

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

CAMILA ARAÚJO VARELA

TEORIA INVARIANTE DE GRUPOS DE LORENTZ EM ESPAÇOS DE
MINKOWSKI

Maringá-PR

2024

¹O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**TEORIA INVARIANTE DE GRUPOS DE LORENTZ EM ESPAÇOS DE
MINKOWSKI**

CAMILA ARAÚJO VARELA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli.

Maringá-PR

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

V293t	<p>Varela, Camila Araújo</p> <p>Teoria invariante de grupos de Lorentz em espaços de Minkowski / Camila Araújo Varela. - Maringá, 2024. 113 f. : il.</p> <p>Orientadora: Prof.^a Dr.^a Patrícia Hernandes Baptistelli.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2024.</p> <p>1. Grupos de Lorentz. 2. Espaços de Minkowski. 3. Teoria de invariantes. 4. Involuções. I. Baptistelli, Patrícia Hernandes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.</p> <p>CDD 22.ed. 512.55</p>
-------	---

Edilson Damasio CRB9-1.123

CAMILA ARAÚJO VARELA

TEORIA INVARIANTE DE GRUPOS DE LORENTZ EM ESPAÇOS DE MINKOWSKI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profª. Dra. Patricia Hernandes Baptistelli - UEM (Presidente)

Prof. Dr. Marco Antônio do Couto Fernandes - UFV

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - UEM

Aprovada em: 12 de abril de 2024.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (<https://meet.google.com/rph-pycg-oxc>)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre colocar pessoas maravilhosas na minha vida e por me dar forças durante a caminhada.

Agradeço aos meus amigos do mestrado que compartilharam comigo desafios e conquistas nessa jornada dentre os quais cito especialmente Cintya, Eduardo, Henrique, João, Júlio, Laura, Layanne, Maria Eduarda, Maria, Miguel, Nathan e Pedro. Suas contribuições foram fundamentais para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

À minha amada família, em especial à minha mãe, Maria Irlete, meu pai, Sérgio, e meu irmão, Uriel, e meus amados amigos do colégio Amanda, Renato, Taianny e Thatiana, expresso minha profunda gratidão por sempre estarem presentes em minha vida apesar da distância física. O amor, incentivo e compreensão de vocês foram pilares essenciais durante todo esse percurso.

Ao meu namorado, Marcos, à minha amiga, Nathalia, agradeço pela paciência, compreensão e encorajamento constante. O convívio com vocês foi um suporte valioso nos momentos desafiadores e nos momentos de celebração.

À minha orientadora, Patrícia Hernandes Baptistelli, agradeço por sua orientação dedicada, correções rigorosas, conversas amigas e pelo constante estímulo ao meu crescimento acadêmico e como ser humano. Sua mentoria e amizade foram cruciais para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento é limitado, enquanto a imaginação abraça o mundo, estimulando o progresso, dando à luz à evolução.”

Albert Einstein.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é analisar a estrutura algébrica da ação dos subgrupos de Lorentz $\Gamma \subset O(n, 1)$ nos espaços de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} , com $n \geq 1$, explorando a teoria invariante neste contexto. Para isso, faremos um estudo sistemático das funções Γ -invariantes, das aplicações Γ -equivariantes e dos subespaços Γ -invariantes de \mathbb{R}_1^{n+1} , adaptando alguns resultados válidos para grupos de Lie lineares no contexto euclidiano aos subgrupos de Lorentz no contexto de Minkowski. Apresentaremos também um algoritmo simbólico capaz de determinar geradores para o anel das funções polinomiais invariantes sob uma classe de subgrupos de Lorentz Γ contendo involuções. Por fim, faremos um breve estudo da estrutura geométrica dos espaços de Minkowski, classificando seus subespaços e analisando suas propriedades de invariância segundo a ação de Γ .

Palavras chave: grupo de Lorentz, espaço de Minkowski, teoria invariante, involuções.

ABSTRACT

The main objective of this work is to analyze the algebraic structure of the action of Lorentz subgroups $\Gamma \subset O(n, 1)$ on Minkowski spaces \mathbb{R}_1^{n+1} , with $n \geq 1$, exploring the invariant theory in this context. We will study Γ -invariant functions, Γ -equivariant maps and Γ -invariant subspaces of \mathbb{R}_1^{n+1} , adapting some valid results for linear Lie groups in the euclidean context to Lorentz subgroups in the context of Minkowski spaces. We will also present a symbolic algorithm to determine generators for the ring of invariant polynomial functions under a class of Lorentz subgroups Γ containing involutions. Finally, we will conduct a brief study of the geometric structure of Minkowski spaces, classifying their subspaces and analyzing their invariance properties under the action of Γ .

Keywords: Lorentz group, Minkowski space, invariant theory, involutions.

SUMÁRIO

Introdução	10
1 Preliminares	15
1.1 Grupos de Lie lineares	16
1.2 Ações e representações	20
1.3 Integração invariante	24
1.4 Teoria invariante	27
1.4.1 Subespaços invariantes	27
1.4.2 Funções invariantes	29
1.4.3 Aplicações equivariantes	31
1.5 Subespaços de pontos fixos	34
1.6 Operadores de Reynolds	37
2 A estrutura algébrica dos grupos de Lorentz	47
2.1 Os espaços de Minkowski	48
2.2 Decomposições matriciais em $O(n, 1)$	51
2.3 As componentes conexas de $O(n, 1)$	62
2.4 $O(n, 1)$ como um produto semidireto	68
2.5 Invariantes e equivariantes em \mathbb{R}_1^{n+1}	74

3	Subespaços invariantes de Minkowski	91
3.1	Vetores no espaço de Minkowski	91
3.2	Subespaços de \mathbb{R}_1^{n+1}	94
3.3	Retas invariantes em \mathbb{R}_1^2	105

INTRODUÇÃO

O espaço-tempo 4-dimensional \mathbb{R}_1^4 é a estrutura matemática mais simples de um espaço-tempo relativístico no qual a teoria da relatividade restrita de Albert Einstein (1879-1955), também conhecida como teoria da relatividade especial, é formulada. Tal teoria aborda a relação entre espaço e tempo e baseia-se em dois postulados: a inexistência de um referencial inercial absoluto e a invariabilidade da velocidade da luz no vácuo¹. Podemos dizer que o espaço-tempo \mathbb{R}_1^4 é uma extensão do espaço euclidiano tridimensional com a inclusão da dimensão temporal. Mais especificamente, cada evento no universo é descrito por quatro coordenadas, sendo três coordenadas espaciais $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e uma quarta coordenada temporal $t \in \mathbb{R}$. As coordenadas espaço-temporais $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}_1^4$ de diferentes observadores são relacionadas pelas chamadas transformações de Lorentz. Dessa forma, qualquer sistema de leis físicas no espaço \mathbb{R}_1^4 deve ser Lorentz-invariante, ou seja, deve permanecer inalterado sob tais transformações. Para maiores detalhes a respeito do espaço-tempo \mathbb{R}_1^4 e das transformações de Lorentz, veja [7, 33].

A teoria da relatividade pode ser generalizada para espaços com mais dimensões espaciais, a fim de abordar questões específicas em física teórica ou matemática. O espaço de Minkowski $(n + 1)$ -dimensional, denotado por \mathbb{R}_1^{n+1} , generaliza o conceito do espaço-tempo \mathbb{R}_1^4 , ou seja, é uma extensão do espaço euclidiano \mathbb{R}^n com a inclusão de

¹O primeiro postulado afirma que as leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial, enquanto o segundo afirma que a velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais, independentemente do movimento da fonte de luz e do observador.

uma coordenada temporal, onde n representa o número de coordenadas espaciais. Enquanto o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} tem uma métrica que utiliza o produto interno canônico, o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} tem uma métrica distinta, conhecida como métrica de Lorentz, que incorpora um sinal negativo da coordenada temporal. Mais precisamente, \mathbb{R}_1^{n+1} é um espaço vetorial real dotado do pseudo produto interno

$$\langle x, y \rangle_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}, \quad (1)$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. O sinal negativo na definição do pseudo produto interno está relacionado ao fato de que, na teoria da relatividade restrita, eventos no espaço-tempo \mathbb{R}_1^4 podem ter intervalos temporais e espaciais com diferentes sinais, dependendo da orientação das coordenadas.

Um tema de particular interesse na teoria da relatividade é o estudo da geometria das subvariedades em espaços de Minkowski. Diversos autores têm abordado o assunto utilizando ferramentas da teoria de singularidades e da geometria diferencial, dentre os quais citamos [5, 6, 17, 18, 19, 20, 21, 30, 34, 35]. Paralelamente a esta abordagem, podemos estudar os espaços de Minkowski do ponto de vista algébrico. Os grupos de Lorentz $O(n, 1)$, com $n \geq 1$, descrevem conjuntos de transformações² lineares invertíveis que preservam o pseudo produto interno dado em (1). Em outras palavras, se $A \in O(n, 1)$, então

$$\langle Ax, Ay \rangle_1 = \langle x, y \rangle_1$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Portanto, cada grupo de Lorentz pode ser visto como um grupo de simetrias do espaço \mathbb{R}_1^{n+1} .

No contexto euclidiano, é bastante comum a busca por simetrias em um modelo matemático. No estudo de sistemas dinâmicos, por exemplo, a ocorrência de simetrias muitas vezes implica no aparecimento de autovalores com alta multiplicidade, o que não seria esperado em um contexto sem simetrias. Do ponto de vista algébrico e computacional, importantes contribuições foram dadas nesta temática, como as que vimos

²No contexto da teoria da relatividade restrita, essas transformações são fundamentais para entender como os eventos se relacionam entre diferentes referenciais inerciais.

em [1, 2, 10, 11, 12]. Uma vez que o conjunto formado pelas simetrias tem estrutura de grupo, os resultados são apresentados com base na teoria invariante de grupos. Grande parte dos trabalhos considera a ação de grupos compactos, os quais podem ser vistos como subgrupos do grupo ortogonal $O(n)$, com $n \geq 2$.

Em uma direção relacionada, porém distinta, os autores de [22] também utilizam ferramentas da teoria invariante de grupos para discutir diversos aspectos das simetrias nos espaços de Minkowski. Alguns resultados de [12] são naturalmente adaptados para os subgrupos Γ do grupo Lorentz $O(n, 1)$, sendo eles compactos ou não. No entanto, as estruturas do pseudo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e de Γ levam a novas ocorrências. Por exemplo, nem todo subespaço Γ -invariante $V \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ admite seu subespaço ortogonal V^\perp (com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$) como um complementar Γ -invariante, o que é sempre válido no contexto euclidiano (Proposição 1.18). Contudo, isto é verdade para os subespaços não degenerados (Proposição 3.10). Além disso, existe uma condição sobre os elementos de $\Gamma \subset O(n, 1)$ para que V admita um subespaço complementar Γ -invariante distinto de V^\perp (Proposição 3.15).

O presente trabalho tem [22] e [26] como as principais referências e está fundamentado, principalmente, na teoria invariante de grupos. Em todo o texto, assumimos que a ação de $\Gamma \subset O(n, 1)$ em um subespaço de Minkowski $V \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ é dada pelo produto da matriz $A \in \Gamma$ pelo vetor $v \in V$. A seguir, descrevemos a estruturação de cada capítulo.

No Capítulo 1, apresentaremos as noções básicas da teoria invariante de grupos de Lie (lineares) agindo em espaços vetoriais reais de dimensão finita $n \geq 1$. Dentre os resultados apresentados, destacamos a Proposição 1.16, que permitirá identificar um grupo de Lie compacto Γ como um subgrupo do grupo ortogonal $O(n)$. Neste caso, dado um subespaço vetorial Γ -invariante W , a Proposição 1.18 nos apresenta o subespaço ortogonal W^\perp (com relação a um produto interno Γ -invariante) como seu complementar Γ -invariante. Ainda para grupos compactos, os Teoremas 1.24 e 1.28 asseguram a existência de um conjunto finito de geradores para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ das funções polinomiais Γ -invariantes e para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ das aplicações polinomiais Γ -equivariantes, respectivamente. No caso em que Γ admite um subgrupo normal Γ_+ de índice 2, introduziremos os operadores de Reynolds, na Seção 1.6, para construir um conjunto finito

de geradores Γ -invariantes a partir de geradores Γ_+ -invariantes (Teorema 1.39).

No Capítulo 2, dissertaremos sobre a estrutura algébrica dos grupos de Lorentz $O(n, 1)$, com $n \geq 1$, e a teoria invariante nos espaços de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} , munido do pseudo produto interno dado em (1). Inicialmente, apresentaremos a decomposição polar e em valores singulares das matrizes $A \in O(n, 1)$ e mostraremos que $O(n, 1)$ admite exatamente quatro componentes conexas. Estudaremos as funções Γ -invariantes e as aplicações Γ -equivariantes definidas em \mathbb{R}_1^{n+1} sob a ação de um subgrupo de Lorentz $\Gamma \subset O(n, 1)$. Alguns resultados, como a Proposição 2.19 e o Teorema 2.21, são adaptações ao contexto de Minkowski de resultados já conhecidos no contexto euclidiano. Nesta mesma direção, o Algoritmo 2.26 faz uso do Teorema 1.39 para estabelecer um método algébrico na construção de geradores para o anel das funções polinomiais Γ -invariantes no caso em que Γ contém um número finito de involuções. Em particular, o Teorema 2.21 e o Algoritmo 2.26 serão aplicados no Exemplo 2.27 para calcular geradores invariantes e equivariantes sob a ação de um subgrupo de $O(3, 1)$ gerado por duas involuções.

No Capítulo 3, faremos um breve estudo da estrutura geométrica dos subespaços de Minkowski $V \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$, classificando-os em três tipos: espaço, tempo e luz (Definição 3.4). Tal classificação é invariante pela ação de $O(n, 1)$ (Lema 3.5), uma vez que $\langle \gamma v, \gamma v \rangle_1 = \langle v, v \rangle_1$ para todo $\gamma \in O(n, 1)$ e $v \in V$. Um dos principais resultados deste capítulo é a Proposição 3.10, que nos assegura que $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}_1^{n+1}$ se, e somente se, V é não degenerado. Em conjunto com a Proposição 3.7, obtemos a versão de Minkowski da Proposição 1.18. No caso geral, se V for Γ -invariante (degenerado ou não), a Proposição 3.15 garantirá que V admite um subespaço complementar Γ -invariante, desde que Γ seja um subgrupo fechado por transposições.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, vamos estabelecer uma base teórica para o que será abordado nos próximos capítulos, fundamentada na teoria invariante de grupos de Lie lineares. Tal teoria se refere ao estudo de grupos de matrizes e de como certos objetos matemáticos se transformam sob a ação desses grupos. Neste contexto, algumas estruturas permanecem invariantes, o que é fundamental na análise e na descrição de sistemas físicos e matemáticos.

Esse capítulo é dividido como segue: na Seção 1.1, introduziremos o conceito de grupo de Lie linear e apresentaremos alguns exemplos. A Seção 1.2 tratará das ações e representações desses grupos em um espaço vetorial de dimensão finita, noções fundamentais para a construção da teoria invariante abordada em todo o trabalho. Na Seção 1.3, estudaremos brevemente a integral de Haar, uma forma de integração invariante por translação de elementos do grupo, que nos permitirá identificar grupos de Lie lineares compactos com subgrupos do grupo ortogonal (Proposição 1.16). A teoria invariante de grupos será descrita nas Subseções 1.4.1, 1.4.2 e 1.4.3, nas quais apresentaremos os conceitos de subespaços invariantes, funções invariantes e aplicações equivariantes sob a ação de um grupo de Lie linear, respectivamente. Destacamos o Teorema de Hilbert-Weyl (Teorema 1.24) e o Teorema 1.28, que sob certas condições garantem a existência de um conjunto finito de geradores para o anel dos invariantes

e para o módulo dos equivariantes. Os subespaços de pontos fixos abordados na Seção 1.5 referem-se a subespaços vetoriais que permanecem inalterados sob a ação de um grupo de Lie linear, sendo úteis no estudo das propriedades dos subespaços de Minkowski que apresentaremos no Capítulo 3. Finalizaremos com a Seção 1.6, na qual introduziremos os operadores de Reynolds como uma ferramenta para o Algoritmo 2.26 apresentado no Capítulo 2, o qual determina uma base de Hilbert para o anel dos invariantes segundo a ação de um grupo que contenha involuções.

Mencionamos [2, 12] como as principais referências para esse capítulo e para maiores detalhes veja também [3, 8, 14, 25]. Para o que segue, assumiremos familiaridade com conceitos elementares de topologia e da teoria de grupos.

1.1 Grupos de Lie lineares

Um **grupo de Lie** G é uma variedade diferenciável que admite uma estrutura de grupo em que as operações de multiplicação e de inversão são diferenciáveis, ou seja, as operações $\mu : G \times G \rightarrow G$ e $\iota : G \rightarrow G$ definidas por $\mu(a, b) = ab$ e $\iota(a) = a^{-1}$ são ambas de classe C^∞ . Neste trabalho, vamos considerar apenas os chamados grupos de Lie lineares cuja definição é menos geral. Para isso, denotaremos por $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o grupo das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais e por $GL_n(\mathbb{R})$ o subgrupo de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ das matrizes invertíveis.

Definição 1.1. *Um grupo de Lie linear é um subgrupo fechado Γ de $GL_n(\mathbb{R})$, com $n \in \mathbb{R}$.*

Em outras palavras, Γ é um subconjunto fechado de $GL_n(\mathbb{R})$ com estrutura de grupo. Para tratarmos de subconjuntos fechados de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, estamos considerando a topologia induzida pelo homeomorfismo $\phi : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ que leva as linhas de uma matriz $A = (a_{ij})$ em um vetor $b = (b_1, \dots, b_{n^2})$, ou seja, $\phi(a_{11}) = b_1$, $\phi(a_{12}) = b_2$ e assim por diante. Logo, um conjunto U de matrizes é um aberto em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\phi(U)$ é um aberto em \mathbb{R}^{n^2} e utilizaremos em $GL_n(\mathbb{R})$ a topologia do subespaço induzida por $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Vejamos agora alguns exemplos de grupos de Lie lineares.

Exemplo 1.2. O grupo ortogonal n -dimensional $O_n(\mathbb{R})$ consiste em todas as matrizes

quadradas A de ordem n que satisfazem

$$AA^T = I_n,$$

onde A^T é a transposta de A e I_n é a matriz identidade n -dimensional. Afirmamos que $O_n(\mathbb{R})$ é um grupo de Lie linear. De fato, observe primeiramente que $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, pois se $A \in O_n(\mathbb{R})$, então $\det(A) = \pm 1$. Ainda, $O_n(\mathbb{R})$ é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$ munido com a operação de multiplicação de matrizes, visto que $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ e

$$AB^{-1}(AB^{-1})^T = AB^{-1}(B^{-1})^T A^T = AB^{-1}(B^T)^T A^T = AI_n A^T = AA^T = I_n,$$

para todo $A, B \in O_n(\mathbb{R})$. Temos também que $O_n(\mathbb{R})$ é fechado em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, pois a aplicação $f : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ definida por

$$f(A) = AA^T$$

é contínua e $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$, onde $\{I_n\}$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Assim, $O_n(\mathbb{R})$ é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$, já que $O_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Portanto, $O_n(\mathbb{R})$ é um subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{R})$, o que consiste em um grupo de Lie linear.

As matrizes em $O_n(\mathbb{R})$ são chamadas de matrizes ortogonais. É sabido que em um espaço vetorial de dimensão finita todo inverso à esquerda é também um inverso à direita e vice-versa. Logo, dada uma matriz $A \in O_n(\mathbb{R})$, também temos que $A^T A = I_n$.

Exemplo 1.3. O grupo das matrizes especiais ortogonais $SO_n(\mathbb{R})$, que consiste em todas as matrizes $A \in O_n(\mathbb{R})$ cujo determinante é 1, é um grupo de Lie linear. De fato, $SO_n(\mathbb{R})$ é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$, pois $I_n \in SO_n(\mathbb{R})$ e

$$\det(AB^{-1}) = \det(A) \det(B^{-1}) = \det(A)(\det(B))^{-1} = 1,$$

para todo $A, B \in SO_n(\mathbb{R})$. Além disso, considerando a função contínua $f : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(A) = \det(A)$, temos que $SO_n(\mathbb{R}) = H \cap O_n(\mathbb{R})$, onde

$$H = \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}); \det(B) = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

é um subconjunto fechado de $M_n(\mathbb{R})$. Ainda, H e $O_n(\mathbb{R})$ são subconjuntos fechados de $GL_n(\mathbb{R})$. Dessa forma, $SO_n(\mathbb{R})$ é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$, pois é a interseção de dois fechados. Portanto, $SO_n(\mathbb{R})$ é um subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{R})$, ou seja, é um grupo de Lie linear.

Observação 1.4. O conjunto $SO_n(\mathbb{R})$ é chamado de grupo de rotação n -dimensional. Em particular, $SO_2(\mathbb{R})$ consiste das rotações planares

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$. De fato, como $R_\theta R_\theta^T = I_2$ e $\det(R_\theta) = 1$, concluímos que $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Agora, dada $A \in SO_2(\mathbb{R})$, escrevemos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Como $AA^T = I_2$, temos que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ e $\det(A) = ad - bc = 1$. Dessa forma, existem $\phi, \varphi \in [0, 2\pi)$ tais que $a = \cos\phi$, $b = \operatorname{sen}\phi$, $c = \operatorname{sen}\varphi$ e $d = \cos\varphi$. Reescrevendo as equações temos

$$0 = ac + bd = \cos\phi \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\phi \cos\varphi = \operatorname{sen}(\phi + \varphi)$$

e

$$1 = ad - bc = \cos\phi \cos\varphi - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\varphi = \cos(\phi + \varphi).$$

Assim, $\phi + \varphi = 0$ ou $\phi + \varphi = 2\pi$. Em ambos os casos, substituindo em (1.1), obtemos

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & \operatorname{sen}(-\varphi) \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = R_\varphi,$$

com $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dessa forma, concluímos que $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta; \theta \in [0, 2\pi)\}$.

Assim, identificamos $SO_2(\mathbb{R})$ com o círculo unitário $S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}; \theta \in [0, 2\pi)\}$, por meio das identificações $R_\theta \leftrightarrow \theta \leftrightarrow e^{i\theta}$. De maneira análoga, podemos mostrar que o

grupo $O_2(\mathbb{R})$ é gerado por $SO_2(\mathbb{R})$ e pela matriz de reflexão

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

já que se $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$, então existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $A = \kappa R_\theta$. Em outras palavras, $O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \dot{\cup} \kappa SO_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.5. Para todo $n \geq 2$, o **grupo cíclico** \mathbb{Z}_n de ordem n é um grupo de Lie linear. De fato, vamos identificar \mathbb{Z}_n com o grupo $\langle R_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$ gerado pela matriz de rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$ por meio do homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \langle R_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$ definido por $\phi(\bar{1}) = R_{\frac{2\pi}{n}}$. Como $\langle R_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$ é finito, ele é fechado em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e, portanto, fechado em $GL_2(\mathbb{R})$. Via a identificação ϕ , concluimos que \mathbb{Z}_n é um grupo de Lie linear.

Exemplo 1.6. De uma maneira mais geral, é possível mostrar que qualquer grupo finito $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ é isomorfo a um grupo de Lie linear. De fato, pelo teorema de Cayley (veja [9]), G é isomorfo a um subgrupo finito H do grupo S_G das permutações dos elementos de G . Por sua vez, H é isomorfo ao subgrupo $\mu(H)$ de $GL_n(\mathbb{R})$ via o isomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \mu : H &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ \sigma &\longmapsto P^\sigma = (p_{ij}^\sigma), \end{aligned}$$

onde

$$(p_{ij}^\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_i = \sigma(a_j) \\ 0, & \text{se } a_i \neq \sigma(a_j) \end{cases}$$

é a matriz da permutação σ . Como $\mu(H)$ é um subconjunto finito de $GL_n(\mathbb{R})$, temos que $\mu(H)$ é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$. Portanto, G é isomorfo ao grupo de Lie linear $\mu(H)$.

Exemplo 1.7. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é isomorfo ao grupo de matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{R}),$$

o qual é fechado em $GL_{n+1}(\mathbb{R})$. Portanto, \mathbb{R}^n é um grupo de Lie linear.

Definição 1.8. Dizemos que um grupo de Lie Γ é **compacto** se ele for compacto como um subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} .

Segue dessa definição que Γ é compacto se for um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^{n^2} , o que ocorre se, e somente se, as entradas das matrizes de Γ são limitadas. Logo, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ e todos os grupos finitos são compactos, mas \mathbb{R}^n e $GL_n(\mathbb{R})$ não são.

1.2 Ações e representações

Vamos agora investigar como um grupo de Lie linear Γ atua sobre um dado espaço vetorial V de dimensão finita. Para isso, vamos explorar os conceitos de ação e representação, que são importantes ferramentas no estudo das propriedades invariantes de subespaços vetoriais de V e de aplicações definidas em V . A representação de Γ é uma forma de identificar os elementos do grupo com operadores lineares. Veremos que toda ação de um grupo de Lie linear em V está associada a uma representação.

No que segue, consideramos Γ um grupo de Lie linear e V um espaço vetorial real de dimensão finita.

Definição 1.9. Uma **ação** de Γ em V é uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} \varrho : \Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longmapsto \gamma v \end{aligned}$$

tal que:

- a) Se e_Γ for o elemento neutro de Γ , então $e_\Gamma v = v$ para todo $v \in V$;
- b) Para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ dada por $\rho_\gamma(v) = \gamma v$ é linear;
- c) Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, então $\gamma_1(\gamma_2 v) = (\gamma_1 \gamma_2)v$ para todo $v \in V$.

Quando existir uma ação de Γ em V , diremos que Γ age linearmente em V .

Definição 1.10. *Seja $GL(V)$ o grupo das transformações lineares invertíveis de V em V . Uma representação de Γ em V é um homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\longrightarrow GL(V) \\ \gamma &\longmapsto \rho_\gamma : V \longrightarrow V \\ &v \longmapsto \gamma v \end{aligned}$$

induzido pela ação da Definição 1.9.

Ações lineares e representações são essencialmente conceitos idênticos, uma vez que $\varrho(\gamma, \cdot) = \rho(\gamma)$ para cada $\gamma \in \Gamma$. A diferença é que uma ação nos diz como um elemento $\gamma \in \Gamma$ transforma um dado elemento $v \in V$, ao passo que uma representação nos diz como $\gamma \in \Gamma$ transforma todo o espaço V .

Observação 1.11. Pela condição *c*) da Definição 1.9, podemos definir uma ação de Γ em V apenas nos geradores de Γ .

Exemplo 1.12. Como todo grupo de Lie linear é um grupo de matrizes em $GL_n(\mathbb{R})$, para algum $n \geq 1$, existe uma ação natural de Γ em $V = \mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação de matriz pelas coordenadas de um vetor, ou seja,

$$\begin{aligned} \varrho : \Gamma \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, v) &\longmapsto Av \end{aligned}$$

define uma ação de Γ em V . De fato, a multiplicação de matriz pelas coordenadas de um vetor é uma operação contínua devido à sua natureza linear. Logo, ϱ é contínua. Também,

- a) $I_n v = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, onde I_n é a matriz identidade;
- b) A aplicação $\rho_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\rho_A(v) = Av$ é uma transformação linear;
- c) Se $A, B \in \Gamma$, então pela associatividade da multiplicação de matriz pelas coordenadas de um vetor temos que $A(Bv) = (AB)v$, para todo $v \in V$.

Exemplo 1.13. Para $k \in \mathbb{Z}$, a aplicação

$$\begin{aligned} \varrho : S^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longmapsto \theta z = e^{ik\theta} z \end{aligned} \quad (1.3)$$

define uma ação de S^1 em $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ via a identificação de S^1 com $[0, 2\pi)$. Primeiramente, a continuidade de ϱ segue da multiplicação das funções contínuas $f(\theta, z) = e^{ik\theta}$ e $g(\theta, z) = z$. Ainda:

- a) $0z = e^0 z = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
 b) Defina $\rho_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\rho_\theta(z) = e^{ik\theta} z$. Então

$$\rho_\theta(z_1 + \alpha z_2) = e^{ik\theta}(z_1 + \alpha z_2) = e^{ik\theta} z_1 + \alpha e^{ik\theta} z_2 = \rho_\theta(z_1) + \alpha \rho_\theta(z_2),$$

para todo $\theta \in S^1$, $z_1, z_2, \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, ρ_θ é linear;

- c) Para todo $\theta_1, \theta_2 \in S^1$ e $z \in \mathbb{C}$, temos:

$$(\theta_1 + \theta_2)z = e^{ik(\theta_1 + \theta_2)} z = e^{ik\theta_1}(e^{ik\theta_2} z) = \theta_1(e^{ik\theta_2} z) = \theta_1(\theta_2 z).$$

Observe que para $k = 0$, a ação dada em (1.3) é a ação trivial.

