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{k-w}{\alpha} - \frac{2k}{\alpha} \log(\phi) &= \frac{k^2}{\alpha^2} (x+d)^2 \\ -\frac{2k}{\alpha} \log(\phi) &= \frac{k^2}{\alpha^2} (x+d)^2 - \frac{k-w}{\alpha} \\ \log(\phi) &= \frac{-k}{2\alpha} (x+d)^2 + \frac{k-w}{2k}. \end{aligned}$$

De onde

$$\phi_d(x) = \exp\left(\frac{-k(x+d)^2}{2\alpha}\right) \exp\left(\frac{k-w}{2k}\right).$$

□

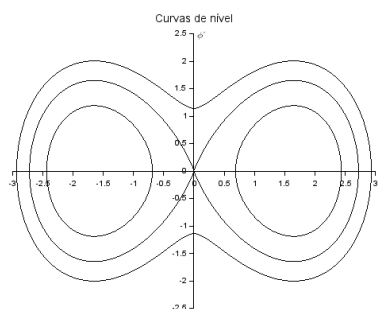
Embora não seja fácil obter fórmulas explícitas para as soluções de equilíbrio quando c é diferente de zero, podemos estudar o comportamento das soluções de equilíbrio

da equação do calor logarítmica (2.1) via análise das curvas de nível da função Hamiltoniana $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi(\phi, \phi') = [\phi']^2 + (r - s)\phi^2 + s\phi^2 \log(\phi^2).$$

A Figura 1 apresenta as curvas de nível de Ψ quando $\alpha = 1$, $k = 1$ e $w = -1$, para c maior que zero, c igual a zero e c menor que zero.

Figura 1 – Curvas de nível de Ψ .



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Analisando a figura, temos que

1. Para $c < 0$ fixado, as duas curvas interiores representam duas soluções periódicas, uma delas positiva e a outra negativa;
2. Para $c = 0$, temos uma curva que representa duas soluções não periódicas que decaem a zero no infinito, uma delas positiva e a outra negativa;
3. Para $c > 0$ fixado, a curva exterior representa uma solução periódica que assume valores positivos e negativos.

Observe que o Lema 6 descreve as soluções não periódicas que decaem a zero no infinito, mas não conseguimos uma expressão para as soluções periódicas descritas nos itens (1) e (3) acima.

Observação 3. A equação logarítmica (2.1) também admite soluções de equilíbrio constantes. De fato, assumindo que $\phi(x)$ é constante, temos que ϕ satisfaz

$$w\phi(x) + \log(\phi^2(x))\phi(x) = 0,$$

de onde

$$\phi(x) = \exp\left(\frac{-w}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \phi(x) = 0.$$

2.3 INSTABILIDADE DE UMA CLASSE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO

Conforme discutimos na seção 2.1, a estabilidade linear de soluções de equilíbrio de equações na forma (2.2) pode ser estudada a partir da análise espectral do operador linear $\mathcal{L}_{f,\phi}$. No caso da equação logarítmica (2.1), em que $f(u) = wu + k \log(u^2)u$, o operador $\mathcal{L}_{f,\phi}$ se transforma em

$$\mathcal{L}_\phi = \alpha \frac{d^2}{dx^2} + w + k \log(\phi^2) + 2k. \quad (2.9)$$

Observação 4. *Temos que as soluções da equação logarítmica (2.1) em torno do ponto de equilíbrio ϕ podem ser aproximadas pelas soluções da equação linear*

$$v_t = \mathcal{L}_\phi v,$$

quando v está perto de zero. De fato, substituindo $u(x, t) = \phi(x) + v(x, t)$ em (2.1), temos

$$v_t = \alpha \phi'' + \alpha v_{xx} + w(\phi + v) + k \log(\phi + v)^2 (\phi + v).$$

Dessa maneira, v satisfaz a equação diferencial parcial

$$v_t = \mathcal{L}v + 2G(v, \phi) = F(\phi) + F'(\phi)v + 2kG(v, \phi)$$

onde $F(u) = \alpha u_{xx} + wu + k \log(u^2)u$ e a função G é dada por

$$G(v, \phi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} \frac{v^k}{\phi^{k-1}} = \log\left(1 - \frac{v}{\phi}\right)(v + \phi) - v$$

se $\|v\| \leq \|\phi\|$.

Em relação ao espectro do operador \mathcal{L}_ϕ , temos o seguinte resultado.

Lema 7. *Se ϕ é uma solução de equilíbrio não trivial para a equação*

$$u_t = \alpha u_{xx} + wu + k \log(u^2)u,$$

e ϕ não é constante, então $\lambda = 2k$ e $\lambda = 0$ são autovalores do operador \mathcal{L}_ϕ , associados respectivamente às autofunções ϕ e ϕ' , respectivamente.

Demonstração. Uma vez que ϕ é uma solução de equilíbrio,

$$\alpha \phi'' + w\phi + k \log(\phi^2) \phi = 0.$$

Derivando a igualdade com respeito à x , temos

$$\frac{d}{dx} (\alpha \phi'' + w\phi + k \log(\phi^2) \phi) = \mathcal{L}_\phi \phi' = 0.$$

Além disso,

$$\mathcal{L}_\phi \phi = \alpha \frac{d^2}{dx^2} \phi + w\phi + k \log(\phi^2) \phi + 2k\phi = 2k\phi.$$

□

Como $k > 0$, concluímos pelo lema anterior que \mathcal{L}_ϕ possui um autovalor positivo e assim, qualquer solução de equilíbrio não trivial ϕ é linearmente instável.

A seguir, faremos o estudo detalhado do espectro do operador \mathcal{L}_ϕ associado à classe de equilíbrios ϕ_d definida em (2.8). Por uma questão de simplicidade, vamos considerar o caso $d = 0$. Desta forma, substituindo ϕ_d em (2.9), obtemos o operador linear

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \alpha \frac{d^2}{dx^2} + w + k \log \left(\exp \left(\frac{k-w}{2k} \right) \exp \left(-\frac{kx^2}{2\alpha} \right) \right)^2 + 2k \\ &= \alpha \frac{d^2}{dx^2} + w + k \left(\frac{k-w}{2k} + \left(-\frac{kx^2}{2\alpha} \right) \right) + 2k \\ &= \alpha \frac{d^2}{dx^2} + 3k - \frac{k^2}{\alpha} x^2.\end{aligned}$$

A respeito do espectro do operador \mathcal{L} , provamos o seguinte resultado.

Teorema 4. *O espectro do operador linear \mathcal{L} é dado pela sequência de autovalores $\lambda_n = -2(n-1)k$, $n \in \mathbb{N}$. Ou seja,*

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{2k, 0, -2k, -4k, \dots, -2(n-1)k, \dots\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Além disso, o autoespaço associado a cada um dos autovalores λ_n é gerado por uma única autofunção.

Para demonstrar o teorema, vamos definir o operador auxiliar

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + p^2 x^2, \quad \text{com } p = \frac{k}{\alpha}.$$

Observe que

$$\mathcal{L} = -\alpha H + 3k$$

e portanto,

$$\sigma(\mathcal{L}) = -\alpha \sigma(H) + 3k.$$

Como observado em [22], H é um operador essencialmente auto-adjunto¹ de $D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$. Dessa maneira, $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$. Agora, vamos determinar o espectro do operador H (e conseqüentemente, o espectro de \mathcal{L}) utilizando duas abordagens, uma delas algébrica, e a outra analítica.

2.3.1 Abordagem algébrica

Nesta seção vamos mostrar que para todo $n \geq 0$, $\lambda_n = (2n+1)p \in \sigma(H)$. Para isso, considere o operador identidade I e os operadores auxiliares

$$A = \frac{d}{dx} + px \quad \text{e} \quad A^* = -\frac{d}{dx} + px.$$

¹ Um operador simétrico T é dito essencialmente auto-adjunto se o fecho de T é auto-adjunto. Ou equivalentemente, se T admite uma única extensão auto-adjunta. Se um operador T é auto-adjunto, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Para uma maior discussão a respeito de propriedades de operadores lineares, consulte [24].

Lembremos que uma álgebra de Lie é um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} munido de um produto $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, chamado *bracket* de Lie, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Bilinearidade: para quaisquer $x, y, z \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$,
 $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ e $[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$.
2. Anti-simetria: dados $x, y \in V$, $[x, y] = -[y, x]$.
3. Identidade de Jacobi: para quaisquer $x, y, z \in V$, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Considerando o produto $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, a seguinte tabela representa uma álgebra de Lie.

