UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Geodésicas em grupos de Lie munidos com estruturas de Finsler poliedrais invariantes à esquerda

Nathan Henryque Ferreira Barros

Orientador: Prof. Ryuichi Fukuoka

Maringá - PR

2024

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Geodésicas em grupos de Lie munidos com estruturas de Finsler poliedrais invariantes à esquerda

Nathan Henryque Ferreira Barros

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka.

Maringá - PR

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Barros, Nathan Henryque Ferreira
B277g Geodésicas em grupos de Lie munidos com estruturas de Finsler poliedrais invariantes à esquerda / Nathan Henryque Ferreira BArros. -- Maringá, 2024.
97 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Ryuichi Fukuoka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas,Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2024.

1. Estruturas de Finsler de classe CO. 2. Geodésicas. 3. Grupos de Lie. 4. Princípio do máximo de Pontryagin. I. Fukuoka, Ryuichi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 516.1
Edilson Damasio CRB9-1.123

NATHAN HENRYQUE FERREIRA BARROS

GEODÉSICAS EM GRUPOS DE LIE MUNIDOS COM ESTRUTURAS DE FINSLER POLIEDRAIS INVARIANTES À ESQUERDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - UEM (Presidente)
Prof. Dr. Brian David Grajales Triana - Membro Externo
Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM

Aprovada em: 04 de dezembro de 2024.
Local de defesa: Bloco F67 – sala 107.

Agradecimentos

Ao apoio financeiro do Capes;

Ao incentivo dos meus pais para os estudos;

Ao meu orientador Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka pela paciência;

A Profa. Dra. Maria Elenice pelos conselhos;

A todos agradeço a oportunidade de aprender ainda mais.

Resumo

Neste trabalho, foi estudado o problema de encontrar condições necessárias para que um caminho em uma variedade de Finsler (M, F) de classe C^0 seja minimizante. Foi utilizado o princípio do máximo de Pontryagin em um sistema de controle, onde o espaço estado é M e a dinâmica é dada por uma família de campos de vetores unitários. Por fim, uma família de caminhos minimizantes locais em grupos de Lie munidos com estruturas de Finsler poliedrais invariantes à esquerda foi estudada.

Palavras-chave: Estruturas de Finsler de classe C^0, Geodésicas, Grupos de Lie, Princípio do Máximo de Pontryagin.

Abstract

In this work, the problem of finding necessary conditions for a path on a C^0-Finsler manifold (M, F) to be minimizing was studied. Pontryagin's maximum principle was applied to a control system, where the state space is M and the dynamics are given by a family of unit vector fields. Finally, a family of locally minimizing paths in Lie groups endowed with left-invariant polyhedral Finsler structures was studied.

Key words: Finsler Structure of class C^0, Geodesics, Lie Groups, Pontryagin's Maximum Principle.

Notações

- $\overline{A}$: O fecho de A.
- aff Z : O subespaço afim gerado por Z.
- Alt T: O tensor definido como
$$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn(\sigma)T^{\sigma},$$
com $T \in V^{0,k}$.
- $\mathcal{A}^k M$: O conjunto das $k-$formas em M.
- $B(p), B[p]$: Bola aberta unitária, bola fechada unitária centrada na origem no espaço tangente T_pM em $p \in (M, F)$.
- $B(p, x, r), B[p, x, r]$: Bola aberta, bola fechada centrada em x e raio r respectivamente no espaço tangente T_pM em $p \in (M, F)$.
- $\mathcal{D}(M)$: Conjunto das funções diferenciáveis $f : M \to \mathbb{R}$.
- $d\phi(x), d^r\phi(x)$: A derivada de $\phi : M \to \mathbb{R}^m$ e a $r-$ésima derivada de ϕ em $x \in M$ respectivamente.
- $d\tau$: Derivada exterior de $\tau \in \mathcal{A}^k(M)$.
- $\mathcal{E}$: Campo geodésico estendido.
- F : Estrutura de Finsler de classe C^0 em M.
- G : Grupo de Lie.
- $\mathfrak{g}$: Álgebra de Lie.
- H : Função Hamiltoniano.
- H, H^- : Hiperplano que não contém a origem e o semi-espaço fechado determinado por H contendo a origem.
- ir Z : O interior relativo de Z.
- $int(A)$: O interior de A.
- $int_A(S)$: Interior de S como um subespaço topológico de A.

- $J = (j_1, ..., j_k)$: Multi-índice de comprimento k.
- $L_x(z), R_x(z)$: Translação à esquerda (respectivamente à direita) de z por x.
- $\Lambda^k(V)$: O conjunto de todos os tensores alternados de tipo $(0, k)$ sobre V.
- $\Lambda^k(M)$: O conjunto de todos os campos tensoriais alternados de tipo $(0, k)$ sobre M.
- M : Variedade diferenciável.
- $\mathcal{M}$: Supremo da função Hamiltoniano.
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ é a reta real estendida.
- $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ é a reta real estendida positiva.
- $S(p)$: Esfera unitária centrada na origem no espaço tangente T_pM em $p \in (M, F)$.
- $S(p, x, r)$: Esfera centrada em x e raio r no espaço tangente T_pM em $p \in (M, F)$.
- S^{n-1} : A esfera unitária $S(0, 1)$ em $\mathbb{R}^n$.
- S_k : Conjunto de todas as permutações de $\{1, ..., k\}$.
- $sgn(\sigma)$: O sinal de uma permutação.
- T^σ : Tensor definido por $T^\sigma(y_1, ..., y_k) = T(y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(k)})$, com $T \in V^{0,k}$ e $\sigma \in S_k$.
- $T_p^{m,s}M$: O espaço vetorial de tensores de tipo (m, s) sobre T_pM.
- $T^{m,s}M$: O conjunto dos campos tensoriais de tipo (m, s) sobre M.
- $\mathcal{T}^{m,s}M$: O conjunto campos tensoriais diferenciáveis de tipo (m, s) sobre M.
- $V^{m,s}$: O espaço vetorial de tensores de tipo (m, s) sobre V.
- ζ^* : Pullback da função ζ.
- $|| \cdot ||$: Norma usual em $\mathbb{R}^n$.

- $\flat$: Abaixamento de índice em tensores.
- $\sharp$: Levantamento de índice em tensores.
- $\wedge$: Produto wedge.
- $\otimes$: Produto tensorial.
- δ^I_J : Delta de Kronecker sobre os multi-índices I e J.

Sumário

Introdução

A métrica Riemanniana é uma estrutura clássica, desenvolvida por Bernhard Riemann no século XIX, com o objetivo de generalizar a geometria diferencial das superfícies em $\mathbb{R}^3$, e em particular os objetos da geometria intrínseca tais como a conexão, transporte paralelo e a curvatura Gaussiana (vide [6], [19], [25]). Seu formalismo tem aplicações em diversas áreas, sendo a métrica de Schwarzschild um exemplo na teoria da relatividade geral de Einstein. A métrica Riemanniana serve como base para definir outras geometrias, tais como as geometrias semi-Riemannianas e as de Finsler.

A concepção inicial de estruturas de Finsler como uma correspondência diferenciável que a cada espaço tangente é associado uma norma diferenciável é devido à Riemann (vide [19]). Mas ele se concentrou mais em obter resultados no caso onde a família de normas é uma família de produtos internos. Décadas mais tarde, em sua tese de doutorado, Paul Finsler define "estrutura de Finsler" do modo que é conhecido atualmente (vide [4] e [9]). Uma contribuição importante de Finsler é a hipótese das normas serem fortemente convexas, o que garante a existência e unicidade de geodésicas que partem de um certo ponto da variedade com uma determinada velocidade. A convexidade forte permite também definir as curvaturas flag, que são generalizações da curvatura seccional (vide [4]). A partir de 1990, a geometria de Finsler ganhou um maior destaque na matemática. As estruturas de Finsler são diferenciáveis e fortemente convexas e com isso as principais ferramentas utilizadas (Cálculo Diferencial e Integral) no estudo de geometria Riemanniana são aplicáveis na Geometria de Finsler. Como consequência, essas geometrias compartilham muitos resultados em comum.

Se M é uma variedade diferenciável e $p \in M$, denotaremos o espaço tangente de M em p por T_pM e o fibrado tangente de M por TM. O espaço cotangente de M em p e o fibrado cotangente de M serão denotados por T_p^*M e T^*M respectivamente.

Uma estrutura de Finsler de classe C^0 em uma variedade diferenciável é uma função contínua $F : TM \to \mathbb{R}^+$ de forma que $F(p, \cdot) : T_pM \to \mathbb{R}^+$ é uma norma assimétrica em T_pM para todo $p \in M$. Esse será o nosso principal objeto de estudo. Nesse caso, técnicas adicionais serão necessárias, pois F pode ser não diferenciável.

A Geometria Métrica é uma das técnicas utilizadas para o estudo de variedades de Finsler de classe C^0. Em casos particulares, podemos provar a existência local de curvas minimizantes que ligam dois pontos e calcular geodésicas de forma explícita (vide [10]).

Um outro método que é útil no estudo de variedades de Finsler de classe C^0 é aproximar F por uma família de estruturas de Finsler F_ϵ a um parâmetro [11]. Assim, se F for uma estrutura de Finsler, as várias conexões da geometria de Finsler e a curvatura flag de F_ϵ convergem uniformemente em subconjuntos compactos aos objetos correspondentes de F quando ϵ tende a 0. Uma das principais técnicas utilizadas é a convolução por funções bump.

Vamos assumir que as estruturas de Finsler de classe C^0 são diferenciáveis horizontalmente, ou seja, são de tipo Pontryagin (vide item 3 da definição 6.1.4). Nessas condições podemos aplicar o Princípio do Máximo de Pontryagin, resultado da teoria de controle ótimo, para generalizar localmente o campo geodésico da geometria Finsler. Em [20], o autor define o campo geodésico estendido $\mathcal{E}$ em uma variedade de Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin como uma relação que associa cada $(x, \xi) \in T^*U - \{0\}$ a um subconjunto de $T_{(x,\xi)}(T^*U - \{0\})$, onde U é um aberto de M. Uma curva integral (x, ξ) da inclusão diferencial $(x'(t), \xi'(t)) \in \mathcal{E}(x(t), \xi(t))$ é chamado de extremal de Pontryagin enquanto $x(t)$ é chamado de extremal de (M, F). Curvas minimizantes parametrizadas por comprimento de arco são extremais de (M, F).

O Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP) foi criado por Pontryagin e seus estudantes em [16] e lida com problemas de variação em estruturas de comprimentos não diferenciáveis. Porém a sua utilização para resolver problemas de geometria demorou para se tornar popular. Um dos primeiros trabalhos que utilizou PMP para problemas geométricos foi [1].

O primeiro artigo a classificar todos os extremais de um grupo de Lie munido com uma estrutura de Finsler de classe C^0 simétrica e invariante à esquerda qualquer foi [13]. Neste trabalho, a autora utiliza o Princípio do Máximo de Pontryagin para calcular explicitamente todos os extremais no grupo de Lie bidimensional, simplesmente conexo e não abeliano. Além disso, ela demonstra que todos os extremais são minimizantes.

Ainda como aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin em geometria, um assunto bastante estudado atualmente são extremais em estruturas sub-Finsler de classe C^0 em grupos de Lie. Expliquemos com mais detalhes esse assunto. Uma distribuição $\mathcal{D}$ de posto k em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um subespaço $k-$dimensional $\mathcal{D}(p)$ do espaço tangente T_pM. Um campo de vetores X em um aberto U de M é horizontal se $X(p) \in \mathcal{D}(p)$ para todo $p \in U$. Uma distribuição $\mathcal{D}$ de posto k é diferenciável em p se existir uma vizinhança U de p e k campos de vetores diferenciáveis não nulos $X_1, ..., X_k$ em U tais que $\text{span}\{X_1(p), ..., X_k(p)\} = \mathcal{D}(p)$ para todo $p \in U$. Uma distribuição $\mathcal{D}$ é diferenciável se ele for diferenciável para todo $p \in M$. Uma distribuição diferenciável é dita completamente não holonômica se para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que

$$\text{span}\{[X, Y](p), X \text{ e } Y \text{ campos diferenciáveis e horizontais em } U\} = T_pM.$$

Uma estrutura sub-Finsler F de classe C^0 em uma variedade diferenciável M munida com uma distribuição diferenciável $\mathcal{D}$ completamente não holonômica é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa uma norma assimétrica $F(p, \cdot)$ em $\mathcal{D}(p)$ tal que se X é um campo diferenciável horizontal em um aberto U de M, então $p \mapsto F(p, X(p))$ é uma função contínua em U.

Uma distribuição $\mathcal{D}$ em um grupo de Lie é invariante à esquerda se $(dL_p)(\mathcal{D}(q)) = \mathcal{D}(p \cdot q)$, onde L_p é a translação à esquerda. As distribuições invariantes à esquerda são sempre diferenciáveis. Uma estrutura sub-Finsler de classe C^0 invariante à esquerda é uma correspondência que a cada $p \in G$, associa uma norma assimétrica F em $\mathcal{D}(p)$, onde $\mathcal{D}$ é uma distribuição completamente não holonômica e invariante à esquerda e $F(q, v) = F(p \cdot q, (dL_p)(v))$ para todo $p, q \in G$ e $v \in \mathcal{D}(q)$.

Recentemente um assunto que tem sido bastante estudado é a geometria das estruturas sub-Finsler de classe C^0 invariantes à esquerda em grupos de Lie, principalmente os de posto 2. Em particular, o cálculo explícito de extremais, bem como critérios para identificação de curvas minimizantes e minimizantes locais dentre os extremais têm sido obtidos (vide [2],[3],[5],[14],[22]).

No caso particular de grupos de Lie conexos de dimensão 3 munidos com uma estrutura de Finsler F de classe C^0 invariante à esquerda onde $F|_{\mathfrak{g}}$, é a métrica da soma, tiveram seus extremais de Pontryagin classificados em [17]. Além disso, nesta mesma citação, foi introduzida uma curvatura assintótica em $\mathfrak{g}^* - \{0\}$ para grupo de Lie munidos com estrutura de Finsler poliedral invariante à esquerda que detecta a unicidade de extremais associados à uma parte vertical de um extremal de Pontryagin (vide [17]). Esse resultado de unicidade de extremais foi generalizado para qualquer dimensão finita em [18]

O estudo dos extremais $x(t)$ obtidos através da projeção de um extremal de Pontryagin $(x(t), \xi(t))$ é uma forma de encontrar candidatos curvas localmente minimizantes, mas é necessário mais condições para garantir que as mesmas sejam localmente minimizantes.

Neste texto vamos desenvolver a teoria de estruturas de Finsler de tipo

Pontryagin poliedrais. Além disso, será estudado um caso invariante à esquerda em grupos de Lie onde o extremal é localmente minimizante.

Capítulo 1

O Princípio do Máximo de Pontryagin

Em cálculo variacional existem várias ferramentas para curvas que maximizem ou minimizem um funcional. Estamos interessados em estudar a minimização de um funcional, cuja variação é obtida através dos controles admissíveis de um sistema de controle. O teorema que nos dá condições necessárias para que uma trajetória correspondente a um controle admissível minimize (ou maximize) o funcional é o princípio do máximo de Pontryagin.

O princípio do máximo de Pontryagin é um teorema que foi demonstrado por Pontryagin em volta de 1956. Nesta seção, apresentaremos o teorema quando o espaço de fase é um aberto do $\mathbb{R}^n$. O resultado será estendido para variedades diferenciáveis na seção 6. A principal referência para esta seção é [16]

1.1 Sistema de Controle

Considere um problema onde temos uma família de campos vetoriais de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ parametrizadas por $u \in C$. Uma função $u(t)$ definida em um intervalo I com valores em C define uma família de campos de vetores contínuos parametrizados por $t \in I$, e com isso podemos definir curvas integrais dessa família a um parâmetro. Nesta seção, formalizaremos este tipo de objeto matemático.

Definição 1.1.1 *Um sistema de controle é uma tripla $\Sigma = (U, f, C)$ onde*

(i) *U é um aberto de $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *C é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^m$, chamado de região de controle;*

(iii) $f : U \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma função com as seguintes propriedades:*

- *f é contínua;*
- *As funções $(x, u) \mapsto \dfrac{f(x,u)}{\partial x^i}$ são contínuas para todo $i = 1, ..., n$.*

O sistema de equações diferenciais associado ao sistema de controle $\Sigma = (U, f, C)$ é

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, ..., x^n, u) = f^i(x, u),\ \ i = 1, ..., n \tag{1.1}$$

que pode ser escrito na forma vetorial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) = (f^1(x, u), ..., f^n(x, u)). \tag{1.2}$$

Definição 1.1.2 *Seja $\Sigma = (U, f, C)$ um sistema de controle.*

(i) *u é um controle admissível se $u : I \to C$ é definido em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de forma que $t \mapsto u(t)$ é mensurável (no sentido de Lebesgue) e limitado.*

(ii) *Uma trajetória controlada é um par (x, u) com $u : I \to C$ um controle admissível e $x : I \to U$ que satisfaz a equação diferencial* (1.2). *Nesse caso diremos que I é o intervalo de tempo de (x, u);*

(iii) *Um arco controlado é uma trajetória controlada (x, u) em um intervalo de tempo $I = [t_0, t_1]$ em $\mathbb{R}$.*

Se (x, u) é uma trajetória controlada, então diremos que x é a trajetória e u o controle.

Agora vamos supor que é dada uma função adicional

$$f^0(x^1, ..., x^n, u) = f^0(x, u) \tag{1.3}$$

definida e contínua em $U \times C$ com derivadas parciais $\partial f^0/\partial x^i$ contínuas em $U \times C$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Então o problema de otimização de controle pode ser formulado da seguinte forma:

Dados x_0 e x_1 em U e o conjunto de todos os controles admissíveis $u = u(t)$ de forma que (x, u) é uma arco controlado satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$, encontre o controle admissível de forma que o valor do funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \tag{1.4}$$

seja minimizado. Note que ao fixar x_0 e x_1 temos que t_0 e t_1 da equação (1.4) dependem somente do controle admissível $u(t)$.

Um controle $u(t)$ que soluciona o problema acima é chamado de *controle ótimo para a transição de x_0 para x_1* e a trajetória $x(t)$ é chamada de *trajetória ótima*. No caso em que $f^0(x,u) = 1$, temos que a equação (1.4) é escrita como $J = t_1 - t_0$. Então encontrar o controle ótimo $u(t)$ é equivalente a minimizar o intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. Nesse caso em particular, vamos chama-lo de *problema de otimização de tempo* .

Para provar condições necessárias de otimização, é conveniente reformular o problema. Considere uma nova coordenada x^0 em conjunto com as coordenadas $x^1, ..., x^n$ em U e f^0 a função de acordo com (1.3). Assim temos o sistema de equações diferenciáveis

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, ..., x^n, u) = f^i(x,u), \quad i = 0, 1, ..., n \tag{1.5}$$

com o lado direito não dependendo de x^0. Considere $\hat{U} = \mathbb{R} \times U$ e $\hat{x} = (x^0, x) = (x^0, x^1, ..., x^n) \in \hat{U}$. Dessa forma podemos reescrever o sistema de equações diferenciais na forma vetorial como

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \mathbf{f}(x,u) = (f^0(x,u), f^1(x,u), ..., f^n(x,u)). \tag{1.6}$$

Agora seja $u(t)$ um controle ótimo para a transição de x_0 para x_1 e $x(t)$ a trajetória ótima com a condição inicial $x(t_0) = x_0$. Considere o ponto $\hat{x}_0 = (0, x_0) \in \hat{U}$. Então a solução da equação (1.6) correspondente ao controle $u(t)$ com condição inicial $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ e intervalo de tempo $I = [t_0, t_1]$ satisfazem a equação

$$x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x(s), u(s))ds.$$

Caso $t = t_1$, então

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(s), u(s))ds = J$$

$$x(t_1) = x_1,$$

onde a solução $\hat{x}(t)$ da equação diferencial (1.6) com condição inicial $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ passa pelo ponto $\hat{x}_1 = (J, x_1)$ em $t = t_1$.

1.2 Princípio do Máximo de Pontryagin

Nesta seção vamos apresentar o princípio do máximo de Pontryagin. Mas para enunciá-lo, é necessário definir um sistema Hamiltoniano, que é com-posto pelo sistema de equações diferenciais do sistema Σ e por um sistema de equações diferenciais auxiliar.

Para formular o teorema, vamos considerar dois sistemas de equações diferenciais. O primeiro é o sistema de equações diferenciais (1.5)

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u), \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{1.7}$$

Agora considere o sistema de equações diferenciais auxiliar formado pelas variáveis $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n$:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^j(x, u)}{\partial x^i}\xi_j, \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{1.8}$$

Se considerarmos um arco controlado $(x(t), u(t))$ com $I = [t_0, t_1]$ correspondente a equação (1.7) com condição inicial $x(t_0) = x_0$, o sistema de equações (1.8) é escrito da forma

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^j(x(t), u(t))}{\partial x^i}\xi_j, \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{1.9}$$

que é um sistema linear e homogêneo. Portanto dada uma condição inicial, o sistema admite uma única solução $\hat{\xi} = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n)$ com cada x^j definido no intervalo I, e a função $\hat{\xi}$ é absolutamente contínua (vide teorema 3 em [8]).

Vamos simplificar os sistemas (1.7) e (1.8) em um único sistema de equações diferenciais. Considere a função $\hat{H}$ dependendo das variáveis $x^0, x^1, ..., x^n$, $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n, u$ definida como

$$\hat{H}(\hat{x}, \hat{\xi}, u) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i f^i(x, u).$$

Os sistemas (1.7) e (1.8) podem escritos pelo seguinte sistema Hamiltoniano

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_i} \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{1.10}$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x^i} \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{1.11}$$

Chamaremos a função $\hat{H}$ de *Hamiltoniano associado ao problema de controle ótimo do sistema* $\Sigma = (U, f, C)$ ou simplesmente de *Hamiltoniano* se o sistema já estiver implícito.

Dessa forma seja $u(t)$ um controle admissível definido em $I = [t_0, t_1]$ e a condição inicial $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$. Primeiramente encontre uma trajetória $\hat{x}(t)$

que satisfaz o sistema (1.10) e defina $\hat{\xi}(t) = (\xi_0(t), \xi_1(t), ..., \xi_n(t)))$ como a solução do sistema (1.11) correspondente a arco controlado $(\hat{x}(t), u(t))$.

Vamos denotar o supremo do Hamiltoniano $\hat{H}$ como

$$\hat{\mathcal{M}}(\hat{x}, \hat{\xi}) = \sup_{u \in C} \hat{H}(\hat{x}, \hat{\xi}, u).$$

Em particular se C é limitado ou simplesmente se existe $u_M \in C$ tal que $\hat{H}(\hat{x}, \hat{\xi}, u_M) = \sup_{u \in C} \hat{H}(\hat{x}, \hat{\xi}, u)$ então vamos escrever simplesmente

$$\hat{\mathcal{M}}(\hat{x}, \hat{\xi}) = \max_{u \in C} \hat{H}(\hat{x}, \hat{\xi}, u).$$

Teorema 1.2.1 *Seja $(\hat{x}(t), u(t))$ um arco controlado com intervalo de tempo $I = [t_0, t_1]$ e condição inicial $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ que passa por $\hat{x}_1$ no tempo t_1 e satisfaz (1.10). Para $(\hat{x}(t), u(t))$ ser uma trajetória ótima é necessário que exista uma função absolutamente contínua não nula $\hat{\xi}(t) = (\xi_0(t), \xi_1(t), ..., \xi_n(t))$ correspondente ao sistema (1.11) que satisfaça as seguintes condições:*

1. *Para todo $t \in I$, a função $\hat{H}(\hat{x}(t), \hat{\xi}(t), u(t))$ admite seu máximo em $u = u(t)$ quase sempre, ou seja*

$$\hat{\mathcal{M}}(\hat{x}(t), \hat{\xi}(t)) = \hat{H}(\hat{x}(t), \hat{\xi}(t), u(t)); \tag{1.12}$$

2. *No tempo final t_1 temos que*

$$\xi_0(t_1) \leq 0 \text{ e } \hat{\mathcal{M}}(\hat{x}(t_1), \hat{\xi}(t_1)) = 0. \tag{1.13}$$

Além do mais, se $\hat{x}(t), \hat{\xi}(t)$ e $u(t)$ satisfazem as equações Hamiltonianas (1.10) e (1.11) e satisfazem a condição 1 desse teorema, então $\xi_0(t)$ e $\hat{\mathcal{M}}(\hat{x}(t), \hat{\xi}(t))$ são funções constantes.

Observe que o último parágrafo do teorema nos diz que a equação (1.13) pode ser verificada qualquer $t \in I$ e não somente em t_1.

Vamos encontrar condições necessárias para soluções dos problemas de otimização de tempo baseado no teorema 1.2.1. Para isso considere $f^0(x, u)$ do teorema 1.2.1 igual a 1. Assim o Hamiltoniano $\hat{H}$ é da forma

$$\hat{H} = \xi_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i f^i(x, u).$$

Considere $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ e a função Hamiltoniana

$$H(x, \xi, u) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f^i(x, u).$$

Dessa forma, o novo sistema Hamiltoniano baseado em (1.10) e (1.11) é

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad i = 1, ..., n, \tag{1.14}$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad i = 1, ..., n. \tag{1.15}$$

Observe que esse novo sistema é equivalente ao sistema (1.10) e (1.11) pois temos

$$\frac{dx^0}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_0} = f^0(x,u) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x^0} = 0,$$

e é imediato que $x^0(t) = t - t_0$ e $\xi_0(t) = \xi_0(0)$.

Para valores fixos de x e ξ temos que H depende somente de u. Vamos denotar o supremo do Hamiltoniano H como

$$\mathcal{M}(x,\xi) = \sup_{u\in C} H(x,\xi,u).$$

Como $H(x,\xi,u) = \hat{H}(\hat{x},\hat{\xi},u) - \xi_0$, então

$$\mathcal{M}(x,\xi) = \hat{\mathcal{M}}(\hat{x},\hat{\xi}) - \xi_0.$$

As equações (1.12) e (1.13) ficam

$$H(x(t),\xi(t),u(t)) = \mathcal{M}(x(t),\xi(t)) = -\xi_0(t) \geq 0.$$

Assim temos o seguinte teorema

Teorema 1.2.2 *Seja $(x(t),u(t))$ um arco controlado definido em $I = [t_0,t_1]$ e condição inicial $x(t_0) = x_0$ que passa por x_1 no tempo t_1 e satisfaz* (1.14)*. Para $(x(t),u(t))$ ser uma trajetória de tempo otimizado é necessário que exista uma função absolutamente contínua não nula $\xi(t) = (\xi_1(t), ..., \xi_n(t))$ correspondente ao sistema* (1.15) *que satisfaça as seguintes condições:*

1. *Para todo $t \in I$ a função $H(x(t),\xi(t),u(t))$ admite seu máximo em $u = u(t)$ quase sempre, ou seja*

$$\mathcal{M}(x(t),\xi(t)) = H(x(t),\xi(t),u(t)); \tag{1.16}$$

2. *No tempo final t_1 temos que*

$$\mathcal{M}(x(t_1),\xi(t_1)) \geq 0. \tag{1.17}$$

Além do mais, se $x(t),\xi(t)$ e $u(t)$ satisfazem as equações Hamiltonianas (1.14) *e* (1.15) *e a condição* 1 *desse teorema, então $\mathcal{M}(x(t),\xi(t))$ é constante.*

Capítulo 2

Tensores em espaços vetoriais

Em geometria clássica, os objetos em uma variedade diferenciável M como as métricas Riemannianas, tensores de curvatura, tensores de Ricci e estruturas simpléticas são exemplos de campos de tensores em M. Nessa seção, iremos apresentar a definição de tensores sobre espaços vetoriais e bem como alguns resultados.

2.1 Tensores e propriedades

Nessa subseção vamos trazer a definição, propriedades e resultados básicos sobre tensores em um espaço vetorial.

Considere V um espaço vetorial n-dimensional e V^* seu espaço dual.

Definição 2.1.1 *Um tensor de tipo (m,s) sobre V é uma função $(m+s)$-linear da forma*

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{m\ cópias} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{s\ cópias} \to \mathbb{R}.$$

O espaço vetorial de tensores de tipo (m,s) é denotado por $V^{m,s}$. Por convenção consideremos $V^{0,0} = \mathbb{R}$.

Os tensores de tipo $(1,0)$ são elementos de $(V^*)^*$ que são naturalmente isomorfos a V. Vamos utilizar v como um elemento de V como também vamos utilizar para o seu elemento correspondente em $(V^*)^*$. Portanto se $\alpha \in V^*$, então $v(\alpha) = \alpha(v)$.