Exemplo 1.14. Considere o grupo ortogonal $O_2(\mathbb{R})$ gerado por $SO_2(\mathbb{R})$ e pela matriz κ definida em (1.2). Cada ação de $S^1 \equiv SO_2(\mathbb{R})$ definida no Exemplo 1.13 pode ser estendida para uma ação de $O_2(\mathbb{R})$ em \mathbb{C} dada por

$$\begin{aligned} \varrho : O_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\gamma, z) &\longmapsto \gamma z \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde

$$\gamma z = \begin{cases} e^{ik\theta} z, & \text{se } \gamma = R_\theta \in SO_2(\mathbb{R}) \\ \overline{e^{ik\theta} z}, & \text{se } \gamma = \kappa R_\theta \in \kappa SO_2(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

De fato, considere a função determinante $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(A) = \det(A)$. Como $\kappa SO_2(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{-1\}) \cap O_2(\mathbb{R})$, temos que $\kappa SO_2(\mathbb{R})$ é um subconjunto fechado

de $O_2(\mathbb{R})$. Também, $SO_2(\mathbb{R})$ é um subconjunto fechado de $O_2(\mathbb{R})$. Da igualdade

$$O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \dot{\cup} \kappa SO_2(\mathbb{R}),$$

segue pelo lema da colagem que a aplicação definida em (1.4) é contínua. Além disso:

- a) Como a identidade $I_2 \in SO_2(\mathbb{R})$ está associada a $\theta = 0$, temos que $I_2 z = e^{ik0} z = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
- b) Para o caso em que $\gamma = R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$, defina $\rho_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\rho_\gamma(z) = e^{ik\theta} z$. Segue pelo Exemplo 1.13 que ρ_γ é uma aplicação linear. Para o caso em que $\gamma = \kappa R_\theta \in \kappa SO_2(\mathbb{R})$, defina $\rho_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\rho_\gamma(z) = e^{-ik\theta} \bar{z}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \rho_\gamma(z_1 + \lambda z_2) &= e^{-ik\theta} \overline{(z_1 + \lambda z_2)} = e^{-ik\theta} (\bar{z}_1 + \lambda \bar{z}_2) \\ &= e^{-ik\theta} \bar{z}_1 + \lambda e^{-ik\theta} \bar{z}_2 = \rho_\gamma(z_1) + \lambda \rho_\gamma(z_2), \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

- c) Para mostrar que

$$(\gamma_1 \gamma_2) z = \gamma_1(\gamma_2 z), \quad (1.5)$$

para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in O_2(\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{C}$, existem 4 casos a serem considerados:

Caso 1. Se $\gamma_1, \gamma_2 \in SO_2(\mathbb{R})$, então pelo Exemplo 1.13 vale (1.5).

Caso 2. Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \kappa SO_2(\mathbb{R})$, então $\gamma_1 = \kappa R_\phi$ e $\gamma_2 = \kappa R_\varphi$, para $\phi, \varphi \in [0, 2\pi)$.

Assim,

$$\gamma_1 \gamma_2 = \kappa R_\phi \kappa R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\phi - \varphi) & \text{sen}(\phi - \varphi) \\ -\text{sen}(\phi - \varphi) & \cos(\phi - \varphi) \end{bmatrix} = R_{(\varphi - \phi)} \in SO_2(\mathbb{R}).$$

Logo,

$$(\gamma_1 \gamma_2) z = e^{ik(\varphi - \phi)} z = e^{-ik\phi} (e^{ik\varphi} z) = e^{-ik\phi} \overline{(e^{-ik\varphi} \bar{z})} = \gamma_1(e^{-ik\varphi} \bar{z}) = \gamma_1(\gamma_2 z).$$

Caso 3. Se $\gamma_1 \in SO_2(\mathbb{R})$ e $\gamma_2 \in \kappa SO_2(\mathbb{R})$, então $\gamma_1 = R_\phi$ e $\gamma_2 = \kappa R_\varphi$, para

$\phi, \varphi \in [0, 2\pi)$. Assim,

$$\gamma_1 \gamma_2 = R_\phi \kappa R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\phi - \varphi) & \text{sen}(\phi - \varphi) \\ \text{sen}(\phi - \varphi) & -\cos(\phi - \varphi) \end{bmatrix} = \kappa R_{(\varphi - \phi)} \in \kappa SO_2(\mathbb{R}).$$

Portanto,

$$(\gamma_1 \gamma_2)z = e^{-ik(\varphi - \phi)\bar{z}} = e^{ik\phi}(e^{-ik\varphi\bar{z}}) = \gamma_1(e^{-ik\varphi\bar{z}}) = \gamma_1(\gamma_2 z).$$

Caso 4. Se $\gamma_1 \in \kappa SO_2(\mathbb{R})$ e $\gamma_2 \in SO_2(\mathbb{R})$, a demonstração pode ser dada de forma análoga ao caso 3.

Podemos então concluir que a aplicação definida em (1.4) é uma ação.

1.3 Integração invariante

Nesta seção, veremos que todo grupo de Lie linear compacto Γ em $GL_n(\mathbb{R})$ pode ser identificado com um subgrupo do grupo ortogonal $O_n(\mathbb{R})$. Para a demonstração deste resultado, precisaremos do conceito da integral de Haar que pode ser definida abstratamente como a seguir:

Definição 1.15. Seja $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua a valores reais. A operação

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \in \mathbb{R} \quad \left(\text{também denotada por } \int_{\Gamma} f \text{ ou } \int_{\Gamma} f d\gamma \right)$$

é uma **integral de Haar** sobre Γ se satisfaz as seguintes condições:

a) *Linearidade:*

$$\int_{\Gamma} (\lambda f + g) = \lambda \int_{\Gamma} f + \int_{\Gamma} g, \quad \forall f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínuas e } \lambda \in \mathbb{R};$$

b) *Positividade:*

$$\text{Se } f(\gamma) \geq 0 \text{ para todo } \gamma \in \Gamma, \text{ então } \int_{\Gamma} f \geq 0;$$

c) *Invariância por translação:*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma), \text{ para } \delta \in \Gamma \text{ fixado.}$$

A demonstração da existência e unicidade da integral de Haar pode ser encontrada em [14, p. 9]. Ela será omitida neste trabalho devido à sua complexidade. Quando Γ é compacto, $\int_{\Gamma} 1$ é finita (veja [25, Proposition 4, p. 75]) e dizemos que a integral de Haar é normalizada se $\int_{\Gamma} 1 = 1$. Também para Γ compacto, a integral de Haar é invariante por translações à direita, ou seja,

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma), \text{ para } \delta \in \Gamma \text{ fixado.}$$

As aplicações vetoriais também podem ser integradas, aplicando a integral de Haar separadamente em cada componente. Para maiores detalhes e demonstrações a respeito das propriedades de uma integral de Haar, sugerimos [25].

Proposição 1.16. *Seja Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V e seja ρ_{γ} a representação de $\gamma \in \Gamma$. Então existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ em V tal que $[\rho_{\gamma}] \in O_n(\mathbb{R})$ para todo $\gamma \in \Gamma$, onde $[\rho_{\gamma}]$ é a matriz de ρ_{γ} em relação a uma base ortonormal de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma})$.*

Demonstração: Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno qualquer em V . Para $u, v \in V$, considere a função

$$\begin{aligned} f_{u,v} : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \langle \rho_{\gamma}(u), \rho_{\gamma}(v) \rangle \end{aligned}$$

onde $\rho_{\gamma} : V \rightarrow V$ é o operador linear induzido pela ação de Γ em V , ou seja, $\rho_{\gamma}(v) = \varrho(\gamma, v) = \gamma v$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$.

Observe que a função $f_{u,v}$ é contínua. De fato, para cada $u \in V$, defina a aplicação $g_u : \Gamma \rightarrow V$ por

$$g_u(\gamma) = \rho_{\gamma}(u).$$

Veja que $f_{u,v}(\gamma) = \langle g_u(\gamma), g_v(\gamma) \rangle$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Pela continuidade de ϱ , temos que a restrição $\varrho|_{\Gamma \times \{u\}}$ também é contínua. Além disso, como a aplicação $h_u : \Gamma \rightarrow \Gamma \times \{u\}$ definida por $h_u(\gamma) = (\gamma, u)$ é contínua, concluímos que $g_u = \varrho \circ h_u$ também é contínua, para cada $u \in V$. Logo, a continuidade do produto interno nos garante que $f_{u,v}$ é

contínua para todo $u, v \in V$.

Dessa maneira, fica bem definido outro produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle u, v \rangle_\Gamma = \int_{\gamma \in \Gamma} f_{u,v}(\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(u), \rho_\gamma(v) \rangle.$$

Mostraremos agora que com esse produto interno, $[\rho_\gamma] \in O_n(\mathbb{R})$ para todo $\gamma \in \Gamma$. De fato, como Γ é compacto, a integral de Haar é invariante por translações à direita. Assim, tomando $u, v \in V$ e fixando $\delta \in \Gamma$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_\Gamma &= \int_{\gamma \in \Gamma} f_{u,v}(\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f_{u,v}(\gamma\delta) \\ &= \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_{\gamma\delta}(u), \rho_{\gamma\delta}(v) \rangle \\ &= \int_{\gamma \in \Gamma} \langle \rho_\gamma(\rho_\delta(u)), \rho_\gamma(\rho_\delta(v)) \rangle \\ &= \int_{\gamma \in \Gamma} f_{\rho_\delta(u), \rho_\delta(v)}(\gamma) \\ &= \langle \rho_\delta(u), \rho_\delta(v) \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $\delta \in \Gamma$, concluímos que $\langle u, v \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(u), \rho_\gamma(v) \rangle_\Gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $u, v \in V$. Como V é um espaço vetorial de dimensão finita, temos que

$$\langle u, v \rangle_\Gamma = \langle u, (\rho_\gamma^* \rho_\gamma)(v) \rangle_\Gamma$$

para todo $u, v \in V$, onde ρ_γ^* é o operador adjunto de ρ_γ . Assim, temos que $(\rho_\gamma^* \rho_\gamma)(v) = v$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$, o que implica que $\rho_\gamma^* \rho_\gamma$ é o operador identidade. Portanto, $[\rho_\gamma^*][\rho_\gamma] = I_n$, sendo $[\rho_\gamma]$ a matriz de ρ_γ com relação a uma base ortonormal de V com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$. Logo,

$$[\rho_\gamma]^T [\rho_\gamma] = I_n,$$

ou seja, $[\rho_\gamma] \in O_n(\mathbb{R})$ para todo $\gamma \in \Gamma$. ■

1.4 Teoria invariante

Nesta seção, apresentaremos os resultados centrais da teoria invariante de grupos de Lie lineares. A compacidade de Γ juntamente com as propriedades algébricas de sua ação em V vão garantir resultados interessantes com respeito aos subespaços vetoriais de V e às funções ou aplicações que permanecem invariantes sob a ação de Γ . Para o que segue, consideramos novamente o operador linear $\rho_\gamma : V \rightarrow V$ induzido por esta ação, ou seja, $\rho_\gamma(v) = \gamma v$ para cada $\gamma \in \Gamma$ e todo $v \in V$.

1.4.1 Subespaços invariantes

Nosso interesse nesta subseção é estudar subespaços de V que sejam invariantes pela ação de Γ . Veremos que se Γ for compacto, subespaços invariantes sempre possuirão um complementar¹ invariante.

Definição 1.17. *Um subespaço vetorial $W \subset V$ é dito Γ -invariante se $\gamma w \in W$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e para todo $w \in W$.*

Proposição 1.18. *Seja Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V . Seja $W \subset V$ um subespaço vetorial Γ -invariante. Então existe um subespaço Γ -invariante $Z \subset V$ tal que*

$$V = W \oplus Z.$$

Demonstração: Dados um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V e um subespaço vetorial $W \subset V$, temos que

$$W^\perp = \{v \in V; \langle w, v \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

é um subespaço complementar de W , ou seja, $V = W \oplus W^\perp$. Pela Proposição 1.16, como Γ é compacto, existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ em V tal que

$$\langle u, v \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(u), \rho_\gamma(v) \rangle_\Gamma \tag{1.6}$$

¹Para um dado subespaço W de V , dizemos que um subespaço $Z \subset V$ é seu subespaço complementar se a soma direta destes subespaços for igual a V , ou seja, se $W \oplus Z = V$.

para todo $u, v \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Considere

$$Z = W^\perp = \{v \in V; \langle w, v \rangle_\Gamma = 0, \forall w \in W\}.$$

Afirmamos que Z é um subespaço Γ -invariante de V . De fato, sejam $\gamma \in \Gamma$, $v \in Z$ e $w \in W$ arbitrários. Como W é Γ -invariante, temos que $\rho_{\gamma^{-1}}(w) = \gamma^{-1}w \in W$. Além disso, usando (1.6) obtemos

$$\langle \rho_\gamma(v), w \rangle_\Gamma = \langle \rho_\gamma(v), \rho_\gamma \rho_\gamma^{-1}(w) \rangle_\Gamma = \langle v, \rho_{\gamma^{-1}}(w) \rangle_\Gamma = 0,$$

uma vez que $v \in W^\perp$ e $\rho_{\gamma^{-1}}(w) \in W$. Portanto, $\rho_\gamma(v) = \gamma v \in Z$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in Z$, ou seja, Z é Γ -invariante. ■

Exemplo 1.19. Considere o grupo ortogonal $O_2(\mathbb{R})$ gerado por $SO_2(\mathbb{R})$ e pela matriz κ definida em (1.2). Podemos definir uma ação de $O_2(\mathbb{R})$ em \mathbb{R}^3 da seguinte maneira:

$$R_\theta(x, y, z) = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta, z)$$

para todo $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$ e

$$\kappa(x, y, z) = (x, -y, z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Observe que $V_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço $O_2(\mathbb{R})$ -invariante de \mathbb{R}^3 . De fato, dado $(x, y, 0) \in V_1$, temos

$$R_\theta(x, y, 0) = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta, 0) \in V_1$$

e

$$\kappa(x, y, 0) = (x, -y, 0) \in V_1.$$

De maneira análoga, $V_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$ também é um subespaço $O_2(\mathbb{R})$ -invariante de \mathbb{R}^3 , pois

$$R_\theta(0, 0, z) = \kappa(0, 0, z) = (0, 0, z) \in V_2.$$

Além disso, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, implicando que V_2 é um complementar $O_2(\mathbb{R})$ -invariante de V_1 e vice-versa.

O complementar Γ -invariante de um subespaço Γ -invariante não é único. Isso ocorre, por exemplo, quando Γ é o grupo trivial agindo em V . Neste caso, todo subespaço W de V é Γ -invariante, incluindo os seus complementares. Veja também [12, XII, Example 2.4].

1.4.2 Funções invariantes

Nesta seção, introduziremos o conceito de funções invariantes segundo a ação de um grupo de Lie linear Γ . Mostraremos que o conjunto dessas funções forma um anel que possui um conjunto finito de geradores quando Γ é compacto (Teorema 1.24).

Definição 1.20. *Seja Γ um grupo de Lie linear agindo em V . Uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Γ -invariante se*

$$f(\gamma v) = f(v),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$.

Se Γ for finitamente gerado, é suficiente verificar a condição de invariância para um conjunto de geradores de Γ , visto que é válida a condição c) da Definição 1.9.

Exemplo 1.21. *Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \equiv \{\pm 1\}$ agindo em $V = \mathbb{R}$ pela ação $-1x = -x$, com $x \in \mathbb{R}$. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathbb{Z}_2 -invariante se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função par. Se f for uma função polinomial da forma $f(x) = \sum_i a_i x^i$, a condição de invariância nos garante que $a_i = 0$ se i for ímpar. Dessa forma, podemos reescrever a função f como $f(x) = \sum_j b_j x^{2j}$, onde $b_j \in \mathbb{R}$. Assim,*

$$f(x) = h(x^2),$$

para alguma função polinomial $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 1.22. *Seja $\Gamma = S^1$ agindo em $V = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ por meio da ação definida no Exemplo 1.13, tomando $k = 1$. Ao variarmos $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}z$ traça uma circunferência de raio $|z|$ centrada na origem. Dessa forma, uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é S^1 -invariante se*

$f(e^{i\theta}z) = f(z)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, o que implica que f é constante nas circunferências de raio $|z|$. Vamos agora mostrar que se f é uma função polinomial S^1 -invariante, então existe uma função polinomial $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = h(z\bar{z})$. Para isso, usaremos a notação complexa escrevendo f nas coordenadas $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ da seguinte maneira:

$$f(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

onde $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Perceba que definimos a noção de invariância apenas para funções a valores reais. Dessa maneira, devemos ter $f(z) = \overline{f(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Esta condição nos mostra que

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \overline{\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta} = \sum_{\alpha, \beta} \overline{a_{\alpha\beta}} z^\beta \bar{z}^\alpha$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, o que implica em $\overline{a_{\alpha\beta}} = a_{\beta\alpha}$. Ademais, como

$$f(e^{i\theta}z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} (e^{i\theta}z)^\alpha \overline{(e^{i\theta}z)}^\beta = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

a igualdade $f(e^{i\theta}z) = f(z)$ nos garante que

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Assim, $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)}$ para $\theta \in \mathbb{R}$ qualquer. Temos então que $\alpha = \beta$ ou $a_{\alpha\beta} = 0$. Logo, podemos reescrever f como

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha} (z\bar{z})^\alpha,$$

onde $\overline{a_{\alpha\alpha}} = a_{\alpha\alpha}$, ou seja, $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$. Dessa forma, podemos definir $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha} x^\alpha,$$

de modo que $f(z) = h(z\bar{z})$.

Denotaremos por $\mathcal{P}(\Gamma)$ o conjunto das funções polinomiais a valores reais Γ -invariantes. Note que $\mathcal{P}(\Gamma)$ é um anel, visto que a função nula é Γ -invariante e a soma e o

produto de funções Γ -invariantes é ainda uma função Γ -invariante.

Definição 1.23. Dizemos que um conjunto finito $\{u_1, \dots, u_s\}$ de funções polinomiais Γ -invariantes gera $\mathcal{P}(\Gamma)$ se dada $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ existir uma função polinomial $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x)),$$

para todo $x \in V$. Esse conjunto é chamado de **base de Hilbert** para $\mathcal{P}(\Gamma)$.

De acordo com a definição anterior e com o Exemplo 1.21, uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ pode ser dada pelo conjunto unitário $\mathcal{B} = \{u\}$, onde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $u(x) = x^2$. Similarmente, pelo Exemplo 1.22, uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(S^1)$ pode ser dada tomando $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como $u(z) = z\bar{z}$.

Teorema 1.24 (Teorema de Hilbert-Weyl). *Seja Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V . Então existe uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.*

A prova do teorema acima, que será omitida nesse trabalho, utiliza ferramentas de álgebra comutativa e pode ser encontrada em [12, XII, §6].

Determinar uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$ pode ser uma tarefa muito difícil. Em alguns casos, como nos exemplos anteriores, um conjunto de geradores invariantes pode ser obtido por meio de manipulações algébricas e cálculos diretos. Nos casos mais complexos, é possível fazer uso do algoritmo simbólico descrito na Seção 1.6.

1.4.3 Aplicações equivariantes

Nosso interesse agora é o estudo das aplicações Γ -equivariantes cujo conjunto tem estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ das funções Γ -invariantes. A existência de um conjunto finito de geradores para este módulo é garantida pelo Teorema 1.28, visto como a versão equivariante do Teorema de Hilbert-Weyl.

Definição 1.25. *Seja Γ um grupo de Lie linear agindo em V . Uma aplicação $g : V \rightarrow V$ é dita Γ -equivariante (ou diz-se que g comuta com Γ) se*

$$g(\gamma x) = \gamma g(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$.

No caso da definição anterior, o elemento $\gamma \in \Gamma$ é frequentemente chamado de simetria da aplicação g . Vamos denotar por $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ o espaço das aplicações polinomiais Γ -equivariantes de V em V .

Lema 1.26. *Se $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$, então $fg \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$.*

Demonstração: Para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$, temos

$$(fg)(\gamma x) = f(\gamma x)g(\gamma x) = f(x)\gamma g(x) = \gamma f(x)g(x) = \gamma(fg)(x),$$

onde a segunda igualdade segue da Γ -invariância de f e Γ -equivariância de g e a terceira igualdade segue da linearidade da ação de Γ em V , uma vez que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in V$. ■

O Lema 1.26 nos garante que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ tem estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ das funções polinomiais invariantes. Veremos no Teorema 1.28 que se Γ for compacto, então $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ será finitamente gerado.

Definição 1.27. *Dizemos que as aplicações Γ -equivariantes g_1, \dots, g_r geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ se todo $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ puder ser escrito como*

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r,$$

para $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{P}(\Gamma)$.

Teorema 1.28. *Seja Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V . Então existe um conjunto finito de aplicações polinomiais equivariantes g_1, \dots, g_r que gera o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.*

Demonstração: Veja [12, XII, §6]. ■

Uma versão adaptada do teorema anterior será apresentada no Capítulo 2 para ações em espaços de Minkowski (veja Teorema 2.21). Neste contexto, não existe a necessidade do grupo de Lie linear ser compacto, como explicaremos na Seção 2.5.

Exemplo 1.29. Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ agindo em $V = \mathbb{R}$ como no Exemplo 1.21. Se $g \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2)$, então $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação polinomial que satisfaz $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Escrevendo $g(x) = \sum_i a_i x^i$, com $a_i \in \mathbb{R}$, a equivariância de g implica que $-a_i = (-1)^i a_i$ para todo i . Logo, $a_i = 0$ se i for par e podemos reescrever a aplicação g como

$$g(x) = \sum_j b_j x^{2j+1} = \left(\sum_j b_j x^{2j} \right) x = f(x)x,$$

onde $f(x) = \sum_j b_j x^{2j}$ e $b_j = a_{2j+1} \in \mathbb{R}$. Pelo Exemplo 1.21, temos $f \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$. Portanto, o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2)$ é gerado unicamente pela aplicação identidade $g(x) = x$ sobre o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$.

Exemplo 1.30. Seja $\Gamma = S^1$ agindo em $V = \mathbb{C}$ como no Exemplo 1.22. Se $g \in \vec{\mathcal{P}}(S^1)$, então $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação polinomial da forma

$$g(z) = \sum_{j,k} b_{j,k} z^j \bar{z}^k,$$

nas coordenadas z, \bar{z} , onde $b_{j,k} \in \mathbb{C}$. A condição de equivariância $g(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} g(z)$ pode ser reescrita como $g(z) = e^{-i\theta} g(e^{i\theta} z)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Assim, temos

$$\sum_{j,k} b_{j,k} z^j \bar{z}^k = e^{-i\theta} \sum_{j,k} b_{j,k} (e^{i\theta} z)^j (\overline{e^{i\theta} z})^k = \sum_{j,k} b_{j,k} e^{i\theta(j-k-1)} z^j \bar{z}^k,$$

o que implica em $b_{j,k} = 0$ ou $j = k + 1$ para cada par (j, k) fixo. Dessa forma,

$$g(z) = \sum_k b_{k+1,k} z^{k+1} \bar{z}^k = \sum_k b_{k+1,k} (z\bar{z})^k z.$$

Como cada $b_{k+1,k} \in \mathbb{C}$, se denotarmos $b_{k+1,k} = \alpha_k + i\beta_k$, com $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, temos que

$$g(z) = \sum_k \alpha_k (z\bar{z})^k z + \sum_k \beta_k (z\bar{z})^k iz.$$

Definindo as funções $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$p(z) = \sum_k \alpha_k (z\bar{z})^k \quad \text{e} \quad q(z) = \sum_k \beta_k (z\bar{z})^k,$$

pelo Exemplo 1.22 temos que $p, q \in \mathcal{P}(S^1)$. Portanto,

$$g(z) = p(z)z + q(z)iz,$$

onde as aplicações $g_1, g_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $g_1(z) = z$ e $g_2(z) = iz$ são Γ -equivariantes. De fato, $g_1(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}z = e^{i\theta}g_1(z)$ e $g_2(e^{i\theta}z) = ie^{i\theta}z = e^{i\theta}iz = e^{i\theta}g_2(z)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Dessa forma, concluímos que g_1 e g_2 geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(S^1)$ sobre o anel $\mathcal{P}(S^1)$.

1.5 Subespaços de pontos fixos

Uma importante característica das aplicações Γ -equivariantes é que a condição de equivariância força o aparecimento de subespaços vetoriais invariantes. Esses subespaços são especialmente úteis para entender o comportamento das aplicações que possuem simetrias e analisar as estruturas preservadas pela ação do grupo Γ .

Definição 1.31. *Sejam Γ um grupo de Lie linear agindo em V e $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo. O subespaço de pontos fixos de Σ é dado por*

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{v \in V; \sigma v = v, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Observe que $\text{Fix}(\Sigma)$ é um subespaço vetorial de V . De fato, para cada $\sigma \in \Sigma$, defina a aplicação $\phi_\sigma : V \rightarrow V$ como $\phi_\sigma(v) = \sigma v - v$. Temos que ϕ_σ é linear devido à linearidade da ação de Γ em V . Podemos então escrever

$$\text{Fix}(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \text{Nuc } \phi_\sigma,$$

onde $\text{Nuc } \phi_\sigma = \{v \in V; \sigma v - v = 0\}$ denota o núcleo de ϕ_σ . Como cada núcleo é um subespaço vetorial de V e a interseção de subespaços vetoriais é ainda um subespaço vetorial, segue que $\text{Fix}(\Sigma)$ é um subespaço vetorial de V . Naturalmente, os subespaços de pontos fixos mais simples são $\text{Fix}(\{e_\Gamma\})$ e $\text{Fix}(\Gamma)$, onde e_Γ é o elemento neutro de Γ . Como e_Γ fixa todo vetor de V , temos $\text{Fix}(\{e_\Gamma\}) = V$. Por outro lado, $\text{Fix}(\Gamma)$ consiste em todos os vetores de V que são fixados por todos os elementos de Γ . Portanto, $\text{Fix}(\Gamma)$ é o subespaço de V no qual Γ age trivialmente.

O próximo lema nos mostra que subespaços de pontos fixos são preservados por aplicações equivariantes.

Lema 1.32. *Sejam $g : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante e Σ um subgrupo de Γ . Então*

$$g(\text{Fix}(\Sigma)) \subset \text{Fix}(\Sigma).$$

Demonstração: Sejam $\sigma \in \Sigma$ e $v \in \text{Fix}(\Sigma)$. Assim, temos $\sigma v = v$ implicando que

$$g(v) = g(\sigma v) = \sigma g(v),$$

onde a segunda igualdade segue da Γ -equivariância de g . Dessa forma, concluímos que $g(v) = \sigma g(v)$ para todo $\sigma \in \Sigma$ e, portanto, $g(v) \in \text{Fix}(\Sigma)$ para todo $v \in \text{Fix}(\Sigma)$, o que finaliza a demonstração. ■

Uma consequência imediata do Lema 1.32 é a existência de soluções triviais para aplicações Γ -equivariantes.

Proposição 1.33. *Seja Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$;
- b) Toda aplicação Γ -equivariante $g : V \rightarrow V$ satisfaz $g(0) = 0$ (g possui soluções triviais);
- c) A única função linear Γ -invariante é a função nula.

Demonstração: A implicação $a) \Rightarrow b)$ é facilmente demonstrada usando o Lema 1.32, visto que se $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$ e g é Γ -equivariante, então $g(\{0\}) \subset \{0\}$. Portanto, g admite uma solução trivial. Para mostrar a recíproca $b) \Rightarrow a)$, afirmamos que para cada $v \in \text{Fix}(\Gamma)$, a aplicação constante $g : V \rightarrow V$ definida como $g(x) = v$ é Γ -equivariante. De fato,

$$\gamma g(x) = \gamma v = v = g(\gamma x),$$

para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$, onde a segunda igualdade é válida, pois $v \in \text{Fix}(\Gamma)$. Por hipótese, temos $g(0) = 0$. Como g é constante, segue que $v = g(0) = 0$, o que prova $a)$.

Vamos agora mostrar que $a) \Rightarrow c)$. Suponha $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$ e considere $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear Γ -invariante. Pelo teorema da representação de Riesz, existe um único $v \in V$ tal que

$$f(x) = \langle v, x \rangle_{\Gamma},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ é um produto interno Γ -invariante cuja existência é garantida pela Proposição 1.16. Afirmamos que $v \in \text{Fix}(\Gamma)$. De fato, a Γ -invariância da função f nos garante que $f(x) = f(\gamma^{-1}x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Como Γ é compacto, sua ação em V é ortogonal (Proposição 1.16), de modo que $\gamma^{-1} = \gamma^T$. Assim,

$$\langle v, x \rangle_{\Gamma} = \langle v, \gamma^{-1}x \rangle_{\Gamma} = \langle v, \gamma^T x \rangle_{\Gamma} = \langle \gamma v, x \rangle_{\Gamma},$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$. Logo, $\langle v - \gamma v, x \rangle_{\Gamma} = 0$ para todo $x \in V$. Dessa forma, $\gamma v = v$ para todo $\gamma \in \Gamma$, implicando que $v \in \text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$, ou seja, $v = 0$. Portanto, $f(x) = \langle v, x \rangle_{\Gamma} = 0$ para todo $x \in V$, como queríamos demonstrar.