$[\cdot, \cdot]$	I	A	A^*	H
I	0	0	0	0
A	0	0	2I	2pA
A^*	0	-2I	0	-2pA*
H	0	-2pA	2pA*	0

Por exemplo, o *bracket* de Lie dos operadores A e H é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
[A, H]g &= \left(\frac{d}{dx} + px \right) \circ \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p^2x^2 \right) g - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p^2x^2 \right) \circ \left(\frac{d}{dx} + px \right) g \\
&= \left(\frac{d}{dx} + px \right) (-g'' + p^2x^2g) - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p^2x^2 \right) (g' + pxg) \\
&= (-g''' + 2xp^2g + p^2x^2g' - pxg'' + p^3x^3g) - (-g''' - 2pg' - pxg'' + p^2x^2g' + p^3x^3g) \\
&= 2pg' + 2p^2xg \\
&= 2pAg.
\end{aligned}$$

Utilizando o fato do operador H ser um elemento da álgebra de Lie descrita acima, a seguinte proposição apresenta uma sequência de autovalores de H .

Proposição 9. *Considere o operador H definido anteriormente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = (2n + 1)p$ pertence ao espectro $\sigma(H)$ de H . Isto é, existe $v_n \neq 0$ tal que*

$$Hv_n = (2n + 1)pv_n.$$

Demonstração. Se λ é um autovalor do operador H com autofunção associada g , isto é, $Hg = \lambda g$, então $\lambda + 2p$ também é autovalor de H , com autofunção associada A^*g . De fato,

$$\begin{aligned}
HA^*g &= ([H, A^*] + A^*H)g \\
&= 2pA^*g + A^*(Hg) \\
&= 2pA^*g + A^*(\lambda g) \\
&= (\lambda + 2p)A^*g.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Note que $\lambda = p$ é autovalor de H com autofunção associada $g(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right)$, pois

$$H \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) = p \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right). \quad (2.11)$$

Assim, de (2.10) e (2.11), temos a seguinte sequência de autovalores no espectro de H :

$$\{\lambda_0 = p, \lambda_1 = 3p, \lambda_2 = 5p, \lambda_3 = 7p, \dots\}$$

e obtemos ainda a respectiva sequência de autofunções associadas

$$\{v_0 = g, v_1 = A^*g, v_2 = A^*A^*g, \dots\}.$$

Calculando explicitamente algumas autofunções,

$$\begin{aligned} v_1 &= 2px \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) \\ v_2 &= (4p^2x^2 - 2p) \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) \\ v_3 &= (8p^3x^3 - 12p^2x) \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) \end{aligned}$$

□

É importante notar que a abordagem algébrica utilizada nesta seção para determinar autovalores do operador H não nos fornece informações sobre a multiplicidade geométrica de cada autovalor, nem nos permite dizer se existem outros autovalores no espectro de H . Esse tipo de problema será abordado na seguinte seção.

2.3.2 Abordagem analítica

Nesta seção vamos calcular o espectro do operador H analisando as soluções em séries de potências da equação (2.12). Lembremos que um autovalor do operador H é um número complexo λ tal que existe uma solução não trivial y para a equação diferencial

$$-y'' + x^2y = \lambda y, \quad (2.12)$$

que satisfaz

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

Proposição 10. *As soluções da equação (2.12) satisfazem as seguintes propriedades:*

(a) *A solução geral de (2.12) pode ser escrita como*

$$y(x) = y_\lambda^0(x) + y_\lambda^1(x),$$

onde y_λ^0 , y_λ^1 são soluções analíticas de (2.12) dadas por

$$y_\lambda^0(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i}(\lambda)x^{2i} \quad e \quad y_\lambda^1(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1}(\lambda)x^{2i+1},$$

com os coeficientes

$$c_{2i}(\lambda) = \frac{(p-\lambda)(5p-\lambda)(9p-\lambda)\dots((4i-3)p-\lambda)}{(2i)!} c_0$$

$$c_{2i+1}(\lambda) = \frac{(3p-\lambda)(7p-\lambda)(11p-\lambda)\dots((4i-1)p-\lambda)}{(2i+1)!} c_1$$

para $i = 1, 2, \dots$

(b) Se $\lambda = (2n+1)p$ com $n = 0, 1, 2, \dots$, temos as soluções que decaem a zero no infinito

$$\begin{cases} y_\lambda^0(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) H_n(x), & \text{se } n \text{ é par} \\ y_\lambda^1(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) H_n(x), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (2.13)$$

em que H_n representa o polinômio de Hermite de grau n . Em particular,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y_\lambda^i(x) = 0 \quad \text{para } i = 0, 1.$$

(c) Se $\lambda \neq (4n-3)p$ com $n = 1, 2, \dots$, então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y_\lambda^0(x) = \infty.$$

Se $\lambda \neq (4n-1)p$ com $n = 1, 2, \dots$, então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_\lambda^1(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y_\lambda^1(x) = -\infty.$$

Demonstração.

(a) Já vimos que $\exp\left(-\frac{px^2}{2}\right)$ é autofunção para o autovalor $\lambda = p$. Se

$$y(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) h(x)$$

satisfaz (2.12), com $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analítica, h deve satisfazer

$$-h'' + 2pxh' = (\lambda - p)h. \quad (2.14)$$

Como h é analítica, admite expansão em séries de potência, de onde

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

Dos resultados já conhecidos a respeito de funções analíticas, temos

$$h'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} \quad \text{e} \quad h''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) c_i x^{i-2}.$$

Assim, substituindo em (2.14),

$$-\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) c_i x^{i-2} + 2px \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} = (\lambda - p) \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

portanto

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) c_{i+2} x^i + 2p \sum_{i=0}^{\infty} i c_i x^i = (\lambda - p) \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

e segue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(2i+1)p - \lambda] c_i - (i+1)(i+2) c_{i+2} x^i = 0,$$

de onde obtemos a seguinte relação de recorrência para os coeficientes c_i

$$c_{i+2} = \frac{(2i+1)p - \lambda}{(i+1)(i+2)} c_i.$$

Logo, conhecendo os termos iniciais c_0, c_1 , temos

$$c_{2i} = \frac{(p-\lambda)(5p-\lambda)(9p-\lambda) \dots ((4i-3)p-\lambda)}{(2i)!} c_0$$

$$c_{2i+1} = \frac{(3p-\lambda)(7p-\lambda)(11p-\lambda) \dots ((4i-1)p-\lambda)}{(2i+1)!} c_1$$

e portanto, sendo

$$y_{\lambda}^0(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} x^{2i} \quad \text{e} \quad y_{\lambda}^1(x) = \exp\left(-\frac{px^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1} x^{2i+1}.$$

temos que $y_{\lambda}^0, y_{\lambda}^1$ são soluções analíticas de (2.12), e a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = y_{\lambda}^0(x) + y_{\lambda}^1(x).$$

- (b) As expressões dadas em (2.13) seguem da recorrência para o coeficiente c_{i+2} e da definição das soluções $y_{\lambda}^0, y_{\lambda}^1$ para os autovalores $\lambda = (2n+1)p$. Basta notar que os coeficientes c_{2i}, c_{2i+1} se anulam quando $\lambda = (4i-3)p$ ou $\lambda = (4i-1)p$, respectivamente.
- (c) Tomando $c_0 \neq 0$, temos que $c_{2i} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots$. Assim, se $i \rightarrow \infty$, então

$$\frac{2i c_{2i+2}}{p c_{2i}} \rightarrow 2.$$

Logo, para $1 < \gamma < 2$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{c_{2i+2}}{c_{2i}} > \frac{\gamma p}{2i} > 0 \quad \text{para todo } i \geq s.$$

Escolhendo c_0 convenientemente, $c_{2i} > 0$ para todo $i \geq s$. Logo, segue que

$$\frac{c_{2s+2}}{c_{2s}} > \frac{\gamma p}{2s}, \quad \frac{c_{2s+4}}{c_{2s+2}} > \frac{\gamma p}{2s+2}, \quad \frac{c_{2s+6}}{c_{2s+4}} > \frac{\gamma p}{2s+4}, \quad \dots$$

Ou seja, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{c_{2s+2n}}{c_{2s+2(n-1)}} > \frac{\gamma p}{2s+2(n+1)}.$$