Definição 2.1.2 *Sejam T e S tensores de tipo (m_1, s_1) e (m_2, s_2) respectivamente. Então o produto tensorial $T \otimes S$ de T e S é um tensor de tipo $(m_1 + m_2, s_1 + s_2)$ sobre V definido por*

$$\begin{aligned}&(T \otimes S)(\alpha^1, ..., \alpha^{m_1+m_2}, v_1, ..., v_{s_1+s_2})\\ &= T(\alpha^1, ..., \alpha^{m_1}, v_1, ..., v_{s_1}) \cdot S(\alpha^{m_1+1}, ..., \alpha^{m_1+m_2}, v_{s_1+1}, ..., v_{s_1+s_2})\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\alpha^i \in V^*$ e $v_j \in V$ para todo $i = 1, ..., m_1 + m_2$ e $j = 1, ..., s_1 + s_2$.

Não é difícil ver que o produto tensorial é associativo.

Considere uma base ordenada $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ de V e denote por $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, ..., \beta^n\}$ a base dual relacionada a $\mathcal{B}$. Os tensores e_k são identificados com os seus biduais de tipo $(1, 0)$ sobre V.

É possível induzir uma base $\mathcal{B}^{m,s}$ de $V^{m,s}$ associada a $\mathcal{B}$ dada por

$$\mathcal{B}^{m,s} = \{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_m} \otimes \beta^{j_1} \otimes ... \otimes \beta^{j_s}; i_1, ..., i_m, j_1, ..., j_s \in \{1, ..., n\}\}$$

onde

$$\begin{aligned}&(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_m} \otimes \beta^{j_1} \otimes ... \otimes \beta^{j_s})(\beta^{t_1}, ..., \beta^{t_m}, e_{k_1}, ..., e_{k_s})\\ &= \beta^{t_1}(e_{i_1}) \cdot ... \cdot \beta^{t_m}(e_{i_m}) \cdot \beta^{j_1}(e_{k_1}) \cdot ... \cdot \beta^{j_s}(e_{k_s}) = \delta^{t_1}_{i_1} \cdot ... \cdot \delta^{t_m}_{i_m} \cdot \delta^{j_1}_{k_1} \cdot ...\delta^{j_s}_{k_s}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Para um elemento $(\alpha_1, ..., \alpha_m, v_1, ..., v_s) \in (V^*)^m \times V^s$ qualquer, basta escrevê-los como combinações lineares de suas respectivas bases e a $(m+s)$-linearidade do tensor determina o resultado.

Para verificar que $\mathcal{B}^{m,s}$ realmente é uma base de $V^{m,s}$ tome $T \in V^{m,s}$ qualquer e defina

$$T^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} = T(\beta^{i_1}, ..., \beta^{i_m}, e_{j_1}, ..., e_{j_s}).$$

Portanto T pode ser expresso como

$$T = T^{k_1,...,k_m}_{t_1,...,t_s}(e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_m} \otimes \beta^{t_1} \otimes ... \otimes \beta^{t_s}).$$

De fato

$$\begin{aligned}&T^{k_1,...,k_m}_{t_1,...,t_s}(e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_m} \otimes \beta^{t_1} \otimes ... \otimes \beta^{t_s})(\beta^{i_1}, ..., \beta^{i_m}, e_{j_1}, ..., e_{j_s})\\ &= T^{k_1,...,k_m}_{t_1,...,t_s} \cdot \delta^{i_1}_{k_1} \cdot ... \cdot \delta^{i_m}_{k_m} \cdot \delta^{t_1}_{j_1} \cdot ... \cdot \delta^{t_s}_{j_s} = T^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} = T(\beta^{i_1}, ..., \beta^{i_m}, e_{j_1}, ..., e_{j_s}),\end{aligned} \tag{2.3}$$

o que prova que $\mathrm{span}(\mathcal{B}^{m,s}) = V^{m,s}$. Por outro lado, os elementos de $\mathcal{B}^{m,s}$ são L.I. De fato, se substituirmos $T = 0$ na equação (2.3), temos

$$0 = T^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \quad \forall\ i_1, ..., i_m, j_1, ..., j_s \in \{1, ..., n\}.$$

Assim provamos que $\mathcal{B}^{m,s}$ é uma base de $V^{m,s}$ e portanto $\dim(V)^{m,s} = n^{m+s}$.

Ao fixar uma base $\mathcal{B}$ de V, é possível representar o tensor T pelas suas coordenadas $T^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s}$. Com essa notação, sejam $\alpha^1 = \alpha_{k_1}, ..., \alpha^m = \alpha_{k_m} \in V^*$ e $v_1 = v^{l_1}, ..., v_s = v^{l_s} \in V$. Então

$$T(\alpha^1, ..., \alpha^m, v_1, ..., v_s) = T^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \alpha_{i_1} ... \alpha_{i_m} v^{j_1} ... v^{j_s}.$$

Um tensor $T : V^* \times V \to \mathbb{R}$ pode ser identificado como um operador linear $\overline{T} : V \to V$ dado por $\overline{T}(v) = T(\cdot, v)$. Observe que o funcional $\beta \in V^* \mapsto T(\beta, v) \in \mathbb{R}$ pertence a $(V^*)^*$, que é identificado por $(V^*)^* \equiv V$.

Denote $T = T^i_j \in V^{1,1}$, onde T^i_j é a $i \times j$-entrada de sua representação matricial na base $\mathcal{B}^{1,1}$ induzida por $\mathcal{B}$. Então

$$\overline{T}(e_k) = T(\cdot, e_k) = T^i_j (e_i \otimes \beta^j)(\cdot, e_k) = T^i_k e_i.$$

Assim as representações de $\overline{T}$ e T com respeito à base $\mathcal{B}$ coincide. Logo o traço de $\overline{T}$ é definido por

$$tr\overline{T} = \overline{T}^i_i = T^i_i = T(\beta^i, e_i).$$

Seja $k \in \{1, ..., m\}$ e $l \in \{1, ..., s\}$. A contração de $T \in V^{m,s}$ com respeito ao par (k, l) é um tensor $\mathrm{tr}_{(k,l)} T \in V^{m-1,s-1}$ dado por

$$\begin{aligned}&(\mathrm{tr}_{(k,l)} T)(\alpha^1, ..., \alpha^{m-1}, v_1, ..., v_{s-1}) = \\ &= T(\alpha^1, ..., \alpha^{k-1}, \beta^q, \alpha^k, ..., \alpha^{m-1}, v_1, ..., v_{l-1}, e_q, v_l, ..., v_{s-1}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

com a convenção de Einstein aplicada em q.

O valor de $\mathrm{tr}_{(k,l)} T$ não depende da base $\mathcal{B}$. De fato, sejam $\alpha^1, ..., \alpha^{m-1} \in V^*$ e $v_1, ..., v_{s-1} \in V$ e $A \in V^{1,1}$ definido como

$$A(\beta, v) = T(\alpha^1, ..., \alpha^{k-1}, \beta, \alpha^k, ..., \alpha^{m-1}, v_1, ..., v_{l-1}, v, v_l, ..., v_{s-1}),$$

para todo $(\beta, v) \in V^* \times V$. Para calcular seu traço considere $A = A^i_j$ sua representação com respeito à base $\mathcal{B}$. Assim

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} A = A^q_q &= T(\alpha^1, ..., \alpha^{k-1}, \beta^q, \alpha^k, ..., \alpha^{m-1}, v_1, ..., v_{l-1}, e_q, v_l, ..., v_{s-1}) \\ &= (\mathrm{tr}_{(k,l)} T)(\alpha^1, ..., \alpha^{m-1}, v_1, ..., v_{s-1}).\end{aligned}$$

Como a aplicação traço não depende da escolha de base, temos que $\mathrm{tr}_{(k,l)} T$ também não depende.

Proposição 2.1.3 *Sejam $T \in V^{m_1,s_1}$ e $S \in V^{m_2,s_2}$. Então*

$$(T \otimes S)^{i_1 \cdots i_{m_1+m_2}}_{j_1 \cdots j_{s_1+s_2}} = T^{i_1 \cdots i_{m_1}}_{j_1 \cdots j_{s_1}} \cdot S^{i_{m_1+1} \cdots i_{m_1+m_2}}_{j_{s_1+1} \cdots j_{s_1+s_2}}.$$

Se $T \in V^{m,s}$, então a contração com respeito ao par (k,l) em coordenadas é dado por

$$(tr_{(k,l)}T)^{i_1 \cdots i_{m-1}}_{j_1 \cdots j_{s-1}} = T^{i_1 \cdots i_{k-1} q i_k \cdots i_{m-1}}_{j_1 \cdots j_{l-1} q j_l \cdots j_{s-1}}.$$

Demonstração: Considere o elemento $(\beta^{i_1}, ..., \beta^{i_{r_1}}, e_{j_1}, ..., e_{j_{r_2}})$. Temos a equação

$$(T \otimes S)^{i_1 \cdots i_{m_1+m_2}}_{j_1 \cdots j_{s_1+s_2}} = T^{i_1 \cdots i_{m_1}}_{j_1 \cdots j_{s_1}} \cdot S^{i_{m_1+1} \cdots i_{m_1+m_2}}_{j_{s_1+1} \cdots j_{s_1+s_2}}$$

ao considerar $r_1 = m_1 + m_2$ e $r_2 = s_1 + s_2$ e aplicar o elemento $(\beta^{i_1}, ..., \beta^{i_{r_1}}, e_{j_1}, ..., e_{j_{r_2}})$ na equação (2.1). De forma análoga temos

$$(\mathrm{tr}_{(k,l)}T)^{i_1 \cdots i_{m-1}}_{j_1 \cdots j_{s-1}} = T^{i_1 \cdots i_{k-1} q i_k \cdots i_{m-1}}_{j_1 \cdots j_{l-1} q j_l \cdots j_{l-1}}$$

ao considerar $r_1 = m-1$ e $r_2 = s-1$ e aplicar o elemento $(\beta^{i_1}, ..., \beta^{i_{r_1}}, e_{j_1}, ..., e_{j_{r_2}})$ na equação (2.4).

$\blacksquare$

Seja $(m, s) = (m_1 + m_2, s_1 + s_2)$ com $m_1, m_2, s_1, s_2 \geq 0$ e $m_1 + s_1 > 0$. O tensor $T \in V^{m,s}$ pode ser identificado com um aplicação $(m_1 + s_1)$-linear

$$\overline{T} : (V^*)^{m_1} \times V^{s_1} \to V^{m_2,s_2}$$

definido como

$$\overline{T}(\alpha^1, ..., \alpha^{m_1}, v_1, ..., v_{s_1}) = T(\alpha^1, ..., \alpha^{m_1}, \underbrace{\cdot, ..., \cdot}_{m_2 \text{ cópias}}, v_1, ..., v_{s_1}, \underbrace{\cdot, ..., \cdot}_{s_2 \text{ cópias}}).$$

Essa identificação é uma generalização da identificação para tensores de tipo $(1,1)$ com operadores lineares feito anteriormente.

2.2 Tensores em espaços vetoriais munidos com uma forma bilinear não degenerada

Considere $\mu : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear não degenerada, ou seja, a função $v \to \mu(\cdot, v)$ é um isomorfismo entre V e V^*. Vamos denotar $\mu(\cdot, v) = v^\flat$. Reciprocamente, dado $\alpha \in V^*$, denote como $\alpha^\sharp \in V$ o único vetor tal que $\mu(\cdot, \alpha^\sharp) = \alpha$. As funções $v \mapsto v^\flat$ e $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$ são conhecidos como isomorfismos musicais. A inversa da forma bilinear μ em V^* é definido como $\mu^{-1}(\alpha, \beta) = \mu(\beta^\sharp, \alpha^\sharp)$.

Considere $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_n\}$ a base de V e $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, ..., \beta^n\}$ base de V^* dual a $\mathcal{B}$ e $\mu = \mu_{ij}$ as entradas da matriz de μ. Sejam $v = v^i$ e $w = w^i$ vetores de V, então

$$(v^\flat)_i w^i = v^\flat(w) = \mu(w, v) = \mu_{ij} w^i v^j,$$

e portanto

$$(v^\flat)_i = \mu_{ij} v^j. \tag{2.5}$$

Considere $\mu^{ij} \in V^{2,0}$ as entradas da matriz inversa de μ. Ao substituir $v^\flat = \alpha$ e $v = \alpha^\sharp$ na equação (2.5) e multiplicando ambos lados da igualdade por (μ^{ki}) resulta em

$$\mu^{ki}\alpha_i = \mu^{ki}\mu_{ij}(\alpha^\sharp)^j = \delta^k_j(\alpha^\sharp)^j = (\alpha^\sharp)^k, \tag{2.6}$$

que é a formula do função $\sharp$ em coordenadas.

Vamos analisar os isomorfismos musicais nos elementos básicos. Observe que

$$(e_i)^\flat(e_k) = \mu(e_k, e_i) = \mu_{ki} = \mu_{ji}\delta^j_k = \mu_{ji}\beta^j(e_k).$$

Portanto

$$(e_i)^\flat = \mu_{ji}\beta^j.$$

Agora multiplicando por μ^{ik} e aplicando o isomorfismo $\sharp$ na equação acima, temos

$$(\beta^k)^\sharp = (\mu^{ik}(e_i)^\flat)^\sharp = \mu^{ik} e_i.$$

Esta última equação relaciona as entradas da matriz μ^{-1} com μ, afinal

$$\begin{aligned}\mu^{-1}(\beta^i, \beta^j) &= \mu((\beta^j)^\sharp, (\beta^i)^\sharp) = \mu(\mu^{lj} e_l, \mu^{ki} e_k) \\ &= \mu^{lj}\mu(e_l, e_k)\mu^{ki} = \mu^{lj}\mu_{lk}\mu^{ki} = \mu^{lj}\delta^i_l = \mu^{ij},\end{aligned}$$

o que demonstra a seguinte proposição

Proposição 2.2.1 *Seja $\mu = \mu_{ij}$ uma forma bilinear não degenerada. Então $\mu^{-1} = \mu^{kl}$, onde μ^{kl} são as entradas da matriz inversa de μ_{ij}.*

Dado $v = v^i \in V$ considere o tensor $\mu \otimes v : V^* \times V \times V \to \mathbb{R}$ definido como

$$(\mu \otimes v)(\beta^j, e_i, e_k) = \mu(e_i, e_k)v(\beta^j) = \mu_{ik}\beta^j(v) = \mu_{ik}v^j.$$

Assim defina a função linear $v \mapsto \mu \otimes v \in V^{1,2}$.

Temos que os isomorfismos $\flat$ e $tr_{(1,2)}(\mu \otimes \cdot)$ são iguais, pois pela equação (2.5) tem-se

$$(v^\flat)_i = \mu_{iq} v^q = (\mu \otimes v)_{iq}^q = tr_{(1,2)}(\mu \otimes v).$$

De forma análoga, pela equação (2.6), temos $\sharp = tr_{(2,1)}(\mu^{-1} \otimes \cdot)$. Esses isomorfismos são naturalmente estendidos para $\flat : V^{m,s} \to V^{m-1,s+1}$ e $\sharp : V^{m,s} \to V^{m+1,s-1}$. Para isso considere $T, S \in V^{m,s}$ com $m \geq 1$. Então

$$T \mapsto T^\flat = tr_{(1,2)}(\mu \otimes T);$$

$$S \mapsto S^\sharp = tr_{(2,1)}(\mu^{-1} \otimes S).$$

Analisando em coordenadas fica

$$T_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_m} \mapsto \mu_{i_1 q} T_{j_1 \ldots j_s}^{q i_2 \ldots i_m} := T_{i_1 j_1, \ldots j_s}^{i_2 \ldots i_m}, \tag{2.7}$$

e

$$S_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_m} \mapsto \mu^{j_1 q} S_{q j_2 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_m} := S_{j_2 \ldots j_s}^{j_1 i_1, \ldots i_m}. \tag{2.8}$$

As funções (2.7) e (2.8) são conhecidos como abaixamento de índice e levantamento de índice respectivamente. Pela construção não é difícil ver que $(T^\flat)^\sharp = T$. As notações $\mu = \mu_{ij} \in V^{0,2}$ e $\mu^{-1} = \mu^{ij} \in V^{2,0}$ seguem essa convenção com $\mu^{-1} = ((\mu_{ij})^\sharp)^\sharp$. De fato, veja que

$$(\mu_{ij})^\sharp = \mu^{iq} \mu_{qj} = \delta_j^i \text{ e } (\mu^{ij})^\flat = \mu_{iq} \mu^{qj} = \delta_i^j.$$

Observe que em (2.7) e (2.8), denotamos T e S com a mesma letra dos seus abaixamentos e levantamentos respectivamente.

De agora em diante vamos adaptar as equações (2.5) e (2.6) à essa convenção, onde teremos

$$v_i := (v^\flat)_i = \mu_{ij} v^j \text{ e } \alpha^k := (\alpha^\sharp)^k = \mu^{ki} \alpha_i.$$

Capítulo 3

Campos de tensores em variedades diferenciáveis.

Nesta seção, abordaremos os conceitos fundamentais dos campos de tensores em variedades diferenciáveis. Primeiro, definiremos a estrutura diferenciável dos fibrados de tensores analogamente ao que é feito no fibrado tangente. Em seguida, discutiremos a teoria básica dos campos tensoriais, incluindo definições e propriedades essenciais que generalizam os conceitos de campos vetoriais e 1-formas em variedades diferenciáveis.

3.1 Fibrado de tensores

Nesta subseção, definiremos o fibrado de tensores em variedades diferenciáveis. As referências para esta subseção são [7] e [15]. Por hipótese, as variedades diferenciáveis são Hausdorff com base enumerável.

Seja M uma variedade diferenciável. É possível induzir uma estrutura diferenciável nos espaços de tensores sobre espaços tangentes T_pM como segue:

Considere $\{(\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \mapsto M\}_{\alpha\in\Lambda}$ a estrutura diferenciável máxima de M, onde Λ é um conjunto de índices. Por simplicidade, denotaremos esta estrutura diferenciável por $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$. Indicaremos por $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α, por $\mathcal{B} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right\}$ as bases associadas aos espaços tangentes T_pM, com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ e $\mathcal{B}^* = \{dx_\alpha^1, ..., dx_\alpha^n\}$ as bases duais relacionadas a $\mathcal{B}$. Denote $T_p^{m,s}M = (T_pM)^{m,s}$ e defina o conjunto

$$T^{m,s}M = \{(p, T); p \in M \text{ e } T \in T_p^{m,s}M\}.$$

Vamos munir $T^{m,s}M$ com uma estrutura diferenciável. Para cada α, defina

$$\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{m+s}} \to T^{m,s}M, \tag{3.1}$$

por

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha,...,x_n^\alpha,(y_{j_1...j_s}^{i_1...i_m}))=\\&=\left(\mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha,...,x_n^\alpha),y_{j_1...j_s}^{i_1...i_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_1}}\otimes...\otimes\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_m}}\otimes dx_\alpha^{j_1}\otimes...\otimes dx_\alpha^{j_s}\right)\right),\end{aligned}$$

onde $i_1,...,i_m,j_1,...,j_s=1,...,n$.

Afirmamos que $\{(U_\alpha\times\mathbb{R}^{n^{m+s}},\mathbf{y}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável de $T^{m,s}M$. De fato, seja $(p,T)\in T^{m,s}M$ arbitrário. Como $\bigcup_\alpha\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)=M$, então existe γ tal que $p\in\mathbf{x}_\gamma(U_\gamma)$. Já que $T\in T_p^{m,s}M$, então

$$T=y_{j_1...j_s}^{i_1...i_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_\gamma^{i_1}}\otimes...\otimes\frac{\partial}{\partial x_\gamma^{i_m}}\otimes dx_\gamma^{j_1}\otimes...\otimes dx_\gamma^{j_s}\right).$$

Assim temos

$$\mathbf{y}_\gamma(\mathbf{x}_\gamma^{-1}(p),y_{j_1...j_s}^{i_1...i_m})=(p,T),$$

e portanto $\bigcup_\alpha\mathbf{y}_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^{n^{m+s}})=T^{m,s}M$.

Considere $W'=\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)\cap\mathbf{x}_\gamma(U_\gamma)\neq\emptyset$ e suponha que

$$\mathbf{y}_\alpha(U_\alpha\times\mathbb{R}^{n^{m+s}})\cap\mathbf{y}_\gamma(U_\gamma\times\mathbb{R}^{n^{m+s}})=T^{m,s}W'\neq\emptyset.$$

Como $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W')$ é aberto de $\mathbb{R}^n$, então

$$\mathbf{y}_\alpha^{-1}(T^{m,s}W')=\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W')\times\mathbb{R}^{n^{m+s}}$$

é aberto de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n^{m+s}}$. De forma análoga temos $\mathbf{y}_\gamma^{-1}(W)$ é aberto de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n^{m+s}}$. Os conjuntos $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}(p),...,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}(p)\right\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\gamma^1}(p),...,\frac{\partial}{\partial x_\gamma^n}(p)\right\}$ são bases de T_pM para cada $p\in W'$. Seja $id:M\to M$ a função identidade. Temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}=\frac{\partial x_\gamma^k}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial}{\partial x_\gamma^k}. \tag{3.2}$$

Para ver isso, basta aplicar os campos de vetores à esquerda e à direita de 3.2 na função diferenciável x_γ^j.

Por outro lado temos que $\{dx_\alpha^1(p),...,dx_\alpha^n(p)\}$ e $\{dx_\gamma^1(p),...,dx_\gamma^n(p)\}$ são bases de $(T_pM)^*$. Pela equação (3.2) temos

$$dx_\alpha^i\left(\frac{\partial}{\partial x_\gamma^j}\right)=dx_\alpha^i\left(\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\gamma^j}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\right)=\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\gamma^j}dx_\alpha^i\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\right)=\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\gamma^j}\delta_k^i=\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\gamma^j}.$$

Considere $dx_\alpha^i = c_l dx_\gamma^l$ e substitua no primeiro termo da equação acima. Então

$$dx_\alpha^i \left(\frac{\partial}{\partial x_\gamma^j} \right) = c_l dx_\gamma^l \left(\frac{\partial}{\partial x_\gamma^j} \right) = c_l \delta_j^l = c_j = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\gamma^j}.$$

Portanto

$$dx_\alpha^i = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\gamma^l} dx_\gamma^l. \tag{3.3}$$

Seja $(q_\alpha, y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_m}) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{m+s}}$ com $\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha) = p = \mathbf{x}_\gamma(q_\gamma)$. Pelas equações (3.2) e (3.3) temos

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}_\gamma^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha(q_\alpha, y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_m}) = \\
&= \mathbf{y}_\gamma^{-1} \left(p, y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_m} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{i_m}} \otimes dx_\alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_\alpha^{j_s} \right) \right) = \\
&= \mathbf{y}_\gamma^{-1} \left(p, z_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_m} \left(\frac{\partial}{\partial x_\gamma^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\gamma^{k_m}} \otimes dx_\gamma^{l_1} \otimes \dots \otimes dx_\gamma^{l_s} \right) \right) \\
&= (q_\gamma, z_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_m}),
\end{aligned}$$

com

$$z_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_m} = y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_m} \frac{\partial x_\gamma^{k_1}}{\partial x_\alpha^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x_\gamma^{k_m}}{\partial x_\alpha^{i_m}} \cdot \frac{\partial x_\alpha^{j_1}}{\partial x_\gamma^{l_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x_\alpha^{j_s}}{\partial x_\gamma^{l_s}}.$$

Assim $\mathbf{y}_\gamma^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha$ é diferenciável pois $\mathbf{x}_\gamma^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ é diferenciável por hipótese e $z_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_m} \mapsto y_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_m} \frac{\partial x_\gamma^{k_1}}{\partial x_\alpha^{i_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x_\gamma^{k_m}}{\partial x_\alpha^{i_m}} \cdot \frac{\partial x_\alpha^{j_1}}{\partial x_\gamma^{l_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x_\alpha^{j_s}}{\partial x_\gamma^{l_s}}$ é diferenciável por ser soma e produto de funções diferenciáveis.

3.2 Campos tensoriais em variedades diferenciáveis

Nesta subseção, veremos a teoria básica de campos tensoriais diferenciáveis em variedades diferenciáveis M, que generaliza a teoria de campos de vetores diferenciáveis e 1−formas em M. Uma referência para esta seção é [15]

Definição 3.2.1 *Um campo tensorial de tipo (m, s) sobre M é uma função $p \in M \mapsto \sigma(p) = \sigma_p \in T_p^{m,s}M$. Um campo tensorial é diferenciável se σ é diferenciável como uma aplicação entre M e $T^{m,s}M$.*

Vamos denotar o espaço vetorial dos campos tensoriais diferenciáveis de tipo (m,s) sobre M por $\mathcal{T}^{m,s}M$.

Observação 3.2.2 *Quando dizemos que uma propriedade de um espaço topológico M (ou de algum objeto definido em M) é local, isso quer dizer que para todo $x \in M$, existe uma vizinhança V de x tal que a propriedade pode ser definida em V (ou da restrição do objeto a V). Se V' uma vizinhança aberta de x com $V' \subset V$, então a propriedade ainda é valida para V'. Por exemplo, conexidade local de M e continuidade de funções f definidas entre espaços topológicos são propriedades locais de M e f respectivamente.*

Em uma vizinhança aberta $U = (x^1, ..., x^n)$ correspondente a parametrização $\mathbf{x} : U \to M$, podemos escrever $\sigma \in \mathcal{T}^{m,s}M$ como

$$\sigma = \sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s}.$$

onde $\sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s}$ são as funções componentes de σ neste sistema de coordenadas.

Definição 3.2.3 *Uma $1-$forma em uma variedade diferenciável M é uma função diferenciável $\alpha : M \to T^*M$ tal que $\alpha_p = \alpha(p) \in T^*_pM$ é um funcional linear.*

Observação 3.2.4 *Pelo difeomorfismo da mudança da base visto pelas equações (3.2) e (3.3) temos que $\sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \circ \boldsymbol{x}$ é diferenciável em uma parametrização $\boldsymbol{x}$ se e somente se $\sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \circ \widetilde{\boldsymbol{x}}$ é diferenciável em toda parametrização $\widetilde{\boldsymbol{x}}$.*

Lema 3.2.5 *Seja M uma variedade diferenciável e $\sigma : M \to \mathcal{T}^{m,s}M$ é uma função satisfazendo $\sigma_p := \sigma(p) \in T^{m,s}_pM = T^{m,s}(T_pM)$ para cada $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) σ é diferenciável.

(b) Em qualquer carta local, as componentes da função σ são diferenciáveis.

(c) Sejam $X_1, ..., X_s$ campos vetoriais diferenciáveis em um aberto U de M e $\alpha^1, ..., \alpha^m$ $1-$formas em U. A função $\sigma(\alpha^1, ..., \alpha^m, X_1, ..., X_s) : U \to \mathbb{R}$ definida como

$$\sigma(\alpha^1, ..., \alpha^m, X_1, ..., X_s)(p) = \sigma_p(\alpha^1(p), ..., \alpha^m(p), X_1(p), ..., X_s(p))$$

é diferenciável.

Demonstração: $(a) \Leftrightarrow (b)$

Dado $p \in M$, considere $\mathbf{x} : U \to M$ uma parametrização de uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ de p com $\mathbf{x}^{-1}(p) = q$. Seja $\mathbf{y} : U \times \mathbb{R}^{n^{m+s}} \to T^{m,s}M$ a parametrização correspondente da vizinhança coordenada de $\sigma(p)$ definida como

$$\mathbf{y}(q, y^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s}) = \left(p, y^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s}\right).$$

Assim temos $\sigma(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(U \times \mathbb{R}^{n^{m+s}})$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \sigma \circ \mathbf{x}(q) = (q, \sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \circ \mathbf{x}(q)).$$

Desta última equação e da observação 3.2.4 temos que σ é diferenciável se e somente se $\sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \circ \mathbf{x}$ é diferenciável para todo $i_1, ..., i_m, j_1, ..., j_s \in \{1, ..., n\}$.