Para mostrar que $c) \Rightarrow b)$, suponha que toda função linear Γ -invariante seja nula. Considere $g : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante e defina a função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \langle g(0), x \rangle_{\Gamma}, \tag{1.7}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno Γ -invariante em V . Afirmamos que f é Γ -invariante. De fato, usando novamente que $\gamma^{-1} = \gamma^T$, obtemos que

$$f(\gamma x) = \langle g(0), \gamma x \rangle_{\Gamma} = \langle \gamma^{-1}g(0), x \rangle_{\Gamma} = \langle g(\gamma^{-1}0), x \rangle_{\Gamma} = \langle g(0), x \rangle_{\Gamma} = f(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$, onde na terceira igualdade usamos a Γ -equivariância de g e na quarta igualdade usamos que a ação de Γ é linear. Logo, a função f é Γ -invariante e, por hipótese, temos que $f \equiv 0$. Pela igualdade (1.7) e pela arbitrariedade de g , concluímos que toda aplicação Γ -equivariante satisfaz $g(0) = 0$. ■

1.6 Operadores de Reynolds

Nesta seção, introduziremos o módulo das funções Γ_σ -invariantes juntamente com os operadores de Reynolds e algumas de suas propriedades. O principal resultado dessa seção é o Teorema 1.39, que mostra como obter uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ das funções polinomiais Γ -invariantes a partir de uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ das funções polinomiais Γ_+ -invariantes, onde Γ_+ é um subgrupo normal de Γ de índice 2. Este resultado será aplicado no Algoritmo 2.26 da Seção 2.5 e pode ser encontrado em [2].

Seja Γ um grupo de Lie linear agindo em V que admite um epimorfismo de grupos

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2,$$

onde \mathbb{Z}_2 é o grupo multiplicativo $\{\pm 1\}$. Denotaremos por Γ_+ o núcleo de σ , de modo que Γ_+ é um subgrupo normal de Γ . Como σ é sobrejetor, temos que Γ/Γ_+ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 , ou seja, Γ_+ é um subgrupo de Γ de índice 2, determinando assim duas classes laterais disjuntas em Γ . De fato, se $\gamma \in \Gamma_+$, então $\gamma\Gamma_+ = \Gamma_+$ é a classe lateral trivial. Fixado $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$, se existir $\gamma \in \Gamma_+ \cap \delta\Gamma_+$, então $\gamma = \delta\gamma_1 \in \Gamma_+$, para algum $\gamma_1 \in \Gamma_+$. Como Γ_+ é um grupo, temos que $\delta = \gamma\gamma_1^{-1} \in \Gamma_+$, o que é uma contradição. Logo, se $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$, então $\delta\Gamma_+$ é uma classe lateral de Γ_+ em Γ disjunta de Γ_+ . Portanto, podemos escrever

$$\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup} \delta\Gamma_+. \quad (1.8)$$

Definição 1.34. Uma função polinomial $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Γ_σ -invariante se

$$h(\gamma x) = \sigma(\gamma)h(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$.

O conjunto das funções polinomiais Γ_σ -invariantes será denotado por $\mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. Este conjunto tem estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. De fato, dadas $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e

$h \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$, temos que

$$(fh)(\gamma x) = f(\gamma x)h(\gamma x) = f(x)\sigma(\gamma)h(x) = \sigma(\gamma)f(x)h(x) = \sigma(\gamma)(fh)(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$, onde na segunda igualdade usamos a invariância de f e a Γ_σ -invariância de h e na terceira igualdade usamos a comutatividade de \mathbb{R} . Portanto, $fh \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. Dessa maneira, se Γ for compacto, o Teorema 1.28 garante a existência de um conjunto finito de geradores para o módulo $\mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$.

O próximo lema nos apresenta uma relação entre as funções Γ_σ -invariantes e as funções invariantes sob a ação do subgrupo Γ_+ de Γ .

Lema 1.35. *Seja $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos e fixe $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$, onde $\Gamma_+ = \text{Nuc } \sigma$. Então,*

$$\mathcal{P}_\sigma(\Gamma) = \{f \in \mathcal{P}(\Gamma_+); f(\delta x) = -f(x), \forall x \in V\}. \quad (1.9)$$

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$ e $\gamma \in \Gamma_+$. Por definição, $f(\gamma x) = \sigma(\gamma)f(x) = f(x)$, para todo $x \in V$. Pela arbitrariedade de $\gamma \in \Gamma_+$, segue que $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Além disso, como $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$, então $\sigma(\delta) = -1$. Portanto, $f(\delta x) = \sigma(\delta)f(x) = -f(x)$, para todo $x \in V$. Por outro lado, seja $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ tal que $f(\delta x) = -f(x)$ para todo $x \in V$. Dado $\gamma \in \Gamma_+$, temos que $f(\gamma x) = f(x) = \sigma(\gamma)f(x)$, para todo $x \in V$. Agora, se $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_+$, então $\sigma(\gamma) = -1$. Por (1.8), temos que $\gamma = \delta\eta$ para algum $\eta \in \Gamma_+$. Logo,

$$f(\gamma x) = f(\delta\eta x) = -f(\eta x) = -f(x) = \sigma(\gamma)f(x)$$

para todo $x \in V$, onde na terceira igualdade usamos que $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Concluimos assim que $f(\gamma x) = \sigma(\gamma)f(x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$, ou seja, $f \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. ■

Como Γ_+ é um subgrupo de Γ , claramente temos que $\mathcal{P}(\Gamma) \subset \mathcal{P}(\Gamma_+)$, ou seja, o conjunto das funções polinomiais Γ -invariantes pode ser visto como um subanel do anel das funções polinomiais Γ_+ -invariantes. Em adição, de modo análogo ao que fizemos no Lema 1.35, é possível mostrar que fixado $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$ temos

$$\mathcal{P}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{P}(\Gamma_+); f(\delta x) = f(x), \forall x \in V\}. \quad (1.10)$$

O objetivo agora é mostrar como podemos obter uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$ a partir de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. O módulo $\mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$ das funções polinomiais Γ_σ -invariantes apresenta um papel fundamental nessa construção.

Vamos começar introduzindo os operadores de Reynolds definidos em $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Para tal, considere o \mathbb{R} -espaço vetorial \mathcal{P} das funções polinomiais $V \rightarrow \mathbb{R}$ e defina a ação de Γ neste espaço, induzida pela ação de Γ em V , como

$$\begin{aligned} \varrho : \Gamma \times \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (\gamma, f) &\longmapsto \gamma f \end{aligned}$$

tal que $\gamma f(x) = f(\gamma x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$.

Definição 1.36. Fixado $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$, definimos os operadores de Reynolds $R : \mathcal{P}(\Gamma_+) \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $S : \mathcal{P}(\Gamma_+) \rightarrow \mathcal{P}(\Gamma_+)$ por

$$R(f) = \frac{1}{2}(f + \delta f) \quad e \quad S(f) = \frac{1}{2}(f - \delta f). \quad (1.11)$$

Para comprovar que $R(f), S(f) \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ para toda $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, utilizamos o fato de Γ_+ ser um subgrupo normal de Γ . Com efeito, como as classes laterais $\delta\Gamma_+$ e $\Gamma_+\delta$ coincidem, dado $\gamma \in \Gamma_+$ temos que $\delta\gamma = \gamma'\delta$ para algum $\gamma' \in \Gamma_+$. Sendo f invariante sob a ação de Γ_+ , obtemos

$$f(\delta\gamma x) = f(\gamma'\delta x) = f(\delta x),$$

para todo $x \in V$. Assim, dado $\gamma \in \Gamma_+$, concluimos que

$$\begin{aligned} R(f)(\gamma x) &= \frac{1}{2}(f(\gamma x) + \delta f(\gamma x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(\gamma x) + f(\delta\gamma x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) \\ &= R(f)(x). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, $S(f)(\gamma x) = S(f)(x)$ para todo $\gamma \in \Gamma_+$ e $x \in V$. Para o próximo resultado, denote por $I_{\mathcal{P}(\Gamma_+)}$ o operador identidade definido no anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$.

Proposição 1.37. *Os operadores de Reynolds R e S definidos em (1.11) satisfazem as seguintes propriedades:*

- a) *Eles são homomorfismos de $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulos e $R + S = I_{\mathcal{P}(\Gamma_+)}$;*
- b) *Eles são projeções idempotentes, com $\text{Im}(R) = \mathcal{P}(\Gamma)$ e $\text{Im}(S) = \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$.*

Demonstração: a) Sejam $g, h \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Então

$$\begin{aligned} R(g+h)(x) &= \frac{1}{2}((g+h)(x) + (g+h)(\delta x)) \\ &= \frac{1}{2}(g(x) + h(x) + g(\delta x) + h(\delta x)) \\ &= R(g)(x) + R(h)(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in V$. Logo, $R(g+h) = R(g) + R(h)$. Também,

$$\begin{aligned} R(fg)(x) &= \frac{1}{2}((fg)(x) + (fg)(\delta x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x)g(x) + f(\delta x)g(\delta x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x)g(x) + f(x)g(\delta x)) \\ &= f(x)\frac{1}{2}(g(x) + g(\delta x)) \\ &= (fR(g))(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in V$. Logo, $R(fg) = fR(g)$. De maneira análoga, é possível mostrar que $S(g+h) = S(g) + S(h)$ e $S(fg) = fS(g)$. Portanto, R e S são homomorfismos de $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulos. Para mostrar a segunda parte, observe que dado $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, temos

$$\begin{aligned} (R+S)(f) &= R(f) + S(f) \\ &= \frac{1}{2}(f + \delta f) + \frac{1}{2}(f - \delta f) \\ &= f. \end{aligned}$$

Logo, $R + S = I_{\mathcal{P}(\Gamma_+)}$.

b) Primeiramente, lembremos que $R(f), S(f) \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, para toda $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Para mostrar que $\text{Im}(R) = \mathcal{P}(\Gamma)$ e $\text{Im}(S) = \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$, vamos utilizar as igualdades (1.10) e

(1.9), respectivamente. Sejam $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$ e $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Temos que $\delta^2 \in \Gamma_+$, pois $\sigma(\delta^2) = (\sigma(\delta))^2 = 1$. Portanto, $f(\delta^2 x) = f(x)$ para todo $x \in V$. Assim,

$$R(f)(\delta x) = \frac{1}{2}(f(\delta x) + \delta f(\delta x)) = \frac{1}{2}(f(\delta x) + f(\delta^2 x)) = \frac{1}{2}(f(\delta x) + f(x)) = R(f)(x).$$

De modo análogo,

$$S(f)(\delta x) = \frac{1}{2}(f(\delta x) - \delta f(\delta x)) = \frac{1}{2}(f(\delta x) - f(x)) = -S(f)(x),$$

para todo $x \in V$. Por (1.9) e (1.10), concluímos que $R(f) \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $S(f) \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. A arbitrariedade de f nos garante que $\text{Im}(R) \subset \mathcal{P}(\Gamma)$ e $\text{Im}(S) \subset \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. Considere agora $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $h \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. Como $\mathcal{P}(\Gamma) \subset \mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\mathcal{P}_\sigma(\Gamma) \subset \mathcal{P}(\Gamma_+)$, então $f, h \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Utilizando novamente as igualdades (1.9) e (1.10), temos que $f(\delta x) = f(x)$ e $h(\delta x) = -h(x)$ para $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$ fixado e para todo $x \in V$. Logo, $\delta f = f$ e $\delta h = -h$, de onde concluímos que

$$R(f) = \frac{1}{2}(f + \delta f) = \frac{1}{2}(f + f) = f \tag{1.12}$$

e

$$S(h) = \frac{1}{2}(h - \delta h) = \frac{1}{2}(h + h) = h. \tag{1.13}$$

Portanto, dadas $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $h \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$, obtemos que $f \in \text{Im}(R)$ e $h \in \text{Im}(S)$. Dessa forma, $\text{Im}(R) = \mathcal{P}(\Gamma)$ e $\text{Im}(S) = \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. As igualdades (1.12) e (1.13) também mostram que $R|_{\mathcal{P}(\Gamma)} = I_{\mathcal{P}(\Gamma)}$ e $S|_{\mathcal{P}_\sigma(\Gamma)} = I_{\mathcal{P}_\sigma(\Gamma)}$, respectivamente. Como $R(f) \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $S(f) \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$ para toda $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, então $R(R(f)) = R(f)$ e $S(S(f)) = S(f)$. Logo, $R^2 = R$ e $S^2 = S$, o que demonstra que R e S são projeções idempotentes. ■

Podemos agora enunciar um importante resultado cuja demonstração é uma consequência da proposição anterior.

Teorema 1.38. *É válida a seguinte decomposição como uma soma direta de $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulos:*

$$\mathcal{P}(\Gamma_+) = \mathcal{P}(\Gamma) \oplus \mathcal{P}_\sigma(\Gamma). \tag{1.14}$$

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{P}(\Gamma) \subset \mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\mathcal{P}_\sigma(\Gamma) \subset \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Portanto, temos que $\mathcal{P}(\Gamma) + \mathcal{P}_\sigma(\Gamma) \subset \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Para mostrar a outra inclusão, tome $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Pelo item *a*) da Proposição 1.37 segue que

$$f = (R + S)(f) = R(f) + S(f).$$

Pelo item *b*) da Proposição 1.37, $R(f) \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $S(f) \in \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. Portanto, pela arbitrariedade de $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, temos que $\mathcal{P}(\Gamma_+) \subset \mathcal{P}(\Gamma) + \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$ e concluímos que $\mathcal{P}(\Gamma_+) = \mathcal{P}(\Gamma) + \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. Para mostrar que esta soma é direta, tome $f \in \mathcal{P}(\Gamma) \cap \mathcal{P}_\sigma(\Gamma)$. Por (1.9) e (1.10), fixado $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$, temos que

$$f(x) = f(\delta x) = -f(x)$$

para todo $x \in V$, o que nos garante que $f \equiv 0$. Assim, $\mathcal{P}(\Gamma) \cap \mathcal{P}_\sigma(\Gamma) = \{0\}$, o que finaliza a demonstração. ■

O próximo teorema nos apresenta um conjunto de geradores para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ a partir de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. É importante destacar que não há a necessidade de Γ_+ ser um grupo compacto, mas é preciso que o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ admita uma base de Hilbert. A ideia é usar a decomposição (1.14) e os operadores de Reynolds para projetar os elementos da base de $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Teorema 1.39. *Sejam $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos e $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$, onde $\Gamma_+ = \text{Nuc } \sigma$. Então o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{R(u_i), S(u_i)S(u_j); 1 \leq i, j \leq s\},$$

forma uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Demonstração: Fixe $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$ e seja $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Pelo item *a*) da Proposição 1.37 podemos escrever

$$u_i = R(u_i) + S(u_i),$$

para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Logo, $\mathcal{C} = \{R(u_i), S(u_i); 1 \leq i \leq s\}$ é uma nova base de

Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. De fato, por definição temos que $R(u_i), S(u_i) \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Além disso, dada $\tilde{f} \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= h(u_1, \dots, u_s) \\ &= h(R(u_1) + S(u_1), \dots, R(u_s) + S(u_s)) \\ &= k(R(u_1), \dots, R(u_s), S(u_1), \dots, S(u_s)),\end{aligned}$$

para alguma função polinomial $k : \mathbb{R}^{2s} \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, \mathcal{C} gera o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Dada $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$, temos que $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Usando a notação de multi-índices, podemos escrever f como

$$f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} R(u_i)^{\alpha_0} S(u_i)^{\alpha_1}, \quad (1.15)$$

em que $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$ e $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{N}^{2s}$, com $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{js}), j \in \{0, 1\}$. Mais especificamente, temos

$$R(u_i)^{\alpha_0} = R(u_1)^{\alpha_{01}} \dots R(u_s)^{\alpha_{0s}} \quad \text{e} \quad S(u_i)^{\alpha_1} = S(u_1)^{\alpha_{11}} \dots S(u_s)^{\alpha_{1s}}.$$

Como $R(u_i) \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $S(u_i) \in \mathcal{P}_{\sigma}(\Gamma)$, então

$$R(u_i)(\delta x) = R(u_i)(x) \quad \text{e} \quad S(u_i)(\delta x) = -S(u_i)(x),$$

para todo $x \in V$. Assim,

$$\begin{aligned}f(\delta x) &= \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} R(u_i)^{\alpha_0} S(u_i)^{\alpha_1} \right) (\delta x) \\ &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} R(u_i)^{\alpha_0}(\delta x) S(u_i)^{\alpha_1}(\delta x) \\ &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} (-1)^{\alpha(1)} (R(u_i)^{\alpha_0} S(u_i)^{\alpha_1})(x),\end{aligned}$$

para $\alpha(1) = \sum_{i=1}^s \alpha_{1i}$. Pela Γ -invariância de f , temos que $f(x) = f(\delta x)$ para todo $x \in V$,

o que nos fornece

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} R(u_i)^{\alpha_0} S(u_i)^{\alpha_1} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (-1)^{\alpha(1)} R(u_i)^{\alpha_0} S(u_i)^{\alpha_1}.$$

Isso implica que $a_{\alpha} = 0$ ou $(-1)^{\alpha(1)} = 1$, ou seja, $\alpha(1)$ é par. Logo, a função polinomial f dada em (1.15) tem um número par de parcelas da forma $S(u_i)$, com $1 \leq i \leq s$. Veja que $S(u_i)S(u_j) \in \mathcal{P}(\Gamma)$ para todo $1 \leq i, j \leq s$. De fato,

$$\begin{aligned} (S(u_i)S(u_j))(\delta x) &= S(u_i)(\delta x)S(u_j)(\delta x) \\ &= (-S(u_i)(x))(-S(u_j)(x)) \\ &= (S(u_i)S(u_j))(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in V$, uma vez que $S(u_i), S(u_j) \in \mathcal{P}_{\sigma}(\Gamma)$ e vale a igualdade (1.9). Assim, o produto

$$S(u_1)^{\alpha_{11}} S(u_2)^{\alpha_{12}} \dots S(u_s)^{\alpha_{1s}}$$

que aparece no somatório dado em (1.15) pode ser reescrito como o produto dois a dois de $S(u_i)S(u_j)$, com $1 \leq i, j \leq s$. Como $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $R(u_i) \in \mathcal{P}(\Gamma)$ para cada $1 \leq i \leq s$, temos que

$$f = \sum_{\tilde{\alpha}} a_{\tilde{\alpha}} R(u_i)^{\alpha_0} (S(u_i)S(u_j))^{\beta_1},$$

em que $a_{\tilde{\alpha}} \in \mathbb{R}$ e $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \beta_1)$, com $\beta_1 = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1r}) \in \mathbb{N}^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Logo, existe uma função polinomial $k : R^{s+r} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = k(R(u_i), S(u_i)S(u_j))$, para todo $1 \leq i, j \leq s$. Portanto, o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ é gerado pelo conjunto

$$\mathcal{B} = \{R(u_i), S(u_i)S(u_j); 1 \leq i, j \leq s\},$$

ou seja, \mathcal{B} é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$. ■

Exemplo 1.40. Considere o grupo ortogonal $\Gamma = O_2(\mathbb{R})$ agindo em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ por meio de

$$\theta(z, x) = (e^{i\theta}z, x) \quad \text{e} \quad \kappa(z, x) = (\bar{z}, -x),$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$. Considere o epimorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ dado por

$$\sigma(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \gamma \in SO_2(\mathbb{R}) \\ -1, & \text{se } \gamma \in \kappa SO_2(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

Assim, $\Gamma_+ = \text{Nuc } \sigma = SO_2(\mathbb{R})$ e tomamos $\delta = \kappa \in \Gamma \setminus \Gamma_+$. Afirmamos que as funções $u_1(z, x) = z\bar{z}$ e $u_2(z, x) = x$ formam uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(SO_2(\mathbb{R}))$. De fato, seja $f : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial $SO_2(\mathbb{R})$ -invariante da forma

$$f(z, x) = \sum_{\alpha, \beta, \eta} a_{\alpha\beta\eta} z^\alpha \bar{z}^\beta x^\eta, \quad (1.16)$$

com $a_{\alpha\beta\eta} \in \mathbb{C}$. Como f é invariante sob a ação de θ temos que $f(z, x) = f(e^{i\theta}z, x)$ para todo $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta, \eta} a_{\alpha\beta\eta} z^\alpha \bar{z}^\beta x^\eta &= \sum_{\alpha, \beta, \eta} a_{\alpha\beta\eta} (e^{i\theta}z)^\alpha \overline{(e^{i\theta}z)}^\beta x^\eta \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \eta} a_{\alpha\beta\eta} (e^{i\theta}z)^\alpha (e^{-i\theta}\bar{z})^\beta x^\eta \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \eta} a_{\alpha\beta\eta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta x^\eta. \end{aligned}$$

Segue que $a_{\alpha\beta\eta} = a_{\alpha\beta\eta} e^{i\theta(\alpha-\beta)}$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, o que implica em $a_{\alpha\beta\eta} = 0$ ou $\alpha = \beta$. Assim, a função f dada em (1.16) torna-se da forma

$$f(z, x) = \sum_{\alpha, \eta} a_{\alpha\eta} (z\bar{z})^\alpha x^\eta,$$

para todo $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Além disso, como $f(z, x) = \overline{f(z, x)}$, concluímos que $a_{\alpha\eta} = \overline{a_{\alpha\eta}}$ para todo $\alpha, \eta \in \mathbb{N}$. Portanto, $a_{\alpha\eta} \in \mathbb{R}$. Defina a função polinomial $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x_1, x_2) = \sum_{\alpha, \eta} a_{\alpha\eta} x_1^\alpha x_2^\eta.$$

Logo, $f(z, x) = h(z\bar{z}, x)$ para todo $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. A arbitrariedade de f nos garante que $u_1(z, x) = z\bar{z}$ e $u_2(z, x) = x$ são geradores do anel $\mathcal{P}(SO_2(\mathbb{R}))$. Para calcular os geradores de $\mathcal{P}(O_2(\mathbb{R}))$, considere os operadores $R, S : \mathcal{P}(SO_2(\mathbb{R})) \rightarrow \mathcal{P}(SO_2(\mathbb{R}))$ definidos

por

$$R(f)(z, x) = \frac{1}{2}(f(z, x) + f(\bar{z}, -x)) \quad \text{e} \quad S(f)(z, x) = \frac{1}{2}(f(z, x) - f(\bar{z}, -x)),$$

para todo $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Aplicando R e S em u_1 e u_2 , obtemos

$$R(u_1)(z, x) = \frac{1}{2}(z\bar{z} + \bar{z}z) = z\bar{z},$$

$$R(u_2)(z, x) = \frac{1}{2}(x + (-x)) = 0,$$

$$S(u_1)(z, x) = \frac{1}{2}(z\bar{z} - \bar{z}z) = 0,$$

$$S(u_2)(z, x) = \frac{1}{2}(x - (-x)) = x.$$

Portanto,

$$R(u_1) = u_1, \quad S(u_2) = u_2 \quad \text{e} \quad R(u_2) \equiv S(u_1) \equiv 0.$$

Pelo Teorema 1.39, uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(O_2(\mathbb{R}))$ é dada pelo conjunto

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2^2\}.$$

Em outras palavras, $u_1(z, x) = z\bar{z}$ e $u_2^2(z, x) = x^2$ formam um conjunto de geradores para o anel das funções polinomiais $O_2(\mathbb{R})$ -invariantes.

CAPÍTULO 2

A ESTRUTURA ALGÉBRICA DOS GRUPOS DE LORENTZ

Como mencionamos na Introdução, é no espaço de Minkowski 4-dimensional que as equações relativísticas encontram uma formulação matemática mais adequada. Nesse contexto, as coordenadas espaço-temporais $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}_1^4$ são relacionadas pelas transformações de Lorentz, as quais deixam a métrica e as grandezas físicas do espaço-tempo invariantes. No entanto, a métrica adotada em \mathbb{R}_1^4 não é positiva definida, de modo que a sua geometria não é euclidiana.

Neste capítulo, apresentaremos um estudo sistemático das funções invariantes e das aplicações equivariantes definidas em um espaço de Minkowski $(n+1)$ -dimensional sob a ação de um subgrupo Γ do grupo de Lorentz $O(n, 1)$. Assumiremos que a ação de Γ em um subespaço vetorial V é dada pelo produto da matriz $A \in \Gamma$ pelo vetor $v \in V$. Muitos resultados para o caso euclidiano se estendem naturalmente a espaços de Minkowski, como por exemplo o Teorema 1.28 cuja adaptação para $\Gamma \subset O(n, 1)$ será apresentada no Teorema 2.21.

Vamos utilizar as teorias de álgebra linear e invariante de grupos para obter parte dos resultados apresentados nesse capítulo, que tem [22] como a principal referência. Na Seção 2.1, introduziremos o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} e o grupo de Lorentz $O(n, 1)$, para $n \geq 1$. Na Seção 2.2, estudaremos as decomposições polar (Proposição

2.5) e em valores singulares (Teorema 2.7) das matrizes em $O(n, 1)$. Na Seção 2.3, utilizaremos a decomposição polar para obter as componentes conexas deste grupo e apresentaremos uma caracterização para cada uma delas. Essas componentes são classes laterais do subgrupo normal $SO_0(n, 1)$ de $O(n, 1)$. Na Seção 2.4, utilizamos os representantes dessas classes para escrever o grupo $O(n, 1)$ como um produto semidireto envolvendo involuções. Na Seção 2.5, abordaremos a teoria invariante de grupos de Lorentz em espaços de Minkowski, como uma adaptação da teoria invariante de grupos de Lie em espaços euclidianos apresentada no Capítulo 1. Também descreveremos um algoritmo para calcular os geradores do anel das funções polinomiais invariantes sob a ação de um subgrupo de Lorentz contendo involuções.

2.1 Os espaços de Minkowski

Sejam $n, q \in \mathbb{Z}$, com $n, q \geq 1$, e considere a matriz dada por

$$J_{n,q} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

em que I_n e I_q denotam as matrizes identidades de ordem n e q , respectivamente. Para $k = n + q$, denote por \mathbb{R}_q^k o espaço vetorial real k -dimensional munido do pseudo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_q : \mathbb{R}_q^k \times \mathbb{R}_q^k \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle x, y \rangle_q = x^T J_{n,q} y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{j=n+1}^k x_j y_j,$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}_q^k$. Neste caso, dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ tem assinatura (n, q) e que \mathbb{R}_q^k resulta em um espaço semi-euclidiano. A forma quadrática associada $\phi_{n,q} : \mathbb{R}_q^k \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_{n,q}(x) = x^T J_{n,q} x = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{j=n+1}^k x_j^2, \quad (2.2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_q^k$, é chamada de **métrica de Lorentz**.

Proposição 2.1. *O conjunto*

$$O(n, q) = \{A \in GL_k(\mathbb{R}); A^T J_{n,q} A = J_{n,q}\} \quad (2.3)$$

é um subgrupo de $GL_k(\mathbb{R})$.

Demonstração: Como $I_k \in O(n, q)$, então $O(n, q)$ é não vazio. Sejam $A, B \in O(n, q)$.

Então

$$(AB)^T J_{n,q} AB = B^T (A^T J_{n,q} A) B = B^T J_{n,q} B = J_{n,q},$$

o que implica que $O(n, q)$ é fechado para a operação de produto de matrizes. Da igualdade $A^T J_{n,q} A = J_{n,q}$, também temos que

$$J_{n,q} = (A^T)^{-1} J_{n,q} A^{-1} = (A^{-1})^T J_{n,q} A^{-1},$$

ou seja, $A^{-1} \in O(n, q)$. Portanto, $O(n, q)$ é um subgrupo de $GL_k(\mathbb{R})$. ■

Definição 2.2. *O grupo $O(n, q)$ definido em (2.3) é chamado de grupo pseudo-ortogonal de assinatura (n, q) .*

Observe que todas as matrizes em $O(n, q)$ preservam a métrica definida em (2.2). De fato, dado $A \in O(n, q)$, temos

$$\phi_{n,q}(Ax) = (Ax)^T J_{n,q} Ax = x^T (A^T J_{n,q} A) x = x^T J_{n,q} x = \phi_{n,q}(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}_q^k$. Porém, o grupo pseudo-ortogonal não contém todas as matrizes que preservam $\phi_{n,q}$, uma vez que ele é um subgrupo do grupo de Poincaré, o grupo de isometrias de \mathbb{R}_1^{n+1} (veja [4, p. 14]).