Multiplicando as desigualdades,

$$\frac{c_{2s+2}}{c_{2s}} \cdot \frac{c_{2s+4}}{c_{2s+2}} \cdot \frac{c_{2s+6}}{c_{2s+4}} \dots \frac{c_{2s+2n}}{c_{2s+2(n-1)}} > \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^n \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n-1}$$

De onde

$$\frac{c_{2s+2n}}{c_{2s}} > \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^n \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n-1} > \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^n \frac{1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n}$$

Multiplicando por x^{2s+2n} ,

$$\begin{aligned} \frac{c_{2s+2n}}{c_{2s}} x^{2s+2n} &> \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^n \frac{1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n} x^{2s+2n} \\ c_{2s+2n} x^{2s+2n} &> \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^n \frac{1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n} c_{2s} x^{2s+2n} \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_{2s+2n} x^{2s+2n} &> \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^n \frac{1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n} c_{2s} x^{2s+2n} \\ &= c_{2s} s! \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^n \frac{1}{(s+n)!} x^{2s+2n} \\ &= c_{2s} s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \sum_{j=s+1}^{\infty} \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^j \frac{1}{j!} x^{2j} \end{aligned}$$

Considerando a representação da função exponencial como série de potências,

$$\exp\left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right)^j$$

temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{2s+2n} x^{2s+2n} > c_{2s} s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \left[\exp\left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right) - \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right)^j \right]$$

e assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} x^{2i} - \sum_{i=0}^s c_{2i} x^{2i} &> c_{2s} s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \left[\exp\left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right) - \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right)^j \right] \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} x^{2i} &> c_{2s} s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \left[\exp\left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right) - \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma p x^2}{2}\right)^j \right] + \sum_{i=0}^s c_{2i} x^{2i} \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} x^{2i} \exp\left(\frac{-px^2}{2}\right) > c_{2s}s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \left[\exp\left(\frac{\gamma px^2}{2}\right) - \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma px^2}{2}\right)^j \right] \exp\left(\frac{-px^2}{2}\right) \\ + \sum_{i=0}^s c_{2i} x^{2i} \exp\left(\frac{-px^2}{2}\right)$$

Assim,

$$y_{\lambda}^0(x) > c_{2s}s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \exp\left(\frac{(\gamma-1)px^2}{2}\right) - c_{2s}s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma px^2}{2}\right)^j \exp\left(\frac{-px^2}{2}\right) \\ + \sum_{i=0}^s c_{2i} x^{2i} \exp\left(\frac{-px^2}{2}\right)$$

E portanto,

$$y_{\lambda}^0(x) > c_{2s}s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \exp\left(\frac{(\gamma-1)px^2}{2}\right) \\ + \left[\sum_{j=0}^s c_{2j} x^{2j} - c_{2s}s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^j x^{2j} \right] \exp\left(\frac{-px^2}{2}\right)$$

Tomando

$$M = c_{2s}s! \left(\frac{2}{\gamma p}\right)^s \quad \text{e} \quad B(j, s) = c_{2j} - M \frac{1}{j!} \left(\frac{\gamma p}{2}\right)^j$$

temos

$$y_{\lambda}^0(x) > M \exp\left(\frac{(\gamma-1)px^2}{2}\right) + \sum_{j=0}^s B(j, s) x^{2j} \exp\left(\frac{-px^2}{2}\right)$$

Como $\gamma > 1$, temos que $\gamma - 1 > 0$, e assim,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y_{\lambda}^0(x) = \infty.$$

□

Assim, a demonstração do Teorema 4 segue das Proposições 9 e 10.

2.4 INSTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO TRIVIAIS

Nesta seção vamos provar a instabilidade de qualquer solução de equilíbrio não trivial ϕ da equação do calor logarítmica. Para isso, observe que se ϕ é um equilíbrio não trivial de (2.1) e $u(x, t) = h(t)\phi(x)$ é solução da equação (2.1), h deve satisfazer a seguinte equação

$$h'(t) = 2kh(t) \log(h(t))$$

e portanto,

$$h(t) = \exp(s \exp(2kt)).$$

Dessa maneira, garantimos que, para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$u(x, t) = \exp(s \exp(2kt)) \phi(x) \quad (2.15)$$

é solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} + wu + k \log(u^2)u \\ u(x, 0) = \exp(s)\phi(x). \end{cases} \quad (2.16)$$

Teorema 5 (Instabilidade não linear). *Qualquer solução de equilíbrio não trivial ϕ da equação (2.1) é instável. Isto é, existe um $\epsilon > 0$, uma sequência de funções u_n e uma sequência de tempos $t_n > 0$ tais que*

$$u_n(0) \rightarrow \phi, \quad e \quad \|u_n(t_n) - \phi\| > \epsilon.$$

Demonstração. Considere a sequência de funções

$$u_n(t) = \exp\left(\frac{1}{n} \exp(2kt)\right) \phi.$$

Segue de (2.15) que as funções u_n são soluções do problema de Cauchy com dado inicial $u_n(0) = \exp\left(\frac{1}{n}\right) \phi$ e seja

$$t_n > \frac{1}{2k} \log\left(\frac{n}{\|\phi\|}\right)$$

uma sequência de tempos. Observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0) - \phi\| = 0.$$

Vejamus que para $s > 0$,

$$\|\exp(s \exp(2kt))\phi - \phi\| = |\exp(s \exp(2kt)) - 1| \|\phi\| > s \exp(2kt) \|\phi\|,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \|u_n(t_n) - \phi\| &= \left\| \exp\left(\frac{1}{n} \exp(2kt_n)\right) \phi - \phi \right\| \\ &= \left| \exp\left(\frac{1}{n} \exp(2kt_n)\right) - 1 \right| \|\phi\| \\ &> \frac{1}{n} \exp(2kt_n) \|\phi\| \\ &> 1. \end{aligned}$$

Assim, obtemos uma sequência de funções cujos dados iniciais se aproximam da solução de equilíbrio ϕ , mas cujas soluções geradas se afastam do equilíbrio ao longo do tempo, o que prova a instabilidade de qualquer solução de equilíbrio não trivial ϕ . \square

3 EQUAÇÃO DO CALOR LOGARÍTMICA: ÁLGEBRAS DE BANACH

Neste capítulo vamos estender os resultados obtidos para a equação do calor logarítmica estudada no Capítulo 2. Mais precisamente, vamos estudar a existência e estabilidade de soluções de equilíbrio da equação do calor logarítmica

$$u_t = u_{xx} + wu + \text{Log}(u^2)u, \quad (3.1)$$

em que a incógnita u é uma função definida de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ em X , sendo X uma álgebra de Banach comutativa com unidade $e \in X$, $w \in X$ denota um parâmetro fixado e Log é a função logaritmo definida na seção 1.4.

3.1 SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO

Inicialmente, vamos definir o conceito de solução de equilíbrio para a equação do calor logarítmica dada em (3.1).

Definição 9. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma solução de equilíbrio para a equação diferencial (3.1) é uma função $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ de classe C^2 tal que $\|e - \phi^2(x)\| < 1$ para todo $x \in I$, satisfazendo a equação*

$$\phi''(x) + w\phi(x) + \text{Log}(\phi^2(x))\phi(x) = 0 \in X. \quad (3.2)$$

Multiplicando a equação (3.2) por $\phi'(x)$ e integrando com respeito a variável $x \in \mathbb{R}$, vemos uma solução de equilíbrio ϕ deve satisfazer a equação

$$\frac{1}{2} \left[[\phi'(x)]^2 + (w - e)\phi^2(x) + \text{Log}(\phi^2(x))\phi^2(x) \right] = c, \quad (3.3)$$

onde $c \in X$ é uma constante de integração.

Infelizmente, não é possível encontrar soluções para a equação (3.3) usando métodos análogos aos utilizados no caso $X = \mathbb{R}$. Basicamente, a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{c + (e - w)\phi^2 - \phi^2 \text{Log}(\phi^2)}},$$

que aparece em (2.7), não está bem definida em uma álgebra de Banach qualquer.

Porém no teorema a seguir provaremos a existência de uma classe de equilíbrios análoga àquela obtida no Lema 6, para o caso $X = \mathbb{R}$.