$(b) \Leftrightarrow (c)$

Escreva $\alpha^k = \alpha^k_{r_k} dx^{r_k}$ com $k \in \{1, ..., m\}$ e $r_k \in \{1, ..., n\}$ e escreva $X_h = X^{l_h}_h \dfrac{\partial}{\partial x^{l_h}}$ com $h \in \{1, ..., s\}$ e $l_h \in \{1, ..., n\}$. Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
&\sigma(\alpha^1, ..., \alpha^m, X_1, ..., X_s)(p) = \sigma_p(\alpha^1(p), ..., \alpha^m(p), X_1(p), ..., X_s(p)) \\
&= \sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(\alpha^1(p)) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_m}}(\alpha^m(p)) \otimes dx^{j_1}(X_1(p)) \otimes ... \\
&... \otimes dx^{j_s}(X_s(p)) \\
&= (\sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s} \cdot \alpha^1_{i_1} \cdot ... \cdot \alpha^m_{i_m} \cdot X^{j_1}_1 \cdot ... \cdot X^{j_s}_s)(p).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Como as funções $\alpha^1_{i_1}, ..., \alpha^m_{i_m}, X^{j_1}_1, ..., X^{j_s}_s$ são diferenciáveis por hipótese, então supor que $\sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s}$ são diferenciáveis implica em $\sigma(\alpha^1, ..., \alpha^m, X_1, ..., X_s)$ é diferenciável por ser somas e produtos de funções diferenciáveis.

Por outro lado, considere os campos $\alpha^k = dx^{i_k}$ e $X_h = \dfrac{\partial}{\partial x^{j_h}}$. Pela equação (3.4) temos que

$$\sigma(\alpha^1, ..., \alpha^m, X_1, ..., X_s)(p) = \sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s}(p).$$

Assim as funções componentes $\sigma^{i_1,...,i_m}_{j_1,...,j_s}$ são diferenciáveis se o item (c) é satisfeito. ∎

Observação 3.2.6 *Consideramos que tensores de tipo $T^{0,0}_p M$ são constantes reais. Logo $\sigma \in \mathcal{T}^{0,0}M$ é uma função diferenciável em M, pois $T^{0,0}_p M = \mathbb{R}$.*

Lema 3.2.7 *Sejam M uma variedade diferenciável, $\sigma \in \mathcal{T}^{m_1,s_1}M$, $\tau \in \mathcal{T}^{m_2,s_2}M$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Então $f\sigma$ e $\sigma \otimes \tau$ são campos tensoriais diferenciáveis, definidos em coordenadas por*

$$(f\sigma)^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}} = f\sigma^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}};$$

$$(\sigma \otimes \tau)^{i_1 \dots i_{m_1+m_2}}_{j_1 \dots j_{s_1+s_2}} = \sigma^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}} \cdot \tau^{i_{m_1+1} \dots i_{m_1+m_2}}_{j_{s_1+1} \dots j_{s_1+s_2}}.$$

Demonstração: Temos que $(\sigma \otimes \tau)$ é um campo tensorial pois pela construção temos $(\sigma \otimes \tau)(p) = \sigma(p) \otimes \tau(p) \in T_p^{m_1+m_2,s_1+s_2}M$. Mais ainda, temos que $\sigma \otimes \tau$ é um campo tensorial diferenciável pois suas funções componentes $(\sigma \otimes \tau)^{i_1 \dots i_{m_1+m_2}}_{j_1 \dots j_{s_1+s_2}}$ são diferenciáveis pelo o produto das funções diferenciáveis

$$\sigma^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}} \cdot \tau^{i_{m_1+1} \dots i_{m_1+m_2}}_{j_{s_1+1} \dots j_{s_1+s_2}}.$$

Observe que $f\sigma$ é um caso particular de $\tau \otimes \sigma$. Basta considerar $\tau \in \mathcal{T}^{0,0}M$. Como $\tau(p) = f(p)$, temos que

$$(\tau \otimes \sigma)^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}}(p) = \tau(p)\sigma^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}}(p) = f(p)\sigma^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}}(p) = (f\sigma)^{i_1 \dots i_{m_1}}_{j_1 \dots j_{s_1}}(p).$$

■

Podemos induzir um tensor de tipo $(0, k)$ em uma variedade diferenciável M através de uma função diferenciável $\zeta : M \to N$ e um tensor de tipo $(0, k)$ em N.

Definição 3.2.8 *Sejam M^n, N^q variedades diferenciáveis, $\zeta : M \to N$ uma função diferenciável e $\sigma \in \mathcal{T}^{0,k}(N)$ um campo tensorial diferenciável. Defina o campo tensorial $\zeta^*\sigma$ de tipo $(0, k)$ sobre M, chamado de pullback de σ, como*

$$(\zeta^*\sigma)_p(X_1, ..., X_k) = \sigma_{\zeta(p)}(d\zeta_p X_1, ..., d\zeta_p X_k),$$

onde $X_1, ..., X_k$ são campos vetoriais de M.

O campo tensorial $\zeta^*\sigma$ é diferenciável. De fato, considere $\mathbf{x} : U \to M$ e $\mathbf{y} : V \to N$ parametrizações em p e $\zeta(p)$ respectivamente, onde $U = (x_1, ..., x_n)$ e $V = (y_1, ..., y_q)$ em coordenadas. Considere $[d\zeta_p] = \left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\right] = \left[\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]$ a representação matricial de $d\zeta_p$. Sejam $X_{i_s} = \dfrac{\partial}{\partial x^{i_s}} \in \mathcal{X}(U)$ com $i_s \in \{1, ..., n\}$ e $s \in \{1, ..., k\}$. Dessa forma temos

$$d\zeta_p(X_{i_k}(p)) = \left(\frac{\partial y^l}{\partial x^{i_k}}\right) \frac{\partial}{\partial y^l}(p) \text{ com } l \in \{1, ..., q\}.$$

Através da regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
(\zeta^*\sigma)_{i_1...i_k}(p) &= (\zeta^*\sigma)_p(X_{i_1}(p), ..., X_{i_k}(p)) \\
&= \sigma_{\zeta(p)}(d\zeta_p X_{i_1}(p), ..., d\zeta_p X_{i_k}(p)) \\
&= \sigma_{l_1...l_k}(\zeta(p)) dy^{l_1}_{\zeta(p)}(d\zeta_p X_{i_1}(p)) \otimes ... \otimes dy^{l_k}_{\zeta(p)}(d\zeta_p X_{i_k}(p)) \\
&= \sigma_{l_1...l_k}(\zeta(p)) \left(\frac{\partial y^l}{\partial x^{i_1}}\delta^{l_1}_l\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{\partial y^l}{\partial x^{i_k}}\delta^{l_k}_l\right) \\
&= \sigma_{l_1...l_k}(\zeta(p)) \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot ... \cdot \frac{\partial y^{l_k}}{\partial x^{i_k}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

com $l_s \in \{1, ..., q\}$. Temos que $\zeta^*\sigma$ é um campo tensorial diferenciável pois $(\sigma_{l_1...l_k} \circ \zeta)(p)\dfrac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot ... \cdot \dfrac{\partial y^{l_k}}{\partial x^{i_k}}$ é combinação de funções diferenciáveis. Da equação (3.5) e da regra da cadeia podemos reescrever

$$\begin{aligned}
&(\zeta^*\sigma)_p(X_1, ..., X_n) \\
&= \left((\sigma_{l_1...l_k} \circ \zeta)_p d(y^{l_1} \circ \zeta)_p \otimes ... \otimes d(y^{l_k} \circ \zeta)_p\right)(X_{i_1}, ..., X_{i_k}).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Proposição 3.2.9 *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis, $\zeta : M \to N$ e $\phi : N \to P$ funções diferenciáveis, $\sigma \in \mathcal{T}^{0,k}N$, $\tau \in \mathcal{T}^{0,l}N$ e $f \in \mathcal{D}(N)$. Temos as seguintes propriedades*

(a) ζ^* *é linear sobre* $\mathbb{R}$;

(b) $\zeta^*(f\sigma) = (f \circ \zeta)\zeta^*\sigma$;

(c) $\zeta^*(\sigma \otimes \tau) = \zeta^*\sigma \otimes \zeta^*\tau$;

(d) $(\phi \circ \zeta)^* = \zeta^* \circ \phi^*$;

(e) $Id^*\sigma = \sigma$.

Demonstração: Pela observação na demonstração do lema 3.2.7, temos que (b) e o produto por escalar em (a) podem sem vistos como um caso particular de (c). Para a linearidade da soma em (a) considere $l = k$, assim

$$\begin{aligned}
(\zeta^*(\sigma + \tau))_p(X_1, ..., X_k) &= (\sigma + \tau)_p(d\zeta_p X_1, ..., d\zeta_p X_k) \\
&= \sigma_p(d\zeta_p X_1, ..., d\zeta_p X_k) + \tau_p(d\zeta_p X_1, ..., d\zeta_p X_k) \\
&= (\zeta^*\sigma)_p(X_1, ..., X_k) + (\zeta^*\tau)_p(X_1, ..., X_k).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar (c).

$$\begin{aligned}(\zeta^*(\sigma\otimes\tau))_p(X_1,...,X_{k+l}) &= (\sigma\otimes\tau)_{\zeta(p)}(d\zeta_pX_1,...,d\zeta_pX_{k+l})\\ &= \sigma_{\zeta(p)}(d\zeta_pX_1,...,d\zeta_pX_k)\cdot\tau_{\zeta(p)}(d\zeta_pX_{k+1},...,d\zeta_pX_{k+l})\\ &= (\zeta^*\sigma)_p(X_1,...,X_k)\cdot(\zeta^*\tau)_p(X_{k+1},...,X_{k+l})\\ &= (\zeta^*\sigma\otimes\zeta^*\tau)_p(X_1,...,X_{k+l}).\end{aligned}$$

Vamos provar (d).

$$\begin{aligned}((\phi\circ\zeta)^*\sigma)_p(X_1,...,X_k) &= \sigma_{\phi\circ\zeta(p)}(d(\phi\circ\zeta)_pX_1,...,d(\phi\circ\zeta)_pX_k)\\ &= \sigma_{\phi\circ\zeta(p)}(d\phi_{\zeta(p)}(d\zeta_pX_1),...,d\phi_{\zeta(p)}(d\zeta_pX_k))\\ &= (\phi^*\sigma)_{\zeta(p)}(d\zeta_pX_1,...,d\zeta_pX_k)\\ &= (\zeta^*\circ\phi^*(\sigma))_p(X_1,...,X_k).\end{aligned}$$

A última propriedade segue de

$$(Id^*\sigma)_p(X_1,...,X_k) = \sigma_{Id(p)}((dId)_pX_1,...,(dId)_pX_k) = \sigma_p(X_1,...,X_k).$$

■

Pela propriedade (b) é útil considerar $\zeta^*(f) = f\circ\zeta$.

Capítulo 4

Álgebra dos tensores alternados.

Dentre o conjunto dos tensores, existe o conjuntos dos tensores alternados definido pela anti-simetria em suas entradas. Para trabalhar com os tensores alternados, vamos construir uma base para este subespaço dos tensores e definir operações que constroem novos tensores alternados. Uma referência para este capitulo é [15].

4.1 Tensor alternado

Nesta subseção, vamos definir o que é um tensor alternado e trazer suas principais propriedades. Veremos que o conjunto dos tensores alternados é um subespaço vetorial do espaço dos tensores. Um exemplo de tensor alternado é o determinante de uma matriz $n \times n$.

Um outro tipo de tensor é o tensor simétrico, que se comporta de forma oposta aos tensores alternados, porém este não será o nosso enfoque.

Definição 4.1.1 *Sejam V um espaço vetorial e $T \in V^{0,k}$. O tensor T é alternado se satisfizer*

$$T(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_k) = -T(X_1, ..., X_j, ..., X_i, ..., X_k)$$

para todo $X_1, ..., X_k \in V$, onde X_i e X_j do lado direito da equação estão invertidas em relação ao lado esquerdo. O conjunto $\Lambda^k(V)$ denotará o conjunto de todos os tensores alternados em $V^{0,k}$.

Lema 4.1.2 *Seja $\Omega \in V^{0,k}$ um tensor com a propriedade de $\Omega(X_1, ..., X_k) = 0$ quando $(X_1, ..., X_k)$ é linearmente dependente. Então Ω é um tensor alternado.*

Demonstração: Sejam $X_1, ..., X_k \in V$ vetores arbitrários e considere a $k-$upla de vetores $(X_1, ..., X_i + X_j, ..., X_i + X_j, ..., X_k)$ linearmente dependente. Por hipótese temos

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega(X_1, ..., X_i + X_j, ..., X_i + X_j, ..., X_k) \\ &= \Omega(X_1, ..., X_i, ..., X_i, ..., X_k) + \Omega(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_k) \\ &+ \Omega(X_1, ..., X_j, ..., X_j, ..., X_k) + \Omega(X_1, ..., X_j, ..., X_i, ..., X_k) \\ &= \Omega(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_k) + \Omega(X_1, ..., X_j, ..., X_i, ..., X_k). \end{aligned}$$

Logo Ω é um tensor alternado. ∎

Observação 4.1.3 *Ω é um tensor com a propriedade de $\Omega(X_1, ..., X_k) = 0$ quando $(X_1, ..., X_k)$ é linearmente dependente se e somente se Ω é um tensor com a propriedade de $\Omega(X_1, ..., X_k) = 0$ quando $X_i = X_j$ para algum $i \neq j$. Esta equivalência é consequência da multi-linearidade do tensor Ω. Portanto podemos utilizar o Lema 4.1.2 com essa mudança da hipótese, caso seja conveniente.*

Proposição 4.1.4 *Se V é um espaço vetorial com $dim(V) = n < \infty$ e Ω é alternado, então $\Omega(X_1, ..., X_k) = 0$ se $(X_1, ..., X_k)$ é linearmente dependente.*

Demonstração: Considere $(X_1, ..., X_k)$ uma $k-$upla de vetores linearmente dependente, ou seja, existe $i \in \{1, ..., k\}$ de forma que $X_i = \sum_{l \neq i} a^l X_l$ com $a^l \neq 0$ para todo l. Assim

$$\Omega(X_1, ..., X_i, ..., X_k) = \Omega(X_1, ..., \sum_{l \neq i} a^l X_l, ..., X_k) = \sum_{l \neq i} a^l \Omega(X_1, ..., X_l, ..., X_k). \tag{4.1}$$

Como Ω é alternado então $\Omega(X_1, ..., X_i, ..., X_i, ..., X_k) = 0$. Assim o lado direito de (4.1), é nulo pois todas as parcelas tem entradas repetidas em Ω, o que conclui a demonstração. ∎

Corolário 4.1.5 *Se V é um espaço vetorial, então soma de tensores alternados e produto por escalar com tensor alternado em $V^{0,k}$ é um tensor alternado. Logo o conjunto $\Lambda^k(V)$ dos tensores alternados em $V^{0,k}$ é um subespaço vetorial de $V^{0,k}$.*

Demonstração: Considere uma k-upla de vetores $(X_1, ..., X_k)$ linearmente dependente, $T, S \in \Lambda^k(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 4.1.4 temos

$$(\lambda T + S)(X_1, ..., X_k) = \lambda T(X_1, ..., X_k) + S(X_1, ..., X_k) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0.$$

Assim $\lambda T + S$ é um tensor alternado pela Proposição 4.1.2. ∎

Se V é um espaço vetorial n-dimensional, então todo tensor $T \in V^{0,k}$ alternado com $k > n$ é identicamente nulo, afinal qualquer $k-$upla de vetores de V é linearmente dependente.

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então todo tensor de tipo $(0,0)$ ou $(0,1)$ é um tensor alternado por vacuidade. Antes de prosseguir vamos introduzir ferramentas de álgebra

Definição 4.1.6 *Seja $A_k = \{1, ..., k\} \subset \mathbb{N}$ e considere $\sigma : A_k \to A_k$ uma função. Diremos que σ é uma permutação em A_k se σ é uma função bijetora. Caso a permutação σ somente altere dois índices, então diremos que σ é uma transposição. Vamos denotar por S_k o grupo de todas as permutações de A_k.*

Observação 4.1.7 *Toda permutação $\sigma \in S_k$ pode ser escrita como composição de um numero finito, digamos p, de transposições. Se σ for também uma composição de q de transposições então q e p tem a mesma paridade. Assim, denotaremos o sinal de σ por $sgn(\sigma) = (-1)^p$.*

Proposição 4.1.8 *Seja T um tensor de tipo $(0,k)$ sobre V de dimensão finita. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é alternado;

(b) Para quaisquer vetores $X_1, ..., X_k$ e qualquer permutação $\sigma \in S_k$

$$T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma) T(X_1, ..., X_k);$$

(c) Com respeito a qualquer base, as componentes $T_{i_1 \cdots i_k}$ de T trocam de sinal toda vez que dois índices trocam.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$. Toda permutação $\sigma \in S_k$ pode ser escrita por um numero p de transposições. Primeiramente considere σ uma transposição. Assim existem $i, j \in \{1, ..., k\}$ distintos de forma que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ e $\delta(l) = l$ caso $l \neq i$ e $l \neq j$. Nesse caso temos

$$\begin{aligned} T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(i)}, ..., X_{\sigma(j)}, ..., X_{\sigma(k)}) &= T(X_1, ..., X_j, ..., X_i, ..., X_k) \\ &= -T(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_k) \\ &= sgn(\sigma) T(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_k). \end{aligned}$$

Agora seja σ escrita por p transposições. Escreva $\sigma = \tau \circ \sigma'$ onde τ é uma transposição e σ' é uma permutação que é escrita por $p-1$ transposições. Assumindo que a hipótese vale para $p-1$ transposições temos que

$$\begin{aligned} T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) &= T(X_{\tau\circ\sigma'(1)}, ..., X_{\tau\circ\sigma'(k)}) \\ &= sgn(\tau)T(X_{\sigma'(1)}, ..., X_{\sigma'(k)}) \\ &= -sgn(\sigma')T(X_1, ..., X_k) = sgn(\sigma)T(X_1, ..., X_n). \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (c)$. Considere $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base para V qualquer e σ a transposição dos índices $i, j \in \{1, ..., k\}$. Assim

$$\begin{aligned} T_{l_1...l_j...l_i...l_k} &= T(e_{l_1}, ..., e_{l_j}, ..., e_{l_i}, ..., e_{l_k}) \\ &= T(e_{l_{\sigma}(1)}, ..., e_{l_{\sigma}(i)}, ..., e_{l_{\sigma}(j)}, ..., e_{l_{\sigma}(k)}) \\ &= sgn(\sigma)T(e_{l_1}, ..., e_{l_i}, ..., e_{l_j}, ..., e_{l_k}) \\ &= -T_{l_1...l_i...l_j...l_k}. \end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (a)$. Sejam $X_1, ..., X_k$ vetores quaisquer de V e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base para V qualquer. Considere $X_p = a^{l_p} e_{l_p}$ com $p \in \{1, ..., k\}$ e $l_p \in \{1, ..., n\}$. Assim temos

$$T(X_1, ..., X_k) = T_{l_1...l_k} a^{l_1} ... a^{l_k}$$

. Sejam $i, j \in \{1, ..., k\}$ arbitrários e distintos. Temos que

$$\begin{aligned} T(X_1, ..., X_i, ..., X_j, ..., X_k) &= T_{l_1...l_i...l_j...l_k} a^{l_1} ... a^{l_i} ... a^{l_j} ... a^{l_k} \\ &= -T_{l_1...l_j...l_i...l_k} a^{l_1} ... a^{l_j} ... a^{l_i} ... a^{l_k} \\ &= -T(X_1, ..., X_j, ..., X_i, ..., X_k). \end{aligned}$$

Portanto T é alternado. ∎

Definição 4.1.9 *Um tensor de tipo* $(0, k)$ *sobre um espaço vetorial de dimensão* n *é simétrico se para todo* $X_1, ..., X_k \in V$ *e para toda permutação* $\sigma \in S_k$ *tem-se*

$$T(X_1, ..., X_k) = T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}).$$

Todo tensor T de tipo $(0, 2)$ pode ser expresso pela soma de um tensor alternado e um tensor simétrico, ambos tensores de tipo $(0, 2)$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= T(X, Y) + \frac{1}{2}(T(Y, X) - T(Y, X)) \\ &= \frac{1}{2}(T(X, Y) + T(Y, X)) + \frac{1}{2}(T(X, Y) - T(Y, X)) \\ &= \frac{1}{2}(\text{Sym } T(X, Y) + \text{Alt } T(X, Y)). \end{aligned}$$

onde Alt $T(X,Y) = T(X,Y) - T(Y,X)$ é o tensor alternado e Sym $T(X,Y) = T(X,Y) + T(Y,X)$ é o tensor simétrico.

Podemos definir o tensor alternado Alt T para um tensor T de tipo $(0,k)$ pela formula

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T^{\sigma}$$

onde $T^{\sigma}(X_1, ..., X_k) = T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)})$. A função Alt é linear pois as parcelas são lineares.

Note que $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$ para todo $T \in V^{0,k}$. De fato, considere $\eta \in S_k$ uma permutação qualquer. Pela bijetividade das permutações, temos que

$$S_k = \{\sigma; \forall\ \sigma \in S_k\} = \{\eta \circ \sigma; \forall\ \sigma \in S_k\}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(\text{Alt}(T))^{\eta} &= \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T^{\sigma} \right)^{\eta} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T^{\eta \circ \sigma} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\eta) \cdot sgn(\eta) \cdot sgn(\sigma) T^{\eta \circ \sigma} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\eta) sgn(\eta \circ \sigma) T^{\eta \circ \sigma} \\
&= sgn(\eta) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\eta \circ \sigma) T^{\eta \circ \sigma} = sgn(\eta) \text{Alt}(T).
\end{aligned}$$

Logo $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$ (vide Proposição 4.1.8).

Corolário 4.1.10 *Se T é um tensor alternado então Alt $(T) = T$.*

Demonstração: Pelo item (b) do Lema 4.1.8 temos que

$$\begin{aligned}
\text{Alt } T &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T^{\sigma} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)^2 T \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T = \frac{1}{k!} \cdot k! \cdot T = T.
\end{aligned}$$

∎

4.2 Tensores alternados elementares

Pelo Corolário 4.1.5, sabemos que conjunto dos tensores alternados é um subespaço do espaço dos tensores. Assim vamos definir uma base para o espaço dos tensores alternados.

Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Uma $k-$upla ordenada $I = (i_1, ..., i_k)$ de inteiros positivos é chamado de multi-índice de comprimento k. Considere I e J multi-índices de comprimento k. Se J é obtido por I através de uma permutação $\sigma \in S_k$ da seguinte forma

$$j_1 = i_{\sigma(1)}, ..., j_k = i_{\sigma(k)},$$

então diremos que J é uma permutação de I ou simplesmente $J = \sigma I$. Para isso é útil estender a noção do delta de Kronecker para o conjunto de multi-índices definida da seguinte forma:

$$\delta_J^I = \begin{cases} sgn(\sigma), \text{ se } I \text{ e } J \text{ não tem índices repetidos e } J = \sigma I \text{ para algum } \sigma \in S_k \\ 0, \text{ se } I \text{ ou } J \text{ tem índices repetidos ou } J \neq \sigma I \text{ para todo } \sigma \in S_k \end{cases}.$$

Seja V um espaço vetorial $n-$dimensional. Sejam $(e_1, ..., e_n)$ uma base ordenada de V e $(\beta^1, ..., \beta^n)$ a base dual de V^*. Nós vamos definir uma coleção de tensores alternados através do calculo de determinantes em $\mathbb{R}^n$.

Seja $I = (i_1, ..., i_k)$ um multi-índice de tamanho k com $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$. Vamos definir um tensor de tipo $(0, k)$ sobre V como

$$\beta^I(X_1, ..., X_k) = \det \begin{bmatrix} \beta^{i_1}(X_1) & ... & \beta^{i_1}(X_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta^{i_k}(X_1) & ... & \beta^{i_k}(X_k) \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Se $X_j = (X_j^1, ..., X_j^n)$ em coordenadas, a última matriz pode reescrita como

$$\det \begin{bmatrix} X_1^{i_1} & ... & X_k^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{i_k} & ... & X_k^{i_k} \end{bmatrix}.$$

Temos que β^I é um tensor alternado, afinal se dois termos X_i, X_j são iguais é o mesmo que ter duas colunas da matriz iguais, o que anula o determinante da matriz e o resultado segue do Lema 4.1.2 e da observação 4.1.3. Por outro lado se o multi-índice I contém algum índice repetido então $\beta^I(X_1, ..., X_k)$ é nulo por ter duas linhas repetidas.

Vamos chamar β^I de tensor alternado elementar .

Lema 4.2.1 *Sejam $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ uma base de V e $\mathcal{B}^* = (\beta^1, ..., \beta^n)$ a base dual de $\mathcal{B}$. Então*

(a) Se I contém um índice repetido, então $\beta^I = 0$;

(b) Se $J = \sigma I$ para algum $\sigma \in S_k$, então $\beta^J = sgn(\sigma)\beta^I$;

(c) Considere $J = (j_1, ..., j_k)$ um multi-índice de comprimento k com $j_q \in \{1, ..., n\}$ para cada $q \in \{1, ..., k\}$. Assim temos

$$\beta^I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \delta^I_J.$$

Demonstração:
O item (a) é consequência direta de (4.2).

(b) Toda permutação σ pode ser decomposta por um número p de transposições. Primeiramente suponha $p = 1$. Então calcular β^J é o mesmo que calcular β^I com a matriz tendo duas linhas trocadas, onde inverte o sinal no calculo da determinante. Dessa forma temos $\beta^J = -\beta^I = sgn(\sigma)\beta$.

Para o caso geral $p \in \mathbb{N}$ qualquer, suponha que (b) seja verdade para $p-1$ transposições. Decomponha $\sigma = \tau \circ \sigma'$, com τ uma transposição e σ' uma permutação que pode ser decomposta por $p - 1$ transposições. Dessa forma temos

$$sgn(\sigma) = -sgn(\sigma') \text{ e } J = \tau(\sigma' I).$$

Pela hipótese de indução sobre p temos

$$\beta^J = \beta^{\tau(\sigma' I)} = sgn(\tau)\beta^{\sigma' I} = -sgn(\sigma')\beta^I = sgn(\sigma)\beta^I.$$

(c) Ao considerar $X_q = e_{j_q}$ com $q \in \{1, ..., k\}$, a equação (4.2) pode ser escrita como

$$\det \begin{bmatrix} \beta^{i_1}(e_{j_1}) & ... & \beta^{i_1}(e_{j_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta^{i_k}(e_{j_1}) & ... & \beta^{i_k}(e_{j_k}) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & ... & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & ... & \delta^{i_k}_{j_k} \end{bmatrix} = \det[\delta^{i_p}_{j_q}].$$

Vamos demonstrar o resultado separando em casos.

Se I ou J contém índices repetidos, então temos $\beta^I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 0$ pelo item (a) desse lema ou por β^I ser alternado respectivamente. Por outro lado, temos que $\delta^I_J = 0$ por definição.

Suponha que I e J não contém índices repetidos e considere $J \neq \sigma I$ para todo $\sigma \in S_k$. Logo existe um $q \in \{1, ..., k\}$ tal que $j_q \neq i_{\sigma(p)}$ para todo

$p \in \{1, ..., k\}$. Em particular $j_q \neq i_p$ para todo p. Nesse caso a $q-$ésima coluna da matriz $[\delta^{i_p}_{j_q}]$ é identicamente nula e portanto $\beta^I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 0$. Por outro lado temos que $\delta^I_J = 0$ por definição.

Suponha que I e J não contém índices repetidos e que $J = \sigma I$ para algum $\sigma \in S_k$. Primeiramente no caso mais simples $J = I$, temos que $[\delta^{i_p}_{j_q}] = Id_{k\times k}$ e portanto

$$\beta^I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 1 = sgn(\sigma) = \delta^I_J.$$

Para $J = \sigma I$ com $\sigma \in S_k$ arbitrário, pelo item (b) desse lema temos

$$\beta^I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = sgn(\sigma)\beta^J(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = sgn(\sigma) = \delta^I_J.$$

■

É possível induzir uma base de $\Lambda^k(V)$ através dos tensores elementares alternados. Para isso vamos trabalhar com um caso particular de multi-índices.

Um multi-índice $I = (i_1, ..., i_k)$ é dito crescente se $i_1 < ... < i_k$. Denote a soma sobre multi-índices crescentes como

$$\sum_I{}' T_I \beta^I = \sum_{\{I; 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n\}} T_I \beta^I$$

onde $T_I = T_{i_1 ... i_n}$.

Seja J um multi-índice de forma que $J = \sigma I$ para algum $\sigma \in S_k$. Sabemos que $\beta^J = sgn(\sigma)\beta^I$ onde $sgn(\sigma)$ é um escalar de valor 1 ou -1. Portanto o subconjunto

$$\{\beta^J; J = \sigma I \text{ para algum } \sigma \in S_k\} \subset span\{\beta^I\}.$$

Assim caso $k \leq n$ e I não contém índices repetidos é possível tomar um $J = \sigma I$ de forma que J seja um multi-índice crescente. Portanto

$$\{\beta^I, \forall\ I \text{ multi-índice crescente de comprimento } k\}$$

gera $\Lambda^k(V)$. Por outro lado, se $\sum_I{}' T_I \beta^I = 0$, então podemos aplicar esse tensor na $k-$upla $(e_{j_1}, ..., e_{j_k})$ com $J = \{j_1, ..., j_n\}$ crescente, o que nos dá $T_J = 0$. Mas J é arbitrário. Logo $\{\beta^I\}_{I \text{ crescente}}$ é $L.I.$ e com isso temos o seguinte resultado.