Veja também que se $A \in O(n, q)$, então $\det(A) = \pm 1$. Com efeito, como $\det(J_{n,q}) \neq 0$ e valem as igualdades

$$\det(J_{n,q}) = \det(A^T J_{n,q} A) = \det(A^T) \det(J_{n,q}) \det(A) = (\det(A))^2 \det(J_{n,q}),$$

segue que $(\det(A))^2 = 1$. Além disso, temos que $J_{n,q}^2 = I_k$, ou seja, $J_{n,q}^{-1} = J_{n,q}$. Logo,

para todo $A \in O(n, q)$, obtemos

$$(J_{n,q}A^T J_{n,q})A = J_{n,q}(A^T J_{n,q}A) = J_{n,q}^2 = I_k,$$

de onde concluímos que $A^{-1} = J_{n,q}A^T J_{n,q}$. Portanto, $AJ_{n,q}A^T J_{n,q} = I_k$ e, assim,

$$(A^T)^T J_{n,q}A^T = AJ_{n,q}A^T = J_{n,q},$$

o que mostra que $O(n, q)$ também é fechado para a operação de transposição de matrizes.

Definição 2.3. O subgrupo de $O(n, q)$ definido por

$$SO(n, q) = \{A \in O(n, q); \det(A) = 1\} \quad (2.4)$$

é chamado de **grupo especial pseudo-ortogonal**.

É possível verificar que $SO(n, q)$ também é um grupo fechado para a transposição de matrizes, uma vez que $SO(n, q) \subset O(n, q)$ e $\det(A^T) = \det(A)$.

A partir de agora, vamos assumir $q = 1$ (e conseqüentemente $k = n + 1$) em todo o texto. Este caso particular de \mathbb{R}_q^k é uma generalização do espaço-tempo \mathbb{R}_1^4 estudado por Einstein.

Definição 2.4. Para $n \geq 1$, o espaço vetorial \mathbb{R}_1^{n+1} munido do pseudo produto interno

$$\langle x, y \rangle_1 = x^T J y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}. \quad (2.5)$$

é chamado de **espaço de Minkowski**.

Daqui em diante, trataremos do espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} e do grupo pseudo-ortogonal $O(n, 1)$, também chamado de **grupo de Lorentz**. A matriz $J_{n,1}$ definida como em (2.1) será denotada simplesmente por J , ou seja,

$$J = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Portanto, o grupo de Lorentz pode ser reescrito como

$$O(n, 1) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}); A^T J A = J\}. \quad (2.7)$$

2.2 Decomposições matriciais em $O(n, 1)$

Nesta seção, vamos apresentar duas formas de decomposição para as matrizes em $O(n, 1)$: a decomposição polar e a decomposição em valores singulares. A primeira delas será utilizada na próxima seção para determinar as quatro componentes conexas de $O(n, 1)$. A segunda forma será utilizada no Capítulo 3, mas a introduziremos nessa seção devido à sua relação direta com a decomposição polar.

Daqui em diante, vamos também denotar por v a matriz coluna das coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$. Além disso, o símbolo \sqrt{M} denotará uma matriz N tal que $N^2 = M$.

Proposição 2.5. (Decomposição polar) *Toda matriz $A \in O(n, 1)$ tem uma decomposição da forma*

$$A = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{I_n + vv^T} & \varepsilon v \\ \varepsilon v^T & |c| \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon = \pm 1$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1} \in \mathbb{R}$, para algum $v \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $A \in O(n, 1)$. Como A é uma matriz de ordem $n+1$, vamos escrevê-la em blocos como

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ v^T & c \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde $B \in M_n(\mathbb{R})$, u, v são matrizes colunas dadas pelas coordenadas de $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Por definição, temos $A^T J A = J$, o que nos fornece o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} B^T B = I_n + vv^T \\ B^T u = cv \\ u^T u = c^2 - 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Analogamente, como $O(n, 1)$ é fechado para a transposição de matrizes, podemos usar

a relação $AJA^T = J$ para obter o sistema

$$\begin{cases} BB^T = I_n + uu^T \\ Bv = cu \\ v^T v = c^2 - 1 \end{cases} . \quad (2.11)$$

Dessa forma, seguem de (2.10) e (2.11) as seguintes equações:

$$B^T B = I_n + vv^T, \quad (2.12)$$

$$BB^T = I_n + uu^T, \quad (2.13)$$

$$Bv = cu, \quad (2.14)$$

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 = c^2 - 1. \quad (2.15)$$

Observe que $B^T u = cv$ é uma consequência das equações (2.12) - (2.15). Por (2.15), obtemos também que $\|u\| = \|v\| = \sqrt{c^2 - 1}$, ou equivalentemente $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$. Portanto, devemos ter $|c| \geq 1$. Além disso, temos

$$v = 0 \iff u = 0 \iff |c| = 1. \quad (2.16)$$

Por (2.12) e (2.13), se $v = 0$, então $B \in O_n(\mathbb{R})$. Neste caso, (2.9) torna-se

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{I_n} & 0 \\ 0 & |c| \end{bmatrix},$$

com $B \in O_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon = \pm 1$ e $|c| = 1$, o que corresponde à decomposição de A dada em (2.8).

Vamos considerar agora o caso em que $v \neq 0$ (e, conseqüentemente, $u \neq 0$ e $|c| > 1$). Escrevendo $v^T = [v_1 \dots v_n]$, com $v_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que

$$vv^T = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \dots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2^2 & \dots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \dots & v_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e

$$B^T B = I_n + vv^T = \begin{bmatrix} 1 + v_1^2 & v_1 v_2 & \dots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & 1 + v_2^2 & \dots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \dots & 1 + v_n^2 \end{bmatrix}$$

são matrizes simétricas. Ademais, observe que

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ v^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + vv^T & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & v \\ 0 & 1 + v^T v \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Como a primeira e a terceira matrizes do lado esquerdo são triangulares com diagonal principal unitária, seus determinantes são iguais a 1. O determinante da matriz em blocos

$$\begin{bmatrix} I_n + vv^T & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

coincide com o determinante de $B^T B$. Logo, como o determinante da matriz do lado direito de (2.18) é igual a $1 + v^T v$, temos que

$$\det(B^T B) = \det(I_n + vv^T) = 1 + v^T v = 1 + \|v\|^2 > 0.$$

Além disso, todos os menores principais¹ de $B^T B$ são positivos, uma vez que são da forma $\det(I_m + ww^T)$, com $w^T = [v_1 \dots v_m]$, para todo $1 \leq m \leq n$. Pelo critério de Sylvester (veja [16, Theorem 7.2.5, p. 439]), a matriz $B^T B$ é positiva definida. Observe agora que, utilizando (2.17), o subespaço $\text{Nuc}(vv^T) = \{w \in \mathbb{R}^n; (vv^T)w = 0\}$ é formado por todos os vetores $w = (w_1, \dots, w_n)$ tais que

$$v_i \langle v, w \rangle = v_i (v_1 w_1 + \dots + v_n w_n) = 0,$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como v é não nulo, então $w \in \text{Nuc}(vv^T)$ se, e somente se, $\langle v, w \rangle = 0$, ou seja, $\text{Nuc}(vv^T)$ é o subespaço ortogonal de $[v]$, onde $[v]$ denota o subes-

¹Um menor principal de uma matriz quadrada M de ordem n é o determinante de toda submatriz de M obtida pelo canto superior esquerdo $m \times m$, com $1 \leq m \leq n$, o que inclui a própria matriz M .

paço vetorial gerado por v . Assim,

$$\mathbb{R}^n = [v] \oplus \text{Nuc}(vv^T),$$

de modo que $\dim \text{Nuc}(vv^T) = n - 1$. Consequentemente, como $\text{Nuc}(vv^T)$ é o autoespaço de vv^T associado ao autovalor nulo, a matriz vv^T tem autovalor $\lambda_1 = 0$ de multiplicidade geométrica² igual a $n - 1$ cujos autovetores formam o subespaço complementar ortogonal de $[v]$. Novamente por (2.17), obtemos que

$$(vv^T)v = (v_1^2 + \cdots + v_n^2)v = \|v\|^2 v = (c^2 - 1)v,$$

onde a última igualdade segue de (2.15). Como a matriz vv^T possui ordem n , então $\lambda_2 = c^2 - 1$ é um autovalor de vv^T de multiplicidade geométrica igual a 1, que admite $v \neq 0$ como autovetor, com $c \neq \pm 1$ (pois $|c| > 1$). Portanto, os únicos autovalores de vv^T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = c^2 - 1 \neq 0$ cujos autoespaços são $V_{\lambda_1} = [v]^\perp$ e $V_{\lambda_2} = [v]$, respectivamente. Além disso, se w for um autovetor de vv^T associado ao autovalor λ_i , então

$$(B^T B)w = (I_n + vv^T)w = I_n w + (vv^T)w = w + \lambda_i w = (1 + \lambda_i)w,$$

o que implica que $1 + \lambda_i$ é um autovalor de $B^T B$ com os mesmos autovetores de vv^T associados e, portanto, com a mesma multiplicidade geométrica de λ_i para $i = 1, 2$. Segue então que $B^T B$ tem autovalor $\eta_1 = 1$ de multiplicidade geométrica $n - 1$ e autovalor $\eta_2 = c^2$ de multiplicidade geométrica 1 cujos autoespaços são $V_{\eta_1} = [v]^\perp$ e $V_{\eta_2} = [v]$, respectivamente. Por [16, Theorem 7.3.1, p. 449], temos que toda matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ admite a forma

$$B = QS_1, \tag{2.19}$$

chamada de forma polar, onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$ e S_1 é uma matriz simétrica positiva definida. Assim,

$$B^T B = (QS_1)^T(QS_1) = S_1^T(Q^T Q)S_1 = S_1^T S_1 = S_1^2.$$

²Como vv^T é uma matriz real simétrica, ela é diagonalizável. Portanto, a multiplicidade geométrica de cada um de seus autovalores coincide com a multiplicidade algébrica.

Utilizando a forma polar (2.19) para a matriz B em (2.9), temos que

$$S_1^2 = B^T B = I_n + vv^T.$$

Logo, a matriz S_1^2 é simétrica, positiva definida e tem autovalores $\eta_1 = 1$ e $\eta_2 = c^2$ de multiplicidades geométricas $n - 1$ e 1 , respectivamente. Portanto, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$ também é simétrica e positiva definida, com autovalores $\tilde{\eta}_1 = 1$ e $\tilde{\eta}_2 = |c|$ de multiplicidades geométricas $n - 1$ e 1 , respectivamente. Os autovetores associados a $\tilde{\eta}_1$ pertencem ao subespaço ortogonal $[v]^\perp$ de v e os autovetores associados a $\tilde{\eta}_2$ pertencem ao subespaço vetorial $[v]$ gerado por v . Como $|c| > 1$, vamos considerar 2 casos:

Caso 1. Se $c > 1$, então v é um autovetor de S_1 associado a $\tilde{\eta}_2 = c > 1$. Logo, por (2.14), temos

$$cu = Bv = QS_1v = Q(cv) = cQv,$$

o que implica em $u = Qv$. Assim, voltando a (2.9), obtemos

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ v^T & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QS_1 & Qv \\ v^T & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & v \\ v^T & |c| \end{bmatrix},$$

onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$.

Caso 2. Se $c < -1$, então v é um autovetor de S_1 associado a $\tilde{\eta}_2 = -c > 1$. Dessa forma, por (2.14),

$$cu = Bv = QS_1v = Q(-cv) = cQ(-v),$$

o que implica em $u = Q(-v)$. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ v^T & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QS_1 & Q(-v) \\ v^T & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & -v \\ -v^T & |c| \end{bmatrix},$$

onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$.

Em ambos os casos descritos anteriormente, obtemos a matriz A dada em (2.8) para $\varepsilon = \pm 1$. ■

Queremos agora analisar os autovalores e autovetores da matriz

$$S := \begin{bmatrix} S_1 & \varepsilon v \\ \varepsilon v^T & |c| \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

onde $v^T = [v_1 \dots v_n]$, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$, $\varepsilon = \pm 1$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$. Como S_1 é uma matriz simétrica positiva definida, o mesmo vale para S . De fato, se $v = 0$, então $S_1 = I_n$ e $|c| = 1$, de modo que $S = I_{n+1}$. Se $v \neq 0$, então v é um autovetor de S_1 associado ao autovalor $\tilde{\eta}_2 = |c| > 1$, ou seja, $S_1 v = |c|v$. Como S_1 é invertível³ e $|c| \neq 0$, temos que

$$S_1^{-1}v = \frac{1}{|c|}v,$$

ou seja, v é um autovetor de S^{-1} associado ao autovalor $\frac{1}{|c|}$. Dessa forma, calculando o determinante de S em blocos (veja [28, p. 1]), obtemos

$$\det(S) = \det(S_1) \det(|c| - \varepsilon v^T S_1^{-1} \varepsilon v) = \det(S_1) \det(|c| - v^T S_1^{-1} v)$$

em que

$$|c| - v^T S_1^{-1} v = |c| - v^T \left(\frac{1}{|c|} v \right) = |c| - \frac{1}{|c|} \|v\|^2 = |c| - \frac{1}{|c|} (c^2 - 1),$$

com a última igualdade seguindo de (2.15). Logo,

$$\det(S) = \det(S_1) \det\left(|c| - \frac{1}{|c|} (c^2 - 1)\right) = \det(S_1) \det(|c| - |c| + \frac{1}{|c|}) = \det(S_1) \frac{1}{|c|} > 0,$$

pois $\det(S_1) > 0$. Usando novamente o critério de Sylvester, concluímos que S é positiva definida. Com relação aos seus autovalores e autovetores temos o seguinte resultado:

Proposição 2.6. *Assuma $v \neq 0$. Os autovalores da matriz S definida em (2.20) são iguais a 1 , e^α e $e^{-\alpha}$, para algum $\alpha > 0$, com multiplicidades geométricas iguais a $n - 1$, 1 e 1 , respectivamente. Uma base ortonormal de \mathbb{R}_1^{n+1} formada por autovetores de S é constituída*

³Como $\det(S_1^2) = \det(B^T B) = 1 + \|v\|^2 > 0$, então $(\det(S_1))^2 > 0$, o que nos garante que $\det(S_1) \neq 0$. Ademais, como S_1 é simétrica então S_1 é diagonalizável com autovalores $\tilde{\eta}_1 = 1$ e $\tilde{\eta}_2 = |c| > 1$ de multiplicidades algébricas $n - 1$ e 1 , respectivamente. Portanto, $\det(S_1) = 1^{n-1}|c| = |c| > 0$.

pelos vetores

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

onde u_i denota a matriz coluna das coordenadas de $u_i \in \mathbb{R}^n$, que são dois a dois ortogonais e ortogonais a v , para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Demonstração: Dados $v \neq 0$ e S como em (2.20), vamos resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} S_1 & \varepsilon v \\ \varepsilon v^T & |c| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ d \end{bmatrix},$$

para $d \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{cases} S_1 v + \varepsilon d v = \lambda v \\ \varepsilon v^T v + |c| d = \lambda d \end{cases},$$

onde $S_1 v = |c|v$, pois v é um autovetor de S_1 associado ao autovalor $|c|$. Uma vez que $v^T v = \|v\|^2 = c^2 - 1$, obtemos

$$\begin{cases} (|c| + \varepsilon d)v = \lambda v \\ \varepsilon(c^2 - 1) = (\lambda - |c|)d \end{cases}.$$

Sendo $v \neq 0$ e $\varepsilon = \pm 1$, temos $\lambda = |c| + \varepsilon d$ e $d^2 = c^2 - 1$, o que nos garante que $d = \pm\sqrt{c^2 - 1} = \pm\|v\|$. Logo, $\lambda_1 = |c| + \sqrt{c^2 - 1}$ e $\lambda_2 = |c| - \sqrt{c^2 - 1}$ são autovalores de S , com $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Temos também por (2.15) que $\lambda_1 > |c| > 1$ e, portanto, $\ln(\lambda_1) > 0$. Fazendo então $\alpha = \ln(|c| + \sqrt{c^2 - 1})$, temos

$$-\alpha = \ln(\lambda_1^{-1}) = \ln(\lambda_2) = \ln(|c| - \sqrt{c^2 - 1}),$$

com $\alpha > 0$. Dessa forma, $\lambda_1 = e^\alpha$ e $\lambda_2 = e^{-\alpha}$ são autovalores de S cujos autovetores são da forma

$$w_1 = \begin{bmatrix} v \\ \|v\| \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 = \begin{bmatrix} v \\ -\|v\| \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

respectivamente, uma vez que $d = \pm\|v\|$. Considere agora $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor ortogonal a v , ou seja, $u \in \text{Nuc}(vv^T) = [v]^\perp$. Então u é um autovetor de S_1 associado ao autovalor

$\tilde{\eta}_1 = 1$. Logo, $S_1 u = u$ e $v^T u = \langle v, u \rangle = 0$, de onde obtemos

$$\begin{bmatrix} S_1 & \varepsilon v \\ \varepsilon v^T & |c| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $[u \ 0]^T$ é um autovetor de S associado ao autovalor $\lambda_3 = 1$. Como $\tilde{\eta}_1 = 1$ tem multiplicidade geométrica igual a $n - 1$, então $\lambda_3 = 1$ também terá. Sendo S uma matriz de ordem $n + 1$, concluímos que ambos λ_1 e λ_2 têm multiplicidade geométrica igual a 1.

Para determinar uma base ortonormal de \mathbb{R}_1^{n+1} em relação ao produto interno euclidiano formada somente por autovetores de S , considere $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ uma base ortonormal para $\text{Nuc}(vv^T) = [v]^\perp$. Sabemos que cada $u_i \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor de S_1 associado a $\tilde{\eta}_1 = 1$. Denotando também por u_i a matriz coluna das coordenadas de cada um desses vetores, temos que $u'_i = [u_i \ 0]^T$ são unitários e dois a dois ortogonais, para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Veja agora que os autovetores w_1 e w_2 dados em (2.22) são ortogonais, visto que

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle v, v \rangle + \|v\|(-\|v\|) = \|v\|^2 - \|v\|^2 = 0.$$

Além disso, como v é ortogonal a cada u_i , os vetores w_1 e w_2 são ambos ortogonais a u'_i , para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Uma vez que

$$\|w_i\| = \sqrt{\|v\|^2 + \|v\|^2} = \sqrt{2\|v\|^2} = \sqrt{2}\|v\|,$$

para cada $i = 1, 2$, temos que

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

são autovetores unitários e ortogonais de S , que também são ortogonais a u'_i para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Portanto, os $n + 1$ vetores dados em (2.21) compõem uma base ortonormal de \mathbb{R}_1^{n+1} formada por autovetores de S . ■

Como S é uma matriz simétrica, então S é diagonalizável, sendo o seu determinante

dado pelo produto de seus autovalores. Pela proposição anterior, temos que

$$\det(S) = e^\alpha e^{-\alpha} = 1.$$

A seguir, veremos outra maneira de decompor uma matriz $A \in O(n, 1)$ a partir da sua decomposição polar. Para isso, considere o subgrupo $SO(n, 1)$ definido em (2.4) para $q = 1$, ou seja,

$$SO(n, 1) = \{A \in O(n, 1); \det(A) = 1\}. \quad (2.23)$$

Teorema 2.7. (Decomposição em valores singulares) *Toda matriz $A \in O(n, 1)$ pode ser escrita como*

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ 0 & \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

com $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon = \pm 1$ e $B \in SO_n(\mathbb{R})$. Além disso, $A \in SO(n, 1)$ se, e somente se, $\det(P)\varepsilon = 1$.

Demonstração: Pela Proposição 2.5, qualquer matriz $A \in O(n, 1)$ pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} S, \quad (2.25)$$

onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon = \pm 1$ e S é dada como em (2.20). Se $S = I_{n+1}$ então obtemos trivialmente a decomposição (2.24), para $P = Q$, $\alpha = 0$ e $B = I_n$. Vamos então assumir $S \neq I_{n+1}$. Pela Proposição 2.6, a matriz S possui autovalores 1, e^α e $e^{-\alpha}$, para algum $\alpha > 0$, com multiplicidades geométricas $n - 1$, 1 e 1, respectivamente. Além disso, como S é uma matriz simétrica, existe uma matriz $G \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ tal que

$$S = GDG^{-1}, \quad (2.26)$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\alpha} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

é a matriz diagonal formada pelos autovalores de S . Utilizando novamente a Proposição 2.6, juntamente com a teoria de álgebra linear, concluímos que

$$G = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_{n-1} & \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} & \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos autovetores de S dados em (2.21), com $u_1, \dots, u_{n-1}, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Observe que as colunas da matriz G formam um conjunto ortonormal em relação ao produto interno euclidiano, o que confirma que G é uma matriz ortogonal. É conhecido que as funções seno e cosseno hiperbólicos são definidas como

$$\operatorname{senh} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \quad \text{e} \quad \operatorname{cosh} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, $e^\alpha = \operatorname{senh} \alpha + \operatorname{cosh} \alpha$ e $e^{-\alpha} = \operatorname{cosh} \alpha - \operatorname{senh} \alpha$, sendo possível escrever

$$\begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{cosh} \alpha & \operatorname{senh} \alpha \\ \operatorname{senh} \alpha & \operatorname{cosh} \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a matriz D pode ser reescrita como $D = EFE$, para

$$E = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{cosh} \alpha & \operatorname{senh} \alpha \\ 0 & \operatorname{senh} \alpha & \operatorname{cosh} \alpha \end{bmatrix},$$

de modo que a matriz S dada em (2.26) torna-se

$$S = GEFEG^{-1}. \tag{2.27}$$

Cálculos diretos nos mostram que

$$GE = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)},$$

onde as colunas de B são as coordenadas dos vetores $u_1, \dots, u_{n-1}, \frac{v}{\|v\|}$, que formam um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^n . Assim, a matriz B é ortogonal e seu determinante é igual a 1 ou -1 , dependendo da orientação da base formada por esses vetores. Nesse caso, trocando u_1 por $-u_1$, se necessário, podemos garantir que a matriz B tenha determinante 1, ou seja, que $B \in SO_n(\mathbb{R})$. Além disso, denotando $GE = C$, temos que

$$C^T = (GE)^T = E^T G^T = EG^{-1},$$

onde na terceira igualdade usamos o fato de E ser uma matriz simétrica e G ser uma matriz ortogonal. Assim, por (2.27), podemos reescrever a matriz S como

$$S = CFC^T,$$

em que

$$C^T = \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)},$$

com $B \in SO_n(\mathbb{R})$. Portanto, por (2.25),

$$A = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ 0 & \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $Q \in O_n(\mathbb{R})$ e $B \in SO_n(\mathbb{R})$, então $P = QB \in O_n(\mathbb{R})$. Dessa forma, obtemos a decomposição de A dada em (2.24). Ademais, temos que

$$\det(A) = \det(P)\varepsilon \det(F) \det(C^T) = \det(P)\varepsilon \det(C^T).$$

Visto que $\det(B) = 1$, então $\det(C^T) = \det(B^T) = 1$. Logo,

$$\det(A) = \det(P)\varepsilon.$$

Portanto, $A \in SO(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = 1$, o que ocorre se, e somente se, $\det(P)\varepsilon = 1$. ■

2.3 As componentes conexas de $O(n, 1)$

Nosso objetivo nesta seção será determinar e caracterizar as componentes conexas do grupo de Lorentz $O(n, 1)$ definido em (2.7). Para tal, considere as matrizes em $O_{n+1}(\mathbb{R})$ definidas por

$$\Lambda^p = \begin{bmatrix} J_{n-11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda^t = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J,$$

onde J foi introduzida em (2.6) e J_{n-11} é como em (2.1), ou seja,

$$J_{n-11} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que $(\Lambda^p)^T J \Lambda^p = J = (\Lambda^t)^T J \Lambda^t$, o que implica que $\Lambda^p, \Lambda^t \in O(n, 1)$. Uma vez que $O(n, 1)$ é um grupo com a operação de multiplicação de matrizes, obtemos que

$$\Lambda^p \Lambda^t := \Lambda^{pt} = \begin{bmatrix} J_{n-11} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

também pertence a $O(n, 1)$.

Denotaremos por $SO_0(n, 1)$ a componente conexa de $O(n, 1)$ contendo a identidade I_{n+1} . Portanto, $SO_0(n, 1)$ é conexo. Como o produto de matrizes é uma operação contínua, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_i : O(n, 1) &\longrightarrow O(n, 1) \\ A &\longmapsto \Lambda^i A \end{aligned}$$

é contínua para todo $i \in \{p, t, pt\}$. Assim, $\Lambda^i SO_0(n, 1) = \phi_i(SO_0(n, 1))$ é um subconjunto conexo de $O(n, 1)$ para todo $i \in \{p, t, pt\}$. Nosso objetivo agora será mostrar que $SO_0(n, 1)$, $\Lambda^p SO_0(n, 1)$, $\Lambda^t SO_0(n, 1)$ e $\Lambda^{pt} SO_0(n, 1)$ são as únicas componentes conexas do grupo de Lorentz.

Lema 2.8. *Se $A \in O(n, 1)$ tiver uma decomposição polar como em (2.8), com $Q \in SO_n(\mathbb{R})$ e $\varepsilon = 1$, então $A \in SO_0(n, 1)$.*

Demonstração: Seja $A \in O(n, 1)$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{I_n + vv^T} & v \\ v^T & |c| \end{bmatrix},$$

onde $Q \in SO_n(\mathbb{R})$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$, para algum $v \in \mathbb{R}^n$. Como \mathbb{R}^n é conexo por caminhos, existe um caminho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$ e $f(1) = v$. Defina $h : [0, 1] \rightarrow O(n, 1)$, por

$$h(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{I_n + f(x)(f(x))^T} & f(x) \\ (f(x))^T & \sqrt{\|f(x)\|^2 + 1} \end{bmatrix},$$

onde $f(x)$ denota as coordenadas do vetor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ para todo $x \in [0, 1]$. Logo, h é um caminho em $O(n, 1)$ ligando $h(0) = I_{n+1}$ a $h(1) = S$, onde S é dada como em (2.20) para $\varepsilon = 1$. Ademais, uma vez que $SO_n(\mathbb{R})$ é conexo por caminhos (veja [36, p. 965]), existe um caminho $g : [0, 1] \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = I_n$ e $g(1) = Q$. Assim, a aplicação $l : [0, 1] \rightarrow O(n, 1)$ dada por

$$l(x) = \begin{bmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} g(x)\sqrt{I_n + vv^T} & g(x)v \\ v^T & |c| \end{bmatrix},$$

é um caminho de $l(0) = S$ a $l(1) = A$. Logo, a concatenação $h * l : [0, 1] \rightarrow O(n, 1)$, dada por

$$(h * l)(x) = \begin{cases} h(2x), & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ l(2x - 1), & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

é um caminho em $O(n, 1)$ ligando $(h * l)(0) = I_{n+1}$ a $(h * l)(1) = A$. Portanto, A e I_{n+1} estão na mesma componente conexa por caminhos. Como todo conjunto conexo por caminhos é conexo, então A e I_{n+1} estão na mesma componente conexa, ou seja, $A \in SO_0(n, 1)$. ■

Proposição 2.9. Se $A \in O(n, 1)$, então $A \in SO_0(n, 1)$ ou $A \in \Lambda^i SO_0(n, 1)$ para algum

$i \in \{p, t, pt\}$. Em outras palavras,

$$O(n, 1) = SO_0(n, 1) \cup \Lambda^p SO_0(n, 1) \cup \Lambda^t SO_0(n, 1) \cup \Lambda^{pt} SO_0(n, 1). \quad (2.28)$$

Demonstração: Seja $A \in O(n, 1)$ cuja decomposição polar é dada em (2.8). Vamos separar a prova em dois casos: $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = -1$. Considere primeiramente $\varepsilon = 1$. Pelo Lema 2.8, se $Q \in SO_n(\mathbb{R})$, então $A \in SO_0(n, 1)$. Suponha agora que $Q \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$. Denotando por u e w as matrizes coluna das coordenadas dos vetores $u, w \in \mathbb{R}^{n-1}$, podemos escrever Q em blocos como

$$Q = \begin{bmatrix} E & w \\ u^T & k \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

com $E \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$. Note que $Q = J_{n-11} Q'$, para

$$Q' = \begin{bmatrix} E & w \\ -u^T & -k \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Assim,

$$\det(Q) = \det(J_{n-11}) \det(Q') = -\det(Q').$$

Como $Q \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$, então $\det(Q) = -1$. Logo, $\det(Q') = 1$. Além disso,

$$(Q')^T Q' = (J_{n-11} Q)^T (J_{n-11} Q) = Q^T J_{n-11}^2 Q = Q^T Q = I_n,$$

uma vez que $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Portanto, $Q' \in SO_n(\mathbb{R})$. Assim, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n-11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \Lambda^p \begin{bmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $Q' \in SO_n(\mathbb{R})$. Utilizando a decomposição polar de A dada em (2.8) para $\varepsilon = 1$, temos $A = \Lambda^p A'$, onde

$$A' = \begin{bmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & v \\ v^T & |c| \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

com $Q' \in SO_n(\mathbb{R})$, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$. Como $A, \Lambda^p \in O(n, 1)$, então

$$J = A^T J A = (\Lambda^p A')^T J (\Lambda^p A') = (A')^T ((\Lambda^p)^T J \Lambda^p) A' = (A')^T J A',$$

implicando que $A' \in O(n, 1)$ e sua decomposição polar é como em (2.31). Logo, pelo Lema 2.8, $A' \in SO_0(n, 1)$, e portanto $A = \Lambda^p A' \in \Lambda^p SO_0(n, 1)$.