Teorema 6 (Existência de equilíbrios). *Seja X uma álgebra de Banach comutativa com unidade $e \in X$, $w \in X$ tal que $\|e - w\| < \log(2)$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, a função $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por*

$$\phi_r(x) = \text{Exp} \left(\frac{e - w}{2} \right) \exp \left(\frac{-(x + r)^2}{2} \right) \quad (3.4)$$

é uma solução de equilíbrio da equação (3.1). Além disso, para cada $r \in \mathbb{R}$, ϕ_r satisfaz as seguintes propriedades:

(a) ϕ_r satisfaz a equação (3.3) quando $c = 0$.

(b) $\phi_r \in C_b(\mathbb{R}, X)$, isto é, ϕ_r é limitada e ainda,

$$\|\phi_r\|_\infty = \left\| \text{Exp} \left(\frac{e - w}{2} \right) \right\| < \exp \left(\frac{\|e - w\|}{2} \right) < \sqrt{2}.$$

(c) Para todo $w \in X$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \|\phi_r(x)\| = 0.$$

(d) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\|e - \phi_r(x)\| < 1$.

Demonstração. Por uma questão de simplicidade, vamos provar que

$$\phi_0(x) = \text{Exp} \left(\frac{e - w}{2} \right) \exp \left(\frac{-x^2}{2} \right)$$

é uma solução de equilíbrio para a equação (3.1). O caso geral ϕ_r é similar.

Precisamos verificar que $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R}, X)$, $\|e - \phi_0^2(x)\| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que ϕ_0 satisfaz a equação diferencial (3.2). Como ϕ_0 é uma função analítica, é imediato que $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R}, X)$.

Como $\|e - w\| < \log(2)$, temos que

$$\begin{aligned} \|e - \exp(-x^2)e\| &= |1 - \exp(-x^2)| \|e\| \leq 1 \\ \|e - \text{Exp}(e - w)\| &\leq \exp(\|e - w\|) - 1 < 1. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|e - \phi_0^2(x)\| &= \|e - \text{Exp}(e - w) \exp(-x^2)\| \\ &= \|e - \exp(-x^2)e + \exp(-x^2)e - \text{Exp}(e - w) \exp(-x^2)\| \\ &\leq |1 - \exp(-x^2)| \|e\| + |\exp(-x^2)| \|e - \text{Exp}(e - w)\| \\ &< 1 - \exp(-x^2) + \exp(-x^2) = 1. \end{aligned}$$

Assim, $\text{Log}(\phi_0^2(x))$ está bem definido e ainda, como $\text{Log}(\exp(-x^2)e) = \log(\exp(-x^2))e$

$$\begin{aligned} \text{Log}(\phi_0^2(x)) &= \text{Log}(\text{Exp}(e - w) \exp(-x^2)) \\ &= \text{Log}(\text{Exp}(e - w)) + \text{Log}(\exp(-x^2)e) \\ &= \text{Log}(\text{Exp}(e - w)) + \log(\exp(-x^2))e \\ &= e - w - x^2e. \end{aligned}$$

Dessa maneira, substituindo $\phi_0(x)$ em (3.1), temos

$$\phi_0(x)x^2 - \phi_0(x) + w\phi_0(x) + (e - w - x^2e)\phi_0(x) = 0.$$

Ou seja, ϕ_0 de fato é solução de equilíbrio.

Para provar as propriedades (a)-(d), vamos considerar apenas o caso ϕ_0 .

(a) Temos que

$$\phi_0'(x) = -\text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) x$$

Assim, substituindo ϕ_0 e ϕ_0' em (3.3), temos

$$x^2\phi_0^2(x) + (w-e)\phi_0^2(x) + (e-w-x^2e)\phi_0^2(x) = 0.$$

(b) Como $\|e-w\| < \log(2)$,

$$\|\phi_0\|_\infty = \sup_{|x| \leq 1} \|\phi_0(x)\| = \left\| \text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \right\| < \exp\left(\frac{\|e-w\|}{2}\right) < \sqrt{2}.$$

(c) É imediato que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \|\phi_0(x)\| &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\| \text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \right\| \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\| \text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \right\| \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

(d) Considerando que

$$\left\| e - \text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \right\| < \exp\left(\frac{\|e-w\|}{2}\right) - 1 < 1,$$

temos

$$\begin{aligned} \|e - \phi_0(x)\| &= \left\| e - \text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \right\| \\ &= \left\| e - \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) e + \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) e - \text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \right\| \\ &\leq \left(1 - \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right) \|e\| + \left\| e - \text{Exp}\left(\frac{e-w}{2}\right) \right\| \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \\ &< 1. \end{aligned}$$

□

É importante notar que a classe de equilíbrios ϕ_r apresentada no teorema anterior está definida apenas para valores de w na bola $B(e, \log(2))$, em contraste com o caso real, onde não temos nenhuma restrição sobre o parâmetro $w \in \mathbb{R}$.

Agora, calcularemos explicitamente a função ϕ_r para casos particulares de álgebras de Banach X .

Exemplo 5. Considerando $X = \ell^\infty$ a álgebra de Banach comutativa composta pelas seqüências reais limitadas, $e = (1, 1, 1, \dots)$ e $w = (w_1, w_2, w_3, \dots) \in \ell^\infty$ tal que $\|e - w\| < \log(2)$. A solução de equilíbrio dada em (3.4) toma a forma explícita

$$\phi_r(x) = \left(\exp\left(\frac{1 - w_1}{2}\right) \exp\left(\frac{-(x + r)^2}{2}\right), \exp\left(\frac{1 - w_2}{2}\right) \exp\left(\frac{-(x + r)^2}{2}\right), \dots \right).$$

Se X é uma álgebra de Banach não comutativa, $w \in X$ tal que $\|e - w\| < \log(2)$, ainda conseguimos verificar que

$$\phi_r(x) = \text{Exp}\left(\frac{e - w}{2}\right) \exp\left(\frac{-(x + r)^2}{2}\right)$$

é uma solução de equilíbrio definida em um intervalo na forma $(-r - s, -r + s)$, para algum número real positivo s .

Lema 8. Considere X uma álgebra de Banach não comutativa, $w \in X$. Seja $r \in \mathbb{R}$, $p > 0$ satisfazendo $\|e - w\| < p < \log(2)$ e $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x + r| < (\log(2) - p)^{\frac{1}{2}}$$

então a função $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por

$$\phi_r(x) = \text{Exp}\left(\frac{e - w}{2}\right) \exp\left(\frac{-(x + r)^2}{2}\right)$$

é uma solução de equilíbrio para a equação (3.1).

Demonstração. Para que ϕ_r seja uma solução de equilíbrio precisamos calcular $\text{Log}(\phi_r^2(x))$, e para isso dependemos das propriedades da função logaritmo. Como vimos no Capítulo 1, se X é uma álgebra de Banach não comutativa, a propriedade

$$\text{Log}(xy) = \text{Log } x + \text{Log } y$$

é válida com as hipóteses adicionais:

$$xy = yx, \quad \|\text{Log } x + \text{Log } y\| < \log(2) \quad \text{e} \quad \|\text{Log } xy\| < \log(2).$$

Considerando ϕ_r dada, temos que $\text{Exp}(e - w)$ e $\exp(-(x + r)^2)e$ comutam. Assim, para que possamos calcular $\text{Log}(\phi_r^2(x))$, basta verificar sob quais condições

$$\|\text{Log } \text{Exp}(e - w) + \text{Log } \exp(-(x + r)^2)e\| < \log(2).$$

Ou seja, queremos obter

$$\begin{aligned} \|\text{Log } \text{Exp}(e - w) + \text{Log } \exp(-(x + r)^2)e\| &\leq \left\| \text{Log}(\text{Exp}(e - w)) \right\| + \left\| \text{Log}(\exp(-(x + r)^2)e) \right\| \\ &= \|e - w\| + \left\| -(x + r)^2e \right\| \\ &< \log(2). \end{aligned}$$

Como $\|e - w\| < \log(2)$, tomando $p > 0$ tal que $\|e - w\| < p < \log(2)$, temos

$$\|\text{Log Exp}(e - w) + \text{Log exp}(-(x + r)^2)e\| \leq p + |-(x + r)^2|$$

Dessa maneira, basta tomar $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|-(x + r)^2| < \log(2) - p$$

$$|x + r| < (\log(2) - p)^{\frac{1}{2}}$$

□

Exemplo 6. Considere a álgebra de Banach não comutativa $X = M_2(\mathbb{R})$ e

$$W = \begin{bmatrix} 1 - 2w_1 & -2w_2 \\ 2w_2 & 1 - 2w_1 \end{bmatrix}$$

uma matriz tal que $\|I - W\| < \log 2$. Considerando a matriz

$$\frac{I - W}{2} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2 & w_1 \end{bmatrix}$$