Lema 4.2.2 *Sejam V um subespaço vetorial $n-$dimensional, $(e_1, ..., e_n)$ uma base ordenada de V e $(\beta^1, ..., \beta^n)$ sua base dual. Então a coleção*

$$\{\beta^I; I \text{ é um multi-índice crescente de comprimento } k\}$$

é uma base para $\Lambda^k(V)$. Portanto

$$\dim \Lambda^k(V) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Em particular se $k = n$ então $\dim \Lambda^k(V) = 1$ e é gerado pelo tensor $\beta^{1,2,...,n}$, afinal $I = (1, 2, ..., n)$ é o único multi-índice crescente de comprimento n. Por definição temos que

$$\beta^I(X_1, ..., X_n) = det[X^i_j]_{n\times n}$$

onde X^i_j é a i-ésima coordenada do vetor X_j. Nesse caso se $V = \mathbb{R}^n$ com a base $(e_1, ..., e_n)$ canônica, então β^I é a função determinante usual de $\mathbb{R}^n$.

Caso $k > n = \dim(V)$, então sabemos que todo $T \in \Lambda^k(V)$ é nulo. Nesse caso o espaço $\Lambda^k(V)$ é trivial.

4.3 Produto wedge

É possível construir um tensor alternado de $\Lambda^{k+l}(V)$ com os tensores $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$ definindo por $Alt(\omega \otimes \eta)$, operações que já definimos anteriormente. Porém vamos reescrevê-la de uma forma que vai ser mais útil posteriormente.

Definição 4.3.1 *Sejam $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$. O produto wedge entre ω e η é um tensor alternado de $\Lambda^{k+l}V$ definido como*

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)(\omega \otimes \eta)^\sigma \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)(\omega \otimes \eta)^\sigma.\end{aligned}$$

Observação 4.3.2 *Ao considerar $(X_1, ..., X_{k+l})$ uma $(k+l)-$upla de vetores de V temos*

$$\begin{aligned}&\omega \wedge \eta(X_1, ..., X_{k+l}) = \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)\omega^I(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) \cdot \eta^J(X_{\sigma(k+1)}, ..., X_{\sigma(k+l)}).\end{aligned}$$

Lema 4.3.3 *Sejam V um espaço vetorial, $(e_1, ..., e_n)$ uma base ordenada para V e $(\beta^1, .., \beta^n)$ sua base dual. Para $I = (i_1, ..., i_k)$ e $J = (j_1, ..., j_l)$ multi-índices quaisquer, temos que*

$$\beta^I \wedge \beta^J = \beta^{IJ},$$

onde o multi-índice $IJ = (i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l)$ *é obtido através da concatenação de* I *e* J*.*

Demonstração: Pela multi-linearidade dos tensores, basta provar que

$$\beta^I \wedge \beta^J(e_{p_1}, ..., e_{p_{k+l}}) = \beta^{IJ}(e_{p_1}, ..., e_{p_{k+l}}), \tag{4.3}$$

onde $P = (p_1, ..., p_{k+l})$ é um multi-índice qualquer com $p_1, ..., p_{k+l} \in \{1, ..., n\}$. Vamos separar os possíveis casos sobre P:

(1) P contém um índice repetido. Nesse caso teremos que ambos os lados de (4.3) são nulos pela Proposição 4.1.4.

(2) P contém um índice p_t de forma que $p_t \notin I$ e $p_t \notin J$. O lado direito da equação (4.3) é nulo, pois pelo item (c) do Lema 4.2.1 temos

$$\beta^{IJ}(e_{p_1}, ..., e_{p_{k+l}}) = \delta_P^{IJ} = 0.$$

Agora reescrevendo o lado esquerdo de (4.3) temos que

$$\begin{aligned} &\beta^I \wedge \beta^J(e_{p_1}, ..., e_{p_{k+l}}) = \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) \beta^I(e_{p_{\sigma(1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k)}}) \cdot \beta^J(e_{p_{\sigma(k+1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k+l)}}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Seja $q \in \{1, ..., k+l\}$ tal que $\sigma(q) = t$. Como $p_t \notin IJ$ então $p_{\sigma(q)} \notin I$ e $p_{\sigma(q)} \notin J$. Então $\beta^I(e_{p_{\sigma(1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k)}}) = 0$ ou $\beta^J(e_{p_{\sigma(k+1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k+l)}}) = 0$. Logo o lado esquerdo de (4.3) é nulo.

(3) $P = IJ$ não contém índices repetidos e consequentemente I e J não compartilham índices. No lado direito da equação (4.3) temos $\beta^{IJ}(e_{p_1}, ..., e_{p_{k+l}}) = \delta_P^{IJ} = 1$. Agora no lado esquerdo temos a equação

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) \beta^I(e_{p_{\sigma(1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k)}}) \cdot \beta^J(e_{p_{\sigma(k+1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k+l)}}).$$

Se existir algum $q \in \{1, ..., k\}$ de forma que $p_{\sigma(q)} \in \{p_{k+1}, ..., p_{k+l}\}$ então $p_{\sigma(q)} \notin I$. Escreva $P' = (p_{\sigma(1)}, ..., p_{\sigma(k)})$ um multi-índice. Pelo item (c) do Lema 4.2.1 temos que $\beta^I(e_{p_{\sigma(1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k)}}) = \delta_{P'}^I = 0$. Se existir algum $q \in \{k+1, ..., k+l\}$ tal que $p_{\sigma(q)} \in \{p_1, ..., p_k\}$, então temos $\beta^J(e_{p_{\sigma(k+1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k+l)}}) = 0$ de modo análogo. Assim as únicas permutações $\sigma \in S_{k+l}$ que não anulam a equação (4.4) são as que podem ser escritas como $\sigma = \tau\eta$, onde $\tau \in S_k$ permuta somente em

$\{1, ..., k\}$ e $\eta \in S_l$ permuta somente em $\{k+1, ..., k+l\}$. Logo $sgn(\sigma) = sgn(\tau) \cdot sgn(\eta)$.

Assim podemos escrever a equação acima como

$$\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) \beta^I(e_{p_{\sigma(1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k)}}) \cdot \beta^J(e_{p_{\sigma(k+1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k+l)}}) =$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{\tau \in S_k \\ \eta \in S_l}} sgn(\tau) \beta^I(e_{p_{\tau(1)}}, ..., e_{p_{\tau(k)}}) \cdot sgn(\eta) \beta^J(e_{p_{\eta(k+1)}}, ..., e_{p_{\eta(k+l)}})$$

$$= \left[\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} sgn(\tau) (\beta^I)^\tau (e_{p_1}, ..., e_{p_k}) \right] \left[\frac{1}{l!} \sum_{\eta \in S_l} sgn(\eta) (\beta^J)^\eta (e_{p_{k+1}}, ..., e_{p_{k+l}}) \right]$$

$$= Alt(\beta^I)(e_{p_1}, ..., e_{p_k}) \cdot Alt(\beta^J)(e_{p_{k+1}}, ..., e_{p_{k+l}})$$

$$= \beta^I(e_{p_1}, ..., e_{p_k}) \cdot \beta^J(e_{p_{k+1}}, ..., e_{p_{k+l}}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

(4) Caso $P = \sigma(IJ)$. A Proposição 4.1.8 pode ser aplicada em ambos os lados da equação (4.3). Daí temos

$$\beta^I \wedge \beta^J(e_{p_{\sigma(1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k+l)}}) = sgn(\sigma) \beta^I \wedge \beta^J(e_{p_1}, ..., e_{p_{k+l}}) = sgn(\sigma),$$

e

$$\beta^{IJ}(e_{p_{\sigma(1)}}, ..., e_{p_{\sigma(k+l)}}) = sgn(\sigma) = sgn(\sigma) \beta^{IJ}(e_{p_1}, ..., e_{p_{k+l}}).$$

■

Observação 4.3.4 *Considere $I = (i_1, .., i_k)$ e $J = (j_1, ..., j_l)$ multi-índices quaisquer e seja $\tau \in S_{k+l}$ uma permutação de forma que $JI = \tau(IJ)$. Temos que τ pode ser decomposto por $k \cdot l$ transposições, em particular temos $sgn(\tau) = (-1)^{kl}$. De fato, vamos provar indutivamente sobre l.*

Seja primeiramente $l = 1$. Nesse caso temos que $IJ = (i_1, ..., i_k, j_1)$ e $JI = (j_1, i_1, ..., i_k)$. Considere as transposições $\tau_q = (i_q \ i_{q+1})$ com $q \in \{1, .., k\}$ e $i_{k+1} = j_1$. Informalmente vamos trocar a posição do índice j_1 em IJ com o índice à esquerda, repetindo esse processo até igualar à JI. Assim temos

$$JI = (j_1, i_1, ..., i_k) = \tau_1 ... \tau_k(i_1, ..., i_k, j_1) = \tau_1 ... \tau_k(IJ).$$

Para o caso geral onde $IJ = (i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l)$, primeiramente leve j_1 para o começo do multi-índice como fizemos acima. Repita esse processo com $j_2, ..., j_l$ nessa ordem até chegar em JI. Nesse caso teremos l permutações, cada uma escrita por k transposições. Seja τ a permutação gerada pela composição das l permutações acima. Nesse caso temos que τ é escrito por $l \cdot k$ transposições.

Proposição 4.3.5 *Sejam a e a' escalares e ω, η, ξ tensores alternados. Temos as seguintes propriedades:*

(a) *Bilinearidade:*

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta);$$

$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

(b) *Associatividade:*

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

(c) *Anticomutatividade: Para $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$ tem-se*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega.$$

(d) *Sejam $(e_1, ..., e_n)$ uma base ordenada para V e $(\beta^1, .., \beta^n)$ a base dual induzida pela base de V e $I = (i_1, ..., i_k)$ um multi-índice. Então*

$$\beta^{i_1} \wedge ... \wedge \beta^{i_k} = \beta^I.$$

(e) *Para quaisquer covetores $\omega^1, ..., \omega^k \in V^*$ e vetores $X_1, ..., X_k \in V$ tem-se*

$$\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^k(X_1, ..., X_k) = \det[\omega^i(X_j)],$$

onde $[\omega^i(X_j)]$ é uma matriz $k \times k$.

Demonstração:

(a) Temos que o produto wedge é bilinear pois o produto tensorial é bilinear e o *Alt* é linear.

(b) Pelo Lema 4.3.3 temos a associatividade com os tensores alternados elementares afinal

$$(\beta^I \wedge \beta^J) \wedge \beta^Q = \beta^{IJ} \wedge \beta^Q = \beta^{IJQ} = \beta^I \wedge \beta^{JQ} = \beta^I \wedge (\beta^J \wedge \beta^Q).$$

Para o caso geral considere $\omega = \omega_i\beta^{I_i}, \eta = \eta_j\beta^{J_j}$ e $\xi = \xi_q\beta^{Q_q}$ escrito na base do Lema 4.2.2. Assim temos

$$\begin{aligned}\omega \wedge (\eta \wedge \xi) &= (\omega_i\beta^{I_i} \wedge \eta_j\beta^{J_j}) \wedge \xi_q\beta^{Q_q} \\ &= \omega_i\eta_j\xi_q\beta^{I_iJ_jQ_q} = \omega_i\beta^{I_i} \wedge (\eta_j\beta^{J_j} \wedge \xi_q\beta^{Q_q}) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.\end{aligned}$$

(c) A anticomutatividade é resultado do Lema 4.3.3, da Observação 4.3.4 e do item (b) do Lema 4.2.1, pois

$$\omega \wedge \eta = \omega_i \eta_j \beta^{I_i J_j} = (-1)^{kl} \eta_j \omega_i \beta^{J_j I_i} = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

(d) É resultado direto do Lema 4.3.3 aplicado $k-1$ vezes. Ao considerar $i_q = (i_q)$ um multi-índice de comprimento 1 temos que

$$\beta^{i_1} \wedge ... \wedge \beta^{i_{q-1}} \wedge \beta^{i_q} = \beta^{(i_1 ... i_{q-1})} \wedge \beta^{i_q} = \beta^{(i_1 ... i_q)}$$

e o item (d) é demonstrado para $q = k$.

(e) Primeiramente considere o caso que $\omega^q = \beta^{i_q}$ com $q \in \{1, .., k\}$ e $i_q \in \{1, ..., n\}$. O item (d) resulta em

$$\beta^{i_1} \wedge ... \wedge \beta^{i_k}(X_1, ..., X_k) = \beta^I(X_1, ..., X_k) = \det[\beta^{i_q}(X_j)],$$

onde $I = (i_1, .., i_k)$. Para o caso geral escreva $\omega^q = \omega_{i_q} \beta^{i_q}$ com $i_q \in \{1, ..., n\}$. Nesse caso pela bilinearidade do produto wedge, temos

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^k(X_1, ..., X_k) &= \omega_{i_1} \beta^{i_1} \wedge ... \wedge \omega_{i_k} \beta^{i_k}(X_1, ..., X_k) \\ &= \omega_{i_1} ... \omega_{i_k} \det[\beta^{i_q}(X_j)], \end{aligned}$$

com $q, j \in \{1, ..., k\}$. Como o produto por $\lambda \in \mathbb{R}$ de um determinante de uma matriz quadrada A é o mesmo que o determinante da matriz A com uma linha multiplicada por λ, então multiplique cada $q-$ésima linha da matriz $[\beta^{i_q}(X_j)]$ por ω_{i_q}. Dessa forma

$$\omega_{i_1} ... \omega_{i_k} \det[\beta^{i_q}(X_j)] = \det[\omega_{i_q} \beta^{i_q}(X_j)] = \det[\omega^q(X_j)].$$

■

Capítulo 5

Tensores alternados em variedades

Agora vamos trabalhar com tensores alternados em uma variedade diferenciável $n-$dimensional M em vez de um espaço vetorial, analisando a sua representação em um sistema coordenadas. Da mesma forma que $\mathcal{T}^{m,s}M$ é o conjunto de todos os campos tensoriais de tipo (m, s) sobre M, podemos definir o conjunto de todos os campos tensoriais alternados sobre M, que são as $k-$formas em M. Veremos uma diferenciação em $k-$formas, que é chamada de derivada exterior.

Veremos que existe um campo tensorial conhecido como $1 - forma$ tautológica no fibrado cotangente T^*M de uma variedade diferenciável. Considerando a derivada exterior da $1-$forma tautológica, obtemos uma $2-$forma não-degenerada em T^*M conhecida como a forma simplética canônica. Esses objetos serão importantes na formalização do princípio do máximo de Pontryagin em variedades. Uma referência para esta seção é [15].

5.1 Formas diferenciais em variedades

Nesta subseção vamos estender a definição dos tensores alternados em uma variedade diferenciável como uma correspondência que a cada $p \in M$, associa um tensor alternado em seu espaço tangente, descrevendo-os em um sistema de coordenadas e analisando a sua diferenciabilidade. Introduziremos a diferencial exterior no espaço das forma diferenciais e demonstraremos que sua ação se comporta "naturalmente" em relação ao produto wedge e ao pullback das formas diferenciais.

Um campo tensorial ω de tipo $(0, k)$ é alternado se $\omega(p) := \omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$

para todo $p \in M$. O conjunto de todos os campos tensoriais alternados de tipo $(0,k)$ é denotado por $\Lambda^k(M)$.

Sejam $\omega \in \Lambda^k(M)$ e $\eta \in \Lambda^l(M)$. Podemos estender o produto wedge para campo tensoriais da seguinte forma

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p).$$

Como $\omega(p) \wedge \eta(p) \in \Lambda^{k+l}(T_pM)$ para todo $p \in M$, então $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(M)$. De forma semelhante podemos estender $Alt(\omega)(p) = Alt(\omega(p))$.

Caso $\omega \in \Lambda^k(M)$ seja diferenciável então diremos que é um campo tensorial alternado diferenciável sobre M ou uma $k-$forma em M. O subconjunto de $\Lambda^k(M)$ de todos os campos tensoriais alternados diferenciáveis é denotado por $\mathcal{A}^k M$. Uma $0-$forma é uma função diferenciável em M.

Em uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ com $U = (x_1, ..., x_n)$, uma $k-$forma ω pode ser escrito localmente como

$$\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^I = \sum_I{}' \omega_I (dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}),$$

onde cada ω_I é uma função diferenciável em uma vizinhança coordenada e a linha sobre o somatório indica que I varia ao longo de multi-índices crescentes.

Pelo item (c) do Lema 4.2.1 temos

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \delta^I_J.$$

Através do lema 3.2.7 e da linearidade da função Alt, podemos escrever $f \wedge \eta$ como

$$f \wedge \eta = \frac{l!}{l!} Alt(f \otimes \eta) = Alt(f\eta) = f Alt(\eta).$$

Caso η seja uma $k-$forma, então $f \wedge \eta = f Alt(\eta) = f\eta$.

Sejam ω uma k-forma e η uma $l-$forma, ambos em M. Então $\omega \wedge \eta$ é uma $(k+l)-$forma em M. De fato, já mostramos que $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(M)$. Por outro lado temos

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)(\omega \otimes \eta)^\sigma(p),$$

que é diferenciável pois cada $(\omega \otimes \eta)^\sigma$ é diferenciável pelo Lema 3.2.7.

Se $\zeta : M \to N$ é uma função diferenciável e ω uma $k-$forma de N. O pullback $\zeta^* \omega$ é uma $k-$forma de M definido como

$$(\zeta^* \omega)_p(X_1, ..., X_k) = \omega_{\zeta(p)}(d\zeta_p X_1, ..., d\zeta_p X_k).$$

Lema 5.1.1 *Seja $\zeta : M \to N$ uma função diferenciável. Temos que*

$$\zeta^*(\omega \wedge \eta) = (\zeta^*\omega) \wedge (\zeta^*\eta).$$

Dado $p \in M$, considere $Y = (y_1, ..., y_n)$ uma vizinhança coordenada de $\zeta(p)$. Assim em coordenadas locais

$$\zeta^*\left(\sum_I{}' \omega_I (dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_k})\right) = \sum_I{}' (\omega_I \circ \zeta)(d(y^{i_1} \circ \zeta) \wedge ... \wedge d(y^{i_k} \circ \zeta)).$$

Demonstração: Primeiramente considere $\omega = dy^I$ e $\eta = dy^J$ com $I = (i_1, ..., i_k)$ e $J = (j_1, ..., j_l)$ qualquer. Assim temos

$$\begin{aligned} \zeta^*(\beta^I \wedge \beta^J)_p &= \zeta^*(\beta^{IJ})_p = \beta^{IJ}_{\zeta(p)} \circ d\zeta_p = (\beta^I \wedge \beta^J)_{\zeta(p)} \circ d\zeta_p \\ &= (\beta^I_{\zeta(p)} \wedge \beta^J_{\zeta(p)}) \circ d\zeta_p = \zeta^*(\beta^I)_p \wedge \zeta^*(\beta^J)_p. \end{aligned}$$

O caso geral é resultado da bilinearidade do produto wedge e da linearidade de ζ^* (veja a Proposição 3.2.9). De fato, considere $\omega = \omega_I dy^I$ e $\eta = \eta_J dy^J$ escrito na base $\{dy^L; L \text{ é crescente}\}$ no ponto $\zeta(p)$. Assim temos

$$\begin{aligned} \zeta^*(\omega \wedge \eta)_p &= \zeta^*(\omega_I dy^I \wedge \eta_J dy^J)_p = (\omega_I \eta_J)_{\zeta(p)} (\zeta^*(dy^I) \wedge \zeta^*(dy^J))_p \\ &= \zeta^*(\omega_I dy^I)_p \wedge \zeta^*(\eta_J dy^J)_p = \zeta^*(\omega)_p \wedge \zeta^*(\eta)_p. \end{aligned}$$

A segunda afirmação é resultado da primeira parte e da regra da cadeia. De fato,

$$\begin{aligned} \zeta^*\left(\sum_I{}' \omega_I (dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_k})\right)_p &= \sum_I{}' (\omega_I)_{\zeta(p)} \zeta^*(dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_k}) \\ &= \sum_I{}' (\omega_I)_{\zeta(p)} \zeta^*(dy^{i_1}_{\zeta(p)}) \wedge ... \wedge \zeta^*(dy^{i_k}_{\zeta(p)}) \\ &= \sum_I{}' (\omega_I \circ \zeta)_p (d(y^{i_1} \circ \zeta) \wedge ... \wedge d(y^{i_k} \circ \zeta))_p. \end{aligned}$$

■

Lema 5.1.2 *Seja $\zeta : M \to N$ uma função diferenciável com M, N variedades diferenciáveis $n-$dimensionais. Sejam $U = (x_1, ..., x_n)$ e $V = (y_1, ..., y_n)$*

abertos coordenados em M e N respectivamente e u uma função diferenciável em V. Então

$$\zeta^*(u(dy^1 \wedge ... \wedge dy^n)) = (u \circ \zeta) \det \left[\frac{\partial \zeta^j}{\partial x^i}\right] (dx^1 \wedge ... \wedge dx^n) \tag{5.1}$$

para todo $p \in U \cap \zeta^{-1}(V)$.

Demonstração: Como o campo tensorial alternado é de tipo $(0, n)$ sobre uma variedade de dimensão n, então pelo Lema 4.2.2 temos que $\Lambda^n(M)$ é gerado pelo tensor $dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ para cada $p \in U \cap \zeta^{-1}(V)$.

Pelo Lema 5.1.1 temos

$$\zeta^*(u(dy^1 \wedge ... \wedge dy^n)) = (u \circ \zeta)(d(y^1 \circ \zeta) \wedge ... \wedge d(y^n \circ \zeta)) = (u \circ \zeta)(d\zeta^1 \wedge ... \wedge d\zeta^n),$$

onde ζ^q é a $q-$ésima coordenada de ζ. Pelo item (e) da Proposição 4.3.5 temos

$$\begin{aligned} d\zeta^1 \wedge ... \wedge d\zeta^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) &= \det \left[d\zeta^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] \\ &= \det \left[\frac{\partial \zeta^j}{\partial x^i}\right] \\ &= \det \left[\frac{\partial \zeta^j}{\partial x^i}\right] (dx^1 \wedge ... \wedge x^n) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^1}\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Por outro lado, $\dim(\Lambda^k(T_pM)) = 1$ para todo $p \in M$. Logo $(d\zeta^1 \wedge ... \wedge d\zeta^n)(p)$ é um múltiplo escalar de $(dx^1 \wedge ... \wedge dx^n)(p)$ para todo $p \in M$. Portanto $d\zeta^1 \wedge ... \wedge d\zeta^n$ é o produto da função diferenciável $\det \left[\frac{\partial \zeta^j}{\partial x^i}\right]$ com $dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ devido a (5.2).

■

5.2 Derivada Exterior

Vamos definir uma diferenciação natural sobre as $k-$formas em uma variedade. Dessa forma a derivada de uma $k-$forma ω é uma $(k+1)-$forma construído ao derivar as componentes ω_I de ω. Veremos que por serem campos de tensores alternados, então ao derivá-los duas vezes, sempre teremos o campo de tensores nulos.

Nem toda $1-$forma ω de uma variedade é exata, ou seja, nem sempre existe $f \in \mathcal{D}(M)$ tal que $\omega = df$. Uma das condições para que exista um f que satisfaça $\omega = df$ é que ω deve satisfazer

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = 0, \quad i, j = 1, ..., n, \tag{5.3}$$

em qualquer sistema de coordenadas. De fato, $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ e $\omega = \omega_i dx^i$, e com isso (5.3) é equivalente ao teorema de Clairaut-Schwarz aplicado em f. Veremos adiante que esta condição está relacionada ao fato $d\omega = 0$, ou seja, ω ser fechada.

Vamos definir um operador diferencial $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ que satisfaça regras usuais de derivação, e além disso, $d^2 = 0$.

Seja $\omega = \sum_I' \omega_I dx^I$ uma $k-$forma em uma vizinhança coordenada. Defina o operador d como

$$d\left(\sum_I{}' \omega_I dx^I\right) = \sum_I{}' (d\omega_I \wedge dx^I) \tag{5.4}$$

onde $d\omega_I$ é a diferencial da função componente ω_I. Como $d\omega_I \wedge dx^I$ é uma $(k+1)-$forma para todo I, então $d\omega$ é uma $(k+1)-$forma.

Vamos analisar propriedades de $d\omega_I$ na equação (5.4). Escreva $d\omega_I = \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i$ com $\frac{\partial \omega_I}{\partial x^i}$ as funções componentes de $d\omega_I$. Pela bilinearidade do produto wedge temos

$$\sum_I{}' (d\omega_I \wedge dx^I) = \sum_I{}' \left(\left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^I \right) = \sum_I{}' \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} (dx^i \wedge dx^I).$$

Seja ω uma $1-$forma e escreva $I = (j)$ com $j \in \{1, .., n\}$. Como $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, então podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} (dx^i \wedge dx^j) &= \sum_{i<j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} (dx^i \wedge dx^j) + \sum_{j<i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} (dx^i \wedge dx^j) \\ &= \sum_{i<j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} (dx^i \wedge dx^j) - \sum_{j<i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} (dx^j \wedge dx^i). \end{aligned}$$

Trocar os índices i e j da ultima somatória não altera a soma. Portanto

$$d\omega = \sum_{i<j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} (dx^i \wedge dx^j) - \sum_{i<j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} (dx^i \wedge dx^j) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) (dx^i \wedge dx^j)$$

e $d\omega = 0$ equivale à equação (5.3). Portanto, se ω é exata, então $d\omega = 0$.

Prosseguiremos com o estudo do operador d.

Teorema 5.2.1 *Em qualquer variedade diferenciável M existe uma única função linear $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ para cada $k \geq 0$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Se f é uma função diferenciável, então df é a diferencial de f, definido como
$$df(X) = Xf.$$

(ii) Se $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ e $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$, então
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(iii) $d^2(\omega) = d(d\omega) = 0$ para todo ω.

d é escrito como (5.4) *em uma carta local.*

Demonstração: Primeiramente suponha que exista uma função linear $d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ que satisfaça as propriedades $(i), (ii)$ e (iii). Temos que d é unicamente determinando ao mostrar que d satisfaz a equação (5.4) em qualquer carta local.

Sejam ω_a e ω_b $k-$formas em M e U um aberto de M tais que $\omega_a|_U = \omega_b|_U$. Para mostrar que $d\omega_a = d\omega_b$ vamos considerar $\eta = \omega_a - \omega_b$ e mostrar que $d\eta = 0$ em U. Seja $p \in U$ qualquer e considere a função bump $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ com suporte contido em U e $\varphi \equiv 1$ em uma vizinhança fechada A de p contida em U. Dessa forma temos que $\varphi\eta \equiv 0$ em M e $d(\varphi\eta) = d(0 \cdot \varphi\eta) = 0$ pela linearidade de d. Assim, pela propriedade (ii) temos
$$0 = d(\varphi\eta)_p = d\varphi_p \wedge \eta_p + \varphi_p \wedge d\eta_p = 0 \wedge \eta_p + 1 \cdot d\eta_p = d\eta_p.$$
Como $p \in U$ foi tomado de forma arbitrária, então temos que $d\eta = 0$ em U. Portanto d está bem definido localmente.

Agora seja $U = (x_1, ..., x_n)$ uma vizinhança coordenada de M e $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ escrito como $\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^I$ em U. Pelo Corolário $B.4$, existe um $\tilde{\omega}$ definido em M que coincide com ω em uma vizinhança fechada A em torno de $p \in U$. Através do item (ii) e pela linearidade de d temos
$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= d\left(\sum_I{}' \tilde{\omega}_I d\tilde{x}^I\right) = \sum_I{}' d\left(\tilde{\omega}_I \wedge d\tilde{x}^{i_1} \wedge ... \wedge d\tilde{x}^{i_n}\right) \\ &= \sum_I{}' d\tilde{\omega}_I \wedge d\tilde{x}^I + (-1)^0 \sum_I{}' \tilde{\omega}_I \wedge d(d\tilde{x}^{i_1} \wedge ... \wedge d\tilde{x}^{i_n}). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Podemos aplicar $n-1$ vezes a propriedade (ii) em $d(d\tilde{x}^{i_1}\wedge ... \wedge d\tilde{x}^{i_n})$. Dessa forma teremos uma soma de termos cada um contendo um fator $d(d\tilde{x}^{i_p})$ para algum $p \in \{1, ..., n\}$. Pelo item (iii) temos que $d(d\tilde{x}^{i_p}) = 0$ e portanto a soma dos termos é nulo. Portanto a equação (5.5) reduz para

$$\sum_I{}' d\tilde{\omega}_I \wedge d\tilde{x}^I.$$

Como d é um operador local, então temos

$$d\omega_p = d\tilde{\omega}_p = \sum_I{}' d(\tilde{\omega}_I)_p \wedge d(\tilde{x}^I)_p = \sum_I{}' d(\omega_I)_p \wedge d(x^I)_p$$

para todo $p \in U$. Logo d satisfaz a equação (5.4) em todo U e portanto $d\omega$ é unicamente determinado.