Vamos supor agora que $\varepsilon = -1$. Por (2.8), A pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & -v \\ -v^T & |c| \end{bmatrix},$$

onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$. Se $Q \in SO_n(\mathbb{R})$, então $A = \Lambda^t A'$ para A' como em (2.31). Novamente, como $A^T J A = J$, concluímos que $(A')^T J A' = J$, ou seja, $A' \in O(n, 1)$. Pelo Lema 2.8, $A' \in SO_0(n, 1)$. Logo, $A \in \Lambda^t SO_0(n, 1)$. Por outro lado, se $Q \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$, escreva Q novamente em blocos como em (2.29), de forma a obter $Q = J_{n-1,1} Q'$, para $Q' \in SO_n(\mathbb{R})$ dada em (2.30). Assim, por (2.8) podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} J_{n-1,1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & -v \\ -v^T & |c| \end{bmatrix} = \Lambda^{pt} A',$$

para $A' \in SO_0(n, 1)$ como em (2.31). Consequentemente, $A \in \Lambda^{pt} SO_0(n, 1)$, o que finaliza a demonstração. \blacksquare

Proposição 2.10. *Os conjuntos $SO_0(n, 1)$, $\Lambda^p SO_0(n, 1)$, $\Lambda^t SO_0(n, 1)$ e $\Lambda^{pt} SO_0(n, 1)$ são dois a dois disjuntos.*

Demonstração: Usando a decomposição polar dada em (2.8), podemos escrever uma matriz $A \in O(n, 1)$ como

$$A = \begin{bmatrix} QS_1 & \varepsilon Qv \\ v^T & \varepsilon |c| \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$, $\varepsilon = \pm 1$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$. Como $Q \in O_n(\mathbb{R})$, então $\det(Q) = \pm 1$. Conforme mostrado anteriormente, se $v \neq 0$, então S_1 possui dois autovalores distintos $\tilde{\eta}_1 = 1$ e $\tilde{\eta}_2 = |c| > 1$ de multiplicidades $n-1$ e 1 , respectivamente.

Se $v = 0$, então todos os autovalores de S_1 são iguais a $|c| = 1$. Dessa forma,

$$\det(QS_1) = \det(Q) \det(S_1) = \pm|c|,$$

com $|c| \geq 1$. Considere $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ munido com a topologia discreta. Então a função sinal $\text{sgn} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definida como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é contínua. Como $\det(QS_1)$ e $\varepsilon|c|$ não se anulam, está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \zeta : O(n, 1) &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ A &\longmapsto (\text{sgn}(\det(QS_1)), \text{sgn}(\varepsilon|c|)), \end{aligned}$$

que também é contínua se considerarmos a topologia discreta em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Neste caso, os únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ são os unitários $\{(1, 1)\}$, $\{(1, -1)\}$, $\{(-1, 1)\}$ e $\{(-1, -1)\}$. Como ζ é contínua e $SO_0(n, 1)$, $\Lambda^p SO_0(n, 1)$, $\Lambda^t SO_0(n, 1)$ e $\Lambda^{pt} SO_0(n, 1)$ são conexos, ζ leva cada um destes conjuntos em um único elemento de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Por definição, $SO_0(n, 1)$ é a componente conexa da identidade, logo $\zeta(A) = (1, 1)$ para todo $A \in SO_0(n, 1)$, visto que $\zeta(I_n) = (1, 1)$. Temos também que

$$\Lambda^i = \Lambda^i I_n \in \Lambda^i SO_0(n, 1),$$

para todo $i \in \{p, t, pt\}$, com $\zeta(\Lambda^p) = (-1, 1)$, $\zeta(\Lambda^t) = (1, -1)$ e $\zeta(\Lambda^{pt}) = (-1, -1)$. Como consequência, obtemos que

$$\zeta(A) = \begin{cases} (1, 1), & \text{se } A \in SO_0(n, 1) \\ (-1, 1), & \text{se } A \in \Lambda^p SO_0(n, 1) \\ (1, -1), & \text{se } A \in \Lambda^t SO_0(n, 1) \\ (-1, -1), & \text{se } A \in \Lambda^{pt} SO_0(n, 1) \end{cases}, \quad (2.33)$$

o que nos mostra que $SO_0(n, 1)$, $\Lambda^p SO_0(n, 1)$, $\Lambda^t SO_0(n, 1)$ e $\Lambda^{pt} SO_0(n, 1)$ são todos disjuntos. ■

Com o resultado anterior, mostramos que a união dada em (2.28) é disjunta e concluimos que $O(n, 1)$ possui quatro componentes conexas, a saber

$$SO_0(n, 1), \quad \Lambda^p SO_0(n, 1), \quad \Lambda^t SO_0(n, 1) \quad \text{e} \quad \Lambda^{pt} SO_0(n, 1). \quad (2.34)$$

Um modo alternativo de verificar que essas são as únicas componentes conexas de $O(n, 1)$ é considerar a sobrejetividade da aplicação ζ . Como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ admite quatro componentes conexas, então $O(n, 1)$ possui pelo menos quatro componentes. Pela igualdade (2.28), concluimos que são exatamente os quatro conjuntos conexos dados em (2.34). Assim, podemos escrever

$$O(n, 1) = SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda^p SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda^t SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda^{pt} SO_0(n, 1). \quad (2.35)$$

Vamos agora escrever A em (2.32) como $A = [a_{ij}]_{(n+1) \times (n+1)}$. Logo, o elemento $a_{n+1, n+1}$ é igual a $\varepsilon|c| = \pm|c|$. Além disso, como a função determinante

$$\det : O(n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

é contínua e os únicos subconjuntos conexos de \mathbb{Z}_2 são os unitários $\{1\}$ e $\{-1\}$, então a função \det leva cada componente conexa de $O(n, 1)$ em um único elemento de \mathbb{Z}_2 . Como $I_{n+1} \in SO_0(n, 1)$ e $\Lambda^i \in \Lambda^i SO_0(n, 1)$, para todo $i \in \{p, t, pt\}$, inferimos que

$$\det(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A \in SO_0(n, 1) \cup \Lambda^{pt} SO_0(n, 1) \\ -1, & \text{se } A \in \Lambda^p SO_0(n, 1) \cup \Lambda^t SO_0(n, 1), \end{cases} \quad (2.36)$$

pois $\det(I_{n+1}) = \det(\Lambda^{pt}) = 1$ e $\det(\Lambda^p) = \det(\Lambda^t) = -1$. Juntamente com (2.33), temos provado o seguinte resultado, que fornece uma caracterização para os elementos de $O(n, 1)$.

Corolário 2.11. *Dada $A \in O(n, 1)$, temos:*

- a) $A \in SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = 1$ e $\operatorname{sgn}(a_{n+1, n+1}) = 1$;
- b) $A \in \Lambda^p SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = -1$ e $\operatorname{sgn}(a_{n+1, n+1}) = 1$;
- c) $A \in \Lambda^t SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = -1$ e $\operatorname{sgn}(a_{n+1, n+1}) = -1$;
- d) $A \in \Lambda^{pt} SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = 1$ e $\operatorname{sgn}(a_{n+1, n+1}) = -1$.

Utilizando novamente (2.36), concluimos que o subgrupo $SO(n, 1)$ definido em (2.23) é dado pela união disjunta $SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda^{pt} SO_0(n, 1)$, que é um subgrupo normal de $O(n, 1)$, uma vez que ele é o núcleo do epimorfismo \det . Na próxima seção, mostraremos que $SO_0(n, 1)$ também é um subgrupo normal de $O(n, 1)$. Além disso, $O(n, 1)$, $SO(n, 1)$ e $SO_0(n, 1)$ são todos grupos de Lie lineares. Para verificar tal afirmação, considere a aplicação contínua $\varphi : GL_{n+1}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_{n+1}(\mathbb{R})$ definida por

$$\varphi(A) = A^T J A.$$

Como $\{J\}$ é um subconjunto fechado de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ e $O(n, 1) = \varphi^{-1}(J)$, obtemos que $O(n, 1)$ é um subgrupo fechado de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$. Ademais, como toda componente conexa de um espaço topológico é sempre fechada, concluimos que $SO_0(n, 1)$ e $SO(n, 1)$ são ambos subgrupos fechados de $O(n, 1)$ e, portanto, de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

2.4 $O(n, 1)$ como um produto semidireto

Mostraremos nesta seção que $O(n, 1)$ pode ser escrito como um produto semidireto da componente conexa da identidade $SO_0(n, 1)$ com um subgrupo de Lorentz finito de ordem 4, dado como um produto direto de dois subgrupos gerados por involuções. Começaremos lembrando a definição de produtos semidireto e direto.

Definição 2.12. *Sejam Σ e Δ dois subgrupos de um grupo Γ qualquer. Dizemos que Γ é o produto semidireto de Σ por Δ se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- a) $\Sigma \triangleleft \Gamma$;
- b) $\Sigma \cap \Delta = \{e\}$;

$$c) \Gamma = \Sigma\Delta.$$

Neste caso, denotamos $\Gamma = \Sigma \rtimes \Delta$. Dizemos que $\Gamma = \Sigma \rtimes \Delta$ é o **produto direto** de Σ por Δ se Σ e Δ comutarem. Neste caso, escrevemos apenas $\Gamma = \Sigma \times \Delta$.

Para demonstrar que $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo normal de $O(n, 1)$, utilizaremos o próximo resultado.

Proposição 2.13. *Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ matrizes em $O(n, 1)$, com $C = AB$. Então*

$$\operatorname{sgn}(c_{n+1\ n+1}) = \operatorname{sgn}(a_{n+1\ n+1}) \operatorname{sgn}(b_{n+1\ n+1}).$$

Demonstração: Pela Proposição 2.5, a matriz A pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & \varepsilon v \\ \varepsilon v^T & |c| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QS_1 & \varepsilon Qv \\ v^T & \varepsilon|c| \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

onde $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon = \pm 1$, $S_1 = \sqrt{I_n + vv^T}$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$. Neste caso, $a_{n+1\ n+1} = \varepsilon|c|$. Sendo Q uma matriz ortogonal, temos $Q^T Q = I_n$ e, assim,

$$\|\varepsilon Qv\|^2 = (\varepsilon Qv)^T \varepsilon Qv = v^T Q^T Qv = v^T v = \|v\|^2.$$

Logo, concluímos que $\|\varepsilon Qv\| = \|v\|$. De maneira análoga, escrevendo

$$B = \begin{bmatrix} RS'_1 & \varepsilon' R w \\ w^T & \varepsilon'|d| \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

com $R \in O_n(\mathbb{R})$, $\varepsilon' = \pm 1$, $S'_1 = \sqrt{I_n + ww^T}$ e $|d| = \sqrt{\|w\|^2 + 1}$, é possível mostrar que $\|\varepsilon' R w\| = \|w\|$. Neste caso, $b_{n+1\ n+1} = \varepsilon'|d|$. De (2.37) e (2.38), se $C = AB$, então

$$c_{n+1\ n+1} = v^T \varepsilon' R w + \varepsilon \varepsilon' |c| |d| = \varepsilon \varepsilon' |c| |d| + \langle v, \varepsilon' R w \rangle.$$

Temos agora dois casos a considerar:

Caso 1. Se $\text{sgn}(\varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon')$, então

$$\begin{aligned} c_{n+1n+1} &= |cd| + \langle v, \varepsilon' R w \rangle \geq |cd| - |\langle v, \varepsilon' R w \rangle| \\ &\geq |cd| - \|v\| \|\varepsilon' R w\| \\ &= \sqrt{\|v\|^2 + 1} \sqrt{\|w\|^2 + 1} - \|v\| \|w\| > 0, \end{aligned}$$

pois $\sqrt{\|v\|^2 + 1} \sqrt{\|w\|^2 + 1} = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 1} > \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2} = \|v\| \|w\|$.

Assim,

$$\text{sgn}(c_{n+1n+1}) = 1 = \text{sgn}(\varepsilon) \text{sgn}(\varepsilon') = \text{sgn}(\varepsilon|c|) \text{sgn}(\varepsilon'|d|) = \text{sgn}(a_{n+1n+1}) \text{sgn}(b_{n+1n+1}).$$

Caso 2. Se $\text{sgn}(\varepsilon) \neq \text{sgn}(\varepsilon')$, então

$$\begin{aligned} c_{n+1n+1} &= -|cd| + \langle v, \varepsilon' R w \rangle \leq -|cd| + |\langle v, \varepsilon' R w \rangle| \\ &\leq -|cd| + \|v\| \|\varepsilon' R w\| \\ &= -\sqrt{\|v\|^2 + 1} \sqrt{\|w\|^2 + 1} + \|v\| \|w\| < 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\text{sgn}(c_{n+1n+1}) = -1$. Portanto, $\text{sgn}(c_{n+1n+1}) = \text{sgn}(a_{n+1n+1}) \text{sgn}(b_{n+1n+1})$, uma vez que $\text{sgn}(a_{n+1n+1}) = \text{sgn}(\varepsilon|c|) = -\text{sgn}(\varepsilon'|d|) = -\text{sgn}(b_{n+1n+1})$. ■

Proposição 2.14. $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo normal de $O(n, 1)$.

Demonstração: Primeiro, vamos mostrar que $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo de $O(n, 1)$. Pelo Corolário 2.11, dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in SO_0(n, 1)$, temos

$$\det(A) = \det(B) = \text{sgn}(a_{n+1n+1}) = \text{sgn}(b_{n+1n+1}) = 1.$$

Assim, $\det(AB) = \det(A) \det(B) = 1$. Além disso, segue da Proposição 2.13 que se $C = AB = [c_{ij}]$, então

$$\text{sgn}(c_{n+1n+1}) = \text{sgn}(a_{n+1n+1}) \text{sgn}(b_{n+1n+1}) = 1.$$

Logo, pelo Corolário 2.11, $C \in SO_0(n, 1)$, o que implica que $SO_0(n, 1)$ é fechado para

a operação de multiplicação de matrizes. Para verificar que $A^{-1} \in SO_0(n, 1)$ para toda $A \in SO_0(n, 1)$, vamos utilizar a igualdade $A^T J A = J$, onde J é como em (2.6). Segue que $A^{-1} = J A^T J$. Como $\det(J) = -1$, então $\det(A^{-1}) = \det(A^T) = \det(A) = 1$. Denote $A^{-1} = [a_{lk}^{-1}]$ e $J = [j_{lk}]$. Pela Proposição 2.13,

$$\operatorname{sgn}(a_{n+1 n+1}^{-1}) = \operatorname{sgn}(j_{n+1 n+1}) \operatorname{sgn}(a_{n+1 n+1}) \operatorname{sgn}(j_{n+1 n+1}) = \operatorname{sgn}(a_{n+1 n+1}) = 1. \quad (2.39)$$

Novamente pelo Corolário 2.11, concluímos que $A^{-1} \in SO_0(n, 1)$ e, portanto, $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo de $O(n, 1)$.

Vamos agora mostrar que para toda $A \in SO_0(n, 1)$ e $B \in O(n, 1)$, temos que $BAB^{-1} \in SO_0(n, 1)$. De fato, fazendo $C = BAB^{-1} = [c_{ij}]$, segue que

$$\det(C) = \det(B) \det(A) \det(B^{-1}) = \det(B) \det(B^{-1}) = 1.$$

Denotando $B^{-1} = [b_{ij}^{-1}]$, utilizamos os mesmos passos de (2.39) para concluir que $\operatorname{sgn}(b_{n+1 n+1}^{-1}) = \operatorname{sgn}(b_{n+1 n+1})$, visto que $B \in O(n, 1)$ e, portanto, $B^{-1} = J B^T J$. Dessa forma, como $\operatorname{sgn}(a_{n+1 n+1}) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(c_{n+1 n+1}) &= \operatorname{sgn}(b_{n+1 n+1}) \operatorname{sgn}(a_{n+1 n+1}) \operatorname{sgn}(b_{n+1 n+1}^{-1}) \\ &= \operatorname{sgn}(b_{n+1 n+1}) \operatorname{sgn}(b_{n+1 n+1}^{-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.11, temos que $C = BAB^{-1} \in SO_0(n, 1)$, o que nos mostra que $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo normal de $O(n, 1)$. ■

Como $SO_0(n, 1)$ tem estrutura de grupo, as quatro componentes conexas de $O(n, 1)$ denotadas em (2.35) são classes laterais de $SO_0(n, 1)$, o que implica que $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo normal de $O(n, 1)$ de índice 4. No caso do grupo ortogonal $O_n(\mathbb{R})$, duas matrizes não podem ser conjugadas se não pertencerem à mesma componente conexa⁴. Vamos mostrar que o mesmo ocorre em $O(n, 1)$.

⁴É conhecido que $O_n(\mathbb{R})$ tem duas componentes conexas, $SO_n(\mathbb{R})$ e $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$, compostas pelas matrizes de $O_n(\mathbb{R})$ com determinante igual a 1 e a -1 , respectivamente. Se duas matrizes $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ forem conjugadas, existirá $C \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $B = C A C^{-1}$. Então $\det(B) = \det(A)$, implicando que A e B devem pertencer à mesma componente conexa de $O_n(\mathbb{R})$.

Teorema 2.15. *Sejam $A, B \in O(n, 1)$. Se A e B forem conjugadas em $O(n, 1)$, então elas pertencerão à mesma componente conexa.*

Demonstração: Suponha que $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sejam conjugadas em $O(n, 1)$, ou seja, existe $P = [p_{ij}] \in O(n, 1)$ tal que $A = PBP^{-1}$. Logo,

$$\det(A) = \det(P) \det(B) \det(P^{-1}) = \det(B).$$

Como $P \in O(n, 1)$, temos que $P^{-1} = JP^T J$. Denotando $P^{-1} = [p_{ij}^{-1}]$, utilizamos novamente os passos de (2.39) para obter que $\text{sgn}(p_{n+1 n+1}^{-1}) = \text{sgn}(p_{n+1 n+1})$. Pela Proposição 2.13,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(a_{n+1 n+1}) &= \text{sgn}(p_{n+1 n+1}) \text{sgn}(b_{n+1 n+1}) \text{sgn}(p_{n+1 n+1}^{-1}) \\ &= \text{sgn}(b_{n+1 n+1}) (\text{sgn}(p_{n+1 n+1}))^2 \\ &= \text{sgn}(b_{n+1 n+1}). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 2.11, A e B pertencem à mesma componente conexa. ■

Uma classe particularmente importante de matrizes em $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ são as involuções. Em cada área da matemática, a definição de involução é adaptada para as necessidades específicas. Em nosso contexto, vamos assumir que involuções são matrizes em $O(n, 1)$ iguais à sua inversa.

Definição 2.16. *Uma involução é uma matriz $A \in O(n, 1)$ tal que $A \neq I_{n+1}$ e $A^2 = I_{n+1}$.*

Denotaremos por $\mathbb{Z}_2(\delta)$ o grupo cíclico de ordem 2 gerado pela involução δ . Mostraremos que o grupo $G = [\Lambda^p, \Lambda^t]$ gerado pelas matrizes Λ^p e Λ^t é um subgrupo abeliano de $O(n, 1)$ dado pelo produto direto $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$. De fato, como Λ^p e Λ^t são involuções que comutam e $\Lambda^{pt} = \Lambda^p \Lambda^t$, então G é um grupo abeliano descrito pelo conjunto $G = \{I_{n+1}, \Lambda^p, \Lambda^t, \Lambda^{pt}\}$. Considere agora o grupo

$$\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t) = \{\gamma_1 \gamma_2; \gamma_1 \in \mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \text{ e } \gamma_2 \in \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)\}$$

que também é abeliano, uma vez que $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p)$ e $\mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$ são grupos abelianos que comutam. Veja que o produto direto $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$ contém exatamente as quatro matrizes

de G , ou seja, $G = \mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$.

Nosso objetivo agora é escrever $O(n, 1)$ como o produto semidireto de seu subgrupo normal $SO_0(n, 1)$ pelo subgrupo abeliano $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$.

Proposição 2.17. *O grupo de Lorentz $O(n, 1)$ pode ser escrito como*

$$O(n, 1) = SO_0(n, 1) \rtimes (\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)).$$

Demonstração: Como $\Lambda^i \notin SO_0(n, 1)$, para $i \in \{p, t, pt\}$, é imediato que

$$SO_0(n, 1) \cap (\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)) = \{I_{n+1}\}.$$

Pela Proposição 2.14, temos que $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo normal de $O(n, 1)$. Então, pela Definição 2.12, basta verificar que $O(n, 1) = SO_0(n, 1)(\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t))$. Pela igualdade (2.35), dada $A \in O(n, 1)$, existe $B \in SO_0(n, 1)$ tal que

$$A = BI_{n+1} \in SO_0(n, 1) \quad \text{ou} \quad A = \Lambda^i B \in \Lambda^i SO_0(n, 1),$$

para algum $i \in \{p, t, pt\}$. Como $SO_0(n, 1)$ é normal em $O(n, 1)$, suas classes laterais à esquerda coincidem com as suas classes laterais à direita, ou seja,

$$\Lambda^i SO_0(n, 1) = SO_0(n, 1)\Lambda^i$$

para todo $i \in \{p, t, pt\}$. Assim, se $A \in \Lambda^i SO_0(n, 1)$, então existe $B' \in SO_0(n, 1)$ tal que $A = B'\Lambda^i \in SO_0(n, 1)\Lambda^i$. Portanto, $O(n, 1) = SO_0(n, 1)(\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t))$ e, consequentemente, $O(n, 1) = SO_0(n, 1) \rtimes (\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t))$. ■

Exemplo 2.18. Pela proposição anterior, o grupo de Lorentz $O(1, 1)$ pode ser escrito como

$$O(1, 1) = SO_0(1, 1) \rtimes (\mathbb{Z}_2(\Lambda^p) \times \mathbb{Z}_2(\Lambda^t)),$$

onde

$$\Lambda^p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J.$$

Pela decomposição em valores singulares, $SO_0(1, 1)$ é o grupo das rotações hiperbólicas

$$\gamma_\theta = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

com $\theta \in \mathbb{R}$. De fato, pelo Teorema 2.7, uma matriz $A \in O(1, 1)$ pode ser escrita como

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cosh \theta & P \sinh \theta \\ \varepsilon \sinh \theta & \varepsilon \cosh \theta \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

com $P\varepsilon = \pm 1$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Utilizando o Corolário 2.11, obtemos que $A \in SO_0(1, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = 1$ e $a_{2,2} = \varepsilon \cosh \theta > 0$. Como $\cosh \theta > 0$ e $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, então $\varepsilon = 1$ e $\det(A) = P\varepsilon = 1$, de modo que $P = 1$. Portanto, as matrizes de $SO_0(1, 1)$ são da forma (2.40), com $\theta \in \mathbb{R}$. Assim, toda matriz no grupo de Lorentz $O(1, 1)$ é dada pelo produto $M = \gamma_\theta(\Lambda^p)^i(\Lambda^t)^j$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$ e $i, j \in \{0, 1\}$.

2.5 Invariantes e equivariantes em \mathbb{R}_1^{n+1}

Nesta seção, vamos retomar o estudo da teoria invariante de grupos, agora no contexto dos espaços de Minkowski. Nosso principal objetivo será apresentar um algoritmo (Algoritmo 2.26) para calcular os invariantes sob a ação de subgrupos $\Gamma \subset O(n, 1)$ contendo involuções. Também apresentaremos a versão de Minkowski do Teorema 1.28 dividida em dois resultados. O primeiro deles (Proposição 2.20) mostra que uma aplicação Γ -equivariante pode ser construída a partir de uma função Γ -invariante e vice-versa (veja a Definição 1.20 e a Definição 1.25). O segundo (Teorema 2.21) exhibe um conjunto de geradores para o módulo dos Γ -equivariantes em \mathbb{R}_1^{n+1} utilizando a relação estabelecida na Proposição 2.20.

É conhecido no contexto euclidiano que se Γ é um subgrupo de $O_n(\mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Γ -invariante, então a aplicação gradiente⁵ $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Γ -equivariante sob a mesma ação (veja [12, XII, §10 (d)]). O resultado correspondente para os subgrupos de Lorentz é dado a seguir.

⁵A aplicação gradiente $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida como $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.19. *Sejam $\Gamma \subset O(n, 1)$ um subgrupo de Lorentz e $f : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Γ -invariante. Então, $J\nabla f : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ é uma aplicação Γ -equivariante.*

Demonstração: Sejam $f : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Γ -invariante e $\gamma \in \Gamma$. Por definição,

$$f(\gamma x) = f(x) \quad (2.42)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Derivando ambos os lados de (2.42) com relação a x , obtemos pela regra da cadeia que

$$(df)_{\gamma x} \gamma = (df)_x,$$

onde $(df)_x$ denota a matriz da diferencial de f com respeito a x no ponto x e γ denota a matriz do operador linear $\rho_\gamma : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ dado por $\rho_\gamma(x) = \gamma x$. Como $\Gamma \subset O(n, 1)$, então $\gamma^T J \gamma = J$, de onde obtemos que $\gamma^{-1} = J \gamma^T J$. Portanto,

$$(df)_{\gamma x} = (df)_x \gamma^{-1} = (df)_x J \gamma^T J. \quad (2.43)$$

Vamos denotar por $\nabla f(x)$ as coordenadas do vetor gradiente $\nabla f(x) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ com respeito a uma base de \mathbb{R}_1^{n+1} fixada. Uma vez que $\nabla f(x) = (df)_x^T$, $J^T = J$ e $J^2 = I_{n+1}$, segue de (2.43) que

$$J\nabla f(\gamma x) = J(df)_{\gamma x}^T = J(J\gamma J(df)_x^T) = \gamma J\nabla f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. A arbitrariedade de $\gamma \in \Gamma$ nos permite concluir que $J\nabla f$ é uma aplicação Γ -equivariante. ■

A proposição anterior é o ponto de partida para estabelecermos, no contexto de Minkowski, uma relação entre funções Γ -invariantes e aplicações Γ -equivariantes, como segue.

Proposição 2.20. *Seja $\Gamma \subset O(n, 1)$ um subgrupo de Lorentz. Existe uma correspondência biunívoca entre as aplicações Γ -equivariantes em \mathbb{R}_1^{n+1} e as funções Γ -invariantes definidas em $\mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1}$ deriváveis com relação à segunda coordenada.*

Demonstração: Dado $\Gamma \subset O(n, 1)$, seja $g : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ uma aplicação Γ -equivariante

e defina

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle g(x), y \rangle_1, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ é o pseudo produto interno dado em (2.5). Mostraremos que f é Γ -invariante sob a ação diagonal de Γ em $\mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1}$ definida por

$$\gamma(x, y) = (\gamma x, \gamma y). \quad (2.45)$$

Para isso, vamos identificar o vetor $g(x) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ com a sua matriz coluna dada por suas coordenadas com respeito a uma base fixada de \mathbb{R}_1^{n+1} . De fato, segue pela Γ -equivariância de g e por (2.5) que

$$\begin{aligned} f(\gamma x, \gamma y) &= \langle g(\gamma x), \gamma y \rangle_1 = \langle \gamma g(x), \gamma y \rangle_1 \\ &= [\gamma g(x)]^T J \gamma y = g(x)^T \gamma^T J \gamma y \\ &= g(x)^T J y = \langle g(x), y \rangle_1 = f(x, y), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $(x, y) \in \mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1}$, onde na quinta igualdade utilizamos que $\gamma \in O(n, 1)$. Vamos mostrar que a matriz da diferencial de f com respeito a y no ponto $(x, 0)$ é dada por

$$(d_y f)_{x,0} = g(x)^T J.$$

Escreva $g(x) = (g_1(x), \dots, g_{n+1}(x))$ e $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$. Em termos matriciais, temos

$$\begin{aligned} (d_y f)_{x,y} &= d_y(\langle g(x), y \rangle_1) \\ &= d_y \left(\sum_{i=1}^n g_i(x) y_i - g_{n+1}(x) y_{n+1} \right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\sum_{i=1}^n g_i(x) y_i - g_{n+1}(x) y_{n+1} \right) \cdots \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n g_i(x) y_i - g_{n+1}(x) y_{n+1} \right) \right] \\ &= [g_1(x) \quad \cdots \quad g_n(x) \quad -g_{n+1}(x)] \\ &= g(x)^T J. \end{aligned}$$

Portanto, se f for como em (2.44), então existirá a diferencial de f com respeito a y dada por $(d_y f)_{x,y} = g(x)^T J$. Em particular, $(d_y f)_{x,0} = g(x)^T J$ para todo $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Por outro lado, podemos obter aplicações Γ -equivariantes a partir de funções Γ -invariantes $f : \mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis na segunda coordenada por meio da relação

$$g(x) = J(d_y f)_{x,0}^T. \quad (2.46)$$

De fato, como vimos anteriormente, a igualdade (2.46) é uma consequência imediata de (2.44), uma vez que $JJ^T = J^2 = I_{n+1}$. De modo geral, afirmamos que a aplicação g definida em (2.46) é Γ -equivariante independentemente da função Γ -invariante $f : \mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Com efeito, derivando ambos os lados da igualdade $f(\gamma x, \gamma y) = f(x, y)$ com respeito à variável y e avaliando em $y = 0$, obtemos

$$(d_y f)_{\gamma x, 0} \gamma = (d_y f)_{x, 0}.$$

Logo, $\gamma^T (d_y f)_{\gamma x, 0}^T = (d_y f)_{x, 0}^T$. Da igualdade (2.46), como $J^2 = I_{n+1}$, concluímos que

$$\gamma^T Jg(\gamma x) = Jg(x), \quad (2.47)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Multiplicando ambos os lados de (2.47) por $J(\gamma^T)^{-1}$ e lembrando que Γ é um subgrupo de $O(n, 1)$, obtemos

$$g(\gamma x) = J(\gamma^T)^{-1} Jg(x) = J^2 \gamma g(x) = \gamma g(x)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, uma vez que $\gamma^T J \gamma = J$ implica em $J \gamma = (\gamma^T)^{-1} J$. Portanto, g é Γ -equivariante. ■

O próximo teorema é uma adaptação do Teorema 1.28 para os subgrupos de Lorentz $\Gamma \subset O(n, 1)$ agindo no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} . Embora o Teorema 1.28 seja enunciado para grupos compactos, ele também é válido para grupos não compactos desde que o anel das funções Γ -invariantes definidas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ admita uma base de Hilbert. No contexto de Minkowski, os subgrupos $\Gamma \subset O(n, 1)$ não são necessariamente compactos. Logo, precisaremos impor a mesma condição.