Temos que

$$\text{Exp} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \text{Exp} \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix} \text{Exp} \begin{bmatrix} 0 & w_2 \\ -w_2 & 0 \end{bmatrix}$$

pois as matrizes

$$\begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & w_2 \\ -w_2 & 0 \end{bmatrix}$$

comutam. Como

$$\text{Exp} \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(w_1) & 0 \\ 0 & \exp(w_1) \end{bmatrix}$$

e

$$\text{Exp} \begin{bmatrix} 0 & w_2 \\ -w_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(w_2) & \text{sen}(w_2) \\ -\text{sen}(w_2) & \cos(w_2) \end{bmatrix}$$

a solução de equilíbrio dada em (3.4) toma a forma

$$\phi_r(x) = \exp(w_1) \begin{bmatrix} \cos(w_2) & \text{sen}(w_2) \\ -\text{sen}(w_2) & \cos(w_2) \end{bmatrix} \exp\left(\frac{-(x + r)^2}{2}\right).$$

Vale a pena notar que assim como no caso real, as soluções de equilíbrio da equação (3.1) estão relacionadas aos conjuntos de nível da função $\Psi : \Omega \times X \rightarrow X$, dada por

$$\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \left[v^2 + (w - e)u^2 + \text{Log}(u^2)u^2 \right],$$

onde $\Omega = \{u \in X; \|e - u^2\| < 1\}$. Mais precisamente,

$$\{(\phi(x), \phi'(x)); x \in I\} \subset \{(u, v) \in \Omega \times X; \Psi(u, v) = c\}.$$

Devido à generalidade do espaço X , não há sentido em uma análise gráfica para os conjuntos de nível da função Ψ . Assim, diferentemente do caso real, não conseguimos descrever o comportamento das soluções de equilíbrio através da análise dos conjuntos de nível de Ψ .

Além disso, observamos que a equação (3.2) pode ser escrita na forma Hamiltoniana. De fato, fazendo a mudança de variável $\phi' = v$, obtemos que o par $(\phi, \phi') \in \Omega \times X$ satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{cases} \phi' = v \\ v' = -w\phi - \text{Log}(\phi^2)\phi. \end{cases} \quad (3.5)$$

Uma vez que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = wu + u \text{Log}(u^2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial v} = v,$$

para o par (ϕ, ϕ') , temos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \phi'} = \phi' \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = w\phi + \phi \text{Log}(\phi^2).$$

Desse modo, obtemos

$$\begin{cases} \phi' = \frac{\partial \Psi}{\partial \phi'} \\ \phi'' = -\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}. \end{cases}$$

3.2 INSTABILIDADE DE UMA CLASSE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO

Nesta seção vamos verificar que, para cada $r \in \mathbb{R}$, a função ϕ_r dada em (3.4) é uma solução de equilíbrio linearmente instável para a equação (3.1). Para isso, faremos a análise espectral do operador linear \mathcal{L}_ϕ dado por

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{d^2}{dx^2} + w + \text{Log}(\phi^2) + 2e. \quad (3.6)$$

Observação 5. *O operador \mathcal{L}_ϕ é a aproximação linear do campo de vetores*

$$F(u) = u_{xx} + wu + \text{Log}(u^2)u$$

no ponto ϕ . Veja que

$$DF(\phi)g = \left. \frac{d}{ds} F(\phi + sg) \right|_{s=0} = \mathcal{L}_\phi g.$$

Assim como no caso particular $X = \mathbb{R}$, as soluções da equação (3.1) em torno do ponto de equilíbrio ϕ podem ser aproximadas pelas soluções da equação linear

$$v_t = \mathcal{L}_\phi v \quad (3.7)$$

quando v está perto de zero. De fato, substituindo $u(x, t) = \phi(x) + v(x, t)$ em (3.1), obtemos

$$v_t = \phi'' + v_{xx} + w(\phi + v) + \text{Log}(\phi + v)^2 (\phi + v).$$

Notemos que

$$\text{Log}(\phi + v) = \text{Log}(\phi) + \text{Log}(e + v\phi^{-1}),$$

de onde segue que

$$\text{Log}(\phi + v)^2 (\phi + v) = \text{Log}(\phi^2)(\phi + v) + 2\text{Log}(e + v\phi^{-1})(\phi + v).$$

Assim, v satisfaz a equação diferencial parcial

$$v_t = \mathcal{L}_\phi v + 2G(v, \phi) = F(\phi) + F'(\phi)v + 2G(v, \phi)$$

onde F é o campo de vetores definido acima e a função G é dada por

$$G(v, \phi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} v^k \phi^{-(k-1)} = \text{Log}(e - v\phi^{-1})(v + \phi) - v$$

se $\|v\| \leq \|\phi\|$.

Temos o seguinte resultado a respeito dos autovalores do operador \mathcal{L}_ϕ .

Lema 9. *Se ϕ é uma solução de equilíbrio não trivial para a equação*

$$u_t = u_{xx} + wu + \text{Log}(u^2)u,$$

e ϕ não é constante, então

$$\mathcal{L}_\phi \phi = 2\phi \quad e \quad \mathcal{L}_\phi \phi' = 0.$$

Isto é, $\lambda = 2$ e $\lambda = 0$ são autovalores do operador \mathcal{L}_ϕ associados, respectivamente, às autofunções ϕ e ϕ' .

Demonstração. A demonstração é análoga ao Lema 7. De fato, como ϕ é uma solução de equilíbrio, temos que

$$\phi'' + w\phi + \text{Log}(\phi^2)\phi = 0,$$

e derivando a igualdade acima com respeito à x , temos

$$\frac{d}{dx} (\phi'' + w\phi + \text{Log}(\phi^2)\phi) = \frac{d^2}{dx^2} \phi' + w\phi' + \text{Log}(\phi^2)\phi' + 2\phi' = \mathcal{L}_\phi \phi' = 0.$$

Além disso, vejamos que

$$\mathcal{L}_\phi \phi = \frac{d^2}{dx^2} \phi + w\phi + \text{Log}(\phi^2)\phi + 2\phi = 2\phi.$$

□

Do lema anterior, como \mathcal{L}_ϕ tem um autovalor positivo, qualquer solução de equilíbrio não trivial ϕ é linearmente instável.

Nosso objetivo é entender mais sobre o comportamento da instabilidade da solução ϕ_r dada em (3.4). Desse modo, prosseguimos com a análise espectral do operador linear \mathcal{L}_r , obtido quando substituímos ϕ_r em (3.6),

$$\mathcal{L}_r = \frac{d^2}{dx^2} + 3e - (x+r)^2 e \quad (3.8)$$

com o correspondente domínio

$$D(\mathcal{L}_r) = \{g \in C^2(\mathbb{R}, X); g'', x^2 g \in C_0(\mathbb{R}, X)\}.$$

Primeiramente, notemos que espectro do operador linear \mathcal{L}_r é igual ao espectro do operador linear \mathcal{L}_0 . Isto é,

$$\sigma(\mathcal{L}_r) = \sigma(\mathcal{L}_0).$$

Basta observar que os operadores são conjugados. Sendo T o grupo de isometrias a um parâmetro dado por

$$s \in \mathbb{R} \rightarrow T(s) = T_s : C_b(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X), \quad T_s(g) = g(x+s),$$

para toda $g \in D(\mathcal{L}_r)$, temos

$$T_{-r} \circ \mathcal{L}_r \circ T_r(g) = \mathcal{L}_0(g). \quad (3.9)$$

De (3.9), segue que

$$T_{-r} \circ (\mathcal{L}_r - \lambda I) \circ T_r(g) = (\mathcal{L}_0 - \lambda I)(g).$$

Dessa maneira, λ pertence ao resolvente de \mathcal{L}_r , se e somente se, λ pertence ao resolvente de \mathcal{L}_0 . Além disso, segue de (3.9) que se λ é um autovalor de \mathcal{L}_0 com autofunção associada g , então λ é um autovalor de \mathcal{L}_r com autofunção associada $T_r(g) = g(\cdot + r)$. Reciprocamente, se λ é um autovalor de \mathcal{L}_r com autofunção associada g , então λ é um autovalor de \mathcal{L}_0 com autofunção associada $T_{-r}(g) = g(\cdot - r)$. Isso implica que a multiplicidade geométrica de um autovalor do operador \mathcal{L}_0 é igual à multiplicidade geométrica do mesmo autovalor para o operador \mathcal{L}_r .