Agora vamos provar a existência deste operador linear. Para fixar ideias, suponha que M é coberta por uma única vizinhança coordenada $(x_1, ..., x_n)$ e defina d pela equação (5.4). Pela definição de d em sistema de coordenadas, não é difícil ver que a propriedade (i) é satisfeita. Para provar as outras propriedades, primeiramente observe que $d(fdx^I) = df \wedge dx^I$ mesmo que I seja um multi-índice de comprimento k não crescente. De fato, se I contém índices repetidos, então ambos os lados da equação se anulam pela anti-comutatividade do produto wedge. Caso contrário considere $\sigma \in S_k$ a permutação tal que $J = \sigma I$ com J um multi-índice crescente. Pela linearidade de d temos

$$d(fdx^I) = sgn(\sigma)d(fdx^J) = sgn(\sigma)df \wedge dx^J = df \wedge dx^I.$$

Vamos provar que (ii) é válido para os tensores $\omega = fdx^I$ e $\eta = gdx^J$, onde $f, g \in \mathcal{D}(M)$. De fato,

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= d((fdx^I) \wedge (gdx^J)) = d(fg(dx^I \wedge dx^J)) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\
&= (gdf + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J = g(df \wedge dx^I \wedge dx^J) + f(dg \wedge dx^I \wedge dx^J) \\
&= (df \wedge dx^I) \wedge (gdx^J) + (-1)^k (fdx^I) \wedge (dg \wedge dx^J) \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta,
\end{aligned}$$

onde a penúltima linha é resultado da anticomutatividade do produto wedge. Para $\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^I$ e $\eta = \sum_I{}' \eta_J dx^J$ arbitrários o resultado é direto pela linearidade de d.

Para provar (iii), primeiramente considere o caso $\omega = f \in \mathcal{D}(M)$ uma $0-$forma. Nesse caso

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j.$$

Como $dx^i \wedge dx^i = 0$, $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ e f tem segunda derivada contínua, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0.$$

Para o caso geral, temos pelo item (ii) que

$$d(d\omega) = d\left(\sum_I{}' d\omega_I \wedge dx^I \right) = \sum_I{}' d^2(\omega_I) \wedge dx^I + \sum_I{}' d\omega_I \wedge d^2(x^I).$$

Temos que $d^2(\omega_I) = 0$ pois ω_I é uma $0-$forma. Por outro lado escreva $d(dx^I) = d(dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k})$. Ao aplicar o item (ii) k vezes temos

$$d^2(x^I) = \sum_{q=1}^{k} (-1)^{q-1} dx^{i_1} \wedge ... \wedge d^2(x^{i_q}) \wedge ... \wedge dx^{i_k} = 0$$

onde cada $d^2(x^{i_q}) = 0$ pois x^{i_q} é uma $0-$forma. Assim concluímos que $d^2(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$.

Para finalizar, temos que mostrar que o resultado vale para uma variedade diferenciável M arbitrária. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas. Dados U_α e U_λ vizinhanças coordenadas quaisquer, existem d_α e d_λ operadores diferenciáveis definidos em U_α e U_λ respectivamente, ambos satisfazendo $(i) - (iii)$. Caso $U = U_\alpha \cap U_\lambda \neq \emptyset$, pela unicidade temos que $d_\alpha|_U = d_\lambda|_U$. Dessa forma, definir $d\omega$ pela equação (5.4) em cada vizinhança coordenada resulta em um operador definido em todo o M satisfazendo os itens $(i) - (iii)$.

■

Observação 5.2.2 *Como consequência de existir uma única função linear d satisfazendo condições do teorema acima então $d\omega$ não depende do sistema de coordenadas.*

Vamos chamar o operador d de *diferencial exterior* e $d\omega$ de *derivada exterior de ω.*

Lema 5.2.3 *Seja $\zeta : M \to N$ é uma função diferenciável. A função pullback ζ^* comuta com o diferencial exterior d da seguinte forma:*

$$\zeta^*(d\omega) = d(\zeta^* \omega) \quad \forall\ \omega \in \mathcal{A}^k(N). \tag{5.6}$$

Demonstração: Seja $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ arbitrário. Como d é local, precisamos demonstrar a equação (5.6) para uma vizinhança de cada $p \in M$. Em uma vizinhança coordenada podemos escrever $\omega = \sum_I{}' \omega_I dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$. Pela linearidade de d e de ζ^* precisamos demonstrar somente para $\omega_I dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$.

Pelo Lema 5.1.1 e a definição de d temos

$$\begin{aligned}
\zeta^* d(\omega_I dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) &= \zeta^*(d\omega_I \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) \\
&= d(\omega_I \circ \zeta) \wedge d(x^{i_1} \circ \zeta) \wedge ... \wedge d(x^{i_k} \circ \zeta) \\
&= d((\omega_I \circ \zeta) \wedge d(x^{i_1} \circ \zeta) \wedge ... \wedge d(x^{i_k} \circ \zeta)) \\
&= d(\zeta^*(\omega_I dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k})),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Definição 5.2.4 *Uma forma diferenciável $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ é fechada quando $d\omega = 0$, e exata se existir um $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ de forma que $\omega = d\eta$.*

Observação 5.2.5 *Como $d^2 = 0$, então para uma $k-$forma ser exata uma condição necessária é que ela seja fechada pois*

$$d\omega = d(d\eta) = 0.$$

5.3 Forma Simplética

Definir um tensor simplético em um espaço vetorial é bem útil. Com ele ganhamos várias ferramentas sendo entre elas um isomorfismo entre os espaço vetorial e o seu dual, uma noção de espaço complementar e o fato que o espaço vetorial tem dimensão par.

Veremos que em toda variedade diferenciável é possível definir uma forma simplética sobre o fibrado cotangente ao derivar a $1-$forma tautológica.

Um tensor ω de tipo $(0, 2)$ de um espaço vetorial $n-$dimensional V é não degenerado se $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in V$ se e somente se $X = 0$.

Proposição 5.3.1 *Sejam V um espaço vetorial e $\omega \in V^{0,2}$ um tensor. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) ω é não degenerado;

(ii) A matriz $[\omega_{ij}]$, onde ω_{ij} são as funções componentes de ω em uma base, é inversível;

(iii) A função linear $\hat{\omega} : V \to V^*$ definido por $\hat{\omega}(X) = \omega(\cdot, X)$ é inversível.

Demonstração:

$(ii) \Rightarrow (i)$. Vamos demonstrar pela contrapositiva. Suponha que ω é degenerado, ou seja existe $X \neq 0$ de forma que $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in V$. Construa $(e_1, ..., e_n)$ uma base de V com $e_n = X$. Assim temos $\omega(e_n, e_j) = 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Portanto $[\omega_{ij}]$ não é inversível pois a $n-$ésima linha é nula.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Vamos demonstrar pela contrapositiva. Agora suponha que $[\omega_{ij}]$ não é inversível, com ω_{ij} as componentes de ω na base $(e_1, ..., e_n)$ qualquer. Assim existe uma matriz inversível A de forma que a matriz $A \cdot [\omega_{ij}]$ é uma matriz triangular superior escalonada cuja a $n-$ésima linha é nula. Assim temos

$$0 = [e_n]^T A[\omega_{ij}] = (A^T[e_n])^T[\omega_{ij}]$$

e portanto

$$\omega(A^T(e_n), Y) = (A^T[e_n])^T[\omega_{ij}][Y] = 0 \cdot [Y] = 0$$

para todo $Y \in V$. Logo ω é degenerado.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. Primeiramente observe que

$$\text{nuc}\,\hat{\omega} = \{X \in V; \hat{\omega}(X) \equiv 0\} = \{x \in V; \omega(Y, X) = 0 \ \forall\ Y \in V\}.$$

Assim ω é não degenerado se e somente se $\text{nuc}\,\hat{\omega} = \{0\}$ o que ocorre se e somente se $\hat{\omega}$ é inversível pelo teorema do núcleo e da imagem.

■

Um tensor de tipo $(0, 2)$ alternado e não degenerado é chamado de um tensor simplético . O par (V, ω) é chamado de um espaço vetorial simplético ou simplesmente que V é um espaço vetorial simplético caso não haja possibilidade de confusão.

Exemplo 1 *Seja V um espaço vetorial $2n-$dimensional. Seja $(A_1, B_1, ...$ $..., A_n, B_n)$ uma base qualquer de V e a base dual correspondente $(\alpha^1, \beta^1, ...$ $..., \alpha^n, \beta^n)$ para V^*. Seja $\omega \in \Lambda^2(V)$ um tensor definido como*

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \wedge \beta^k \tag{5.7}$$

Dessa forma, dados $i, j \in \{1, ..., n\}$ com $i \neq j$ temos

$$\begin{aligned}\omega(A_i, B_j) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \wedge \beta^k(A_i, B_j) = (\alpha^i \wedge \beta^i + \alpha^j \wedge \beta^j)(A_i, B_j) \\ &= \det \begin{bmatrix} \alpha^i(A_i) & \alpha^i(B_j) \\ \beta^i(A_i) & \beta^i(B_j) \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha^j(A_i) & \alpha^j(B_j) \\ \beta^j(A_i) & \beta^j(B_j) \end{bmatrix} = 1 \cdot \delta^i_j + \delta^j_i \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Agora se $i = j$ temos

$$\omega(A_i, B_i) = (\alpha^i \wedge \beta^i)(A_i, B_i) = 1 \cdot \delta_i^i = 1.$$

Portanto $\omega(A_i, B_j) = \delta_j^i = -\omega(B_j, A_i)$. Por outro lado temos $\omega(A_i, A_j) = 0 = \omega(B_i, B_j)$ pois $\beta^k(A_j) = 0 = \alpha^k(B_i)$ para todo $i, j, k \in \{1, ..., n\}$.

Seja $X = a^i A_i + b^i B_i$ um vetor que satisfaz $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in V$. Para todo $j \in \{1, .., n\}$ tem-se

$$0 = \omega(X, B_j) = a^i \omega(A_i, B_j) + b^i \omega(B_i, B_j) = a^i \delta_i^j = a^j$$

e

$$0 = \omega(X, A_j) = a^i \omega(A_i, A_j) + b^i \omega(B_i, A_j) = -b^i \delta_i^j = -b^j.$$

Portanto $X = 0$ e ω é não degenerado.

Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e S um subespaço de V. Vamos definir o complemento simplético de S como

$$S^\perp = \{X \in V; \omega(X, Y) = 0, \ \forall \ Y \in S\}.$$

Em particular, como ω é não degenerado, então

$$V^\perp = \{X \in V; \omega(X, Y) = 0, \ \forall \ Y \in V\} = \{0\}.$$

Temos que $S^\perp$ é um subespaço de V, pois para todo X escrito como combinação linear de vetores de $S^\perp$, temos que $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in V$ pela bilinearidade do tensor. A demonstração da seguinte proposição é um exercício de álgebra linear.

Proposição 5.3.2 *Sejam V um espaço vetorial $n-$dimensional, V^* o espaço dual e $\{\beta^1, ..., \beta^k\}$ um conjunto de funcionais linearmente independentes em V^*. Então existe um conjunto L.I. $\{X_1, .., X_k\} \subset V$ tal que $\beta^j(X_i) = \delta_i^j$.*

Lema 5.3.3 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Para todo subespaço $S \subset V$ tem-se $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$.*

Demonstração: Sejam $(e_1, ..., e_k)$ uma base arbitrária de S e a transformação linear invertível $\hat{\omega} : V \to V^*$ definida como $\hat{\omega}(X)(Y) = \omega(X, Y)$. Assim a $k-$upla de covetores $(\hat{\omega}(e_1), ..., \hat{\omega}(e_k))$ são linearmente independentes. Seja $\phi : V \to \mathbb{R}^k$ a transformação linear definida

$$\phi(X) = (\hat{\omega}(e_1)(X), ..., \hat{\omega}(e_k)(X)).$$

Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{nuc}\phi &= \{X \in V; \hat{\omega}(e_i)(X) = 0 \text{ para todo } i \in \{1, ..., k\}\} \\ &= \{X \in V; \omega(e_i, X) = 0 \text{ para todo } i \in \{1, ..., k\}\}.\end{aligned}$$

Pela bilinearidade de ω podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\{X \in V; &\omega(e_i, X) = 0 \text{ para todo } i \in \{1, ..., k\}\} = \\ &= \{X \in V; \omega(Y, X) = 0 \text{ para todo } Y \in S\} = S^{\perp}.\end{aligned}$$

A transformação linear ϕ é sobrejetora. De fato, pela proposição anterior existem $\{X_1, ..., X_k\}$ vetores de V linearmente independentes com $\hat{\omega}(e_i)(X_j) = \delta^i_j$. Seja $(a^1, ..., a^k) \in \mathbb{R}^k$ arbitrário. Assim temos

$$\phi(a^j X_j) = (\hat{\omega}(e_1)(a^j X_j), ..., \hat{\omega}(e_k)(a^j X_j)) = (a^1, ..., a^k).$$

Pelo teorema do núcleo e da imagem temos

$$\dim V = \dim(\operatorname{nuc}\phi) + \dim \mathbb{R}^k = \dim S^{\perp} + \dim S,$$

o que conclui a demonstração. ■

Complementos simpléticos e complementos ortogonais não são parecidos, pois $S \cap S^{\perp} = \{0\}$ em um espaço com produto interno, mas para espaços simpléticos isso nem sempre ocorre.

O exemplo 1 retrata bem a situação acima. Seja $S = span\{A_1\}$. Sabemos que

$$\begin{aligned}\omega(A_j, A_1) = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., n\}, \\ \omega(B_j, A_1) = 0 \quad \forall j \in \{2, ..., n\}.\end{aligned}$$

A única expressão não nula é $\omega(B_1, A_1)$. Portanto

$$S^{\perp} = span\{A_1, \hat{B}_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n\},$$

onde $\hat{B}_1$ indica que B_1 foi retirado do conjunto. Assim temos $S \cap S^{\perp} = S$.

Seja V um espaço vetorial simplético. Vamos classificar os subespaços S de V como

- *Simplético* se $S \cap S^{\perp} = \{0\}$;
- *Isotrópico* se $S \subset S^{\perp}$;
- *Coisotrópico* se $S \supset S^{\perp}$;

- *Lagrangiano* se $S = S^{\perp}$.

Proposição 5.3.4 *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e $S \subset V$ um subespaço. Temos as seguintes afirmações:*

(a) $(S^{\perp})^{\perp} = S$*;*

(b) *S é simplético se e somente se $\omega|_S$ e não degenerada;*

(c) *S é isotrópico se e somente se $\omega|_S \equiv 0$;*

(d) *S é Lagrangiano se e somente se $\omega|_S \equiv 0$, $\dim V = 2n$ e $\dim S = n$.*

Demonstração: (a) Seja $X \in S$ arbitrário. Pela definição de complemento simplético de S temos $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in S^{\perp}$. Portanto $X \in (S^{\perp})^{\perp}$, e como X é arbitrário, conclui-se que $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$.

Pelo Lema 5.3.3 temos

$$\dim V = \dim S + \dim S^{\perp} = \dim S^{\perp} + \dim (S^{\perp})^{\perp}.$$

Logo $\dim S = \dim(S^{\perp})^{\perp}$. Já que $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$, então $S = (S^{\perp})^{\perp}$.

(b) Sejam S um subespaço simplético e $X \in S$ de forma que $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in S$. Em particular $X \in S^{\perp}$. Assim temos que $X = 0$ pois $X \in S \cap S^{\perp} = \{0\}$. Logo $\omega|_S$ é não degenerado.

Agora suponha $\omega|_S$ é não degenerado. Seja $X \in S \cap S^{\perp}$ arbitrário. Então $X \in S$ e $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in S$. Como $X, Y \in S$ então $\omega(X, Y) = \omega|_S (X, Y) = 0$ para todo $Y \in S$. Pela hipótese que $\omega|_S$ é não degenerado, temos que $X = 0$ e portanto $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

(c) Temos que $S \subset S^{\perp}$ se e somente se para todo $X \in S$ temos que $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in S$. Mas isso é o mesmo que dizer $\omega|_S \equiv 0$.

(d) Seja S Lagrangiano. Em particular S é isotrópico, portanto $\omega|_S \equiv 0$ pelo item (c). Pelo Lema 5.3.3 temos

$$\dim V = \dim S + \dim S^{\perp} = 2 \dim S.$$

Logo $\dim V = 2n$ e portanto $\dim S = n$.

Agora suponha $\omega|_S \equiv 0$ e $2 \dim S = \dim V = 2n$. Pelo Lema 5.3.3 temos

$$2n = \dim S + \dim S^{\perp},$$

assim $\dim S^{\perp} = n$. Como $S \subset S^{\perp}$ pelo item (c) e ambos os subespaços tem a mesma dimensão, então $S = S^{\perp}$, o que conclui a demonstração. ∎

Proposição 5.3.5 *Sejam ω um tensor simplético, $(A_1, B_1, ..., A_n, B_n)$ uma base de V e $(\alpha^1, \beta^1, ..., \alpha^n, \beta^n)$ sua base dual. Então $\omega = \sum_{k=1}^n \alpha^k \wedge \beta^k$ se e somente se $\omega(A_i, B_j) = \delta_i^j$ e $\omega(A_i, A_j) = 0 = \omega(B_i, B_j)$ para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$.*

Demonstração: A ida da proposição já foi demonstrada no Exemplo 1. Então suponha que $\omega(A_i, B_j) = \delta_i^j$ e $\omega(A_i, A_j) = 0 = \omega(B_i, B_j)$ para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$. Pelo Lema 4.2.2 temos que ω é escrito como

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_{kk}^1 \alpha^k \wedge \beta^k + \sum_{k<l}^{n} (\omega_{kl}^2 \alpha^k \wedge \beta^l + \omega_{kl}^3 \beta^k \wedge \alpha^l) + \sum_{k<l}^{n} (\omega_{kl}^4 \alpha^k \wedge \alpha^l + \omega_{kl}^5 \beta^k \wedge \beta^l),$$

onde ω_{kk}^1 e ω_{kl}^p com $p = 2, 3, 4, 5$ são constantes. Por hipótese temos que

$\omega_{kl}^4 = 0 = \omega_{kl}^5$ pois $\omega(A_k, A_l) = 0 = \omega(B_k, B_l)$;
$\omega_{kl}^2 = 0 = \omega_{kl}^3$ pois $k < l$ e daí $\omega(A_k, B_l) = \delta_l^k = 0 = -\omega(B_k, A_l)$;
$\omega_{kk}^1 = 1$ pois $\omega(A_k, B_k) = \delta_k^k = 1$.

Portanto

$$\omega = \omega_{kk}^1 \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \wedge \beta^k = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \wedge \beta^k,$$

o que conclui a demonstração. ■

Teorema 5.3.6 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético $m-$dimensional. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2n$ e existe um base para V de forma que ω é escrito da forma* (5.7).

Demonstração: Vamos provar o resultado por indução sobre $m = \dim V$. O caso $m = 0$ e $m = 1$ será provado a parte, pois não tem relação com a indução. No caso $m = 0$ nada temos a provar. Para $m = 1$ temos que o único tensor alternado de tipo $(0, 2)$ é o nulo, que não é um tensor simplético. Logo um espaço vetorial unidimensional não pode ser simplético.

Agora para $m = 2$ considere $(e_1, e_2) = (A_1, B_1)$ base arbitrária de V. Como ω é alternado então $\omega(A_1, A_1) = 0 = \omega(B_1, B_1)$. Por outro lado, como ω é não degenerado, então $\omega(A_1, B_1) = \omega(B_1, A_1) \neq 0$. Caso $\omega(A_1, B_1) \neq 1$, então considere $C_1 = B_1 / \omega(A_1, B_1)$. Na base (A_1, C_1), o tensor ω é escrito na forma (5.7) pela Proposição 5.3.5. Sem perda de generalidade podemos considerar $B_1 = C_1$.

Agora seja $m \in \mathbb{N}$ qualquer e considere que o resultado é valido para todo espaço vetorial simplético com dimensão menor que m. Seja A_1 um vetor não nulo arbitrário. Como ω é não degenerado então existe $B_1 \in V$ tal que $\omega(A_1, B_1) \neq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\omega(A_1, B_1) = 1$ pois caso contrário é só considerar $C_1 = B_1/\omega(A_1, B_1)$. Como ω é alternado então B_1 não é múltiplo A_1 e portanto $\{A_1, B_1\}$ é linearmente independente. Considere $S = span\{A_1, B_1\}$. Temos que $\dim S^\perp = \dim V - \dim S = m - 2$.

Temos que $(S^\perp, \omega|_{S^\perp})$ é um espaço vetorial simplético. De fato, temos que $\omega|_S$ é não degenerada e pelo item (*b*) da Proposição 5.3.4, temos que $S \cap S^\perp = \{0\}$. Como $S^\perp$ é simplético também, então pelo item (*b*) temos que $\omega|_{S^\perp}$ é não degenerada. Assim $S^\perp$ é um espaço vetorial simplético com dimensão par menor que m, e por hipótese de indução existe uma base $(A_2, B_2, ..., A_n, B_n)$ para $S^\perp$ tal que ω é da forma (5.7) com $i, j \in \{2, ..., n\}$. Observe que $\omega(A_1, A_j) = 0 = \omega(A_1, B_j)$ e $\omega(B_1, A_j) = 0 = \omega(B_1, B_j)$ para todo $j \in \{2, ..., n\}$ pela definição de complemento simplético. Logo temos $\omega(A_i, B_j) = \delta_i^j$ e $\omega(A_i, A_j) = 0 = \omega(B_i, B_j)$ para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$. Portanto ω é da forma (5.7) devido à Proposição 5.3.5 e $\dim V = 2n$. ■

Inspirado nesse teorema, diremos que uma base $(A_1, B_1, ..., A_n, B_n)$ de (V, ω) é uma base simplética se $\omega = \sum_{k=1}^n \alpha^k \wedge \beta^k$ com $(\alpha^1, \beta^1, ..., \alpha^n, \beta^n)$ a base dual correspondente a $(A_1, B_1, ..., A_n, B_n)$. Pelo Teorema 5.3.6, todo espaço vetorial simplético admite uma base simplética.

Agora considere M uma variedade diferenciável. Uma estrutura simplética é uma $2-$forma ω fechada tal que $\omega(p)$ é uma forma simplética em T_pM. O par (M, ω) é chamado de variedade simplética ou simplesmente que M é uma variedade simplética.

Pelo teorema acima temos que se M é uma variedade simplética, então M é uma variedade com dimensão par. Agora sejam (M, ω) e (N, η) variedades simpléticas e ζ um difeomorfismo de M a N tal que $\zeta^*\eta = \omega$. Então diremos que ζ é um *simpletomorfismo* e M e N são variedades simpletomorfas.

Considere $(x^1, y^1, ..., x^n, y^n)$ o sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^{2n}$. Seja ω uma $2-$forma definido como

$$\omega = \sum_{k=1}^n dx^k \wedge dy^k.$$

Temos que ω é fechado pois $d^2 = 0$ e portanto

$$d(\omega) = d\left(\sum_{k=1}^n dx^k \wedge dy^k\right) = \sum_{k=1}^n (d(dx^k) \wedge dy^k - dx^k \wedge d(dy^k)) = 0.$$

Logo ω é uma forma simplética com cada $\omega(p)$ escrito na forma (5.7). Vamos chamar ω como forma simplética canônica em $\mathbb{R}^{2n}$.

Seja M uma variedade diferenciável bidimensional e ω uma $2-$forma tal que $\omega(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. Como $d\omega$ é uma $3-$forma então $d\omega(X_1, X_2,$

$, X_3) = 0$, pois qualquer $\{X_1(p), X_2(p), X_3(p)\} \subset T_pM$ é linearmente dependente. Assim ω é fechado. Por outro lado temos que ω é não degenerado. De fato, ao escrever ω de acordo com o Lema 4.2.2 temos

$$\omega = a \cdot dx^1 \wedge dy^1 \text{ com } a(p) \neq 0 \text{ para todo } p \in M.$$

A $2-$forma $\eta = \omega/a$ está escrita na forma (5.7) e portanto é não degenerada. Logo toda $2-$forma ω com $\omega(p) \neq 0$ para todo p em M é uma estrutura simplética.

Sejam (M, ω) uma variedade simplética e N uma subvariedade diferenciável imersa em M pela imersão $\zeta : N \to M$. A imersão ζ é chamada de imersão simplética (isotrópica, coisotrópica ou Lagrangiana) se o subespaço $d\zeta(T_pN) \subset T_\zeta(p)M$ satisfaz a propriedade correspondente para todo $p \in N$.

O resultado a seguir é simplesmente uma particularização da estrutura diferenciável vista em (3.1).

Proposição 5.3.7 *Sejam M uma variedade diferenciável, $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma coleção de parametrizações de M. O fibrado cotangente T^*M admite uma parametrização natural $\boldsymbol{z}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to T^*M$ definida como*

$$\boldsymbol{z}_\alpha(x^1, ..., x^n, \xi_1, ..., \xi_n) = (\boldsymbol{x}_\alpha(x^1, ..., x^n), \xi_i dx^i).$$

O fibrado cotangente de uma variedade diferenciável é uma variedade diferenciável.

Considere $\pi : T^*M \to M$ a projeção definida por $\pi(p, \eta) = p$. O seu pullback é a função $\pi^* : T_p^*M \to T_{(p,\eta)}^*(T^*M)$. Pela Proposição 5.3.7, considere $(x^1, ..., x^n)$ as coordenadas locais de M e $(x^1, ..., x^n, \xi_1, ..., \xi_n)$ as coordenadas locais de T^*M. Dado $\omega_p = (\omega_i)_p dx^i \in T_p^*M$ temos

$$\pi^*(\omega)_{(p,\eta)} = \pi^*(\omega_i dx^i)_{(p,\eta)} = (\omega_i \circ \pi)_{(p,\eta)} d(x^i \circ \pi)_{(p,\eta)} = (\omega_i)_p (dx_p^i \circ d\pi_{(p,\eta)}).$$

Agora considere a $1-$forma τ de T^*M definido como

$$\tau_{(p,\eta)} = \pi^* \eta.$$

A função τ é chamada de $1-$forma tautológica de T^*M. Se $X \in T_{(p,\eta)}(T^*M)$, então

$$\tau_{(p,\eta)}(X) = (\pi^*\eta)(X) = \eta(d\pi_{(p,\eta)}(X)).$$

Proposição 5.3.8 *Seja M uma variedade diferenciável. A $1-$forma tautológica τ é diferenciável e a $2-$forma $\omega = d\tau$ é uma forma simplética no fibrado cotangente T^*M.*

Demonstração: Sejam $(x^1, ..., x^n)$ as coordenadas locais de M e considere $(x^1, ..., x^n, \xi_1, ..., \xi_n)$ as coordenadas locais de T^*M de acordo com a Proposição 5.3.7. Dado $(p, \xi) = (p, \xi_i dx^i) \in T^*M$ temos

$$\tau_{(p,\xi)} = \xi \circ d\pi_{(p,\eta)} = \xi_i(p) dx^i_p \circ d\pi_{(p,\eta)}.$$

Considere $d\hat{x}^i$ a diferencial de x^i na base $(x^1, ..., x^n, \xi_1, ..., \xi_n)$. Nesse caso temos $d\hat{x}^i_{(p,\eta)} = dx^i_p \circ d\pi_{(p,\eta)}$. Portanto $\tau_{(p,\xi)} = \xi_i(p) d\hat{x}^i$. Temos que τ é diferenciável pois as suas componentes são diferenciáveis.

Como ω é exata então ω é fechada (veja a Observação 5.2.5). Por outro lado temos

$$\omega = d\tau = d\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx^i.$$

Se considerarmos um difeomorfismo de um aberto de T^*M para um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ de forma que $(x^1, ..., x^n, \xi_1, ..., \xi_n) \mapsto (x^1, \xi_1, ..., x^n, \xi_n)$, temos que ω é simplética, pois está escrita como a estrutura simplética canônica. ∎

A estrutura simplética definida nessa proposição é chamada de estrutura simplética canônica em T^*M.