Assim como fizemos no contexto euclidiano, vamos denotar por $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ o módulo

das aplicações polinomiais Γ -equivariantes $\mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ das funções polinomiais $\mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ que são Γ -invariantes. Além disso, vamos denotar por $\mathcal{P}_d(\Gamma)$ o anel das funções polinomiais $\mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ que são Γ -invariantes segundo a ação diagonal definida em (2.45). A ideia na demonstração do Teorema 2.21 é utilizar a igualdade (2.46) para obter geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$ a partir de uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_d(\Gamma)$, caso tal base exista.

Teorema 2.21. *Sejam $\Gamma \subset O(n, 1)$ um subgrupo de Lorentz e $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_d(\Gamma)$. Então,*

$$J(d_y u_1)_{x,0}^T, \dots, J(d_y u_s)_{x,0}^T \quad (2.48)$$

formam um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Demonstração: Dada $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$, considere a $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$, temos que existe uma função Γ -invariante $f : \mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = J(d_y f)_{x,0}^T$, cuja existência é garantida pela proposição anterior. Como $\{u_1, \dots, u_s\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_d(\Gamma)$, existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = h(u_1(x, y), \dots, u_s(x, y)),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Isso implica que

$$\begin{aligned} g(x) &= J(d_y f)_{x,0}^T \\ &= J \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0)) \frac{\partial u_i}{\partial y_1}(x, 0) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^s \frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0)) \frac{\partial u_i}{\partial y_{n+1}}(x, 0) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^s \frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0)) J(d_y u_i)_{x,0}^T. \end{aligned}$$

Pela relação (2.46), definindo $g_i(x) = J(d_y u_i)_{x,0}^T$, obtemos que $g_1, \dots, g_s \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$. Também, definindo $h_i : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_i(x) = \frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0)),$$

temos que $h_1, \dots, h_s \in \mathcal{P}(\Gamma)$. De fato, como $u_i(\gamma x, \gamma y) = u_i(\gamma(x, y)) = u_i(x, y)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, então

$$h_i(\gamma x) = \frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1(\gamma x, 0), \dots, u_s(\gamma x, 0)) = \frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0)) = h_i(x).$$

para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Portanto,

$$g(x) = \sum_{i=1}^s h_i(x)g_i(x),$$

com $h_i \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $g_i(x) = J(d_y u_i)_{x,0}^T \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$. Pela arbitrariedade de $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$, temos que as aplicações Γ -equivariantes dadas em (2.48) geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, ou seja, $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é finitamente gerado sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$. ■

Nosso objetivo agora é introduzir um método algébrico, o Algoritmo 2.26, que nos retornará um conjunto de geradores para o anel das funções Γ -invariantes sob uma classe dos subgrupos de Lorentz $\Gamma \subset O(n, 1)$ gerados por involuções. Mais especificamente, considere

$$\Gamma = \Sigma \rtimes \Delta,$$

onde Σ é um subgrupo normal de Γ tal que o anel $\mathcal{P}(\Sigma)$ dos Σ -invariantes é finitamente gerado e

$$\Delta = \mathbb{Z}_2(\delta_1) \rtimes \dots \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_m),$$

com $\delta_1, \dots, \delta_m \in \Gamma$ involuções. Queremos determinar os geradores do anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ das funções polinomiais Γ -invariantes a partir dos geradores do anel $\mathcal{P}(\Sigma)$. Para isso, vamos utilizar m vezes o Teorema 1.39 juntamente com os operadores de Reynolds $R, S : \mathcal{P}(\Lambda_+) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda_+)$ definidos como em (1.11), em que Λ_+ é o núcleo de um determinado epimorfismo $\sigma : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Neste caso, se $\{u_1, \dots, u_s\}$ for um conjunto gerador do anel $\mathcal{P}(\Lambda_+)$, então

$$\{R(u_i), S(u_i)S(u_j); 1 \leq i, j \leq s\} \quad (2.49)$$

irá gerar o anel $\mathcal{P}(\Lambda)$. Em nossa abordagem, começaremos considerando $\Lambda_+ = \Sigma$ e $\Lambda = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)$. Em seguida, consideramos $\tilde{\Lambda}_+ = \Lambda$ e $\tilde{\Lambda} = \Lambda \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2)$, procedendo

sucessivamente até o caso em que

$$\Gamma_+ = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1) \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_{m-1}) \quad \text{e} \quad \Gamma = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1) \rtimes \cdots \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_m).$$

Mostraremos a seguir que o produto semidireto $\Gamma = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta)$ sempre será epimorfo ao grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$.

Proposição 2.22. *Se $\Gamma = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta)$, então existe um epimorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ com núcleo igual a Σ .*

Demonstração: Defina a aplicação $\sigma : \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $\sigma(\varepsilon) = 1$ e $\sigma(\varepsilon\delta) = -1$, para todo $\varepsilon \in \Sigma$. Dados $\gamma_1 = \varepsilon\delta^\alpha, \gamma_2 = \varepsilon'\delta^\beta \in \Gamma$, com $\varepsilon, \varepsilon' \in \Sigma$ e $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, temos os seguintes casos:

Caso 1. Se $\alpha = \beta = 0$, então $\gamma_1 = \varepsilon, \gamma_2 = \varepsilon' \in \Sigma$. Neste caso,

$$\sigma(\gamma_1\gamma_2) = \sigma(\varepsilon\varepsilon') = 1 = \sigma(\varepsilon)\sigma(\varepsilon') = \sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2).$$

Caso 2. Se $\alpha = \beta = 1$, então $\gamma_1 = \varepsilon\delta$ e $\gamma_2 = \varepsilon'\delta$. Neste caso, como Σ é um subgrupo normal de Γ , existe $\varepsilon'' \in \Sigma$ tal que $\gamma_1\gamma_2 = \varepsilon\delta\varepsilon'\delta = \varepsilon\varepsilon''\delta^2 = \varepsilon\varepsilon'' \in \Sigma$, bastando reescrever $\delta\varepsilon' = \varepsilon''\delta$, uma vez que $\delta\Sigma = \Sigma\delta$. Assim,

$$\sigma(\gamma_1\gamma_2) = \sigma(\varepsilon\varepsilon'') = 1 = (-1)(-1) = \sigma(\varepsilon\delta)\sigma(\varepsilon'\delta) = \sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2).$$

Caso 3. Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, então $\gamma_1 = \varepsilon \in \Sigma$ e $\gamma_2 = \varepsilon'\delta$, de onde temos

$$\sigma(\gamma_1\gamma_2) = \sigma(\varepsilon\varepsilon'\delta) = -1 = \sigma(\varepsilon)\sigma(\varepsilon'\delta) = \sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2),$$

uma vez que $\varepsilon\varepsilon' \in \Sigma$. Analogamente ao que fizemos no Caso 3, mostra-se que para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ também vale $\sigma(\gamma_1\gamma_2) = \sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)$. Portanto, σ é um homomorfismo de grupos. Ademais, como σ é sobrejetora por definição, concluímos que σ é um epimorfismo de grupos com núcleo Σ . ■

Mostraremos agora que o produto semidireto de dois grupos de ordem 2 sempre comuta, ou seja, é sempre direto.

Proposição 2.23. *Seja $G = \mathbb{Z}_2(\delta_1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2)$, em que $\delta_1, \delta_2 \in \Gamma$ são duas involuções distintas. Então $G = \mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2)$.*

Demonstração: Seja $G = \mathbb{Z}_2(\delta_1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2)$. Como $\delta_1, \delta_2 \in G$, então $\delta_2\delta_1 \in G$, ou seja, $\delta_2\delta_1 = ab$ para $a \in \mathbb{Z}_2(\delta_1)$ e $b \in \mathbb{Z}_2(\delta_2)$. Se $a = b = I_{n+1}$, então $\delta_1 = \delta_2$, o que não pode ocorrer, visto que $\mathbb{Z}_2(\delta_1) \cap \mathbb{Z}_2(\delta_2) = \{I_{n+1}\}$. Se tivermos $a = I_{n+1}$ e $b = \delta_2$, então $\delta_1\delta_2 = \delta_2$. Assim, obtemos $\delta_1 = I_{n+1}$, o que é uma contradição, pois δ_1 é uma involução. Analogamente, se $a = \delta_1$ e $b = I_{n+1}$, então $\delta_2 = I_{n+1}$, o que não ocorre. Logo, apenas podemos ter $\delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1$. Dessa forma, $\mathbb{Z}_2(\delta_1)$ comuta com $\mathbb{Z}_2(\delta_2)$ e concluímos que $\mathbb{Z}_2(\delta_1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2) = \mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2)$. ■

Procedendo por indução sobre o número m de involuções, obtemos a seguinte generalização:

Corolário 2.24. *Sejam $\delta_1, \dots, \delta_m \in \Gamma$ involuções. Se $G = \mathbb{Z}_2(\delta_1) \rtimes \dots \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_m)$, então $G = \mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \dots \times \mathbb{Z}_2(\delta_m)$.*

Portanto, nas hipóteses do corolário anterior, G é o grupo $[\delta_1, \dots, \delta_m]$ gerado pelas involuções $\delta_1, \dots, \delta_m$. De um modo mais geral, se $\Gamma = \Sigma \rtimes G$, a próxima proposição estabelece uma outra forma de decompor Γ como um produto semidireto.

Proposição 2.25. *Seja $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \dots \times \mathbb{Z}_2(\delta_m))$, com Σ um subgrupo normal de Γ e $\delta_1, \dots, \delta_m$ involuções distintas. Então $\Gamma = (\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \dots \times \mathbb{Z}_2(\delta_{m-1})) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_m)$.*

Demonstração: Faremos a demonstração apenas para $m = 2$. O caso geral segue de maneira análoga. Suponha $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2))$. Pela Definição 2.12, para concluir que $\Gamma = (\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2)$, precisamos mostrar que $\Delta = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)$ é um subgrupo normal de Γ , que $\Delta \cap \mathbb{Z}_2(\delta_2) = \{I_{n+1}\}$ e que $\Gamma = \Delta \mathbb{Z}_2(\delta_2)$. Começaremos mostrando que Δ é um subgrupo normal de Γ . Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $\delta \in \Delta$. Como $\Delta = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)$, existe $\varepsilon \in \Sigma$ tal que $\delta = \varepsilon$ ou $\delta = \varepsilon\delta_1$. Se $\delta = \varepsilon$, então $\gamma\delta\gamma^{-1} = \gamma\varepsilon\gamma^{-1} \in \Sigma$, pois Σ é normal em Γ . Como $\Sigma \subset \Delta$, segue que $\gamma\delta\gamma^{-1} \in \Delta$. Se $\delta = \varepsilon\delta_1$, então

$$\gamma\delta\gamma^{-1} = \gamma\varepsilon\delta_1\gamma^{-1} = (\gamma\varepsilon\gamma^{-1})\gamma\delta_1\gamma^{-1} = \varepsilon_1\gamma\delta_1\gamma^{-1} \quad (2.50)$$

para algum $\varepsilon_1 \in \Sigma \subset \Delta$. Afirmamos que $\gamma\delta_1\gamma^{-1} \in \Delta$. De fato, como $\gamma \in \Gamma$, existe $\varepsilon_2 \in \Sigma$

tal que $\gamma = \varepsilon_2 \delta_1^\alpha \delta_2^\beta$ para $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Assim, como $\mathbb{Z}_2(\delta_1)$ e $\mathbb{Z}_2(\delta_2)$ comutam, temos

$$\gamma \delta_1 \gamma^{-1} = \varepsilon_2 \delta_1^\alpha \delta_2^\beta \delta_1 \delta_2^{-\beta} \delta_1^{-\alpha} \varepsilon_2^{-1} = \varepsilon_2 \delta_1^{\alpha+1-\alpha} \delta_2^{\beta-\beta} \varepsilon_2^{-1} = \varepsilon_2 \delta_1 \varepsilon_2^{-1},$$

com $\varepsilon_2, \delta_1 \in \Delta$, visto que $\Sigma \subset \Delta$. Logo, $\gamma \delta_1 \gamma^{-1} \in \Delta$. Segue de (2.50) que

$$\gamma \delta \gamma^{-1} = \varepsilon_1 \gamma \delta_1 \gamma^{-1} \in \Delta.$$

Portanto, Δ é normal em Γ . Mostraremos agora que $\Delta \cap \mathbb{Z}_2(\delta_2) = \{I_{n+1}\}$. Por hipótese, temos que $\Sigma \cap (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2)) = \{I_{n+1}\}$, o que implica que $\delta_1, \delta_2 \notin \Sigma$. Suponha por absurdo que $\delta_2 \in \Delta$. Então existe $\varepsilon \in \Sigma$ tal que $\delta_2 = \varepsilon \delta_1$. Como $\delta_1^2 = I_{n+1}$ e $\mathbb{Z}_2(\delta_1)$ comuta com $\mathbb{Z}_2(\delta_2)$, obtemos que

$$\varepsilon = \delta_2 \delta_1 = \delta_1 \delta_2 \in \mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2).$$

Assim, concluímos que $\varepsilon \in \Sigma \cap (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2)) = \{I_{n+1}\}$, de modo que $\delta_2 = \delta_1$, contrariando a hipótese. Logo, $\Delta \cap \mathbb{Z}_2(\delta_2) = \{I_{n+1}\}$. Resta mostrar que $\Gamma = \Delta \mathbb{Z}_2(\delta_2)$. Como $\Sigma, \mathbb{Z}_2(\delta_1)$ e $\mathbb{Z}_2(\delta_2)$ são subgrupos de Γ , temos que $\Delta \mathbb{Z}_2(\delta_2) \subset \Gamma$. Seja $\gamma \in \Gamma$ arbitrário. Como $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2))$, então $\gamma = \varepsilon \delta_1^\alpha \delta_2^\beta$, para $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Uma vez que $\varepsilon \delta_1^\alpha \in \Delta$, então $\gamma \in \Delta \mathbb{Z}_2(\delta_2)$, o que prova a igualdade. Dessa forma, $\Gamma = (\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2)$. ■

Para $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}_2(\delta_m))$, o procedimento apresentado no Algoritmo 2.26 utiliza a Proposição 2.22 e o Teorema 1.39 recursivamente em cada parcela do produto direto $\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}_2(\delta_m)$. Mais precisamente, pela Proposição 2.22 obtemos que Σ é um subgrupo normal de $\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)$, uma vez que existe um epimorfismo de grupos $\sigma_1 : \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ com núcleo Σ . Conhecida uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Sigma)$, utilizamos o Teorema 1.39 para determinar uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1))$, considerando os operadores de Reynolds R e S definidos em (1.11) para $\Gamma_+ = \Sigma$ e $\delta = \delta_1$. Novamente pela proposição 2.22, temos que $\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)$ é o núcleo de um epimorfismo $\sigma_2 : (\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e, portanto, é um subgrupo normal de $(\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2) = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2))$. Utilizando novamente o Teorema 1.39 e os operadores de Reynolds R e S dados em (1.11) para $\Gamma_+ = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)$

e $\delta = \delta_2$, construímos uma base de Hilbert para $\mathcal{P}((\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2))$. Repetindo este processo indutivamente, é possível determinar uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}_2(\delta_m)))$, como mostra o seguinte algoritmo:

Algoritmo 2.26. CÁLCULO DE GERADORES INVARIANTES

ENTRADA:

- Um conjunto $\{u_1, \dots, u_s\}$ de geradores para o anel $\mathcal{P}(\Sigma)$;
- Um conjunto de involuções $\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ que comutam duas a duas;

SAÍDA:

- Um conjunto finito de geradores para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, com $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}_2(\delta_m))$ ou $\Sigma \times (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}_2(\delta_m))$;

PROCEDIMENTO:

- $\Sigma_0 := \Sigma$;
- $u_{0i} := u_i$, para $i = 1, \dots, s$;
- $s_0 := s$;

Para k de 1 até m faça

$$\Sigma_k := \Sigma_{k-1} \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_k);$$

R e S definidos como em (1.11) para $\Gamma_+ = \Sigma_{k-1}$ e $\delta = \delta_k$;

Determine o conjunto em (2.49) a partir de $\{u_{k-1j}; j = 1, \dots, s_{k-1}\}$;

Retorne os geradores para $\mathcal{P}(\Sigma_k) : \{u_{k1}, \dots, u_{ks_k}\}$.

fim

Retorne os geradores para $\mathcal{P}(\Gamma) : \{u_{m1}, \dots, u_{ms_m}\}$.

Exemplo 2.27. Considere o subgrupo de Lorentz

$$\Gamma = \widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2)) \subset O(3, 1),$$

com

$$\widetilde{SO}_0(3, 1) = \left\{ \xi = \begin{bmatrix} \tilde{\xi} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \in GL_4(\mathbb{R}); \tilde{\xi} \in SO_2(\mathbb{R}) \right\} \quad (2.51)$$

e $\delta_1, \delta_2 \in O(3, 1)$ involuções definidas como

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & 0 & -\sinh \theta & -\cosh \theta \end{bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ 0 & 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix},$$

para $\theta \in \mathbb{R}^*$ fixado. Vamos construir um conjunto de geradores para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ das funções polinomiais Γ -invariantes $\mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ a partir de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\widetilde{SO}_0(3, 1))$.

Considere $\Sigma_0 := \widetilde{SO}_0(3, 1)$ e o conjunto de involuções $\{\delta_1, \delta_2\}$. Facilmente vemos que $\delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1$. A representação de $\widetilde{SO}_0(3, 1)$ em \mathbb{R}_1^4 é isomorfa à representação 4-dimensional padrão de $SO_2(\mathbb{R}) \times I_2$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Como $SO_2(\mathbb{R})$ e S^1 são grupos isomorfos, concluímos pelo Exemplo 1.22 que o anel $\mathcal{P}(SO_2(\mathbb{R}))$ dos $SO_2(\mathbb{R})$ -invariantes $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é gerado unicamente pela função⁶ $u_1(x, y) = x^2 + y^2$. O anel $\mathcal{P}(I_2)$ das funções $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é gerado por $u_2(z, t) = z$ e $u_3(z, t) = t$. Portanto, nas coordenadas $\bar{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}_1^4$, o conjunto

$$\{u_1(\bar{x}) = x^2 + y^2, \quad u_2(\bar{x}) = z, \quad u_3(\bar{x}) = t\}$$

gera o anel $\mathcal{P}(\widetilde{SO}_0(3, 1))$. Logo, $u_{0i} = u_i$, para $i = 1, 2, 3$ ($s_0 = 3$). Pelo Algoritmo 2.26, fazendo $k = 1$, começamos por obter uma base de Hilbert para o anel das funções polinomiais invariantes sob $\Sigma_1 = \widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)$. Definimos o epimorfismo $\sigma_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ por

$$\sigma_1(\gamma\delta_1^i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0 \\ -1, & \text{se } i = 1 \end{cases},$$

para todo $\gamma \in \widetilde{SO}_0(3, 1)$. Veja que $(\Sigma_1)_+ := \text{Nuc } \sigma_1 = \widetilde{SO}_0(3, 1) \times \{I_4\} \equiv \widetilde{SO}_0(3, 1)$. Tomaremos agora os operadores de Reynolds $R_1, S_1 : \mathcal{P}(\widetilde{SO}_0(3, 1)) \rightarrow \mathcal{P}(\widetilde{SO}_0(3, 1))$ definidos como em (1.11) para $\delta = \delta_1$, ou seja,

$$R_1(u)(\bar{x}) = \frac{1}{2}(u(\bar{x}) + u(\delta_1\bar{x})) \quad \text{e} \quad S_1(u)(\bar{x}) = \frac{1}{2}(u(\bar{x}) - u(\delta_1\bar{x})) \quad (2.52)$$

⁶Escrevendo $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

para $u \in \mathcal{P}(\widetilde{SO}_0(3, 1))$. Como

$$\delta_1 \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \cosh \theta z + \sinh \theta t \\ -\sinh \theta z - \cosh \theta t \end{bmatrix},$$

para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}_1^4$, segue que

$$R_1(u_{01})(\bar{x}) = R_1(u_1)(\bar{x}) = x^2 + y^2;$$

$$R_1(u_{02})(\bar{x}) = R_1(u_2)(\bar{x}) = \frac{1}{2}((\cosh \theta + 1)z + \sinh \theta t);$$

$$R_1(u_{03})(\bar{x}) = R_1(u_3)(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(\sinh \theta z + (\cosh \theta - 1)t);$$

$$S_1(u_{01})(\bar{x}) = S_1(u_1)(\bar{x}) = 0;$$

$$S_1(u_{02})(\bar{x}) = S_1(u_2)(\bar{x}) = -\frac{1}{2}((\cosh \theta - 1)z + \sinh \theta t);$$

$$S_1(u_{03})(\bar{x}) = S_1(u_3)(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\sinh \theta z + (\cosh \theta + 1)t).$$

Como $\theta \neq 0$, temos

$$R_1(u_{02}) = \frac{\sinh \theta}{1 - \cosh \theta} R_1(u_{03}) \quad \text{e} \quad S_1(u_{03}) = \frac{\sinh \theta}{1 - \cosh \theta} S_1(u_{02}).$$

Logo, determinando o conjunto dado em (2.49), concluimos que

$$\{R_1(u_{01}), R_1(u_{03}), S_1(u_{02})^2\}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1))$. Alternativamente, uma vez que

$$\frac{2}{1 - \cosh \theta} (S_1(u_{02})^2(\bar{x}) - R_1(u_{03})^2(\bar{x})) = z^2 - t^2$$

para todo $\bar{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}_1^4$, vamos considerar um outro conjunto gerador para o

anel $\mathcal{P}(\Sigma_1)$ dado por

$$\{u_{11}(\bar{x}) = x^2 + y^2, \quad u_{12}(\bar{x}) = \sinh \theta z + (\cosh \theta - 1)t, \quad u_{13}(\bar{x}) = z^2 - t^2\}.$$

Para $k = 2$, temos $\Sigma_2 = \Sigma_1 \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2)$. Defina o epimorfismo $\sigma_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ de modo que $(\Sigma_2)_+ := \text{Nuc } \sigma_2 = \Sigma_1 \times \{I_4\}$. Logo, $(\Sigma_2)_+ \cong \Sigma_1$. Defina os operadores de Reynolds $R_2, S_2 : \mathcal{P}(\Sigma_1) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma_1)$ como em (1.11) para $\delta = \delta_2$, ou seja,

$$R_2(u)(\bar{x}) = \frac{1}{2}(u(\bar{x}) + u(\delta_2\bar{x})) \quad \text{e} \quad S_2(u)(\bar{x}) = \frac{1}{2}(u(\bar{x}) - u(\delta_2\bar{x})), \quad (2.53)$$

para $u \in \mathcal{P}(\Sigma_1)$. Como

$$\delta_2\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\cosh \theta z - \sinh \theta t \\ \sinh \theta z + \cosh \theta t \end{bmatrix},$$

para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}_1^4$, obtemos

$$\begin{aligned} R_2(u_{11})(\bar{x}) &= x^2 + y^2; \\ R_2(u_{13})(\bar{x}) &= z^2 - t^2; \\ S_2(u_{12})(\bar{x}) &= -\frac{1}{2}(\sinh \theta z + (\cosh \theta - 1)t); \\ R_2(u_{12}) &= S_2(u_{11}) = S_2(u_{13}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Pelo Algoritmo 2.26, como $\Gamma = \Sigma_1 \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_2) = \Sigma_2$, concluímos que o conjunto

$$\{u_{21}(\bar{x}) = x^2 + y^2, \quad u_{22}(\bar{x}) = z^2 - t^2, \quad u_{23}(\bar{x}) = (\sinh \theta z + (\cosh \theta - 1)t)^2\}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Para finalizar o exemplo, vamos utilizar o Teorema 2.21 a fim de calcular um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ das aplicações polinomiais Γ -equivariantes sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Para isso, denote $(x, y) = (x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_1^4$ e considere a ação diagonal de $\widetilde{SO}_0(3, 1)$ em $\mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_1^4$ dada por $\xi(x, y) = (\xi x, \xi y)$, para

todo $\xi \in \widetilde{SO}_0(3, 1)$. Por (2.51), temos

$$\xi(x, y) = (\tilde{\xi}(x_1, x_2), x_3, x_4, \tilde{\xi}(y_1, y_2), y_3, y_4),$$

com $\tilde{\xi} \in SO_2(\mathbb{R})$. Como visto antes, o anel das funções polinomiais $SO_2(\mathbb{R})$ -invariantes definidas em \mathbb{R}^2 é gerado por $u(x, y) = x^2 + y^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} u_{01}(x, y) &= x_1^2 + x_2^2, & u_{02}(x, y) &= x_3, & u_{03}(x, y) &= x_4, \\ v_{01}(x, y) &= y_1^2 + y_2^2, & v_{02}(x, y) &= y_3, & v_{03}(x, y) &= y_4 \end{aligned} \quad (2.54)$$

são geradores do anel $\mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1))$ das funções $\widetilde{SO}_0(3, 1)$ -invariantes $\mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Com o auxílio do Maple (veja [23]), obtemos que as funções

$$w_{01}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1, \quad w_{02}(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 \quad (2.55)$$

juntamente com os geradores em (2.54) formam uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1))$. Considere então $R_1, S_1 : \mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1)) \rightarrow \mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1))$ definidos como em (2.52) para todo $u \in \mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1))$. Temos que:

$$\begin{aligned} R_1(u_{01})(x, y) &= x_1^2 + x_2^2; \\ R_1(u_{02})(x, y) &= \frac{1}{2}((\cosh \theta + 1)x_3 + \sinh \theta x_4); \\ R_1(u_{03})(x, y) &= -\frac{1}{2}(\sinh \theta x_3 + (\cosh \theta - 1)x_4); \\ S_1(u_{02})(x, y) &= -\frac{1}{2}((\cosh \theta - 1)x_3 + \sinh \theta x_4); \\ S_1(u_{03})(x, y) &= \frac{1}{2}(\sinh \theta x_3 + (\cosh \theta + 1)x_4); \\ R_1(v_{01})(x, y) &= y_1^2 + y_2^2; \\ R_1(v_{02})(x, y) &= \frac{1}{2}((\cosh \theta + 1)y_3 + \sinh \theta y_4); \\ R_1(v_{03})(x, y) &= -\frac{1}{2}(\sinh \theta y_3 + (\cosh \theta - 1)y_4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(v_{02})(x, y) &= -\frac{1}{2}((\cosh \theta - 1)y_3 + \sinh \theta y_4); \\ S_1(v_{03})(x, y) &= \frac{1}{2}(\sinh \theta y_3 + (\cosh \theta + 1)y_4); \\ S_1(u_{01}) &= S_1(v_{01}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Agora, para os geradores em (2.55), obtemos

$$R_1(w_{01}) = w_{01}, \quad R_1(w_{02}) = w_{02}, \quad S_1(w_{01}) = S_1(w_{02}) \equiv 0.$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} R_1(u_{02}) &= \frac{\sinh \theta}{1 - \cosh \theta} R_1(u_{03}), & S_1(u_{03}) &= \frac{\sinh \theta}{1 - \cosh \theta} S_1(u_{02}), \\ R_1(v_{02}) &= \frac{\sinh \theta}{1 - \cosh \theta} R_1(v_{03}), & S_1(v_{03}) &= \frac{\sinh \theta}{1 - \cosh \theta} S_1(v_{02}). \end{aligned}$$