Da discussão feita acima, provaremos o seguinte resultado a respeito do espectro (pontual) do operador linear $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$.

Teorema 7 (Propriedades espectrais de \mathcal{L}). *O espectro pontual do operador linear $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}, X)$ é dado pela sequência de autovalores $\lambda_n = -2(n-1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ou seja,*

$$\{2, 0, -2, -4, \dots, -2(n-1), \dots\} = \sigma_p(\mathcal{L}) \subset \sigma(\mathcal{L}).$$

Além disso, o autoespaço associado a cada um dos autovalores λ_n é gerado por uma única autofunção. Isto é, se E_n denota o autoespaço associado a λ_n , então

$$E_n = \{cy_n \mid c \in X\},$$

com y_n uma função dada por

$$y_n(x) = H_n(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) e,$$

onde H_n representa o polinômio de Hermite de grau n .

Para estudar o espectro de \mathcal{L} , vamos definir o operador auxiliar

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2. \quad (3.10)$$

Temos que

$$\mathcal{L} = -H + 3e$$

e portanto,

$$\sigma(\mathcal{L}) = -\sigma(H) + \{3\}.$$

3.2.1 Abordagem algébrica

Vamos mostrar que para todo $n \geq 0$, $\lambda_n = 2n + 1$ pertence ao espectro pontual $\sigma_p(H)$ de H . Para isso, considere o operador identidade I e os operadores auxiliares

$$A = \frac{d}{dx} + x \quad \text{e} \quad A^* = -\frac{d}{dx} + x.$$

Considerando o *bracket* de Lie (produto) $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, a seguinte tabela define uma álgebra de Lie de dimensão 4.

$[\cdot, \cdot]$	I	A	A^*	H
I	0	0	0	0
A	0	0	2I	2A
A^*	0	-2I	0	-2 A^*
H	0	-2A	2 A^*	0

Por exemplo, veja que o *bracket* de Lie dos operadores A^* e H é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} [A^*, H]g &= \left(-\frac{d}{dx} + x\right) \circ \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)g - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) \circ \left(-\frac{d}{dx} + x\right)g \\ &= \left(-\frac{d}{dx} + x\right)(-g'' + x^2g) - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)(-g' + xg) \\ &= (g''' - 2xg' - x^2g'' - xg'' + x^3g) - (g''' - 2g' - xg'' - x^2g' + x^3g) \\ &= 2g' - 2xg \\ &= -2A^*g. \end{aligned}$$

Como H é um elemento da álgebra de Lie descrita acima, podemos demonstrar o seguinte resultado a respeito de autovalores do operador H .

Proposição 11. *Considere o operador H definido em (3.10). Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = 2n + 1$ pertence ao espectro pontual $\sigma_p(H)$ de H . Isto é, existe $v_n \neq 0$ tal que*

$$Hv_n = (2n + 1)v_n.$$

Além disso, as funções v_n podem ser calculadas explicitamente utilizando a fórmula

$$v_n = \left[(-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \right] \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) e.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos verificar que se λ é autovalor de H com autofunção associada v , então $\lambda + 2$ também é autovalor de H com autofunção associada A^*v . De fato, se $Hv = \lambda v$ temos

$$\begin{aligned} HA^*v &= ([H, A^*] + A^*H)v \\ &= 2A^*v + A^*(Hv) \\ &= 2A^*v + A^*(\lambda v) \\ &= (\lambda + 2)A^*v. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como

$$H\left(\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e\right) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e, \tag{3.12}$$

concluimos que $\lambda = 1$ é autovalor de H com autofunção associada

$$v(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e.$$

De (3.11) e (3.12), obtemos a seguinte sequência de autovalores de H :

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5, \dots$$

e a respectiva sequência de autofunções associadas

$$v_0 = v, v_1 = A^*v, v_2 = A^*A^*v, \dots$$

Calculando explicitamente algumas autofunções,

$$\begin{aligned} v_1 &= 2x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e \\ v_2 &= (4x^2 - 2) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e \\ v_3 &= (8x^3 - 12x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e \end{aligned}$$

De forma geral, as autofunções são dadas pela expressão

$$\begin{aligned} v_n &= \left[\frac{-d}{dx} + x \right]^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)e \\ v_n &= H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)e \\ v_n &= \left[(-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \right] \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e \end{aligned}$$

□

Na demonstração acima, os polinômios de Hermite $H_n(x)$ foram descritos pela fórmula de Rodrigues, que pode ser encontrada em [7].

3.2.2 Abordagem analítica

Nesta seção vamos determinar os autovalores do operador H analisando as soluções em série de potências da equação (3.13) abaixo. Um autovalor de H é um número complexo λ tal que existe uma solução não trivial $y \in C^2(\mathbb{R}, X)$ para a equação diferencial

$$-y''(x) + x^2y(x) = \lambda y(x) \quad (3.13)$$

com y satisfazendo

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|y(x)\| = 0.$$

Proposição 12. *As soluções da equação (3.13) satisfazem as seguintes propriedades:*

(a) *A solução geral da equação (3.13) pode ser escrita como*

$$y(x) = ay_\lambda^0(x) + by_\lambda^1(x), \quad (3.14)$$

onde a, b são elementos de X e as funções y_λ^0, y_λ^1 são soluções analíticas da equação (3.13), dadas por

$$y_\lambda^0(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i}(\lambda)x^{2i} \quad e \quad y_\lambda^1(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1}(\lambda)x^{2i+1},$$

com os coeficientes $c_0(\lambda) = c_1(\lambda) = e$, e para $i = 1, 2, 3, \dots$

$$c_{2i}(\lambda) = \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda)\dots((4i-3)-\lambda)}{(2i)!} e \quad (3.15)$$

$$c_{2i+1}(\lambda) = \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)(11-\lambda)\dots((4i-1)-\lambda)}{(2i+1)!} e. \quad (3.16)$$

(b) *Se $\lambda = 2n + 1$ com $n = 0, 1, 2, \dots$, temos as soluções que decaem a zero no infinito*

$$\begin{cases} y_\lambda^0(x) = H_n(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) e, & \text{se } n \text{ é par} \\ y_\lambda^1(x) = H_n(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) e, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.17)$$

em que H_n representa o polinômio de Hermite de grau n . Em particular,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|y_\lambda^i(x)\| = 0 \text{ para } i = 0, 1.$$

(c) *Se $\lambda \neq 4n - 3$ com $n = 1, 2, \dots$, então*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|y_\lambda^0(x)\| = \infty. \quad (3.18)$$

Se $\lambda \neq 4n - 1$ com $n = 1, 2, \dots$, então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|y_\lambda^1(x)\| = \infty. \quad (3.19)$$

Demonstração. Já vimos que $\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)e$ é autofunção associada ao autovalor $\lambda = 1$. Se

$$y(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)h(x)$$

satisfaz (3.13), com $h : \mathbb{R} \rightarrow X$ analítica, h deve satisfazer

$$-h''(x) + 2xh'(x) = (\lambda - 1)h(x).$$

Como h é analítica, admite expansão em séries de potência

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

onde os coeficientes c_i são elementos da álgebra de Banach X . Dos resultados já conhecidos a respeito de funções analíticas em álgebras de Banach,

$$h'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} \quad \text{e} \quad h''(x) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) c_i x^{i-2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) c_i x^{i-2} + 2x \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} &= (\lambda - 1) \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) c_{i+2} x^i + 2 \sum_{i=0}^{\infty} i c_i x^i &= (\lambda - 1) \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} [(2i+1-\lambda)c_i - (i+1)(i+2)c_{i+2}] x^i &= 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos a seguinte relação de recorrência para os coeficientes c_i

$$c_{i+2} = \frac{(2i+1) - \lambda}{(i+1)(i+2)} c_i.$$

Logo, conhecendo $c_0, c_1 \in X$, temos

$$\begin{aligned} c_{2i} &= \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda)\dots((4i-3)-\lambda)}{(2i)!} c_0 \\ c_{2i+1} &= \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)(11-\lambda)\dots((4i-1)-\lambda)}{(2i+1)!} c_1 \end{aligned}$$

Fazendo $c_0 = c_1 = e$, obtemos as fórmulas dadas em (3.15) e (3.16).