Capítulo 6

Variedades de Finsler de Classe C^0 de tipo Pontryagin

Em geometria diferencial, dada uma variedade diferenciável M é possível definir uma família de produtos internos em cada espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente com respeito a p, conhecido como métrica Riemanniana. Dessa forma as técnicas de diferenciação e integração podem ser utilizadas para estudarmos objetos como, por exemplo, o comprimento de uma curva, conexão, curvaturas, geodésicas, etc. Já uma estrutura de Finsler de classe C^0 é uma generalização da métrica Riemanniana, pois é uma regra que a cada $p \in M$ associa uma norma assimétrica F em T_pM que varia continuamente.

Agora que definimos e mostramos os resultados necessários para tensores, vamos voltar para o problema do sistema de controle inicial. Queremos encontrar condições necessárias para que uma curva em uma variedade diferenciável M munida com uma estrutura de Finsler F de classe C^0 seja minimizante. Estudaremos o caso particular onde F é representado por um sistema de controle cujos campos de vetores são unitários e de classe C^1 e satisfazem as condições mínimas para que o principio do máximo de Pontryagin seja aplicável. Esta teoria será utilizada para o estudo de um caso onde o extremal de um grupo de Lie G munido com uma estrutura de Finsler poliedral invariante à esquerda é uma geodésica, ou seja, é uma curva localmente minimizante e parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco.

Esta seção esta subdividida do seguinte modo: Na seção 6.1, estudamos alguns tipos de variedades de Finsler de classe C^0. Na seção 6.2, definimos o campo geodésico estendido no fibrado cotangente de uma variedade de Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin, que é uma generalização do campo geodésico em uma variedade de Finsler. Na seção 6.3, estudamos as estruturas de

Finsler poliedrais. Finalmente, na seção 6.4, estudamos o caso onde extremais em grupos de Lie são geodésicas, descrita no parágrafo anterior.

6.1 Estrutura de Finsler de classe C^0

Nesta seção, definiremos variedades de Finsler, variedades de Finsler de classe C^0 e variedades de Finsler (de classe C^0) de tipo Pontryagin. Denotaremos $TM-\{0\} = \{(x,y) \in TM; y \neq 0\}$ e $T^*M-\{0\} = \{(x,\xi) \in T^*M; \xi \neq 0\}$.

Definição 6.1.1 *Sejam M uma variedade diferenciável, $(x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas de M e $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ o sistema de coordenadas correspondente em TM. Uma estrutura de Finsler F em uma variedade diferenciável M é uma função definida $F : TM \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

(i) F é C^∞ em $TM - \{0\}$;

(ii) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x,y)$ para todo $\lambda > 0$;

(iii) A matriz Hessiana $n \times n$

$$(g_{ij}) := \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} \right)$$

é definida positiva em cada ponto de $TM - \{0\}$.

Definição 6.1.2 *Uma estrutura de Finsler de classe C^0 em uma variedade diferenciável é uma função contínua $F : TM \to \mathbb{R}^+$ de forma que $F(p, \cdot) : T_pM \to \mathbb{R}^+$ é uma norma assimétrica em T_pM para todo $p \in M$.*

Diremos que o par (M, F) é uma variedade de Finsler de classe C^0 ou simplesmente que M é uma variedade de Finsler de classe C^0.

Toda estrutura de Finsler é uma estrutura de Finsler de classe C^0 (vide [4])

Vamos denotar a bola aberta em T_pM de centro x e raio $r > 0$ por $B_F(p, x, r)$. De forma semelhante denote $B_F[p, x, r]$ e $S_F(p, x, r)$ a bola fechada e a esfera respectivamente.

Teorema 6.1.3 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e $(x^1, ..., x^n)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f *é homogênea positiva de grau* $k \in \mathbb{N}$*, ou seja,*

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n \textit{ e } \lambda > 0; \tag{6.1}$$

2. *A derivada radial direcional de* f *é dada por* $x^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i} = kf(x)$.

Demonstração: Vide Teorema 1.2.1 em [4]. ■

Definição 6.1.4 *Uma variedade de Finsler* M *de classe* C^0 *é de tipo Pontryagin em* $p \in M$ *se existe uma vizinhança* U *de* p*, um sistema de coordenadas* $(x^1, ..., x^n)$ *em* U *com o correspondente sistema de coordenadas* $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ *de* TM *e uma família de campos vetoriais de classe* C^1 *unitários em* U *parametrizados por* $u \in S^{n-1}$ *definido como*

$$\{X_u(x) = y^i(x^1, ..., x^n, u)\frac{\partial}{\partial x^i}; \forall\ x \in U \textit{ e } u \in S^{n-1}\}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $u \to X_u(x)$ *é um homeomorfismo de* S^{n-1} *em* $S_F(x, 0, 1)$ *para todo* $x \in U$*;*
2. $(x, u) \to X_u(x)$ *é contínua;*
3. $(x, u) \to \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}(x^1, ..., x^n, u), ..., \frac{\partial y^n}{\partial x^i}(x^1, ..., x^n, u)\right)$ *é contínua para todo* $i = 1, ..., n$.

Diremos simplesmente que (M, F) *é uma variedade Finsler de classe* C^0 *de tipo Pontryagin se ele é uma variedade Finsler de classe* C^0 *de tipo Pontryagin em todo* $p \in M$*. Vamos dizer que* F *é de tipo Pontryagin se* (M, F) *é de tipo Pontryagin.*

Observação 6.1.5 *Note que essas propriedades não dependem do sistema de coordenadas em* U*. De fato, considere* $\boldsymbol{x}$ *e* $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ *sistemas de coordenadas de* U *de forma que* $U = (x_1, ..., x_n)$ *e* $U = (\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n)$ *respectivamente. Considere* $(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, \tilde{y}^1, ..., \tilde{y}^n)$ *o sistema de coordenadas de* TU *correspondente a* $(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n)$*. Considere a mudança de coordenadas dada por*

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x).$$

Como T_pM *é um espaço vetorial, então a mudança de coordenadas é dada por*

$$\tilde{y}^i = a_{ij}(x)y^j, \tag{6.2}$$

onde a_{ij} são funções diferenciáveis em U.

Agora considere X_u uma família de campos vetoriais classe de C^1 parametrizado por u dados por

$$(x,u) \mapsto (x, y^1(x,u), ..., y^n(x,u))$$

e

$$(\tilde{x},u) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}^1(\tilde{x},u), ..., \tilde{y}^n(\tilde{x},u).$$

Pela equação (6.2), *podemos reescrever o campo vetorial como*

$$(\tilde{x},u) \mapsto (\tilde{x}, a_{1j}(x(\tilde{x}))y^j(x(\tilde{x}),u), ..., a_{nj}(x(\tilde{x}))y^j(x(\tilde{x}),u)). \tag{6.3}$$

Por outro lado, ao derivar a equação (6.2) *em relação a $\tilde{x}^k$ no ponto $(\tilde{x},u)$ resulta em*

$$\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial \tilde{x}^k}(\tilde{x},u) = \frac{\partial a_{ij}(x(\tilde{x}))}{\partial \tilde{x}^k} y^j(x(\tilde{x}),u) + a_{ij}(x(\tilde{x}))\frac{\partial y^j(x(\tilde{x}),u)}{\partial \tilde{x}^k}. \tag{6.4}$$

Considere que na carta local $\boldsymbol{x}$ as condições $(1), (2)$ *e* (3) *são satisfeitas. Temos que* (1) *é satisfeito no sistema de coordenadas $(\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n, \tilde{y}^1, ..., \tilde{y}^n)$ pois a* (1) *só depende de u. A equação* (6.3) *nos garante a condição* (2) *em $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ é satisfeita pois as funções coordenadas são contínuas. Na equação* (6.4) *temos que a primeira parcela do lado direito é contínua pois a_{ij} é de classe C^∞ e a segunda parcela é contínua pois $\frac{\partial y^j(x(\tilde{x}),u)}{\partial \tilde{x}^k}$ é contínua pela condição* (3) *em $\boldsymbol{x}$. Logo a condição* (3) *é satisfeita em $\widetilde{\boldsymbol{x}}$.*

Observação 6.1.6 *Sejam M uma variedade Finsler de classe C^0, U um aberto de M, $\boldsymbol{x} = (x^1, ..., x^n)$ uma carta local em U e $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ o sistema de coordenadas usual de TU. Considere $(x^1, ..., x^n, \tilde{y}^1, ..., \tilde{y}^n)$ um outro sistema de coordenadas (não necessariamente o usual) de TU, tal que $\tilde{y}^j$ é combinação linear de y^i (por exemplo, se $(x^1, ..., x^n, \tilde{y}^1, ..., \tilde{y}^n)$ é uma trivialização local de TU (vide [15]). Como vimos na observação anterior, a combinação linear mantém as condições* (2) *e* (3) *em $(x^1, ..., x^n, \tilde{y}^1, ..., \tilde{y}^n)$ se a condições* (2) *e* (3) *são satisfeitas em $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$. A condição* (1) *é satisfeita pois depende somente de u. Logo $(x^1, ..., x^n, \tilde{y}^1, ..., \tilde{y}^n)$ satisfaz as condições* $(1), (2)$ *e* (3) *da Definição* 6.1.4.

6.2 Campo Geodésico Estendido

Nessa seção vamos definir o campo geodésico estendido $\mathcal{E}$ em T^*U para variedades Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin. As curvas integrais de

$\mathcal{E}$ são chamadas de extremais de Pontryagin e suas projeções em M são os extremais de (M, F), ou seja, curvas candidatas a serem soluções do problema de controle ótimo ao aplicar o Princípio do Máximo de Pontryagin no sistema de controle da Definição 6.1.4.

Sejam (M, F) uma variedade Finsler de classe C^0, U aberto de M e $(x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas em U. Defina um sistema de controle $\Sigma = (U, X, S^{n-1})$ de acordo com a Definição 6.1.4 e denote

$$X_u(x) = f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

(Não será utilizado a convenção de Einstein pois acrescentaremos $i = 0$ posteriormente). Sejam $p, q \in U$ e $x : [0, l] \to U$ um caminho que liga p à q satisfazendo

$$x'(t) = X_{u(t)}(x(t)),\ t \in [0, l],\ l \text{ não é fixo.} \tag{6.5}$$

O problema de minimização de comprimento do caminho x é um problema de minimização de tempo do sistema de controle. De fato, como $X_u(x)$ são vetores unitários então temos

$$\int_0^l F(x(t), X_{u(t)}(x(t)))dt = \int_0^l 1\ dt = l.$$

A região dos controles admissíveis $u(t)$ são as funções mensuráveis com imagem em S^{n-1}.

Defina $\hat{U} = \mathbb{R} \times U$ e considere o sistema coordenadas $(x^0, x^1, ..., x^n)$ em $\hat{U}$, onde $\mathbb{R}$ é parametrizado por sua coordenada canônica x^0. Defina os campos vetoriais

$$\hat{X}_u = \frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^{n} f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

em $\hat{U}$. Temos que $\hat{X}_u$ satisfaz as condições (2) e (3) da Definição 6.1.4. De fato, considere $\hat{x} = (x^0, x^1, ..., x^n)$ e $x = (x^1, ..., x^n)$.

(2) $(\hat{x}, u) \mapsto (y^0(\hat{x}, u), y^1(\hat{x}, u), ..., y^n(\hat{x}, u)) = (x^0, f^1(x, u), ..., f^n(x, u))$ é contínua pois cada função coordenada é contínua;

(3) Vamos mostrar que $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ é contínua para todo $i, j \in \{0, ..., n\}$. Por hipótese sabemos que $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ é continua quando $i, j \in \{1, ..., n\}$. Por outro lado temos
$$\frac{\partial y^0}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^0} = 0,$$
que são funções contínuas.

Considere o sistema de coordenadas $(x^0, ..., x^n, \xi_0, ..., \xi_n)$ de $T^*\hat{U}$ dado pela Proposição 5.3.7. Sejam $\hat{\tau}$ a $1-$forma tautológica em $T^*\hat{U}$ e $(X, Z) \in T_{(\hat{x},\hat{\xi})}(T^*\hat{U})$ de forma que

$$\hat{\xi} = \sum_{i=0}^{n} \xi_i dx^i, \ X = \sum_{i=0}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ e } Z = \sum_{i=0}^{n} z^i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Assim temos

$$\hat{\tau}_{(\hat{x},\hat{\xi})}(X, Z) = \hat{\xi}(d\pi_{(\hat{x},\hat{\xi})}(X, Z)) = \hat{\xi}(X) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i y^i.$$

Como o resultado da $1-$forma tautológica em $(\hat{x}, \hat{\xi})$ depende somente de X, então podemos identificar $\hat{\tau}(X, Z) := \hat{\tau}(X)$ sem perda de generalidade. Para cada $u \in S^{n-1}$, defina o Hamiltoniano $\hat{H}_u : T^*\hat{U} \to \mathbb{R}$ como

$$\hat{H}_u(\hat{x}, \hat{\xi}) = \hat{\tau}_{(\hat{x},\hat{\xi})}(\hat{X}_u(x)) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i f^i(\hat{x}, u) = \xi_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i f^i(x, u). \tag{6.6}$$

Seja $\boldsymbol{\omega} = d\hat{\tau}$ a forma simplética canônica em $T^*\hat{U}$. A forma simplética define um isomorfismo entre os espaços tangente de $T(T^*\hat{U})$ e $T^*(T^*\hat{U})$ como visto na Proposição 5.3.1. Assim dados $X \in T(T^*\hat{U})$ e $\xi \in T^*(T^*\hat{U})$ denote $X^\flat = \omega(\cdot, X) \in T^*(T^*\hat{U})$ e $\xi^\sharp \in T(T^*\hat{U})$ definido como $\xi = \omega(\cdot, \xi^\sharp)$. Como $\hat{H}_u : T^*\hat{U} \to \mathbb{R}$, então $d\hat{H}_u$ é uma $1-$forma em T^*U. Assim defina $\overrightarrow{\hat{H}_u} = (d\hat{H}_u)^\sharp$.

Vamos denotar todos os objetos em T^*U correspondente ao respectivos objetos em $T^*\hat{U}$ retirando o negrito (como exemplo o θ, $\omega = d\theta$, H_u, etc).

O Princípio do Máximo do Pontryagin (Teorema 1.2.1) diz que se $u(t)$ e a respectiva solução $x(t)$ do problema (6.5) minimiza o comprimento, então existe uma curva absolutamente contínua $\hat{\gamma} = (t, x(t), \xi_0(t), \xi(t))$ em T^*U de forma que

1. $\xi_0(t)$ e $\xi(t)$ não são simultaneamente nulos

2. $\hat{\gamma}'(t) = \overrightarrow{\hat{H}_u}(\hat{\gamma}(t))$

3. $\hat{H}_{u(t)}(\hat{\gamma}(t)) = \hat{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}(t))$.

quase sempre. Mais ainda, no tempo final l temos

$$\xi_0(l) \leq 0 \text{ e } \hat{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}(l)) = 0.$$

Além do mais, se $u(t), x(t)$ e $(\xi_0(t), \xi(t))$ determinam um caminho integral de $\overrightarrow{\hat{H}_u}$ de forma que a condição 3 é satisfeita, então $\xi_0(t)$ e $\hat{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}(t))$ são constantes.

A seguinte proposição mostra que podemos retirar o termo $\mathbb{R}$ de $\hat{U} = \mathbb{R} \times U$ nos problemas de minimização de tempo (vide [20]).

Proposição 6.2.1 *Seja M e N variedades diferenciáveis e seja $C \subset \mathbb{R}^k$ a região de controle. Para todo $u \in C$, defina os campos vetoriais X_u e Y_u de classe C^1 em M e N respectivamente de forma que as condições* (2) *e* (3) *da Definição* 6.1.4 *são satisfeitas. Defina $H_{u,M} = \theta_M(X_u)$ e $H_{u,N} = \theta_N(Y_u)$ onde θ_M e θ_N são as* 1*−formas tautológicas em T^*M e T^*N respectivamente. Sejam ω_M e ω_N as formas simpléticas canônicas em M e N respectivamente e defina $\overrightarrow{H}_{u,M} = (dH_{u,M})^\sharp$ e $\overrightarrow{H}_{u,N} = (dH_{u,N})^\sharp$. Se considerarmos o campo vetorial (X_u, Y_u) em $M \times N$ e seu respectivo campo vetorial Hamiltoniano $\overrightarrow{H}_{u,M\times N}$ em $T^*(M \times N)$, então $\overrightarrow{H}_{u,M\times N} = (\overrightarrow{H}_{u,M}, \overrightarrow{H}_{u,N})$.*

Demonstração: Sejam U_M e U_N abertos de M^n e N^m respectivamente e considere os sistemas de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ em U_M e $(x^{n+1}, ..., x^{n+m})$ em U_N. Considere os sistemas de coordenadas $(x^1, ..., x^n, \xi_1, ..., \xi_n)$ e $(x^{n+1}, ..., x^{n+m}, \xi_{n+1}, ..., \xi_{n+m})$ de T^*U_M e T^*U_N respectivamente conforme a Proposição 5.3.7.

Como $U_{M\times N} = U_M \times U_N$ é aberto de $M \times N$, considere o sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n, x^{n+1}, ..., x^{n+m}, \xi_1, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, ..., \xi_{n+m})$ em $T^*(U_{M\times N})$. Fazendo as contas em sistemas de coordenadas resulta em

$$\overrightarrow{H}_{u,M} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H_{u,M}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H_{u,M}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

$$\overrightarrow{H}_{u,N} = \sum_{i=n+1}^{n+m} \left(\frac{\partial H_{u,N}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H_{u,N}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

$$\overrightarrow{H}_{u,M\times N} = \sum_{i=1}^{n+m} \left(\frac{\partial H_{u,M\times N}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H_{u,M\times N}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H_{u,M}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H_{u,M}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) + \sum_{i=n+1}^{n+m} \left(\frac{\partial H_{u,N}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H_{u,N}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

lembrando que $\overrightarrow{H}_{u,M\times N} = \theta_{M\times N}(X_u, Y_u)$ e por isso podemos separar a soma na última equação. Assim temos que $(\overrightarrow{H}_{u,M}, \overrightarrow{H}_{u,N}) = \overrightarrow{H}_{u,M\times N}$. ∎

Assim temos que $\overrightarrow{\hat{H}_u} = (\overrightarrow{H}_{u,\mathbb{R}}, \overrightarrow{H_u}) = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \overrightarrow{H_u})$, ou seja, ao projetar $\overrightarrow{\hat{H}_u}$ em M, obtemos $\overrightarrow{H}_u$.

O ingrediente chave para definir o campo geodésico estendido para uma estrutura de Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin é a equação

$$\hat{H}_{u(t)}(\hat{\gamma}(t)) = \hat{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}(t)). \tag{6.7}$$

Considere que $u(t), x(t)$ e $(\xi_0(t), \xi(t))$ determinam uma curva integral de $\overrightarrow{\hat{H}_u}$ que satisfaz (6.7). Então sabemos que $\xi_0(t) = \xi_0$ é constante, assim a variação do valor equação

$$\hat{H}_u(\hat{x}(t), \hat{\xi}(t)) = \xi_0 + \xi(t)(X_{u(t)}(x(t)))$$

depende somente dos pontos $(x, \xi) \in T^*U - \{0\}$. Para cada $(x, \xi) \in T^*U - \{0\}$ queremos encontrar $u \in S^{n-1}$ de forma que $\xi(X_u(x))$ é o máximo. Mas por hipótese temos $S_F(x, 0, 1) = \{X_u(x); u \in S^{n-1}\}$, logo

$$\max_{u \in S^{n-1}} \xi(X_u(x)) = \max_{y \in S_F(x,0,1)} \xi(y). \tag{6.8}$$

Isso nos leva a seguinte definição.

Definição 6.2.2 *Seja (M, F) uma variedade Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin. O campo geodésico estendido de M é definido pela relação $\mathcal{E}$ que associa cada $(x, \xi) \in T^*M - \{0\}$ ao conjunto $\mathcal{E}(x, \xi) = \{\overrightarrow{H}_u(x, \xi); u \in \mathcal{C}(x, \xi)\}$, com $\mathcal{C}(x, \xi) = \{u \in S^{n-1}; H_u(x, \xi) = \hat{\mathcal{M}}(x, \xi)\}$. Os extremais de Pontryagin são curvas absolutamente contínuas $\gamma : [a, b] \to T^*M - \{0\}$ que são soluções da inclusão diferencial*

$$\gamma'(t) \in \mathcal{E}(\gamma(t)). \tag{6.9}$$

Observação 6.2.3 *A definição de uma curva absolutamente contínua em uma variedade diferenciável não depende da escolha da estrutura de Finsler classe C^0 em M porque todo par de estruturas de Finsler são localmente Lipschitz equivalentes.*

Teorema 6.2.4 *Seja (M, F) uma variedade de Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin. Então, toda curva minimizante $x(t)$ de (M, F) parametrizada por comprimento de arco é a projeção de um extremal de Pontryagin $(x(t), \xi(t))$. Consequentemente, o Hamiltoniano $H(x(t), \xi(t), u)$ é constante.*

Demonstração: Vide [20]. ■

Definição 6.2.5 *A projeção $x(t)$ de um extremal de Pontryagin $(x(t), \xi(t))$ é chamado de extremal de (M, F).*

Agora vamos voltar a utilizar a convenção de Einstein. Sejam (M, F) uma variedade Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin, U um aberto coordenado em M com coordenadas $(x^1, ..., x^n)$, e os sistemas de coordenadas $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ e $(x^1, ..., x^n, \xi_1, ..., \xi_n)$ em TU e T^*U respectivamente. Cálculos nesses sistemas de coordenadas resultam em

$$\theta = \xi_i dx^i, \ \omega = d\xi_i \wedge dx^i, \ H_u = \xi_i f^i(x, u).$$

$$dH_u = \xi_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x, u) dx^i + f^i(x, u) d\xi_i;$$

$$\overrightarrow{H_u} = f^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} - \xi_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x, u) \frac{\partial}{\partial \xi_i}. \tag{6.10}$$

Portanto o campo geodésico estendido em sistema de coordenadas fica

$$\mathcal{E}(x, \xi) = \left\{ f^i(x, u(x, \xi)) \frac{\partial}{\partial x^i} - \xi_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x, u(x, \xi)) \frac{\partial}{\partial \xi_i}; u(x, \xi) \in \mathcal{C}(x, \xi) \right\}. \tag{6.11}$$

Proposição 6.2.6 *Seja (M, F) uma variedade Finsler de classe C^0 de tipo Pontryagin. Se $F(x, \cdot)$ é estritamente convexo para todo $x \in M$, então $\mathcal{E}$ é um campo vetorial em $T^*M - \{0\}$.*

Demonstração: Para mostrar que $\mathcal{E}$ é um campo vetorial em $T^*M - \{0\}$ precisamos mostrar que o conjunto $\mathcal{E}(x, \xi)$ é unitário. Considere $X_1, X_2 \in \mathcal{E}(x, \xi)$. Pela equação (6.8), existem $y_1, y_2 \in S_F(x, 0, 1)$ relacionado com X_1, X_2 respectivamente tais que

$$\max_{y \in S_F(x,0,1)} \xi(y) = \xi(y_1) = \xi(y_2).$$

Iremos mostrar que $y_1 = y_2$. Considere $y_\lambda = y(\lambda) = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ a combinação convexa de y_1 e y_2, com $\lambda \in (0, 1)$. Pela linearidade do funcional temos

$$\xi(y_\lambda) = \lambda \xi(y_1) + (1 - \lambda) \xi(y_2) = \xi(y_1).$$

Portanto y_λ é um máximo da equação (6.8) para todo λ.

Por outro lado, suponha que $y_1 \neq y_2$. Temos por hipótese de convexidade estrita que

$$F(y_\lambda) < \lambda F(y_1) + (1-\lambda)F(y_2) = 1.$$

Portanto $y_\lambda \in B_F(x,0,1)$. Considere $\beta_\lambda > 1$ tal que $\beta_\lambda y_\lambda \in S_F(x,0,1)$. Assim

$$\xi(\beta_\lambda y_\lambda) = \beta_\lambda \xi(y_\lambda) > \max_{y \in S_F(x,0,1)} \xi(y)$$

o que é uma contradição com a definição do máximo. Portanto $y_1 = y_2$ e daí $X_1 = X_2$.

■

Proposição 6.2.7 *Se $u(x,\xi)$ é uma função contínua então $\mathcal{E}$ é um campo vetorial contínuo.*

Demonstração: Dizer que $u(x,\xi)$ é uma função é dizer que o conjunto $\mathcal{C}(x,\xi)$ é unitário e portanto $\mathcal{E}$ é um campo vetorial. Assim podemos escrever a equação (6.11) como o campo vetorial

$$\mathcal{E}(x,\xi) = f^i(x,u(x,\xi))\frac{\partial}{\partial x^i} - \xi_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x,u(x,\xi))\frac{\partial}{\partial \xi_i}. \tag{6.12}$$

Por hipótese temos que as funções $g(x,\xi) = (x,u(x,\xi))$, $f^i(x,u)$ e $\frac{\partial f^j}{\partial x^i}$ são contínuas para todo $i,j \in \{1,...,n\}$. Logo $\mathcal{E}$ é contínua por soma e composição de funções contínuas. ■

Corolário 6.2.8 *Se $\frac{\partial f^j}{\partial x^i}$ e $u(x,\xi)$ são funções localmente Lipschitzianas então $\mathcal{E}$ é um campo vetorial localmente Lipschitz.*

Demonstração: Como as derivadas $\frac{\partial f^j}{\partial x^i}$ existem e são contínuas para todo $i = 1,...,n$, então f^j é Lipschitziana se o restringirmos em uma vizinhança compacta (ou uma vizinhança com fecho compacto). Pela equação (6.12), temos que $\mathcal{E}$ é localmente Lipschitz por soma, produto e composição de funções localmente Lipschitzianas definidas em um aberto com fecho compacto.

■

6.3 Estrutura de Finsler Poliedral

É difícil trabalhar com uma estrutura de Finsler F de classe C^0 arbitrária. Uma condição que podemos acrescentar é que a bola unitária de F tem um formato de poliedro. Veremos que essa condição é suficiente para garantir, sob hipóteses não restritivas, a unicidade da solução de (6.9) quando $u(t)$ é um vértice de poliedro.

Vamos começar com a teoria de normas assimétricas poliedrais em espaços vetoriais $n-$dimensionais V. Referências para esta parte são [13] e [18]. Depois estendermos essas normas para uma variedade de Finsler M.

Definição 6.3.1 *Um subconjunto não vazio $K \subset V$ é poliedral se é uma interseção de uma família finita de semi-espaços fechados em V.*

Observação 6.3.2 *Caso 0 esteja no interior de um subconjunto poliedral K, então podemos escrever*

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-$$

com H_i^- um semi-espaço fechado de V contendo a origem.

Definição 6.3.3 *Seja Z um subconjunto convexo de V. O subespaço afim gerado por Z, denotado por aff Z, é o menor subconjunto afim de V que contém Z. O interior relativo de Z, denotado por ir Z é o interior de Z como subespaço de aff Z.*

Podemos definir dimensão de um subconjunto convexo qualquer Z de V da seguinte forma. Considere aff $Z = v + U$ com U um subespaço vetorial de V. Assim

$$\dim Z = \dim \text{aff } Z = \dim U.$$

Definição 6.3.4 *Um hiperplano suporte de um subconjunto compacto não vazio A de V é o hiperplano H de forma que A esteja contido em um semi-espaço fechado determinado por H e $A \cap H \neq \emptyset$. Um subconjunto L de um conjunto poliedral $K \subset V$ é uma face de K se $L = \emptyset$, $L = K$ ou se existe um hiperplano de suporte H de K de forma que $L = K \cap H$. Uma face $0-$dimensional e $1-$dimensional de K são chamados de vértice e aresta de K respectivamente.*

Definição 6.3.5 *Seja K um subconjunto poliedral de V e L uma face própria de K. Diremos que L é uma face maximal própria de K se a única face que contém L é K.*

A demonstração da seguinte proposição é feita em detalhes em [12].

Proposição 6.3.6 *Seja V um espaço vetorial $n-$dimensional e K um subconjunto poliedral limitado de V com interior não-vazio. Então*

1. *Existe a menor família de semi-espaços fechados* $\{H_1^-, ..., H_l^-\}$ *de* V *de forma que* $K = \cap_{i=1}^m H_i^-$. *Os subespaços afins gerados pelas faces maximais próprias de* K *são os* H_i *e portanto a dimensão das faces maximais próprias de* K *é* $(n-1)$*;*

2. *Cada face maximal própria de uma face maximal própria de* K *é a interseção de duas faces maximais próprias de* K*;*

3. ∂K *é a união de todos as faces maximais próprias de* K*;*

4. *Toda face própria de* K *é uma interseção de faces maximais próprias de* K.