Portanto, calculando o conjunto em (2.49), afirmamos que

$$\{R_1(u_{01}), R_1(u_{03}), R_1(v_{01}), R_1(v_{03}), R_1(w_{01}), R_1(w_{02}), S_1(u_{02})^2, S_1(v_{02})^2, S_1(u_{02})S_1(v_{02})\}$$

gera o anel $\mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1))$. No entanto, é possível verificar as igualdades

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - \cosh \theta} (S_1(u_{02})^2(x, y) - R_1(u_{03})^2(x, y)) &= x_3^2 - x_4^2, \\ \frac{2}{1 - \cosh \theta} (S_1(v_{02})^2(x, y) - R_1(v_{03})^2(x, y)) &= y_3^2 - y_4^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluimos que

$$\begin{aligned} u_{11}(x, y) &= x_1^2 + x_2^2, & u_{12}(x, y) &= \sinh \theta x_3 + (\cosh \theta - 1)x_4, & u_{13}(x, y) &= x_3^2 - x_4^2, \\ v_{11}(x, y) &= y_1^2 + y_2^2, & v_{12}(x, y) &= \sinh \theta y_3 + (\cosh \theta - 1)y_4, & v_{13}(x, y) &= y_3^2 - y_4^2, \\ w_{11}(x, y) &= x_1 y_2 - x_2 y_1, & w_{12}(x, y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2, \\ w_{13}(x, y) &= ((\cosh \theta - 1)x_3 + \sinh \theta x_4)((\cosh \theta - 1)y_3 + \sinh \theta y_4) \end{aligned}$$

são geradores do anel $\mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1))$. Defina agora como em (2.53) os operado-

res $R_2, S_2 : \mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1)) \rightarrow \mathcal{P}_d(\widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes \mathbb{Z}_2(\delta_1))$. Neste caso, obtemos:

$$\begin{aligned}
R_2(u_{11})(x, y) &= x_1^2 + x_2^2; \\
R_2(u_{13})(x, y) &= x_3^2 - x_4^2; \\
S_2(u_{12})(x, y) &= -\frac{1}{2}(\sinh \theta x_3 + (\cosh \theta - 1)x_4); \\
R_2(u_{12}) &= S_2(u_{11}) = S_2(u_{13}) \equiv 0; \\
R_2(v_{11})(x, y) &= y_1^2 + y_2^2; \\
R_2(v_{13})(x, y) &= y_3^2 - y_4^2; \\
S_2(v_{12})(x, y) &= -\frac{1}{2}(\sinh \theta y_3 + (\cosh \theta - 1)y_4); \\
R_2(v_{12}) &= S_2(v_{11}) = S_2(v_{13}) \equiv 0; \\
R_2(w_{11})(x, y) &= x_1y_2 - x_2y_1; \\
R_2(w_{12})(x, y) &= x_1y_1 + x_2y_2; \\
S_2(w_{13})(x, y) &= ((\cosh \theta - 1)x_3 + \sinh \theta x_4)((\cosh \theta - 1)y_3 + \sinh \theta y_4); \\
S_2(w_{11}) &= S_2(w_{12}) = R_2(w_{13}) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Então, novamente de (2.49) obtemos que os geradores para o anel $\mathcal{P}_d(\Gamma)$ das funções polinomiais Γ -invariantes definidas em $\mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}_1^4$ são dadas por:

$$\begin{aligned}
u_{21}(x, y) &= x_1^2 + x_2^2, & u_{22}(x, y) &= x_3^2 - x_4^2, & u_{23}(x, y) &= (\sinh \theta x_3 + (\cosh \theta - 1)x_4)^2, \\
v_{21}(x, y) &= y_1^2 + y_2^2, & v_{22}(x, y) &= y_3^2 - y_4^2, & v_{23}(x, y) &= (\sinh \theta y_3 + (\cosh \theta - 1)y_4)^2, \\
w_{21}(x, y) &= x_1y_2 - x_2y_1, & w_{22}(x, y) &= x_1y_1 + x_2y_2, \\
w_{23}(x, y) &= ((\cosh \theta - 1)x_3 + \sinh \theta x_4)^2((\cosh \theta - 1)y_3 + \sinh \theta y_4)^2, \\
z_{21}(x, y) &= (\sinh \theta x_3 + (\cosh \theta - 1)x_4)(\sinh \theta y_3 + (\cosh \theta - 1)y_4), \\
z_{22}(x, y) &= (\sinh \theta x_3 + (\cosh \theta - 1)x_4)((\cosh \theta - 1)x_3 + \sinh \theta x_4)((\cosh \theta - 1)y_3 + \sinh \theta y_4), \\
z_{23}(x, y) &= (\sinh \theta y_3 + (\cosh \theta - 1)y_4)((\cosh \theta - 1)x_3 + \sinh \theta x_4)((\cosh \theta - 1)y_3 + \sinh \theta y_4).
\end{aligned}$$

A fim de aplicar o Teorema 2.21, vamos considerar a base de Hilbert

$$\mathcal{C} = \{u_{2i}, v_{2i}, w_{2i}, z_{2i}; 1 \leq i \leq 3\}$$

para o anel $\mathcal{P}_d(\Gamma)$ e realizar a operação $J(d_y f)_{x,0}^T$ para cada $f \in \mathcal{C}$. Cálculos diretos nos mostram que

$$J(d_y u_{2i})_{x,0}^T = J(d_y v_{2i})_{x,0}^T = J(d_y w_{23})_{x,0}^T = J(d_y z_{23})_{x,0}^T = (0, 0, 0, 0),$$

para todo $1 \leq i \leq 3$, e

$$J(d_y w_{21})_{x,0}^T = (-x_2, x_1, 0, 0);$$

$$J(d_y w_{22})_{x,0}^T = (x_1, x_2, 0, 0);$$

$$J(d_y z_{21})_{x,0}^T = u_{12}(x, y)(0, 0, \sinh \theta, 1 - \cosh \theta);$$

$$J(d_y z_{22})_{x,0}^T = u_{12}(x, y)(0, 0, (\cosh \theta - 1)^2 x_3 + (\cosh \theta - 1) \sinh \theta x_4, -(\cosh \theta - 1) \sinh \theta x_3 - \sinh^2 \theta x_4).$$

Portanto,

$$\{J(d_y w_{2i})_{x,0}^T, J(d_y z_{2i})_{x,0}^T; 1 \leq i \leq 2\}$$

constitui um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ das aplicações polinomiais Γ -equivariantes sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, para $\Gamma = \widetilde{SO}_0(3, 1) \rtimes (\mathbb{Z}_2(\delta_1) \times \mathbb{Z}_2(\delta_2))$.

CAPÍTULO 3

SUBESPAÇOS INVARIANTES DE MINKOWSKI

Nosso objetivo neste capítulo será estudar os espaços de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} , com $n \geq 1$, sob a perspectiva de seus subespaços vetoriais, a partir da caracterização dos vetores $v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ não nulos. Tal caracterização será abordada na Seção 3.1. Na Seção 3.2, classificaremos os subespaços vetoriais de \mathbb{R}_1^{n+1} , analisando suas propriedades e sua Γ -invariância segundo a ação de um subgrupo Γ de $O(n, 1)$. Sob certas condições, a Proposição 3.15 garante a existência de um subespaço complementar Γ -invariante para todo subespaço Γ -invariante de \mathbb{R}_1^{n+1} . Na Seção 3.3, analisaremos os subespaços invariantes de \mathbb{R}_1^2 sob a ação de $O(1, 1)$, classificando-os conforme seu tipo.

Mencionamos [22, 24] como as principais referências para esse capítulo e para outros detalhes sugerimos [18, 27, 29, 31, 32].

3.1 Vetores no espaço de Minkowski

Nesta seção, estudaremos os vetores dos espaços de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} , explorando suas propriedades e classificando-os em tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz. Para um vetor $v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, adotaremos a notação $v = (v', t_v)$, onde $v' \in \mathbb{R}^n$ e $t_v \in \mathbb{R}$. Assim, podemos denotar o produto interno dado em (2.5) dos vetores $u = (u', t_u), v = (v', t_v) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$

simplesmente por

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle u', v' \rangle - t_u t_v,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^n . Dizemos que dois vetores $u, v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ são pseudo-ortogonais, ou **Lorentz ortogonais**, se $\langle u, v \rangle_1 = 0$. Classificamos então os vetores do espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} como segue:

Definição 3.1. *Seja $v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ não nulo. Então v é dito ser do*

- **tipo espaço** se $\langle v, v \rangle_1 > 0$, ou seja, se $\langle v', v' \rangle > t_v^2$;
- **tipo tempo** se $\langle v, v \rangle_1 < 0$, ou seja, se $\langle v', v' \rangle < t_v^2$;
- **tipo luz** se $\langle v, v \rangle_1 = 0$, ou seja, se $\langle v', v' \rangle = t_v^2$.

O conjunto formado pela origem e por todos os vetores do tipo luz de \mathbb{R}_1^{n+1} é chamado de **cone de luz** e denotado por LC . O nome cone de luz, como veremos na próxima seção, faz referência à sua forma no espaço \mathbb{R}_1^3 . Podemos então descrever LC como o conjunto

$$LC = \{v \in \mathbb{R}_1^{n+1}; \langle v, v \rangle_1 = 0\}. \quad (3.1)$$

Para a próxima proposição, dizemos que um conjunto $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, com $e_i \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, é uma **base ortonormal segundo Lorentz** para \mathbb{R}_1^{n+1} se

$$\langle e_i, e_j \rangle_1 = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 \leq i = j \leq n \\ 0, & \text{se } i \neq j \\ -1, & \text{se } i = j = n + 1 \end{cases}.$$

Proposição 3.2. *Sejam $u \neq 0$ um vetor do tipo tempo e $v \neq 0$ um vetor do tipo tempo ou do tipo luz em \mathbb{R}_1^{n+1} . Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal segundo Lorentz de \mathbb{R}_1^{n+1} e escreva*

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} u_i e_i \quad e \quad v = \sum_{i=1}^{n+1} v_i e_i.$$

com $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq i \leq n + 1$. Então $u_{n+1}v_{n+1} \neq 0$. Ainda,

- a) $u_{n+1}v_{n+1} > 0$ implica em $\langle u, v \rangle_1 < 0$;

b) $u_{n+1}v_{n+1} < 0$ implica em $\langle u, v \rangle_1 > 0$.

Demonstração: Como u é um vetor do tipo tempo, então $\sum_{i=1}^n u_i^2 < u_{n+1}^2$ por definição. Para um vetor v do tipo luz ou tempo, temos $\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq v_{n+1}^2$. Denotando por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana padrão e escrevendo $u' = (u_1, \dots, u_n), v' = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^n que

$$\left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right| = |\langle u', v' \rangle| \leq \|u'\| \|v'\|.$$

Assim,

$$u_{n+1}^2 v_{n+1}^2 > \sum_{i=1}^n u_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 = \|u'\|^2 \|v'\|^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2,$$

de modo que

$$|u_{n+1}v_{n+1}| > \left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right|.$$

Em particular, isto implica que $u_{n+1}v_{n+1} \neq 0$. Suponha inicialmente que $u_{n+1}v_{n+1} > 0$.

Logo,

$$u_{n+1}v_{n+1} = |u_{n+1}v_{n+1}| > \left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right| \geq \sum_{i=1}^n u_i v_i,$$

o que implica em

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{i=1}^n u_i v_i - u_{n+1}v_{n+1} < 0.$$

Se $u_{n+1}v_{n+1} < 0$, então $-u_{n+1}v_{n+1} > 0$. Como

$$-u_{n+1}v_{n+1} = |u_{n+1}v_{n+1}| > \left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \right|,$$

segue que

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{i=1}^n u_i v_i - u_{n+1}v_{n+1} > 0.$$

■

Corolário 3.3. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ não nulos tais que $\langle u, v \rangle_1 = 0$. Se u for do tipo tempo, então v será do tipo espaço.*

Demonstração: A prova é imediata da Proposição 3.2, visto que o pseudo produto

interno entre um vetor do tipo tempo por um vetor do tipo tempo ou do tipo luz é sempre estritamente maior ou menor que zero. ■

3.2 Subespaços de \mathbb{R}_1^{n+1}

No contexto equivariante, uma importante classe de subespaços invariantes é formada pelos subespaços de pontos fixos. De fato, pelo Lema 1.32, se $g : V \rightarrow V$ for uma aplicação Γ -equivariante, então

$$g(\text{Fix}(\Sigma)) \subset \text{Fix}(\Sigma),$$

para todo subgrupo Σ de Γ . Portanto, esses são os subespaços nos quais a dinâmica de um campo de vetores equivariantes deve permanecer invariante. Por esta razão, na busca de subespaços invariantes pela ação dos subgrupos de Lorentz, vamos dar atenção aos subespaços de pontos fixos.

Assim como fizemos na Seção 3.1, podemos classificar os subespaços vetoriais do espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} em tipo espaço, tipo tempo e tipo luz, conforme a próxima definição.

Definição 3.4. *Seja V um subespaço vetorial de \mathbb{R}_1^{n+1} . Dizemos que V é*

- a) do **tipo espaço** se todos os seus vetores não nulos forem do tipo espaço;*
- b) do **tipo tempo** se V possuir ao menos um vetor do tipo tempo;*
- c) do **tipo luz** se nenhuma das condições anteriores for satisfeita.*

Pela definição anterior, um subespaço não nulo do tipo luz possui ao menos um vetor do tipo luz e nenhum vetor do tipo tempo.

Em \mathbb{R}_1^3 , o cone de luz definido em (3.1) é descrito como

$$LC = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3; x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Tal conjunto divide o espaço em duas regiões: uma região interior ao cone, formada por todos os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3$ que satisfazem $x^2 + y^2 < z^2$ (tipo tempo), e uma região

exterior ao cone, composta pelos vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3$ que satisfazem $x^2 + y^2 > z^2$ (tipo espaço). Em outras palavras, LC separa em duas regiões distintas os vetores do tipo tempo dos vetores do tipo espaço. Assim, o plano $z = 0$ é um subespaço do tipo espaço, pois não intercepta o interior do cone. O plano $x = 0$ é um subespaço do tipo tempo, pois intercepta o interior do cone. O plano $x = z$ é do tipo luz, pois tangencia o cone em uma geratriz (veja a Figura 3.1).

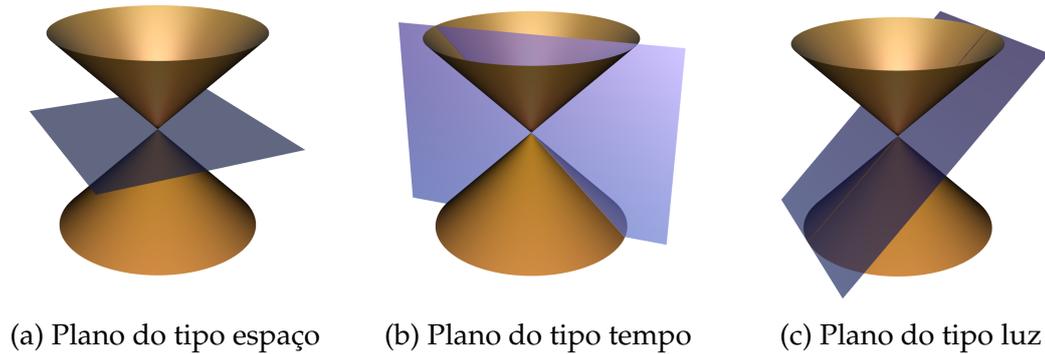


Figura 3.1: Subespaços do tipo espaço, tempo e luz

No próximo resultado, mostraremos que o tipo de um subespaço é invariante pela ação de $O(n, 1)$ e que existe uma correspondência entre os subespaços invariantes de grupos conjugados. A saber, dizemos que Σ_1 é conjugado a Σ_2 se existir $\gamma \in O(n, 1)$ tal que $\Sigma_2 = \gamma \Sigma_1 \gamma^{-1}$.

Lema 3.5. *Seja V um subespaço vetorial de \mathbb{R}_1^{n+1} . Então:*

- a) *Para cada $\gamma \in O(n, 1)$, V e γV são subespaços vetoriais do mesmo tipo;*
- b) *Sejam Σ_1, Σ_2 dois subgrupos de $O(n, 1)$ conjugados por $\gamma \in O(n, 1)$. Então V será Σ_1 -invariante se, e somente se, γV for Σ_2 -invariante.*

Demonstração: a) Dado $\gamma \in O(n, 1)$, temos que $\gamma^T J \gamma = J$. Assim, pela definição do pseudo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, vale que

$$\langle \gamma v, \gamma v \rangle_1 = (\gamma v)^T J \gamma v = v^T \gamma^T J \gamma v = v^T J v = \langle v, v \rangle_1$$

para todo $v \in V$ e para todo $\gamma \in O(n, 1)$. Logo, v e γv são vetores do mesmo tipo e, portanto, V e γV são subespaços vetoriais do mesmo tipo para cada $\gamma \in O(n, 1)$.

b) Seja $\gamma \in O(n, 1)$ tal que $\Sigma_2 = \gamma\Sigma_1\gamma^{-1}$. Suponha que V seja Σ_1 -invariante, ou seja, $\sigma_1 v \in V$ para todo $\sigma_1 \in \Sigma_1$ e $v \in V$. Como $\Sigma_2 = \gamma\Sigma_1\gamma^{-1}$, dado $\sigma_2 \in \Sigma_2$ temos $\sigma_2\gamma = \gamma\sigma_1$ para algum $\sigma_1 \in \Sigma_1$. Logo, se $\gamma v \in \gamma V$, então

$$\sigma_2\gamma v = \gamma\sigma_1 v \in \gamma V$$

para todo $\sigma_2 \in \Sigma_2$, o que implica que γV é Σ_2 -invariante. Agora, suponha que γV seja Σ_2 -invariante. Dados $\sigma_1 \in \Sigma_1$ e $v \in V$, como $\Sigma_2 = \gamma\Sigma_1\gamma^{-1}$, temos

$$\gamma\sigma_1 v = \sigma_2\gamma v,$$

para algum $\sigma_2 \in \Sigma_2$. Como γV é Σ_2 -invariante, então $\sigma_2\gamma v \in \gamma V$, de maneira que $\gamma\sigma_1 v \in \gamma V$. Portanto, $\sigma_1 v \in V$ para todo $\sigma_1 \in \Sigma_1$, o que mostra que V é Σ_1 -invariante. ■

Na teoria clássica de grupos, se duas matrizes forem conjugadas, então os subgrupos gerados por cada uma delas serão conjugados. A proposição a seguir mostra a existência de uma correspondência entre os subespaços de pontos fixos, as funções invariantes e as aplicações equivariantes sob a ação de subgrupos gerados por matrizes conjugadas. Para isso, dado V um subespaço vetorial de \mathbb{R}_1^{n+1} , vamos denotar igualmente uma matriz $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ e o operador linear invertível $A : V \rightarrow V$ associado a A . Assim, dadas $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V \rightarrow V$, definimos $fA^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ e $AgA^{-1} : V \rightarrow V$ como

$$fA^{-1}(v) = f(A^{-1}v) \quad \text{e} \quad AgA^{-1}(v) = A(g(A^{-1}v))$$

para todo $v \in V$.

Proposição 3.6. *Sejam $\Sigma_1 = [\sigma_1]$ e $\Sigma_2 = [\sigma_2]$ subgrupos de $O(n, 1)$, com σ_1 e σ_2 conjugados por $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$, ou seja,*

$$\sigma_2 = A\sigma_1A^{-1}. \tag{3.2}$$

Então:

- a) $v \in \text{Fix}(\Sigma_1)$ se, e somente se, $Av \in \text{Fix}(\Sigma_2)$;
- b) Uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ será Σ_1 -invariante se, e somente se, $fA^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ for Σ_2 -invariante;

c) Uma aplicação $g : V \rightarrow V$ será Σ_1 -equivariante se, e somente se, $AgA^{-1} : V \rightarrow V$ for Σ_2 -equivariante.

Demonstração: Por (3.2), podemos escrever qualquer $\sigma \in \Sigma_2$ como

$$\sigma = \sigma_2^k = (A\sigma_1A^{-1})^k = (A\sigma_1A^{-1})(A\sigma_1A^{-1}) \dots (A\sigma_1A^{-1}) = A\sigma_1^kA^{-1} \quad (3.3)$$

para algum $\sigma_1 \in \Sigma_1$ e $k \in \mathbb{N}$. Analogamente, dado $\varepsilon \in \Sigma_1$, podemos escrevê-lo como

$$\varepsilon = A^{-1}\sigma_2^lA, \quad (3.4)$$

para algum $\sigma_2 \in \Sigma_2$ e $l \in \mathbb{N}$.

a) Pela Definição 1.31, se $v \in \text{Fix}(\Sigma_1)$, então $\sigma_1v = v$ para todo $\sigma_1 \in \Sigma_1$. Indutivamente, $\sigma_1^kv = v$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dados $v \in \text{Fix}(\Sigma_1)$ e $\sigma \in \Sigma_2$, temos por (3.3) que

$$\sigma Av = A\sigma_1^kA^{-1}Av = A\sigma_1^kv = Av.$$

Assim, concluímos que $Av \in \text{Fix}(\Sigma_2)$, para todo $v \in \text{Fix}(\Sigma_1)$. Por outro lado, se $Av \in \text{Fix}(\Sigma_2)$, segue da Definição 1.31 que $\sigma_2^lAv = Av$ para todo $\sigma_2 \in \Sigma_2$ e $l \in \mathbb{N}$. Utilizando (3.4) obtemos que

$$\varepsilon v = A^{-1}\sigma_2^lAv = A^{-1}Av = v,$$

para todo $\varepsilon \in \Sigma_1$. Dessa forma, $v \in \text{Fix}(\Sigma_1)$ sempre que $Av \in \text{Fix}(\Sigma_2)$.

b) Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Σ_1 -invariante, ou seja, $f(\sigma_1v) = f(v)$ para todo $\sigma_1 \in \Sigma_1$ e $v \in V$. Logo, $f(\sigma_1^kv) = f(v)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (3.3), dados $\sigma \in \Sigma_2$ e $v \in V$, temos

$$fA^{-1}(\sigma v) = f(A^{-1}(A\sigma_1^kA^{-1}v)) = f(\sigma_1^kA^{-1}v) = f(A^{-1}v) = fA^{-1}(v),$$

de onde concluímos que fA^{-1} é Σ_2 -invariante. Por outro lado, seja $fA^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Σ_2 -invariante, de modo que $fA^{-1}(\sigma_2^lv) = fA^{-1}(v)$ para todo $\sigma_2 \in \Sigma_2$ e $l \in \mathbb{N}$.

Dados $\varepsilon \in \Sigma_1$ e $v \in V$, temos por (3.4) que

$$f(\varepsilon v) = f(A^{-1}\sigma_2^l Av) = fA^{-1}(\sigma_2^l Av) = fA^{-1}(Av) = f(A^{-1}Av) = f(v).$$

Portanto, f é Σ_1 -invariante.

c) Seja $g : V \rightarrow V$ uma aplicação Σ_1 -equivariante, ou seja, $g(\sigma_1 v) = \sigma_1 g(v)$ para todo $\sigma_1 \in \Sigma_1$ e $v \in V$. Por indução, temos que $g(\sigma_1^k v) = \sigma_1^k g(v)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (3.3), para $\sigma \in \Sigma_2$ e $v \in V$, vale que

$$AgA^{-1}(\sigma v) = AgA^{-1}(A\sigma_1^k A^{-1}v) = A(g(\sigma_1^k A^{-1}v)) = A\sigma_1^k g(A^{-1}v).$$

Novamente por (3.3), escrevemos $A\sigma_1^k = \sigma_2^k A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$AgA^{-1}(\sigma v) = \sigma_2^k Ag(A^{-1}v) = \sigma(AgA^{-1})(v),$$

o que implica que $AgA^{-1} : V \rightarrow V$ é Σ_2 -equivariante. Agora, se $AgA^{-1} : V \rightarrow V$ é uma aplicação Σ_2 -equivariante, então $AgA^{-1}(\sigma_2^l v) = \sigma_2^l AgA^{-1}(v)$ para todo $\sigma_2 \in \Sigma_2$, $l \in \mathbb{N}$ e $v \in V$. Para $\varepsilon \in \Sigma_1$ e $v \in V$, por (3.4), obtemos que

$$g(\varepsilon v) = g(A^{-1}\sigma_2^l Av) = A^{-1}(AgA^{-1}(\sigma_2^l Av)) = A^{-1}\sigma_2^l AgA^{-1}(Av) = \varepsilon g(v).$$

Concluimos então que g é Σ_1 -equivariante. ■

Proposição 3.7. *Sejam V um subespaço vetorial de \mathbb{R}_1^{n+1} e*

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}_1^{n+1}; \langle u, v \rangle_1 = 0, \forall v \in V\}$$

o subespaço ortogonal de V . Temos que:

a) $\dim V + \dim V^\perp = n + 1$;

b) Dado $\Gamma \subset O(n, 1)$, então V é Γ -invariante se, e somente se, seu subespaço ortogonal V^\perp é Γ -invariante.

Demonstração: a) Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ uma base para o espaço vetorial V e denote

$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{i,n+1})$ para todo $1 \leq i \leq k$. Considere J como em (2.6) e defina o operador linear

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_1^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}_1^{n+1} \\ u &\longmapsto AJu, \end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{k,n+1} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}.$$

Observe que $\langle Jv_i, u \rangle = (Jv_i)^T u = (v_i)^T Ju = \langle v_i, u \rangle_1$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $u \in \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Portanto,

$$\varphi(u) = AJu = \begin{bmatrix} \langle Jv_1, u \rangle \\ \vdots \\ \langle Jv_k, u \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v_1, u \rangle_1 \\ \vdots \\ \langle v_k, u \rangle_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $u \in \text{Nuc } \varphi$ se, e somente se, $\langle v_i, u \rangle_1 = 0$ para todo $v_i \in \mathcal{B}$. Como \mathcal{B} é uma base de V , segue que $\langle v, u \rangle_1 = 0$ para todo $v \in V$, ou seja, $u \in V^\perp$. Portanto, $\text{Nuc } \varphi = V^\perp$. Além disso, como J é invertível e os vetores em \mathcal{B} são linearmente independentes,

$$\dim \text{Im } \varphi = \text{posto } AJ = \text{posto } A = k = \dim V.$$

Pelo Teorema do núcleo e da imagem,

$$n + 1 = \dim \mathbb{R}_1^{n+1} = \dim \text{Nuc } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V^\perp + \dim V.$$

b) Suponha que V seja Γ -invariante. Dado $\gamma \in \Gamma \subset O(n, 1)$, temos que $\gamma^T J \gamma = J$, o que implica em $\gamma = J(\gamma^T)^{-1} J = J(\gamma^{-1})^T J$. Dessa forma, como $J^2 = I_{n+1}$, para todo

$u, v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ e $\gamma \in \Gamma$, temos que

$$\langle v, \gamma u \rangle_1 = v^T J \gamma u = v^T J J (\gamma^{-1})^T J u = (\gamma^{-1} v)^T J u = \langle \gamma^{-1} v, u \rangle_1.$$

Considerando $v \in V$ e $u \in V^\perp$ arbitrários, como V é Γ -invariante, então $\gamma^{-1}v \in V$ e

$$\langle v, \gamma u \rangle_1 = \langle \gamma^{-1}v, u \rangle_1 = 0.$$

Portanto, $\gamma u \in V^\perp$ e concluímos que V^\perp é Γ -invariante. Para a recíproca basta trocar V por V^\perp , uma vez que $(V^\perp)^\perp = V$. De fato, pela definição de subespaço ortogonal temos que $V \subset (V^\perp)^\perp$. Pelo item *a*), valem as igualdades

$$\dim V + \dim V^\perp = n + 1 = \dim V^\perp + \dim (V^\perp)^\perp,$$

de onde concluímos que $\dim V = \dim (V^\perp)^\perp$. Portanto, $(V^\perp)^\perp = V$. Assim, se V^\perp é Γ -invariante, então $(V^\perp)^\perp = V$ é Γ -invariante. ■

Definição 3.8. Dizemos que uma forma bilinear $\mathcal{B} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é **não degenerada** se satisfizer a seguinte condição: se $\mathcal{B}(u, v) = 0$ para todo $v \in V$, então $u = 0$. Caso contrário, \mathcal{B} é dita **degenerada**.

Equivalentemente, é possível mostrar que \mathcal{B} é não degenerada se, e somente se, sua matriz com relação a qualquer base de V é invertível (veja [15, Chapter 10, Corollary 2]).

Definição 3.9. Um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ é dito **não degenerado** se o pseudo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ for uma forma bilinear não degenerada, ou seja, se $u \in V$ for tal que $\langle u, v \rangle_1 = 0$ para todo $v \in V$, então $u = 0$.