Assim, definindo

$$h_{\lambda}^0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i}(\lambda) x^{2i} \quad \text{e} \quad h_{\lambda}^1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1}(\lambda) x^{2i+1}, \quad (3.20)$$

temos que

$$y_\lambda^0(x) = h_\lambda^0(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad \text{e} \quad y_\lambda^1(x) = h_\lambda^1(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

são soluções analíticas da equação (3.13), de onde a expressão dada em (3.14) representa a solução geral problema de autovalores.

As expressões dadas em (3.17) seguem da relação de recorrência para o coeficiente c_{i+2} e da definição das soluções y_λ^0, y_λ^1 quando $\lambda = 2n + 1$. Basta perceber que os coeficientes c_{2i}, c_{2i+1} se anulam quando $\lambda = 4i - 3$ ou $\lambda = 4i - 1$, respectivamente.

Para provar (c), note que

$$y_\lambda^0(x) = g_\lambda^0(x)e \quad \text{e} \quad y_\lambda^1(x) = g_\lambda^1(x)e,$$

onde $g_\lambda^0, g_\lambda^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são as soluções dos respectivos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} -y''(x) + x^2y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -y''(x) + x^2y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Assim, as relações (3.18) e (3.19) são consequência imediata das propriedades das soluções g_λ^0 e g_λ^1 demonstradas no Teorema 10, Capítulo 2. De fato, se $\lambda \neq 4n - 3$ e g_λ^0 é solução de

$$\begin{cases} -y''(x) + x^2y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases}$$

temos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g_\lambda^0(x) = \infty,$$

e então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|y_\lambda^0(x)\| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \|g_\lambda^0(x)e\| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |g_\lambda^0(x)| \|e\| = \infty.$$

Análogo para y_λ^1 . □

Sabendo que $\sigma(\mathcal{L}) = -\sigma(H) + \{3\}$, os resultados obtidos nas Proposições 11 e 12 demonstram o Teorema 7.

3.3 INSTABILIDADE DE SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO NÃO TRIVIAIS

Nesta seção vamos provar a instabilidade de qualquer solução de equilíbrio não trivial ϕ da equação (3.1). Podemos verificar que para todo $s \leq 0$

$$u(x, t) = \exp(s \exp(2t))\phi(x) \tag{3.21}$$

é solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + wu + \text{Log}(u^2)u \\ u(x, 0) = \exp(s)\phi(x). \end{cases} \tag{3.22}$$

De fato, $u(x, 0) = \exp(s)\phi(x)$. Além disso, considerando $s \leq 0$, temos que $0 < \exp(s \exp(2t)) \leq 1$, e dessa forma

$$\begin{aligned} \|e - u^2(x, t)\| &= \|e - \exp^2(s \exp(2t))\phi^2(x)\| \\ &\leq \|e - \exp(2s \exp(2t))e\| + \|\exp(2s \exp(2t))e - \exp(2s \exp(2t))\phi^2(x)\| \\ &\leq |1 - \exp(2s \exp(2t))|\|e\| + \|e - \phi^2(x)\|\exp(2s \exp(2t)) \end{aligned}$$

Sabemos que $\|e\| = 1$ e $\|e - \phi^2(x)\| < 1$, portanto

$$\|e - u^2(x, t)\| < 1.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \text{Log}(u^2(x, t)) &= \text{Log}(\exp^2(s \exp(2t))\phi^2(x)) \\ &= \text{Log}(\exp(2s \exp(2t))e) + \text{Log}(\phi^2(x)) \\ &= \log(\exp(2s \exp(2t))) + \text{Log}(\phi^2(x)) \\ &= 2s \exp(2t) + \text{Log}(\phi^2(x)) \end{aligned}$$

Dessa forma, observamos que a função dada em (3.21) de fato é solução para o problema de Cauchy, pois

$$\begin{aligned} u_{xx} + wu + \text{Log}(u^2)u &= \exp(s \exp(2t))(\phi''(x) + w\phi(x) + 2s \exp(2t)\phi(x) + \text{Log}(\phi^2(x))\phi(x)) \\ &= 2s \exp(2t) \exp(s \exp(2t))\phi(x) \\ &= u_t \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de demonstrar a instabilidade do equilíbrio ϕ .

Teorema 8 (Instabilidade não linear). *Qualquer solução de equilíbrio não trivial ϕ da equação (3.1) é instável. Mais exatamente, existe $\epsilon > 0$, uma sequência de funções g_n e uma sequência de tempos $t_n > 0$ tais que*

$$g_n \rightarrow \phi, \quad e \quad \|u_n(\cdot, t_n) - \phi(\cdot)\| > \epsilon.$$

Aqui, u_n denota uma sequência de soluções da equação do calor logarítmica tal que $u_n(\cdot, 0) = g_n(\cdot)$.

Demonstração. Sabendo que ϕ é uma solução de equilíbrio não trivial de (3.1), temos que $\|\phi\| \neq 0$ e existe $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \|\phi\|$. Considere a sequência de funções

$$u_n(t) = \exp\left(\frac{-1}{n} \exp(2t)\right) \phi$$

tal que $u_n(t)$ é solução do problema de Cauchy dado em (3.22), com dado inicial $u_n(0) = \exp(\frac{-1}{n})\phi$, e a sequência de tempos

$$t_n > \frac{1}{2} \log\left(-n \log\left(\frac{\|\phi\| - \epsilon}{\|\phi\|}\right)\right).$$

Temos que

$$\exp(2t_n) > -n \log \left(\frac{\|\phi\| - \varepsilon}{\|\phi\|} \right),$$

e como $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{-1}{n} \exp(2t_n) < \log \left(\frac{\|\phi\| - \varepsilon}{\|\phi\|} \right)$$

de modo que

$$\exp \left(\frac{-1}{n} \exp(2t_n) \right) < \frac{\|\phi\| - \varepsilon}{\|\phi\|}$$

e assim,

$$1 - \exp \left(\frac{-1}{n} \exp(2t_n) \right) > \frac{\varepsilon}{\|\phi\|}.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \|u_n(t_n) - \phi\| &= \left\| \exp \left(\frac{-1}{n} \exp(2t_n) \right) \phi - \phi \right\| \\ &= \left| 1 - \exp \left(\frac{-1}{n} \exp(2t_n) \right) \right| \|\phi\| \\ &> \frac{\varepsilon}{\|\phi\|} \|\phi\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0) - \phi\| = 0$$

mas

$$\|u_n(t_n) - \phi\| > \varepsilon,$$

o que prova que uma solução arbitrária não trivial ϕ da equação (3.1) é instável. \square

É importante notar que quando s é positivo, a função dada em (3.21) não é solução para o problema de Cauchy (3.22) para todo $t > 0$, pois para valores de t suficientemente grandes, a dita função não pertence ao domínio de Log.

3.4 INSTABILIDADE NÃO LINEAR IMPLICA INSTABILIDADE LINEAR

Nesta seção vamos mostrar que a família de soluções da equação do calor logarítmica descrita em (3.21), que garante a instabilidade do equilíbrio ϕ , também "gera" a solução que garante a instabilidade da solução trivial da equação linear (3.7). Isto é, as soluções

$$u(x, t) = \exp(s \exp(2t))\phi(x)$$

utilizadas na seção 3.3 para demonstrarmos a instabilidade de ϕ geram a solução

$$v(x, t) = \exp(2t)\phi(x), \tag{3.23}$$

que garante a instabilidade da solução trivial $v \equiv 0$ da equação linear

$$v'(t) = \mathcal{L}_\phi v(t). \quad (3.24)$$

Com efeito, uma vez que ϕ é uma solução de equilíbrio da equação logarítmica, a função

$$u(s, t) = \exp(s \exp(2t))\phi(x)$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = F(u(t)),$$

onde F é o campo dado por $F(u) = u_{xx} + wu + \text{Log}(u^2)u$.