O seguinte resultado é uma consequência dos teoremas 2.3.5 e 2.4.5 de [12].

Teorema 6.3.7 *Seja* P *um poliedro limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $F \subset P$ *uma face de dimensão* d *com* $\{x_1, ..., x_k\}$ *os vértices de* F. *Então para todo* $p \in F$ *existem* $d+1$ *pontos de* F *de forma que* p *é escrito como combinação convexa destes* $d+1$ *pontos. Em particular, todo ponto de* F *é escrito como combinação convexa de seus vértices.*

O seguinte corolário é o exercício 6 da seção 2.3 de [12].

Corolário 6.3.8 *Se* $x \in irF$ *então* $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ *com* $\lambda_i > 0$ *para todo* $i = 1, ..., k$ *e* $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Definição 6.3.9 *Uma norma assimétrica* $F : V \to \mathbb{R}$ *em um espaço vetorial* V *é poliedral se* $B[0,1]$ *é um subconjunto poliedral de* V.

Observação 6.3.10 *A função* $\alpha \in V^* - \{0\} \mapsto \alpha^{-1}(1)$ *é uma bijeção entre* $V^* - \{0\}$ *e a família de hiperplanos de* V *que não contém a origem.*

De fato, seja α um funcional em V^* não nulo e considere $u \in \alpha^{-1}(1)$ um vetor arbitrário e o hiper-plano $u + \operatorname{nuc}\alpha$ em V. Temos que $u + \operatorname{nuc}\alpha = \alpha^{-1}(1)$. De fato, para qualquer $u' \in \operatorname{nuc}\alpha$ temos que $\alpha(u+u') = 1$ e portanto $u + \operatorname{nuc}\alpha \subset \alpha^{-1}(1)$. Por outro lado se $w \in \alpha^{-1}(1)$, temos que $\alpha(w-u) = \alpha(w) - \alpha(u) = 0$ e portanto $w - u \in \operatorname{nuc}\alpha$. Assim é possível escrever

$$w = u + (w-u) \in u + \operatorname{nuc}\alpha$$

Agora seja $u + U$ um hiper-plano de V que não contém a origem, com $u \neq 0$ arbitrário e U um subespaço de V. Então $V = span\{u\} \oplus U$. Considere

α um funcional em V^* de forma que $\alpha(u) = 1$ e $U = \operatorname{nuc}\alpha$. Sabemos pelas contas acima que $\alpha^{-1}(1) = u + U$ e com isso $\alpha \mapsto \alpha^{-1}(1)$ é sobrejetora. Então nos resta mostrar a unicidade de α cuja imagem é $\alpha^{-1}(1)$. Considere $\beta \in V^* - \{0\}$ de forma que $\beta(u) = 1$ e $U = \operatorname{nuc}\beta$. Considere $\{u_2, ..., u_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes contidos em U. Então $\{u, u_2, ..., u_n\}$ é uma base de V. Como $\alpha(u) = 1 = \beta(u)$ e ambos se anulam em $u_2, ..., u_n$ então $\alpha = \beta$.

Agora vamos considerar uma família de normas assimétricas nos espaços tangentes de uma variedade diferenciável

Proposição 6.3.11 *Seja F uma norma assimétrica poliedral. Suponha que*

$$B_F[0,1] = \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-,$$

onde cada H_i^- é um semi-espaço fechado. Então

$$F = \max\{\xi_1, ..., \xi_m\} \tag{6.13}$$

onde $\xi_i \in V^* - \{0\}$, $H_i := \partial H_i^- = \xi_i^{-1}(1)$ e $H_i^- = \{v; \xi_i(v) \leq 1\}$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$.

Demonstração: Observe que ambos os lados da equação (6.13) são funções positivas homogêneas, assim basta provar (6.13) na esfera unitária e estender o resultado para todo V.

Como $S_F(0,1) \subset \bigcap_{i=1}^m H_i^- \subset H_i^-$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$. Então $\xi_i(v) \leq 1 = F(v)$ para todo $v \in S_F(0,1)$.

Por outro lado seja $v \in S_F(0,1)$ arbitrário. Pela Proposição 6.3.6 temos

$$S_F(0,1) = \partial B_F[0,1] = \bigcup_{i=1}^{m} (H_i \cap B_F[0,1]).$$

Logo $v \in H_i$ para algum $i \in \{1, ..., m\}$ e daí

$$F(v) = 1 = \xi_i(v) \leq \max\{\xi_1(v), ..., \xi_m(v)\}.$$

Portanto $F = \max\{\xi_1, ..., \xi_m\}$ em S_F, como queríamos demonstrar. ■

Com a Proposição 6.3.11 podemos explicitar normas assimétricas poliedrais em termos de $B_F[0,1]$.

Proposição 6.3.12 *Seja* $\{\xi_1, ..., \xi_m\} \subset V^* - \{0\}$ *uma coleção de funcionais de forma que para todo* $v \in V - \{0\}$*, existe um* $i \in \{1, ..., m\}$ *tal que* $\xi_i(v) > 0$. *Então*

$$F = \max\{\xi_1, ..., \xi_m\}$$

é uma norma assimétrica poliedral tal que

$$B_F[0,1] = \bigcap_{i=1}^{m} \xi_i^{-1}(-\infty, 1].$$

Demonstração: A hipótese que para todo $v \neq 0$ existe i tal que $\xi_i(v) > 0$ nos garante que $F(v) = 0$ se e somente se $v = 0$. A propriedade de F ser positiva homogênea é direto da propriedade do máximo.

Para desigualdade triangular observe que para todo $v, u \in V$ temos

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \max_{i=1,...,m}\{\xi_i(v+u)\} = \max_{i=1,...,m}\{\xi_i(v) + \xi_i(u)\} \\ &\leq \max_{i=1,...,m}\{\xi_i(v)\} + \max_{i=1,...,m}\{\xi_i(u)\} = F(v) + F(u). \end{aligned}$$

Logo F é uma norma assimétrica.

Considere $v \in B_F[0,1]$. Assim $\xi_i(v) \leq 1$ para todo $i = 1, .., m$. Logo $v \in \xi_i^{-1}(-\infty, 1] = H_i^-$ e daí $B_F[0,1] \subset \bigcap_{i=1}^m H_i^-$. Por outro lado seja $v \in \bigcap_{i=1}^m H_i^-$. Assim temos que $\xi_i(v) \leq 1$ para todo $i = 1, ..., m$. Logo

$$F(v) = \max_{i=1,...,m}\{\xi_i(v)\} \leq 1,$$

o que resulta em $v \in B_F[0,1]$. Portanto F é uma norma assimétrica poliedral

■

Lema 6.3.13 *Sejam* F_1 *e* F_2 *normas assimétricas poliedrais e* $a > 0$. *Então* $aF_1 + F_2$ *é uma norma assimétrica poliedral.*

Demonstração: Vamos provar que $F_1 + F_2$ e aF_1 são normas assimétricas poliedrais. Pela Proposição 6.3.11 considere $F_1 = \max_{i=1,...,l} \alpha_i$ e $F_2 = \max_{j=1,...,m} \beta_j$ com α_i, β_j funcionais lineares para todo $i = 1, ..., l$ e $j = 1, ..., m$. Assim temos

$$F_1(v) + F_2(v) = \max_{i=1,...,l} \alpha_i(v) + \max_{j=1,...,m} \beta_j(v) = \max_{\substack{i=1,...,l \\ j=1,...,m}} (\alpha_i + \beta_j)(v);$$

$$aF_1(v) = a \max_{i=1,...,l} \alpha_i = \max_{i=1,...,l} (a\alpha_i)(v).$$

Temos que $\{\alpha_i + \beta_j; i = 1, ..., l \text{ e } j = 1, ..., m\}$ e $\{a\alpha_i; i = 1, ..., l\}$ satisfazem as condições da Proposição 6.3.12 pois $\{\alpha_i; i = 1, ..., l\}$ e $\{\beta_j; j = 1, ..., m\}$ também satisfazem. Portanto $F_1 + F_2$ e aF_1 são normas assimétricas poliedrais.

■

Definição 6.3.14 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma estrutura de Finsler poliedral F em M é uma estrutura de Finsler de classe C^0 de forma que $F(p, \cdot) : T_pM \to \mathbb{R}$ é uma norma assimétrica poliedral para todo $p \in M$.*

Uma variedade diferenciável M munido com uma estrutura de Finsler poliedral é chamado de uma variedade de Finsler poliedral.

Proposição 6.3.15 *Toda variedade diferenciável M admite uma estrutura de Finsler poliedral.*

Demonstração: Seja $\{(U_i, \mathbf{x})\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma cobertura localmente finita por sistema de coordenadas em M. Seja $\{\eta_i : M \to \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a $\{(U_i, \mathbf{x})\}_{i \in \mathbb{N}}$. Em cada vizinhança coordenada U_i considere a norma assimétrica poliedral $F_i(x, y) = F_i(y)$ (F_i pode ser construído através da Proposição 6.3.12) e considere $F = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i F_i$. Como a soma $\sum F_i(x, y)\eta_i(x)$ contém uma quantidade finita de termos não nulos para todo $x \in M$, então F é uma estrutura de Finsler poliedral em M devido ao lema 6.3.13. ∎

Definição 6.3.16 *Sejam dois subconjuntos poliedrais limitados P e P' de dimensão k em um espaço vetorial $n-$dimensional. Dizemos que P e P' são isomorfos se existe uma função $\psi : P \to P'$ que leva bijetivamente o conjunto das faces de P no conjunto de faces de P' e que satisfaz a seguinte condição: Sejam F_1,F_2 faces de P e $F_1' = \psi(F_1), F_2' = \psi(F_2)$. Se $F_1 \subset F_2$ então $F_1' \subset F_2'$.*

Observação 6.3.17 *A relação de isomorfismo em poliedros é uma relação de equivalência.*

Proposição 6.3.18 *Seja P um poliedro limitado de $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Então TP é um poliedro limitado isomorfo a P.*

Demonstração: Ao escrever um hiperplano como $v + U$ com U um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $v \notin U$ então $T(v + U) = T(v) + T(U)$ com $T(U)$ um subespaço e $T(v) \notin T(U)$. Portanto $T(v) + T(U)$ é um hiperplano. Assim a imagem de um semi-espaço fechado é também um semi-espaço fechado. Ao escrever $P = \bigcap_{i=1}^{k} H_i^-$ como intersecção finita de semi-espaços fechados então $TP = T(\bigcap_{i=1}^{k} H_i^-) = \bigcap_{i=1}^{k} TH_i^-$ é intersecção de semi-espaços fechados correspondentes e portanto um poliedro limitado.

Agora vamos mostrar que T preserva as faces. Seja H é um hiperplano suporte de P. Então $H \cap P \subset \partial P$ e $P \subset H'$ com H' um semi-espaço fechado de H. Logo TH é um hiperplano que intersecta TP na fronteira de TP e

TP está contido no semi-espaço fechado TH'. Assim TH é um hiperplano suporte de TP. Se H é um hiperplano e $H \cap P$ é uma face $d-$dimensional de P, então $TH \cap TP = T(H \cap P)$ é uma face $d-$dimensional de TP. Finalmente, se $H_1 \cap P$ é uma face contida em $H_2 \cap P$, então $TH_1 \cap TP = T(H_1 \cap P)$ será uma face contida em $TH_2 \cap TP = T(H_2 \cap P)$. Logo P e TP são isomorfos. ■

Definição 6.3.19 *Sejam dois subconjuntos poliedrais limitados P e P^* de dimensão k em um espaço vetorial $n-$dimensional. Dizemos que P^* é dual de P se existe uma função $\psi : P \to P^*$ e de forma que leva bijetivamente o conjunto das faces de P no conjunto de faces de P^* que satisfaz a seguinte condição: Sejam F_1,F_2 faces de P e $F_1^* = \psi(F_1), F_2^* = \psi(F_2)$. Se $F_1 \subset F_2$ então $F_1^* \supset F_2^*$. Em particular $\psi(\emptyset) = P^*$, $\psi(P) = \emptyset$ e $\dim F + \dim \psi(F) = k - 1$ para toda face F de P.*

Exemplo 2 *Um cubo é dual a um octaedro e um dodecaedro é dual a um icosaedro.*

Definição 6.3.20 *Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e escreva $x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, ..., y_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$. O conjunto polar de A, denotado por A^*, é definido por*

$$A^* = \{y \in (\mathbb{R}^n)^*; y_i x^i \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}.$$

Proposição 6.3.21 *Se $P \subset \mathbb{R}^n$ é um poliedro limitado com 0 em seu interior, então P^* é um poliedro e também dual a P. A correspondência ψ entre as faces L e L^* de P e P^* respectivamente é dado por*

$$L^* = \psi(L) = \{y \in P^*; y(x) = 1, \forall\ x \in L\}.$$

Observação 6.3.22 *Considere $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ e $P^*, Q^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ poliedros limitados com P e Q isomorfos por uma função $\varphi : P \to Q$, P^* polar a P pela função $\psi_1 : P \to P^*$ e Q^* polar a Q pela função $\psi_2 : Q \to Q^*$. Então P^* e Q^* são isomorfos pela função $\psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1} : P^* \to Q^*$.*

Observação 6.3.23 *Adaptemos a Proposição 6.3.21 conforme a nossa situação. Seja (V, F) um espaço vetorial $n-$dimensional munido com uma norma assimétrica poliedral e V^* o espaço dual de V. Defina $F_* : V^* \to \mathbb{R}$ a norma assimétrica dual de F como $F_*(\xi) = \max_{v \in S_F(0,1)} \xi(v)$. Então a Proposição 6.3.21 implica que a bola unitária $B_{F_*}[0, 1] \subset V^*$ é o conjunto polar de $B_F[0, 1]$ e portanto $B_{F_*}[0, 1]$ é um subconjunto poliedral de V^*. Logo F_* é uma norma assimétrica poliedral.*

A correspondência ψ entre as faces de $S_F(0,1)$ e $S_{F_*}(0,1)$ é dada pela seguinte forma. Se L é uma face em S_F com dimensão $k \geq 1$, então

$$L^* = \psi(L) = \{\xi \in S_{F_*}(0,1); \xi(v) = 1 \text{ para todo } v \in L\}$$

é uma face de S_{F_*} com dimensão $(n-k-1)$. De forma similar temos

$$L = \psi^{-1}(L^*) = \{v \in S_F(0,1); \xi(v) = 1 \text{ para todo } \xi \in L^*\}.$$

Observação 6.3.24 *Se $\xi \in ir\ L^*$, então*

$$\max_{v \in S_F} \xi(v) = \max_{v \in \psi^{-1}(L^*)} \xi(v).$$

De fato, temos que $\xi(v) = 1$ para todo $v \in L$. Supor que existe $u \notin S_F - L$ com $\xi(u) = 1$, é supor que $L \subsetneq \{v \in S_F(0,1); \xi(v) = 1$ para todo $\xi \in L^*\}$. Como $\{v \in S_F(0,1); \xi(v) = 1$ para todo $\xi \in L^*\}$ é uma face de S_F e $\xi(\lambda v + (1-\lambda)u) = 1$ para todo $v \in L$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, então existe uma face L' de S_F de forma que $u \in L'$ e

$$L \subsetneq L' \subset \{v \in S_F(0,1); \xi(v) = 1 \text{ para todo } \xi \in L^*\}.$$

Portanto $\psi(L) = L^* \supsetneq \psi(L')$ e daí $\psi(L')$ é uma face própria de L^*, o que implica $\psi(L') \cap irL^* = \emptyset$. Assim temos que $\xi \in \psi(L')$ e $\xi \in ir\ L^*$, o que é uma contradição. Logo $\xi(v) = 1$ somente para $v \in L$.

6.4 Geodésicas em grupos de Lie

Existe uma classe de variedades diferenciáveis que é muito importante em geometria diferencial, que são os grupos de Lie [23]. Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável munido com uma estrutura de grupo de modo que as operações de grupo são diferenciáveis. Com essa estrutura garantimos um isomorfismo entre os planos tangentes da variedade. Podemos usar esta identificação entre espaços tangentes para obter estruturas que são invariantes pelas translações à esquerda. Em particular, podemos considerar estruturas de Finsler de classe C^0 onde as bolas unitárias estejam identificadas através das translações à esquerda. Essas são as estruturas de Finsler de classe C^0 de G que são invariantes à esquerda, que são de tipo Pontryagin.

O principal resultado é o Teorema 6.4.6, onde dado um extremal $x(t)$ com $x'(0)$ sendo um dos vértices da bola unitária $B_F[e]$ e $(x'(0))^*$ no interior de uma face maximal de $(B_F[e])^*$, temos que localmente $x'(t)$ é um vértice de $B_F[x(t)]$ e $x(t)$ é uma geodésica.

Vamos iniciar a seção com um pouco de teoria básica.

Definição 6.4.1 *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável munido com a operação produto $(x, z) \in G \times G \mapsto xz \in G$ que é diferenciável. A aplicação $L_x : G \to G$ definido por $L_x(z) = xz$ é denominada translação à esquerda em G. De forma análoga temos $R_x(z) = zx$ a translação à direita em G.*

Como a operação produto é diferenciável, então $d(L_x)_z : T_zG \to T_{xz}G$ é um isomorfismo entre espaços tangentes. Em particular, se $z = e$ é o elemento neutro de G, então temos um isomorfismo de T_eG para cada espaço tangente T_xG.

Definição 6.4.2 *Seja G um grupo de Lie e munido com uma estrutura de Finsler F.*

- *Um campo vetorial X em G é dito invariante à esquerda se*
$$d(L_x)_z(X(z)) = X(xz),$$
para todo $x, z \in G$;

- *Diremos que a estrutura de Finsler F é invariante à esquerda se*
$$F(xz, (dL_x)_z(y)) = F(z, y),$$
para todo $x, z \in G$ e $y \in T_zG$.

Definição 6.4.3 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ munido de uma operação binária $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$ que satisfaz as seguintes propriedades*

- *Para todo $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tem-se*
$$[\lambda x + \alpha y, z] = \lambda[x, z] + \alpha[y, z] \text{ e } [z, \lambda x + \alpha y] = \lambda[z, x] + \alpha[z, y];$$

- *$[x, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$;*

- *A identidade de Jacobi*
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$
para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Sejam G um grupo de Lie e X, Y campos invariantes à esquerda em G. O campo vetorial $[X, Y] = XY - YX$ é invariante à esquerda em G. Dessa forma podemos definir uma álgebra de Lie de um grupo de Lie G.

Definição 6.4.4 *A álgebra de lie* $\mathfrak{g}$ *do grupo de Lie* G *é o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda munido com a aplicação* $[X,Y] = XY - YX$*, que também é um campo invariante à esquerda. Com isso,* $\mathfrak{g}$ *pode ser identificado com* T_eG *munido com a operação*

$$[X(e), Y(e)] = [X,Y](e),$$

onde X *e* Y *são os campos invariantes à esquerda em* G *tais que seus vetores em* e *são* $X(e)$ *e* $Y(e)$ *respectivamente.*

Proposição 6.4.5 $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie.*

Nesta subseção queremos demonstrar o seguinte teorema

Teorema 6.4.6 *Seja* G *um grupo de Lie munido com uma estrutura de Finsler poliedral* F *invariante à esquerda. Seja* $(x,\alpha) : (-\epsilon,\epsilon) \to T^*G$ *um extremal de Pontryagin de* (G,F) *tal que* $x(0) = e$*,* $x'(0)$ *é um vértice da esfera unitária* S_F *e* $\alpha(0)$ *pertence ao interior relativo da face maximal própria dual a* $x'(0)$*. Então existe* $\delta > 0$ *tal que*

1. $x'(t)$ *é o vértice* $d(L_{x(t)})_e(x'(0))$ *da esfera unitária em* $T_{x(t)}G$ *para todo* $t \in (-\delta,\delta)$*;*
2. $x|_{(-\delta,\delta)}$ *é minimizante.*

Primeiramente vamos apresentar resultados e observações que nos ajudarão a demonstrar o teorema.

Teorema 6.4.7 *Grupos de Lie munidos com estruturas de Finsler* F *de classe* C^0 *invariante à esquerda são do tipo Pontryagin. Sua região de controle* C *é a esfera unitária* $S_F(0,1) \subset T_eG$ *e o campo de vetor* X_u *correspondente a* $u \in S_F(0,1)$ *é o campo invariante à esquerda tal que* $X_u(e) = u$ *(vide [20]).*

Teorema 6.4.8 ***(Teorema do fluxo tubular)*** *Seja* X *um campo de vetores suave em uma variedade diferenciável* M *e* $p \in M$ *tal que* $X(p) \neq 0$*. Então existe um sistema de coordenadas* $(x^1, ..., x^n)$ *em uma vizinhança* U *de* p *tal que* $X|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ *(vide [24]).*

Observação 6.4.9 *Seja $(x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas em um aberto U de M e considere o sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ correspondente em TU. Seja (U, F) uma variedade de Finsler de forma que F é uma norma assimétrica constante para todo $x \in M$, ou seja,*

$$F(x_1, (y^1, ..., y^n)) = F(x_2, (y^1, ..., y^n))$$

para todo $x_1, x_2 \in U$. Então as geodésicas em (U, F) são as linhas retas, pois a equação das geodésicas neste sistema de coordenadas fica $\ddot{x} = 0$ (vide [4]).

Proposição 6.4.10 *Sejam V um espaço vetorial $n-$dimensional, $B \subset V$ um subconjunto convexo, fechado e limitado com $0 \in intB$ e $S = \partial B$. Então existe uma norma assimétrica F em V de forma que $S_F(0, 1) = S$.*

Demonstração: Para todo $v \in V - \{0\}$ existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda v \in B$, pois $0 \in intB$. Como B é compacto, considere $\lambda_v > 0$ tal que $\lambda_v = \max_{\lambda \in (0,\infty)}\{\lambda v \in B\}$. Assim podemos definir

$$\begin{aligned} F :& V \to \mathbb{R}^+ \\ & v \mapsto \begin{cases} F(v) = 1/\lambda_v, \text{ se } v \neq 0 \\ F(v) = 0, \text{ se } v = 0 \end{cases} \end{aligned} .$$

Note que $F|_B \leq 1$, pois $\lambda_v \geq 1$ para todo $v \in B - \{0\}$.

Temos que F é uma norma assimétrica. De fato:

- $F(v) = 0$ se e somente se $v = 0$ pela definição de F;
- Sejam $\alpha > 0$ e $v \in V \neq 0$ arbitrários. Temos que $\lambda_{\alpha v} = 1/\alpha \cdot \lambda_v$ e daí

  $$F(\alpha v) = \frac{1}{\lambda_{\alpha v}} = \alpha \cdot \frac{1}{\lambda_v} = \alpha F(v).$$

  Logo F é positiva homogênea.

Para provar a desigualdade triangular, primeiramente vamos analisar uma propriedade de F. Seja $\lambda B = \{\lambda v; v \in B\}$ com $\lambda > 0$. Temos que

$$F|_{\lambda B} \leq \lambda \tag{6.14}$$

pois F é positiva homogênea.

- Sejam $u, v \in V$ arbitrários. Caso u ou v seja o vetor nulo, então a desigualdade triangular é trivial. Suponha que u, v sejam ambos não nulos. Como F é positiva homogênea então podemos considerar $u \in B$ e $v \in S$ multiplicando ambos pela mesma constante positiva caso seja necessário. Seja $w = \lambda_u u \in S$. Como $\lambda_u \geq 1$, então $1/(\lambda_u + 1) \leq 1/2$. Temos que $u + v \in (1/\lambda_u + 1)B$, pois

$$\begin{aligned}(u+v)\left(\frac{1}{\lambda_u}+1\right)^{-1} &= \frac{1}{\lambda_u+1}(\lambda_u u) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_u+1}\right)v \\ &= \frac{1}{\lambda_u+1}w + \left(1 - \frac{1}{\lambda_u+1}\right)v.\end{aligned}$$

  Observe que a última equação é um vetor de B, pois é uma combinação convexa de w e v. Assim temos por (6.14) que

$$F(u+v) \leq \frac{1}{\lambda_u}+1 = \frac{1}{\lambda_u}F(w)+1F(v) = F\left(\frac{w}{\lambda_u}\right)+F(v) = F(u)+F(v).$$

Pela forma que definimos F temos que

$$S_F(0,1) = \{v \in V; F(v) = 1/\lambda_v = 1\} = \{v \in V, \lambda_v = 1\} \subset S.$$

Agora suponha por absurdo que exista $v \in S - S_F(0,1)$. Então $\lambda_v > 1$. Por outro lado sabemos que $\lambda_v v \in S$. Como $0 \in intB$, então existe um raio $r > 0$ tal que $B_{||\cdot||}(0,r) \subset B$, onde $||\cdot||$ é uma norma euclidiana. Considere a função $\varphi : B_{||\cdot||}(0,r) \to V$

$$w \mapsto \varphi(w) = \left(1 - \frac{1}{\lambda_v}\right)w + \frac{1}{\lambda_v}\lambda_v v = \left(1 - \frac{1}{\lambda_v}\right)w + v,$$

para todo $w \in B_{||\cdot||}(0,r)$. Como a função é uma combinação convexa de elementos de B então $\varphi(w) \in B$. Mais ainda, temos que φ é bijetora pois $\varphi^{-1}(u) = (\lambda_v/(\lambda_v - 1))(u - v)$.

Temos que $B_{||\cdot||}(v, r(1-1/\lambda_v)) \subset \operatorname{im}\varphi$ pois $\varphi^{-1}(B_{||\cdot||}(v, r(1-1/\lambda_v))) \subset B_{||\cdot||}(0,r)$. De fato, se $u \in B_{||\cdot||}(v, r(1-1/\lambda_v))$, então

$$||\varphi^{-1}(u)|| = \frac{\lambda_v}{\lambda_v - 1}||(u-v)|| < \frac{\lambda_v}{\lambda_v - 1}\left(r\frac{\lambda_v - 1}{\lambda_v}\right) = r.$$

Assim $v \notin S$ pois $B_{||\cdot||}(v, r(1-1/\lambda_v)) \subset B$ e portanto $v \in intB$, o que contradiz $v \in S - S_F(0,1)$.

■

Proposição 6.4.11 *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro limitado com 0 em seu interior, $S = \partial B$ e $x \in S$ um vértice. Então existe uma bola fechada $B_{||\cdot||}[p,r] \subset \mathbb{R}^n$ de forma que $B \subset B_{||\cdot||}[p,r]$ e $S \cap S_{||\cdot||}(p,r) = \{x\}$.*

Demonstração: Como translações e rotações são isometrias em $\mathbb{R}^n$, podemos considerar sem perda de generalidade que $x = (x^1, 0, ..., 0)$ em $\mathbb{R}^n$ com $x_1 > 0$. Além disso, se $H_x = \{(x^1, x^2, ..., x^n); x^2, ..., x^n \in \mathbb{R}\}$, podemos supor que $S \cap H_x = \{x\}$ e $B \subset H_x^-$, onde $H_x^- = \{(\tilde{x}_1, x_2, ..., x_n); \tilde{x}_1 \leq 1$ e $x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.

Como queremos que $B_{||\cdot||}[p,r] \subset H_x^-$ e $S_{||\cdot||}(p,r) \cap H_x = \{x\}$, então o centro da bola fechada tem que ser escrito como $p = (p^1, 0, ..., 0)$ com $p^1 < x^1$ e raio $r_p = ||x - p|| = x^1 - p^1$. Durante esta demonstração, sempre que nos referirmos ao raio de bolas e esferas euclidianas, estará subentendido que seu centro p está no eixo x^1 e $r_p := x^1 - p^1$.

Seja W a união das faces que contém x e $\pi_{H_x}(W)$ sua projeção ortogonal em H_x. Considere $B_{||\cdot||}(x, \epsilon)$ uma vizinhança de x em $\mathbb{R}^n$, com $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente. Para os nossos propósitos, escolher $\epsilon > 0$ tal que $B_{||\cdot||}(x, \epsilon) \cap S \subset W$ e $B_{||\cdot||}[x, \epsilon] \cap H_x \subset \pi_{H_x}(W)$ é o suficiente. Denote $V = B_{||\cdot||}(x, \epsilon) \cap S$. Vamos separar S em duas partes: V e $S - V$. Primeiramente, vamos determinar uma bola euclidiana aberta $B_{||\cdot||}(q, r_q)$ que cobre $S - V$. Depois vamos determinar uma bola euclidiana fechada $B_{||\cdot||}[p, r_p]$ que cobre a vizinhança V de x em S de forma que $S_{||\cdot||}(p, r_p)$ intersecta S somente em x.