Veremos mais adiante que um subespaço vetorial de \mathbb{R}_1^{n+1} será degenerado se, e somente se, ele for do tipo luz.

Proposição 3.10. Para todo subespaço $V \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) V é não degenerado;

$$b) V \cap V^\perp = \{0\};$$

$$c) V \oplus V^\perp = \mathbb{R}_1^{n+1};$$

d) V^\perp é não degenerado.

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar $a) \Leftrightarrow b)$. Seja $v \in V \cap V^\perp$. Então $v \in V$ e $\langle v, u \rangle_1 = 0$ para todo $u \in V$. Se V for não degenerado, segue da Definição 3.9 que $v = 0$. Logo, $V \cap V^\perp = \{0\}$. Reciprocamente, suponha que $V \cap V^\perp = \{0\}$. Considere $u \in V$ tal que $\langle u, v \rangle_1 = 0$ para todo $v \in V$. Por definição, temos que $u \in V^\perp$, ou seja, $u \in V \cap V^\perp = \{0\}$. Portanto, $u = 0$ e, conseqüentemente, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear não degenerada. Assim, V é não degenerado.

Para mostrar $b) \Leftrightarrow c)$, vamos utilizar o item $a)$ da Proposição 3.7. Assim,

$$\dim(V + V^\perp) = \dim V + \dim V^\perp - \dim(V \cap V^\perp) = n + 1 - \dim(V \cap V^\perp),$$

de modo que

$$V \cap V^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \dim(V \cap V^\perp) = 0 \Leftrightarrow \dim(V + V^\perp) = n + 1 \Leftrightarrow V \oplus V^\perp = \mathbb{R}_1^{n+1},$$

onde a última equivalência vale, pois $V + V^\perp \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ e $V \cap V^\perp = \{0\}$.

Finalmente, como $(V^\perp)^\perp = V$, temos que $b) \Leftrightarrow d)$ segue da equivalência $a) \Leftrightarrow b)$ trocando V por V^\perp . ■

No contexto euclidiano, se $\Gamma \subset O_n(\mathbb{R})$, então todo subespaço vetorial Γ -invariante V admite V^\perp como seu subespaço complementar Γ -invariante (veja a Proposição 1.18). Para subgrupos de Lorentz $\Gamma \subset O(n, 1)$, concluímos pelo item $b)$ da Proposição 3.7 e pela Proposição 3.10 que tal resultado será válido se, e somente se, V for não degenerado. Se V for degenerado, veremos na Proposição 3.15 que ele ainda admite um subespaço complementar Γ -invariante, mas não ortogonal, desde que $\gamma^T \in \Gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Os próximos resultados serão preliminares para a prova da Proposição 3.14, a qual nos mostrará que todo subespaço vetorial do tipo luz é degenerado.

Proposição 3.11. *Seja V um subespaço vetorial de \mathbb{R}_1^{n+1} . Então V será do tipo espaço se, e somente se, V^\perp for do tipo tempo.*

Demonstração: Suponha que V seja do tipo espaço. Então $\langle v, v \rangle_1 > 0$ para todo $v \in V$ não nulo. Seja $w \in V$ tal que $\langle v, w \rangle_1 = 0$ para todo $v \in V$. Em particular, $\langle w, w \rangle_1 = 0$. Como $w \in V$, se w fosse não nulo, teríamos $\langle w, w \rangle_1 > 0$. Logo, temos $w = 0$, o que nos garante que V é não degenerado. Segue então que $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}_1^{n+1}$. Como \mathbb{R}_1^{n+1} contém um vetor do tipo tempo, então V^\perp deve conter um vetor do tipo tempo. De fato, seja $0 \neq v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ do tipo tempo, ou seja, $\langle v, v \rangle_1 < 0$. Podemos escrever $v = a + b$, com $a \in V$ e $b \in V^\perp$, ou seja, $\langle a, b \rangle_1 = 0$. Então

$$0 > \langle v, v \rangle_1 = \langle a + b, a + b \rangle_1 = \langle a, a \rangle_1 + 2\langle a, b \rangle_1 + \langle b, b \rangle_1 = \langle a, a \rangle_1 + \langle b, b \rangle_1,$$

com $\langle a, a \rangle_1 > 0$. Logo, $\langle b, b \rangle_1 < 0$, o que implica que b é do tipo tempo. Como $b \in V^\perp$, concluímos que V^\perp é um subespaço do tipo tempo.

Reciprocamente, suponha que V^\perp seja do tipo tempo, ou seja, existe $u \in V^\perp$ não nulo tal que $\langle u, u \rangle_1 < 0$. Como $u \in V^\perp$, então

$$V = (V^\perp)^\perp \subset u^\perp = \{v \in \mathbb{R}_1^{n+1}; \langle u, v \rangle_1 = 0\}.$$

Em outras palavras, todo $v \in V$ é ortogonal a u . Pelo Corolário 3.3, como u é do tipo tempo, então todo $v \in V$ é do tipo espaço, o que prova que V é do tipo espaço. ■

Segue também da proposição anterior que V^\perp é do tipo espaço se, e somente se, V é do tipo tempo, o que implica diretamente no seguinte resultado:

Corolário 3.12. *Um subespaço $V \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ é do tipo luz se, e somente se, seu subespaço ortogonal V^\perp é do tipo luz.*

Proposição 3.13. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ vetores do tipo luz. Então $\langle u, v \rangle_1 = 0$ se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.*

Demonstração: Por hipótese $\langle u, u \rangle_1 = \langle v, v \rangle_1 = 0$. Se $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle \lambda v, v \rangle_1 = \lambda \langle v, v \rangle_1 = 0.$$

Reciprocamente, suponha que $\langle u, v \rangle_1 = 0$, onde $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$ e $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$, com $u_{n+1}, v_{n+1} \neq 0$, uma vez que u e v são vetores do tipo luz. Denotando

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{n+1}} \quad \text{e} \quad \bar{v} = \frac{v}{v_{n+1}}, \quad (3.5)$$

obtemos também que $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_1 = 0$, onde $\bar{u} = (u', t_u) = (u', 1)$ e $\bar{v} = (v', t_v) = (v', 1)$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^n temos

$$0 = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_1 = \langle u', v' \rangle - 1 \leq \|u'\| \|v'\| - 1. \quad (3.6)$$

Pela Definição 3.1, como u e v são vetores do tipo luz, sabemos que $\|u'\| = |t_u| = 1$ e $\|v'\| = |t_v| = 1$. Logo, $\|u'\| \|v'\| = 1$, ou seja, vale a igualdade em (3.6). Assim,

$$\langle u', v' \rangle = \|u'\| \|v'\| = 1,$$

com u' e v' vetores linearmente dependentes. Escrevendo $v' = \lambda u'$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$1 = \langle u', v' \rangle = \langle u', \lambda u' \rangle = \lambda \langle u', u' \rangle = \lambda \|u'\|^2 = \lambda,$$

ou seja, $u' = v'$. Portanto, $\bar{u} = \bar{v}$. Por (3.5) obtemos que $v = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} u$, ou seja, u e v são linearmente dependentes. ■

Proposição 3.14. *Seja V um subespaço vetorial de \mathbb{R}_1^{n+1} . Então V será do tipo luz se, e somente se, V for degenerado.*

Demonstração: Se V for do tipo luz, temos pela Definição 3.4 que V não possui vetor do tipo tempo e possui pelo menos um vetor do tipo luz. Assim, $0 < \dim V < n + 1$. Como pela Proposição 3.7 temos $\dim V + \dim V^\perp = n + 1$, segue que $\dim V^\perp > 0$, o que implica em $V^\perp \neq \{0\}$. Ademais, pelo Corolário 3.12, V^\perp é do tipo luz, ou seja, existe um vetor $z \in V^\perp$ não nulo do tipo luz. Seja agora $0 \neq v_0 \in V$ um vetor do tipo luz. Então $\langle v_0, z \rangle_1 = 0$, pois $z \in V^\perp$. Logo, pela Proposição 3.13, v_0 e z são linearmente dependentes, o que implica que $v_0, z \in V \cap V^\perp$. Consequentemente, $\dim(V \cap V^\perp) \geq 1$. Tome agora $u, v \in V \cap V^\perp$ quaisquer. Se $u = 0$ ou $v = 0$, então u e v são linearmente

dependentes. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, temos que u, v são do tipo luz, pois $\langle u, u \rangle_1 = \langle v, v \rangle_1 = 0$. Também temos que $\langle u, v \rangle_1 = 0$. Novamente pela Proposição 3.13, concluímos que u e v são linearmente dependentes. Pela arbitrariedade de u e v temos que $\dim V \cap V^\perp \leq 1$. Portanto, $\dim V \cap V^\perp = 1$. Segue da Proposição 3.10 que V é degenerado.

Reciprocamente, mostremos por contrapositiva que se V não for do tipo luz, então V será não degenerado. De fato, se V for do tipo espaço, segue pela demonstração da Proposição 3.11 que V é não degenerado. Se V for do tipo tempo, então segue novamente da Proposição 3.11 que V^\perp é do tipo espaço, já que V é o subespaço ortogonal de V^\perp . Logo, V^\perp é não degenerado. Pela Proposição 3.10, V deve ser não degenerado. Portanto, se V for degenerado, então V será do tipo luz. ■

A próxima proposição nos fornece uma condição suficiente para um subespaço Γ -invariante admitir um subespaço Γ -invariante, “relaxando” a condição de não degenerescência e, portanto, incluindo subespaços do tipo luz.

Proposição 3.15. *Seja Γ um subgrupo de $O(n, 1)$ tal que $\gamma^T \in \Gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Se V for um subespaço Γ -invariante, então JV^\perp será um subespaço complementar Γ -invariante de V .*

Demonstração: Seja V um subespaço Γ -invariante. Pelo item b) da Proposição 3.7 temos que V^\perp também é Γ -invariante. Sejam $u = Jv \in JV^\perp$ e $\gamma \in \Gamma$. Como $\gamma^T \in \Gamma \subset O(n, 1)$, temos que $\gamma J \gamma^T = J$, ou seja, $\gamma J = J(\gamma^T)^{-1}$. Pela Γ -invariância de V^\perp , temos que $(\gamma^T)^{-1}v \in V^\perp$ e, conseqüentemente, $\gamma u = \gamma Jv = J(\gamma^T)^{-1}v \in JV^\perp$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $u \in JV^\perp$. Portanto, JV^\perp é um subespaço Γ -invariante. Vamos mostrar que $\mathbb{R}_1^{n+1} = V \oplus JV^\perp$. Primeiramente, afirmamos que $V \cap JV^\perp = \{0\}$. De fato, se $w = Jv \in V \cap JV^\perp$, então

$$0 = \langle w, v \rangle_1 = \langle Jv, v \rangle_1 = (Jv)^T Jv = v^T J^T Jv = v^T v = \langle v, v \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico. Logo, $v = 0$ e $w = Jv = 0$, o que justifica a afirmação. Claramente, $V \oplus JV^\perp \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$. Como a aplicação

$$\begin{aligned} \phi: V^\perp &\longrightarrow JV^\perp \\ v &\longmapsto Jv \end{aligned}$$

é bijetora, então $\dim V^\perp = \dim JV^\perp$. Segue pelo item *a*) da Proposição 3.7 que

$$\dim V + \dim(JV^\perp) = n + 1.$$

Portanto, temos $V \oplus JV^\perp = \mathbb{R}_1^{n+1}$, o que prova que JV^\perp é um subespaço complementar de V . ■

Assim, se V for um subespaço Γ -invariante do tipo luz em que Γ é fechado para transposições, então $\mathbb{R}_1^{n+1} = V \oplus JV^\perp$, com JV^\perp também Γ -invariante. O mesmo vale para subespaços do tipo espaço e do tipo tempo Γ -invariantes. No entanto, por serem não degenerados, tais subespaços também admitem V^\perp como um complementar Γ -invariante.

3.3 Retas invariantes em \mathbb{R}_1^2

Nesta seção, faremos um estudo sistemático dos subespaços invariantes do espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^2 segundo a ação do grupo de Lorentz $O(1, 1)$ cuja representação padrão (veja (2.35)) é dada pela igualdade

$$O(1, 1) = SO_0(1, 1) \dot{\cup} \Lambda^p SO_0(1, 1) \dot{\cup} \Lambda^t SO_0(1, 1) \dot{\cup} \Lambda^{pt} SO_0(1, 1),$$

onde $SO_0(1, 1)$ é a componente conexa de $O(1, 1)$ contendo a identidade I_2 ,

$$\Lambda^p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J \quad \text{e} \quad \Lambda^{pt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2.$$

Mostramos no Exemplo 2.18 que as matrizes de $SO_0(1, 1)$ são da forma (2.40), com $\theta \in \mathbb{R}$. De maneira análoga, utilizando o Corolário 2.11 na matriz A dada em (2.41), obtemos que as matrizes das componentes conexas de $O(1, 1)$ contendo Λ^p , Λ^t e Λ^{pt} são da forma

$$\begin{bmatrix} -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ -\sinh \theta & -\cosh \theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & -\cosh \theta \end{bmatrix},$$

respectivamente. Portanto, para γ_θ dado em (2.40) e

$$\tilde{\gamma}_\theta = \begin{bmatrix} -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} SO_0(1, 1) &= \{\gamma_\theta; \theta \in \mathbb{R}\}; & \Lambda^p SO_0(1, 1) &= \{\tilde{\gamma}_\theta; \theta \in \mathbb{R}\}; \\ \Lambda^t SO_0(1, 1) &= \{-\tilde{\gamma}_\theta; \theta \in \mathbb{R}\}; & \Lambda^{pt} SO_0(1, 1) &= \{-\gamma_\theta; \theta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Daqui em diante, assumimos $\theta \neq 0$. Para $\gamma_\theta \in SO_0(1, 1)$, temos

$$\text{Fix}(\gamma_\theta) = \text{Fix}(-\gamma_\theta) = \{(0, 0)\}.$$

De fato, observe que

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \cosh \theta)x - \sinh \theta y = 0 \\ -\sinh \theta x + (1 - \cosh \theta)y = 0 \end{cases}.$$

Como $\theta \neq 0$, temos que $\cosh \theta \neq 1$ e, conseqüentemente, $1 - \cosh \theta \neq 0$. Assim,

$$x = \frac{\sinh \theta y}{1 - \cosh \theta}.$$

Substituindo o valor de x na segunda equação, obtemos $y = 0$, o que implica em $x = 0$. Concluimos que $\text{Fix}(\gamma_\theta) = \{(0, 0)\}$. Analogamente, mostramos que $\text{Fix}(-\gamma_\theta) = \{(0, 0)\}$.

Veremos agora que os subgrupos de $O(1, 1)$ gerados por γ_θ e $-\gamma_\theta$, a saber

$$H_1 = [\gamma_\theta] = \{\gamma_\theta^k = \gamma_{k\theta}; k \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad H_2 = [-\gamma_\theta] = \{(-1)^k \gamma_\theta^k = (-1)^k \gamma_{k\theta}; k \in \mathbb{N}\},$$

possuem as duas retas do cone de luz como subespaços invariantes. Para tal, observe primeiramente que o cone de luz de \mathbb{R}_1^2 é dado por

$$LC = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \langle (x, y), (x, y) \rangle_1 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \pm x\}.$$

Pelo Corolário 2.11, temos $H_1 \subset SO_0(1,1)$, pois $\det(\gamma_{k\theta}) = 1$ e $\cosh(k\theta) > 0$. Pelo mesmo corolário, temos $H_2 \subset SO_0(1,1) \dot{\cup} \Lambda^{pt} SO_0(1,1)$. Como as matrizes em $SO_0(1,1)$ e em $\Lambda^{pt} SO_0(1,1)$ são simétricas, H_1 e H_2 são fechados para transposições. Afirmamos que as retas invariantes em \mathbb{R}_1^2 sob as ações de γ_θ e $-\gamma_\theta$ são as retas $y = x$ e $y = -x$ do cone de luz

$$LC = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2; y = \pm x\}. \quad (3.7)$$

De fato, os subespaços vetoriais de \mathbb{R}_1^2 são todos da forma $E_y = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ ou $V_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2; y = ax\}$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Dados $\theta \in \mathbb{R}$, $w \in E_y$ e $v \in V_a$, temos

$$\pm \gamma_\theta w = \pm \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \sinh \theta y \\ \cosh \theta y \end{bmatrix}$$

e

$$\pm \gamma_\theta v = \pm \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ax \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} (\cosh \theta + a \sinh \theta)x \\ (\sinh \theta + a \cosh \theta)x \end{bmatrix}.$$

Como $\theta \neq 0$, segue que $\sinh \theta \neq 0$ e, portanto, $\pm \gamma_\theta w \in E_y$ apenas para $w = (0, 0)$. Logo, E_y não é invariante por H_1 e H_2 . Para que $\pm \gamma_\theta v \in V_a$, devemos ter

$$\sinh \theta + a \cosh \theta = a(\cosh \theta + a \sinh \theta),$$

o que ocorre se, e somente se, $(a^2 - 1) \sinh \theta = 0$. Como $\sinh \theta \neq 0$, temos $a = \pm 1$. Dessa forma, as únicas retas de \mathbb{R}_1^2 invariantes por γ_θ e $-\gamma_\theta$ são os subespaços vetoriais

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2; y = x\} \quad \text{e} \quad V_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2; y = -x\},$$

os quais constituem as duas componentes do cone de luz dado em (3.7). Pela arbitrariedade de $\theta \in \mathbb{R}$, podemos concluir que V_1 e V_{-1} são ambos subespaços H_i -invariantes para $i = 1, 2$.

Como V_1 é um espaço vetorial do tipo luz, pelo Corolário 3.12 seu subespaço ortogonal também deve ser do tipo luz. Pela Proposição 3.14, esses subespaços são ambos degenerados. Além disso, sendo V_1 uma reta do cone de luz, V_1 é composto unicamente por vetores do tipo luz. Logo, pela Proposição 3.13, todo $u \in V_1^\perp$ do tipo luz é linear-

mente dependente a qualquer vetor em V_1 . Como $\dim V_1 = 1$ e $\dim V_1 + \dim V_1^\perp = 2$, temos que V_1 e V_1^\perp são retas. Consequentemente, $V_1^\perp = V_1$. Veja que para todo $v = (x, x) \in V_1$, temos $Jv = (x, -x) \in V_{-1}$, o que implica em $JV_1 \subset V_{-1}$. Além disso, $\dim JV_1 = 1 = \dim V_{-1}$. Logo, $JV_1^\perp = JV_1 = V_{-1}$. De maneira análoga, concluímos que V_{-1}^\perp é um subespaço vetorial do tipo luz e $JV_{-1}^\perp = JV_{-1} = V_1$. Dessa forma, como H_1 e H_2 são subgrupos de $O(1, 1)$ fechados para transposições, concluímos que V_1 é o subespaço complementar H_i -invariante de V_{-1} e vice-versa, para $i = 1, 2$, conforme a Proposição 3.15. Ademais, como $\text{Fix}(\gamma_\theta) = \text{Fix}(-\gamma_\theta) = \{(0, 0)\}$, então V_1 e V_{-1} não são subespaços de pontos fixos de H_1 e H_2 .

Vamos finalizar esta seção determinando os subespaços vetoriais de \mathbb{R}_1^2 invariantes pelas ações de $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p)$ e $\mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$. Pelo Teorema 2.15, as matrizes Λ^p e Λ^t não podem ser conjugadas por uma matriz em $O(1, 1)$, pois estão em componentes conexas distintas. No entanto, temos $\Lambda^t = A\Lambda^p A^{-1}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$

Dessa forma, pelo item *a*) da Proposição 3.6, temos que $v \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda^p))$ se, e somente se, $Av \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda^t))$. Portanto,

$$\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda^t)) = A \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda^p)). \quad (3.8)$$

Mostremos que os subespaços de \mathbb{R}_1^2 invariantes por $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p)$ e $\mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$ são a reta do tipo espaço dada pelo eixo Ox e a reta do tipo tempo dada pelo eixo Oy . De fato, dados $w \in E_y$ e $v \in V_a$, vemos que

$$\Lambda^p w = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \quad \Lambda^t w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix},$$

$$\Lambda^p v = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ ax \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda^t v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -ax \end{bmatrix}.$$

Logo, E_y é um subespaço invariante sob as ações de $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p)$ e $\mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$. Para termos

$\Lambda^p v, \Lambda^t v \in V_a$, devemos ter $a = 0$, o que mostra que $E_x = V_0 = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço invariante por $\mathbb{Z}_2(\Lambda^p)$ e $\mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$. Claramente, E_x é do tipo espaço, pois

$$\langle (x, 0), (x, 0) \rangle_1 = x^2 > 0$$

para todo $(x, 0) \in E_x$ não nulo. Analogamente, E_y é do tipo tempo, pois

$$\langle (0, y), (0, y) \rangle_1 = -y^2 < 0$$

para todo $(0, y) \in E_y$ não nulo. Observe ainda que

$$E_x^\perp = \{(a, b) \in \mathbb{R}_1^2; ax = 0, \forall x \in \mathbb{R}\} = \{(0, b); b \in \mathbb{R}\} = E_y$$

e

$$E_y^\perp = \{(a, b) \in \mathbb{R}_1^2; -by = 0, \forall y \in \mathbb{R}\} = \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\} = E_x,$$

ou seja, E_x é o subespaço complementar $\mathbb{Z}_2(\Lambda^i)$ -invariante de E_y e vice-versa, para $i \in \{p, t\}$. Além disso, temos que $E_x = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda^t))$ e $E_y = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda^p))$, conforme a igualdade em (3.8), pois $E_x = AE_y$. Os resultados obtidos nesta seção estão organizados na seguinte tabela:

Tabela 3.1: Subespaços invariantes de \mathbb{R}_1^2

Grupo	Espaços invariantes	Tipo	Espaços complementares
$[\gamma\theta]$	$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2; y = x\}$ $V_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2; y = -x\}$	luz	$JV_1^\perp = V_{-1}$ $JV_{-1}^\perp = V_1$
$[-\gamma\theta]$	V_1 V_{-1}	luz	V_{-1} V_1
$\mathbb{Z}_2(\Lambda^t)$	$E_x = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ $E_y = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$	espaço tempo	$E_x^\perp = E_y$ $E_y^\perp = E_x$
$\mathbb{Z}_2(\Lambda^p)$	E_x E_y	espaço tempo	E_y E_x

REFERÊNCIAS

- [1] Antoneli, F., Baptistelli, P. H., Dias, A. P. S., Manoel, M., Invariant theory and reversible-equivariant vector fields, *Journal of Pure and Applied Algebra* **213** (5), 649-663 (2009).
- [2] Baptistelli, P. H., Manoel, M., Invariants and relative invariants under compact Lie groups, *Journal of pure and applied algebra* **217** (12), 2213-2220 (2013).
- [3] Bröcker, T., Dieck, T., Representations of compact Lie groups, Vol.98, Springer Science & Business Media (2013).
- [4] Carroll, S. M., An introduction to general relativity: spacetime and geometry, Addison Wesley (2004).
- [5] Dias, F. S., Tari, F., On the geometry of the cross-cap in the Minkowski 3-space, *Tohoku Mathematical Journal* **68**, 293-328 (2016).
- [6] Donghe, P., Singularities of RP^2 -valued Gauss maps of surfaces in Minkowski 3-space, *Hokkaido Mathematical Journal* **28** (1), 97-115 (1999).
- [7] Einstein, A., Raine, D., Relativity, Routledge (2013).
- [8] Fulton, W., Harris, J., Representation theory: a first course, Vol.129, Springer Science & Business Media (2013).
- [9] Gallian, J., Contemporary abstract algebra, Cengage Learning (2012).

- [10] Gatermann, K., Computer algebra methods for equivariant dynamical systems, Springer (2007).
- [11] Gatermann, K., Semi-invariants, equivariants and algorithms, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* **7**, 105-124 (1996).
- [12] Golubitsky, M., Stewart, I., Schaeffer, D. G., Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. II, Springer Verlag (1985).
- [13] Hall, B. C., Lie groups, Lie algebras and representations, Vol. 222, Springer (2015).
- [14] Hochschild, G. P., The structure of Lie groups, Holden-Day, San Francisco (1965).
- [15] Hoffman, K., Kunze, R., Linear Algebra, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1971).
- [16] Horn, R. A., Johnson, C. R., Matrix analysis, Cambridge university press (2012).
- [17] Izumiya, S., Time-like hypersurfaces in de Sitter space and Legendrian singularities, *Journal of Mathematical Sciences* **144**, 3789-3803 (2007).
- [18] Izumiya, S., Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, *Moscow Mathematical Journal* **9** (2), 325-357 (2009).
- [19] Izumiya, S., Kossowski, M., Pei, D., Fuster, M. C. R., Singularities of lightlike hypersurfaces in Minkowski four-space, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* **58** (1), 71-88 (2006).
- [20] Izumiya, S., Nabarro, A. C., Sacramento, A. J., Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space, *Journal of Geometry and Physics* **97**, 105-118 (2015).
- [21] Izumiya, S., Pei, D., Sano, T., Singularities of hyperbolic Gauss maps, *Proceedings of the London mathematical Society* **86** (2), 485-512 (2003).
- [22] Manoel, M., Oliveira, L. N., Equivariant mappings and invariant sets on Minkowski space, *Colloquim Mathematicum* **167** (1), 93-107 (2022).
- [23] Maplesoft, Maple - versão 18.02. (2014).

- [24] Naber, G. L., *The geometry of Minkowski spacetime*, Springer (2012).
- [25] Nachbin, L., *The Haar integral*, Robert E. Krieger Publishing Company (1976).
- [26] Oliveira, L. N., *Aspectos da teoria invariante e equivariante para a ação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski*. Tese de doutorado, ICMC-USP (2017).
- [27] O'Neill, B., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press (1983).
- [28] Powell, P. D., *Calculating determinants of block matrices*, arXiv:1112.4379 (2011).
- [29] Ratcliffe, J. G., Axler, S., Ribet, K. A., *Foundations of hyperbolic manifolds*, Vol. 149, Springer (1994).
- [30] Reeve, G. M., Tari, F., *Minkowski Symmetry Sets of Plane Curves*, *Edinburgh Mathematical Society. Proceedings* **1**, 1-20 (2016).
- [31] Rindler, W., *Introduction to special relativity*, Oxford Clarendon press (1982).
- [32] Schutz, B., *A first course in general relativity*, Cambridge university press (2022).
- [33] Susskind, L., Friedman, A., *Special relativity and classical field theory*, Penguin UK (2017).
- [34] Tari, F., *Caustics of surfaces in the Minkowski 3-space*, *The Quarterly Journal of Mathematics* **63** (1), 189-209 (2012).
- [35] Tari, F., *Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space*, *Journal of the Mathematical Society of Japan* **65**, 723-731 (2013).
- [36] Wong, Y.-C., Au-Yeung, Y.-H., *An Elementary and Simple Proof of the Connectedness of the Classical Groups*, *The American Mathematical Monthly* **74** (8), 964-966 (1967).
- [37] Woodside, D. A., *Uniqueness theorems for classical four-vector fields in Euclidean and Minkowski spaces*, *Journal of Mathematical Physics* **40** (10), 4911-4943 (1999).

ÍNDICE REMISSIVO

- $GL_n(\mathbb{R})$, 16
- LC , 92
- $O(n, 1)$, 50
- $SO_0(n, 1)$, 62
- \mathbb{Z}_n , 19
- $\text{Fix}(\Sigma)$, 34
- Γ_+ , 37
- $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, 16
- $O_n(\mathbb{R})$, 16
- $\mathcal{P}_d(\Gamma)$, 78
- $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$, 32
- $\mathcal{P}(\Gamma)$, 30
- $SO_n(\mathbb{R})$, 17
- $\mathbb{Z}_2(\delta)$, 72
- Aplicação
 - Γ -equivariante, 31
- Ação, 20
- Base
 - de Hilbert, 31
 - ortonormal de Lorentz, 92
- Cone de luz, 92
- Espaços de Minkowski, 50
- Forma bilinear
 - degenerada, 100
 - não degenerada, 100
- Função
 - Γ_σ -invariante, 37
 - Γ -invariante, 29
- Grupo
 - de Lie compacto, 20
 - de Lorentz, 50
 - especial pseudo-ortogonal, 50
 - pseudo-ortogonal, 49
 - de Lie linear, 16
- Integral
 - de Haar, 24
 - de Haar normalizada, 25
- Involução, 72
- Lorentz ortogonal, 92

- Matriz
 - ortogonal, 17
- Métrica de Lorentz, 48
- Operadores de Reynolds, 39
- Produto
 - direto, 69
 - semidireto, 68
- Pseudo produto interno, 48
- Representação, 21
- Subespaço
 - Γ -invariante, 27
 - de pontos fixos, 34
 - do tipo espaço, 94
 - do tipo luz, 94
 - do tipo tempo, 94
 - não degenerado, 100
- Vetor
 - do tipo espaço, 92
 - do tipo luz, 92
 - do tipo tempo, 92