Desta maneira, para todo $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{du(s, t)}{dt} = F(u(s, t)),$$

de onde segue que

$$\frac{d}{ds} \frac{du(s, t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{du(s, t)}{ds} = \frac{d}{ds} F(u(s, t)) = DF(u(s, t)) \frac{d}{ds} u(s, t).$$

Como

$$\frac{d}{dt} \frac{du(s, t)}{ds} = DF(u(s, t)) \frac{d}{ds} u(s, t)$$

e $u(0, t) = \phi$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tomando $s = 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{ds} u(s, t) \Big|_{s=0} \right) = DF(\phi) \left(\frac{d}{ds} u(s, t) \Big|_{s=0} \right). \quad (3.25)$$

Sabendo que

$$DF(\phi) = \mathcal{L}_\phi \quad (3.26)$$

e que

$$\frac{d}{ds} u(s, t) \Big|_{s=0} = \exp(s \exp(2t)) \exp(2t) \phi(x) \Big|_{s=0} = \exp(2t) \phi(x), \quad (3.27)$$

substituímos (3.26) e (3.27) em (3.25) e concluímos que a função $v(x, t) = \exp(2t)\phi(x)$ é solução da equação linear (3.24). Perceba que a solução dada em (3.23) se afasta de zero à medida em que $t \rightarrow \infty$, o que implica na instabilidade da solução trivial $v \equiv 0$.

Da discussão anterior, obtemos o seguinte resultado:

Lema 10. *Seja M uma variedade, $\phi \in M$, $V_\phi \subset M$ uma vizinhança de ϕ e F um campo definido em V_ϕ . Seja $s \in \mathbb{R} \rightarrow \eta(s, \cdot)$ uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{du}{dt} = F(u(t)) \quad (3.28)$$

em um intervalo aberto I , tal que $\eta(0, t) = \phi$ para todo $t \in I$. Então a função b dada por

$$b(t) = \frac{\partial}{\partial s} \eta(s, t) \Big|_{s=0},$$

é solução da equação diferencial linear

$$\frac{dv}{dt} = DF(\phi)(v(t)), \quad (3.29)$$

para todo $t \in I$.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Aldurayhim e V. N. Biktashev. “Exact propagating wave solutions in reaction cross-diffusion system”. Em: *Chaos, Solitons & Fractals: X* 5 (2020), p. 100049. ISSN: 2590-0544. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.csfx.2020.100049>.
- [2] M. Alfaro e R. Carles. “Superexponential growth or decay in the heat equation with a logarithmic nonlinearity”. Em: *Dynamics of Partial Differential Equations* 14.4 (2017), pp. 343–358.
- [3] G.R. Allan e H.G. Dales. *Introduction to Banach Spaces and Algebras*. Introduction to Banach Spaces and Algebras. Oxford University Press, 2011. ISBN: 9780199206537.
- [4] S.M Allen e J.W Cahn. “Ground state structures in ordered binary alloys with second neighbor interactions”. Em: *Acta Metallurgica* 20.3 (1972), pp. 423–433. ISSN: 0001-6160. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(72\)90037-5](https://doi.org/10.1016/0001-6160(72)90037-5).
- [5] G. Almkvist. “Stability of linear differential equations in Banach algebras”. Em: *Mathematica Scandinavica* 14.1 (1964), pp. 39–44.
- [6] E.R. Aragão-Costa et al. “Topological structural stability of partial differential equations on projected spaces”. Em: *Journal of Dynamics and Differential Equations* 30 (2018), pp. 687–718.
- [7] G. B. Arfken, H. J. Weber e F. E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Academic Press, 2013.
- [8] I. Bialynicki-Birula e J. Mycielski. “Nonlinear wave mechanics”. Em: *Annals of Physics* 100.1 (1976), pp. 62–93. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(76\)90057-9](https://doi.org/10.1016/0003-4916(76)90057-9).
- [9] I. Bialynicki-Birula e J. Mycielski. “Wave equations with logarithmic nonlinearities”. Em: *Bulletin de l’Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences, Mathematiques, Astronomiques et Physiques* 23.4 (1975), pp. 461–466.
- [10] R. Carles e I. Gallagher. “Universal dynamics for the defocusing logarithmic Schrödinger equation”. Em: *Duke Mathematical Journal* 167.9 (2018), pp. 1761–1801. DOI: [10.1215/00127094-2018-0006](https://doi.org/10.1215/00127094-2018-0006).
- [11] J. Carr e R. L. Pego. “Metastable patterns in solutions of $u_t = \epsilon^2 u_{xx} f(u)$ ”. Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 42 (1989), pp. 523–576.
- [12] T. Cazenave e A. Haraux. “Équations d’évolution avec non linéarité logarithmique”. Em: *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*. Vol. 2. 1. 1980, pp. 21–51.

- [13] H. Chen, P. Luo e G. Liu. “Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 422.1 (2015), pp. 84–98. ISSN: 0022-247X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.030>.
- [14] J. B. Conway. *A course in functional analysis*. Vol. 96. Springer, 1990.
- [15] R. A. Fisher. “The wave of advance of advantageous genes”. Em: *Annals of eugenics* 7.4 (1937), pp. 355–369.
- [16] V. A. Galaktionov e J-L. Vázquez. “The problem Of blow-up in nonlinear parabolic equations”. Em: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 8.2 (2002), pp. 399–433. ISSN: 1078-0947. DOI: [10.3934/dcds.2002.8.399](https://doi.org/10.3934/dcds.2002.8.399).
- [17] G. F. Germano. “Uma Introdução a Álgebras de Banach e C*-Álgebras”. Diss. de maestr. Universidade Federal da Paraíba, 2014.
- [18] B. H. Gilding e R. Kersner. *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*. Vol. 60. Springer Science & Business Media, 2004.
- [19] M. S. Hashemi e M. Mirzazadeh. “Exact solutions of nonlinear stochastic Newell-Whitehead-Segel equation by a reduction technique”. Em: *The European Physical Journal Plus* 138.11 (2023), pp. 1–8.
- [20] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 9783540385288.
- [21] C. A. M. Hernández. “Existence and stability of equilibrium solutions of a nonlinear heat equation”. Em: *Applied Mathematics and Computation* 232 (2014), pp. 1025–1036. ISSN: 0096-3003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.01.140>.
- [22] C. A. M. Hernández e L. F. Demetrio. “Stability of Equilibrium Solutions of a Nonlinear Reaction-Diffusion Equation”. Em: *Boletín de matemáticas* 27.1 (2020), pp. 1–14.
- [23] C. A. M. Hernández e E. Y. L. Mayorga. “Stability of equilibrium solutions of a double power reaction-diffusion equation with a Dirac interaction”. Em: *Mathematische Nachrichten* 293.4 (2020), pp. 721–734. DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.201700447>.
- [24] P. D. Hislop e I. M. Sigal. *Introduction to spectral theory: With applications to Schrödinger operators*. Vol. 113. Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] S. Hussain et al. “An approximate analytical solution of the Allen-Cahn equation using homotopy perturbation method and homotopy analysis method”. Em: *Heliyon* 5.12 (2019), e03060. ISSN: 2405-8440. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e03060>.

- [26] E. Kaniuth. *A Course in Commutative Banach Algebras*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2008. ISBN: 9780387724768.
- [27] T. Kapitula e K. Promislow. *Spectral and dynamical stability of nonlinear waves*. Vol. 457. Springer, 2013.
- [28] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Vol. 132. Springer, 1980.
- [29] A. Kolmogoroff, I. Petrovsky e N. Piscounoff. “Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem”. Em: *Moscow University Bulletin of Mathematics* 1 (1937), pp. 1–26.
- [30] S.H. Kulkarni e B.V. Limaye. *Real Function Algebras*. CRC Press, 2019. ISBN: 9781000148848.
- [31] Y. Liu, Z. Yu e J. Xia. “Exponential stability of traveling waves for non-monotone delayed reaction-diffusion equations”. Em: *Electronic Journal of Differential Equations* (2016).
- [32] R. E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*. Vol. 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [33] J. C. Meyer e D. J. Needham. *The Cauchy Problem for Non-Lipschitz Semi-Linear Parabolic Partial Differential Equations*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2015. DOI: 10.1017/CB09781316151037.
- [34] J. Nagumo, S. Arimoto e S. Yoshizawa. “An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon”. Em: *Proceedings of the IRE* 50.10 (1962), pp. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
- [35] C. E. Rickart. *General Theory of Banach Algebras*. Krieger, 1974. ISBN: 9780882750910.
- [36] A. H. Salas. “The exponential and logarithmic functions on commutative Banach algebras”. Em: *Int. J. Math. Anal* 4.42 (2010), pp. 2079–2088.
- [37] Ya B. Zeldovich e D.A Frank-Kamenetskii. “On the theory of uniform flame propagation”. Em: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Vol. 19. 9. 1938, pp. 693–697.