Considere a família de bolas abertas $\{B_{||\cdot||}(\rho, r_\rho); \forall\ \rho^1 < x^1\}$. Como essa família cobre o conjunto compacto $B - B(x, \epsilon)$ então existe $q = (q^1, 0, ..., 0)$ com $q^1 < x^1$ tal que $B - B(x, \epsilon) \subset B_{||\cdot||}(q, r_q)$. Portanto

$$(B - B(x, \epsilon)) \cap S_{||\cdot||}(\rho, r_\rho) = \emptyset,$$

para todo $\rho^1 \leq q^1$.

Sejam α_x o funcional tal que $\alpha_x|_{H_x} \equiv 1$ e $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Assim temos $\alpha_x(x) = x^1 \alpha(e_1) = 1$ e $\alpha_x(y) < 1$ para todo $y \in B - \{x\}$. Sejam $x_\epsilon \in S_{||\cdot||}(x, \epsilon) \cap H_x$ qualquer, t_ϵ a reta que passa pelo ponto x_ϵ com vetor diretor e_1. Note que se um ponto ρ no eixo x^1 é tal que $x^1 - \rho^1 > \epsilon$, então t_ϵ intercepta S e $S_{||\cdot||}(\rho, r_\rho)$ em dois pontos. Denote por y_ϵ e z_ϵ os pontos em $S \cap t_\epsilon$ e $S_{||\cdot||}(\rho, r_\rho)$ respectivamente que estão mais próximos de x_ϵ. No que se segue, determinaremos ρ de modo que $S_{||\cdot||}(\rho, r_\rho) \cap S = \{x\}$ e $B \subset B_{||\cdot||}(\rho, r_\rho)$. Para z_ϵ estar entre y_ϵ e x_ϵ é necessário e suficiente que $\alpha_x(z_\epsilon) - \alpha_x(y_\epsilon) > 0$, que pode ser reescrito como

$$\alpha_x(x_\epsilon - y_\epsilon) = \alpha_x(x_\epsilon) - \alpha_x(y_\epsilon) > \alpha_x(x_\epsilon) - \alpha_x(z_\epsilon) = \alpha(x_\epsilon - z_\epsilon).$$

Seja $\pi(z_\epsilon) = z_\epsilon^1 e_1$ a projeção ortogonal de z_ϵ no eixo x^1. Considerando o triângulo retângulo formado por ρ, z_ϵ, $\pi(z_\epsilon)$ e o fato que $||\rho - z_\epsilon|| = r_\rho$ e $||z_\epsilon - \pi(z_\epsilon)|| = ||x_\epsilon - x|| = \epsilon$, temos que $\rho - \pi(z_\epsilon) = \sqrt{r_\rho^2 - \epsilon^2}e_1$ e $x_\epsilon - z_\epsilon = x - \pi(z_\epsilon) = (r_\rho - \sqrt{r_\rho^2 - \epsilon^2})e_1$ e portanto

$$\alpha(x_\epsilon - z_\epsilon) = \frac{r_\rho - \sqrt{r_\rho^2 - \epsilon^2}}{x^1} = \frac{r_\rho - \sqrt{r_\rho^2 - \epsilon^2}}{x^1} \cdot \frac{r_\rho + \sqrt{r_\rho^2 - \epsilon^2}}{r_\rho + \sqrt{r_\rho^2 - \epsilon^2}} = \frac{1}{x^1} \frac{\epsilon^2}{r_\rho + \sqrt{r_\rho^2 - \epsilon^2}}. \tag{6.15}$$

Note que (6.15) vale também para todo $\delta \in (0, \epsilon)$ no lugar de ϵ.

Por outro lado temos

$$\alpha_x(x_\epsilon) - \alpha_x(y_\epsilon) = \alpha_x(x_\epsilon - y_\epsilon) = (x^1 - y_\epsilon^1)/x^1. \tag{6.16}$$

Agora variando x_ϵ ao longo do compacto $S_{||\cdot||}(x, \epsilon) \cap H_x$ basta tomar p de forma que

$$\min_{\forall x_\epsilon \in S_{||\cdot||}(x,\epsilon) \cap H_x} \{\alpha_x(x_\epsilon - y_\epsilon)\} > \frac{1}{x^1} \frac{\epsilon^2}{r_p + \sqrt{r_p^2 - \epsilon^2}} = \alpha_x(x_\epsilon - z_\epsilon). \tag{6.17}$$

Para $\delta \in (0, \epsilon)$ e $y_\delta \in t_\delta \cap S$ arbitrários, existe y_ϵ de forma que $y_\delta = \frac{\delta}{\epsilon} y_\epsilon + (1 - \frac{\delta}{\epsilon})x$. Do mesmo modo, $x_\delta = \frac{\delta}{\epsilon} x_\epsilon + (1 - \frac{\delta}{\epsilon})x$. Dessa forma temos

$$\alpha_x(x_\delta - y_\delta) = \frac{\delta}{\epsilon} \alpha_x(x_\epsilon - y_\epsilon). \tag{6.18}$$

Por outro lado como $0 < \delta < \epsilon$ então $r_p + \sqrt{r_p^2 - \delta^2} > r_p + \sqrt{r_p^2 - \epsilon^2}$ e assim

$$\frac{1}{r_p + \sqrt{r_p^2 - \delta^2}} < \frac{1}{r_p + \sqrt{r_p^2 - \epsilon^2}}. \tag{6.19}$$

Pelas equações (6.15), (6.16), (6.17), (6.18) e (6.19) temos

$$\begin{aligned} \alpha_x(x_\delta - z_\delta) \cdot x^1 &= \frac{\delta^2}{r_p + \sqrt{r_p^2 - \delta^2}} \\ &< \frac{\delta}{\epsilon} \frac{\epsilon^2}{r_p + \sqrt{r_p^2 - \epsilon^2}} \\ &= \frac{\delta}{\epsilon} \alpha_x(x_\epsilon - y_\epsilon) \cdot x^1 = \alpha_x(x_\delta - y_\delta) \cdot x^1. \end{aligned}$$

Com isso z_δ está entre y_δ e x_δ, o que implica $V \cap S_{||\cdot||}(p, r_p) = \{x\}$. Mas já mostramos que $(S - V) \subset B_{||\cdot||}(p, r_p)$, o que implica $(S - V) \cap S_{||\cdot||}(p, r_p) = \emptyset$. Logo $S \cap S_{||\cdot||}(p, r_p) = \{x\}$. Além disso $S - \{x\} \subset B_{||\cdot||}(p, r_p)$, pois

$(S-V)\subset B_{||\cdot||}(p,r_p)$ e $y^1_\delta < z^1_\delta < x^1_\delta$ para todo $\delta\in(0,\epsilon)$ e $y_\delta\in V-\{x\}$. Daí $S\subset B_{||\cdot||}[p,r_p]$, e concluímos que $B\subset B_{||\cdot||}[p,r_p]$, pois B é combinação convexa dos elementos de S.

∎

Agora podemos prosseguir para a demonstração do Teorema 6.4.6

Demonstração: Sejam $u_1,...,u_k$ os vértices de S_F, com $x'(0)=u_1$. Fixemos uma base $(e_1,...,e_n)$ em $\mathfrak{g}$ tal que $e_1=u_1$ e $u_i=u_i^j e_j$ satisfazendo $u_i^1<1$ para todo $i=2,...,k$. Seja $(x^1,...,x^n)$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de e tal que $e=(0,0,...,0)$, $e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}(e)$ para todo $i=1,...,n$ e $(dL_x)_e(e_1)=\frac{\partial}{\partial x^1}(x)$ para todo $x\in U$ (vide Teorema 6.4.8). Pelo Teorema 6.4.7 podemos identificar a região de controle S^{n-1} com a esfera unitária $S_F(e)$, portanto podemos escrever simplesmente $u=(u^1,...,u^n)\in S_F(e)$. Como F é uma estrutura de Finsler poliedral invariante à esquerda então $S_F(e)$ e $d(L_x)_e(S_F(e))=S_F(x)$ são poliedros isomorfos pela Proposição 6.3.18. Portanto se u é um vértice de $S_F(e)$ e $x\in U$ então $d(L_x)_e(u)=u^j b^i_j(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ é um vértice de $S_F(x)$, onde $b^i_j(x), i,j=1,...,n$ são funções suaves definidas por $d(L_x)_e(e_j)=b^i_j(x)\frac{\partial}{\partial x^i}(x)$.

Agora vamos olhar para o dual $S_{F_*}(e)$ de $S_F(e)$. Como $\alpha(0)$ está no interior da face maximal $(u_1)^*$, então temos $(\alpha(0))(u_1)=1$ e $(\alpha(0))(u_i)<1$ para $i=2,...,k$. Como $\alpha(t)$ é contínuo então existe $\delta>0$ de forma que

$$\alpha(t)d(L_{x(t)})_e(u_i^j e_j)=\alpha_k(t)dx^k\left(u_i^j b_j^l(x(t))\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=\alpha_l(t)u_i^j b_j^l(x(t))<1$$

para todo $i=2,...,k$ e $t\in(-\delta,\delta)$, pois $\alpha_l(t)$ e $b^l_j(x(t))$ são contínuas. Logo $\alpha(t)d(L_{x(t)})_e(u_1)=1$, pois $\alpha(t)$ é maximizado pelo menos por um dos vértices. Dessa forma temos que $x'(t)=d(L_{x(t)})_e(u_1)=(1,0,...,0)$ e $\alpha(t)$ pertence ao interior da face maximal própria $(d(L_{x(t)})_e(u_1))^*$. Em particular $x(t)=(t,0,...,0)$.

Agora considere o campo invariante à esquerda X em G correspondente a $x'(0)=u_1\in\mathfrak{g}$. Através das proposições 6.4.10 e 6.4.11, existe uma norma assimétrica fortemente convexa $\hat{F}$ de classe C^∞ em $\mathfrak{g}-\{0\}$ tal que $\hat{F}\leq F|_{\mathfrak{g}}$ com a igualdade somente valendo em $X(e)=x'(0)$. Veja que $\hat{F}$ é a norma assimétrica satisfazendo $B_{\hat{F}}[0,1]=B_{||\cdot||}[p,r]$. Note ainda que podemos supor $B_{\hat{F}}[0,1]\subset\{(y^1,...,y^n)\in\mathfrak{g}; y^1\leq 1\}$. Considere a estrutura de Finsler $\tilde{F}(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)=\hat{F}(y^1,...,y^n)$, ou seja, a estrutura de Finsler constante igual a $\hat{F}$ em U. Note que $\tilde{F}(e,u_1)=1$ e $\tilde{F}(e,u_i)<1$ para todo $i=2,...,k$. Com isso, existe uma vizinhança V de e contida em U tal que $\tilde{F}(x,d(L_x)_e(u_1))=1$ e $\tilde{F}(x,d(L_x)_e(u_i))<1$ para todo $i=2,...,k$. Mas

$d(L_x)_e(u_i)$, para todo $i = 1, ..., k$, são os vértices de $S_F(x, 1)$ e todos os pontos de $B_F[x, 1]$ são combinações convexas dos seus vértices. Logo $\tilde{F}(x, y) \leq 1$ para todo $y \in B_F[x, 1] \subset T_xG$, com a igualdade valendo se e somente se y é um múltiplo não negativo de $d(L_x)_e(u_1)$. Portanto $\tilde{F} \leq F$ em TV, com a igualdade valendo somente na direção e sentido de X.

Sabemos que em estruturas de Finsler constantes, a curva $t \to (t, 0, ..., 0)$ é uma geodésica em $(U, \tilde{F})$ pela Observação 6.4.9. Mas a mesma curva $t \to (t, 0, ..., 0)$ é a curva integral x de X. Considere l_F e $l_{\tilde{F}}$ a função comprimento nas normas assimétricas F e $\tilde{F}$ respectivamente. Seja δ suficientemente pequeno tal que $B_{\tilde{F}}[e, \delta] \subset V$ e considere $\delta' = \delta/3$. Lembre-se que

$$B_{\tilde{F}}[e, \delta] = \{(x^1, ..., x^n); \tilde{F}(x^1, ..., x^n) \leq \delta\}.$$

Note que $x|_{[-\delta',\delta']}$ é minimizante em $(V, \tilde{F})$, pois $x([-\delta', \delta'])$ é uma geodésica radial de $B_{\tilde{F}}[x(-\delta'), 2\delta'] \subset B_{\tilde{F}}[e, \delta]$ e portanto minimizante (vide [4], Teorema 6.3.1). Logo $x|_{[-\delta',\delta']}$ é uma curva minimizante em (V, F). De fato, considere $t \to z(t)$ uma curva absolutamente contínua em M que conecta $x(-\delta')$ a $x(\delta')$ e tal que

$$\int F(z(t), z'(t))dt < \infty.$$

Então $t \mapsto \tilde{F}(z(t), z'(t))$ é integrável pois ela é mensurável e $\tilde{F}(z(t), z'(t)) \leq F(z(t), z'(t))$. Temos dois casos para considerar.

- O caminho z está inteiramente contido em $B_{\tilde{F}}[e, \delta]$. Como $\tilde{F} \leq F$ em V então
$$l_F(z) \geq l_{\tilde{F}}(z) \geq l_{\tilde{F}}(x|_{[-\delta',\delta']}) = l_F(x|_{[-\delta',\delta']}),$$
com a igualdade valendo se e somente se z é uma reparametrização positiva de $x|_{[-\delta',\delta']}$.

- O caminho z não está contido em $B_{\tilde{F}}[e, \delta]$. Considere $[a, b]$ o domínio de z com $z(a) = x(-\delta')$ e $z(b) = x(\delta')$. Seja $s \in [a, b]$ de forma que $s = \max\{t \in [a, b]; z([a, t]) \subset B_{\tilde{F}}[e, \delta]\}$. Assim temos
$$l_F(z) > l_F(z|_{[a,s]}) \geq l_{\tilde{F}}(z|_{[a,s]}) \geq l_{\tilde{F}}(x|_{[-\delta',\delta']}) = l_F(x|_{[-\delta',\delta']})$$
e z não é minimizante.

Logo $x|_{[-\delta',\delta']}$ é minimizante em (G, F), está parametrizado por comprimento de arco e portanto é geodésica. ∎

É claro que o Teorema 6.4.6 também vale se $x(0) = p \in G$, mas ele foi enunciado assumindo $x(0) = e$ pela facilidade na notação da sua demonstração. O teorema a seguir é valido, pois F é invariante à esquerda.

Teorema 6.4.12 *Seja G um grupo de Lie munido com uma estrutura de Finsler poliedral F invariante à esquerda. Seja $(x, \alpha) : (-\epsilon, \epsilon) \to T^*G$ um extremal de Pontryagin de (G, F) tal que $x(0) = p$, $x'(0)$ é um vértice da esfera unitária S_F e $\alpha(0)$ pertence ao interior relativo da face maximal própria dual a $x'(0)$. Então existe $\delta > 0$ tal que*

1. *$x'(t)$ é o vértice $d(L_{x(t)})_e d(L_{p^{-1}})_p(x'(0))$ da esfera unitária em $T_{x(t)}G$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$;*

2. *$x|_{(-\delta,\delta)}$ é minimizante.*

Apêndice

A Integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$

Existem várias medidas em $\mathbb{R}$. O nosso enfoque será trabalhar com a medida de Lebesgue apresentado em [[21],cap. 2]. Para isso vamos construí-la.

Definição A.1 *A medida exterior de um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é uma função λ^* que leva $S \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ definido por*

$$\lambda^*(S) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j - a_j|; S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\}.$$

A medida exterior satisfaz as seguintes propriedades:

- $\lambda^*(\emptyset) = 0$;
- *Se $S \subset T \subset \mathbb{R}$, então $\lambda^*(S) \leq \lambda^*(T)$;*
- $\lambda^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(S_n)$ *para toda coleção enumerável $\{S_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$;*
- *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, então $\lambda^*(I)$ é igual ao comprimento de I.*

Infelizmente a medida exterior não é uma medida como é visto em [21]. Para isso devemos restringir o conjunto onde calculamos a medida exterior

Definição A.2 *Denote por $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ a coleção de subconjuntos A de $\mathbb{R}$ de forma que*

$$\lambda^*(S) = \lambda^*(S \cap A) + \lambda^*(S \cap (\mathbb{R} - A)), \text{ para todo } S \subset \mathbb{R}.$$

O conjunto $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ é Lebesgue mensurável ou somente mensurável. A função $\lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\lambda(A) = \lambda^*(A)$ é a medida de Lebesgue em $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Um conjunto $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ é um conjunto de medida nula se $\lambda(A) = 0$. Uma propriedade P é satisfeita quase sempre em I ou para quase todo $t \in I$, se o subconjunto $N \subset I$ cuja a propriedade P falha tem medida nula.

Caso o interesse seja nos conjuntos mensuráveis contidos em um subconjunto S de $\mathbb{R}$, podemos definir $\mathcal{L}(S) = \{A \cap S; A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})\}$.

Definição A.3 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{L}(I)$.*

Definição A.4 *Seja S um conjunto qualquer e $A \subset S$, então a função característica de A é a função $\mathcal{X} : S \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 \ \ se \ x \in A \\ 0 \ \ se \ x \in S - A \end{cases}.$$

Definição A.5 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to R$ é simples se existem $\{A_1, ..., A_k\} \subset \mathcal{L}(I)$ e $\{c_1, ..., c_k\} \subset \mathbb{R}$ de forma que*

$$f = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathcal{X}_{A_j} \quad e \quad I = \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

A integral de uma função simples f que se anula fora de um subconjunto com medida finita é definida por

$$\int_I f d\lambda = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(A_j).$$

É possível aproximar uma função $f : I \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ mensurável por uma sequência crescente de funções simples e positivas que se anulam fora de um conjunto de medida finita. Dessa forma é definido

$$\int_I f d\lambda = \sup \left\{ \int_I g d\lambda \right\}$$

onde g é uma função simples que se anula fora de um conjunto de medida finita, com $0 \leq g(t) \leq f(t)$ para todo $t \in I$.

Para uma função mensurável $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ qualquer, sejam $I^{+} = f^{-1}([0, \infty])$ e $I^{-} = f^{-1}([-\infty, 0])$. Defina

$$f^{+}(x) = \mathcal{X}_{I^{+}} f(x) \ \text{ e } \ f^{-}(x) = -\mathcal{X}_{I^{-}} f(x)$$

e

$$\int_I f d\lambda = \int_I f^{+} d\lambda - \int_I f^{-} d\lambda \tag{20}$$

A equação (20) é a integral de Lebesgue de f.

Definição A.6 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Se pelo menos $\int_I f^+ d\lambda$ ou $\int_I f^- d\lambda$ for finito, então a integral de Lebesgue de f existe mas pode ser infinito. Caso contrário a integral de Lebesgue de f não existe

(ii) Se ambos $\int_I f^+ d\lambda$ e $\int_I f^- d\lambda$ são finitos, então f é Lebesgue integrável ou simplesmente integrável .

(iii) Se para todo intervalo compacto $J \subset I$, a função $f|_J$ é integrável, então f é localmente integrável

(iv) Se existir $M > 0$ de forma que o conjunto $\{t \in I; |f(t)| > M\}$ tem medida nula, então f é essencialmente limitado e é denotado

$$ess\sup_{t \in I} |f(t)| = \inf\{M \in \mathbb{R}; \lambda(\{t \in I; |f(t)| > M\}) = 0\}.$$

(v) f é uma função absolutamente contínua se existir uma função localmente integrável g e $t_0 \in I$ de forma que

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau.$$

Então $f'(t) = g(t)$ para quase todo $t \in I$.

Teorema A.7 *Considere uma função $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$. Se existir uma função localmente integrável $g : I \to \overline{\mathbb{R}}$ e algum $t_0 \in I$ de forma que*

$$f(t) = \int_{[t_0,t]} g|_{[t_0,t]} \, dt,$$

para todo $t \in I$, então f é localmente absolutamente contínua.

As funções absolutamente contínuas são como as funções que satisfazem o teorema fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue. Se uma função absolutamente contínua tem a derivada nula quase sempre, então a função é constante.

Definição A.8 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ localmente integrável. Um ponto $t_0 \in I$ é um ponto de Lebesgue de f se*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} |f(t) - f(t_0)| dt = 0.$$

Teorema A.9 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ localmente integrável. O complementar do conjunto de pontos de Lebesgue f tem medida nula.*

Daremos as mesmas classificações acima para uma função $f : I \to \overline{\mathbb{R}}^n$ quando as funções componentes $f_i = \pi_i \circ f$ satisfizerem as condições correspondentes.

B Função Bump

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função definida em um espaço topológico A. O suporte de f, denotado por supp f, é um subconjunto de A definido como

$$\text{supp } f = \overline{\{p \in A; f(p) \neq 0\}}.$$

Se $U \subset A$ satisfaz supp $f \subset U$, diremos que f é suportado em U.

A seguinte proposição é o corolário 2.19 de [15]

Proposição B.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Para todo subconjunto fechado $A \subset M$ e qualquer conjunto aberto U contendo A, existe uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ de forma que $f \equiv 1$ em A e supp $f \subset U$.*

A função f definida acima é chamada de função bump em A.

Definição B.2 *Sejam M uma variedade diferenciável, $A \neq \emptyset$ um subconjunto de M e uma função $f : A \to \mathbb{R}$. f é uma função diferenciável se existirem um aberto U de M contendo A e uma função diferenciável $g : U \to \mathbb{R}$ de forma que $g|_A \equiv f$.*

Lema B.3 *Sejam M uma variedade diferenciável e f uma função diferenciável definido em um fechado $A \subset M$. Para todo aberto U de M contendo A existe uma função diferenciável $\tilde{f} \in \mathcal{D}(M)$ tal que $\tilde{f}\Big|_A = f|_A$ e supp $\tilde{f} \subset U$.*

Demonstração: Como f é uma função diferenciável, por definição existe um aberto $W' \subset M$ com $A \subset W'$ de forma que f está definida em W' e é diferenciável. Como $A \subset W' \cap U$ é aberto, então sem perda de generalidade podemos considerar $W = W' \cap U$ em vez de U.

Pela proposição acima existe uma função bump $g : M \to \mathbb{R}$ em A suportado por W. Assim defina $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} g(p) \cdot f(p) \text{ se } p \in W; \\ 0 \text{ se } p \notin W. \end{cases}$$

Dessa forma temos que $\tilde{f}\Big|_A = g|_A \cdot f|_A = 1 \cdot f|_A$ e

$$\begin{aligned}
\text{supp } \tilde{f} &= \overline{\{p \in M; g(p)f(p) \neq 0\}} = \overline{\{p \in M; g(p) \neq 0\} \cap \{p \in M; f(p) \neq 0\}} \\
&\subset \overline{\{p \in M; g(p) \neq 0\}} \cap \overline{\{p \in M; f(p) \neq 0\}} \subset \overline{\{p \in M; g(p) \neq 0\}} \\
&= \text{supp } g \subset W \subset U.
\end{aligned}$$

Observe que $\tilde{f}(p) = g(p) \cdot f(p)$ é diferenciável em todo $p \in W$ pois é produto de funções diferenciáveis. Por outro lado $\tilde{f}(p)$ é diferenciável em todo $p \in M - \text{supp } g$ pois $\tilde{f}(p) \equiv 0$ nesses pontos. Então $\tilde{f}(p)$ é diferenciável no aberto $W \cup (M - \text{supp } g) \supset W \cup (M - W) = M$, o que conclui a demonstração. ■

A função estar definida em um fechado A é uma condição necessária. De fato, considere $M = \mathbb{R}$ e $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ definido em $A = (-1, 1)$. Considere $A = U$. Então é claro que não existe $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável com $\tilde{f}\Big|_A = f$ pois

$$\lim_{p \to 1^-} \tilde{f} = \lim_{p \to 1^-} f = \lim_{p \to 1^-} \frac{1}{1 - x^2} = +\infty.$$

Corolário B.4 *Sejam M uma variedade diferenciável e $U = (x_1, ..., x_n)$ uma vizinhança coordenada de M. Considere ω uma $k-$forma definida em um fechado A contido em U e escrita como $\sum_I' \omega_I dx^I$. Seja $\tilde{\omega}$ a função definida*

$$\tilde{\omega} = \sum_I{}' \tilde{\omega}_I d\tilde{x}^I$$

com $\tilde{\omega}_I$ e $\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^n$ resultantes da aplicação do Lema $B.3$ nas funções diferenciáveis ω_I e $x^1, ..., x^n$ respectivamente e $d\tilde{x}^I = d\tilde{x}^{i_1} \wedge ... \wedge d\tilde{x}^{i_k}$, com $I = \{i_1, ..., i_k\}$. Então $\tilde{\omega}$ é uma $k-$forma de M com $\tilde{\omega}|_A = \omega|_A$ e supp $\tilde{\omega} \subset U$.

Demonstração: Como ω é uma $k-$forma definido em A, então as funções ω_I e $dx^I = dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ estão definidas em A. Podemos aplicar o lema $B.3$ para construir $\tilde{\omega}_I$ e $d\tilde{x}^{i_q}$ de forma que

$$\tilde{\omega}_I|_A = \omega_I \quad \text{e} \quad d\tilde{x}^{i_q}\big|_A = dx^{i_q}$$

para todo $q \in \{1, ..., k\}$. Como cada $d\tilde{x}^{i_q}$ é um funcional linear em T_pM e $\tilde{\omega}_I$ é diferenciável, então $\tilde{\omega}$ é uma $k-$forma com $d\tilde{x}^I = d\tilde{x}^{i_1} \wedge ... \wedge d\tilde{x}^{i_k}$. Por outro lado temos

$$\tilde{\omega}|_A = \sum_I{}' \tilde{\omega}_I|_A \, d\tilde{x}^I\big|_A = \sum_I{}' \omega_I dx^I = \omega.$$

■

C Variedades Diferenciáveis

Nesta seção apresentamos a teoria básica de variedades diferenciáveis (vide [7]).

Definição C.1 *Uma* variedade diferenciável *de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\boldsymbol{x}_\alpha : V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos V_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que*

1. $\bigcup_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(V_\alpha) = M$;
2. *Para todo par α, β com $\boldsymbol{x}_\alpha(V_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(V_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\beta$ são diferenciáveis;*
3. *A família $\{(V_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições* 1 *e* 2.

O par $(V_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ com $p \in \boldsymbol{x}_\alpha(V_\alpha) = U_\alpha$ é uma parametrização local (ou sistema de coordenadas) de M em p; U_α é chamado de vizinhança coordenada *de p; Uma família $\{(V_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ satisfazendo as condições* 1 *e* 2 *é chamada de* estrutura diferenciável *em M.*

Observação C.2 *Uma estrutura diferenciável em M induz uma topologia em M ao definir que $A \subset M$ e aberto se $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A \cap U_\alpha)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α.*

Definição C.3 *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente. Uma aplicação $\varphi : M^n \to N^m$ é diferenciável em $p \in M^n$ se dada uma parametrização local $\boldsymbol{y} : V \subset \mathbb{R}^m \to N^m$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ em p tal que $\varphi(\boldsymbol{x}(U)) \subset \boldsymbol{y}(V)$ e a aplicação*

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ \boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\boldsymbol{x}^{-1}(p)$. φ é diferenciável em M^n se φ e diferenciável em todos os pontos de M^n.

Definição C.4 *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M^n \to N^m$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, bijetora e φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M^n$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \to V$ é um difeomorfismo.*

Observação C.5 *Em particular, a parametrização local $\boldsymbol{x} : V \subset \mathbb{R}^n \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}(v) \subset M$ é um difeomorfismo. Assim definições e propriedades locais envolvendo a topologia e a estrutura diferenciável em $\mathbb{R}^n$ podem ser estendidas para variedades diferenciáveis.*

Definição C.6 *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. O* espaço tangente *T_pM é o conjunto de classes de equivalência de curvas diferenciáveis $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tais que $\gamma(0) = p$. Duas curvas γ_1 e γ_2 são equivalentes se, para toda função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$,*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma_1(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma_2(t)).$$

Observação C.7 *Seja $(x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas definido por uma parametrização local em uma vizinhança de p. A base natural do espaço tangente T_pM é dada pelos vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$, definidos como derivadas direcionais ao longo das curvas coordenadas.*

Se M é uma variedade n-dimensional, então T_pM é um espaço vetorial $n-$dimensional.

Proposição C.8 *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis e $\varphi : M^n \to N^m$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M^n$ e cada $v \in T_pM^n$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Considere a curva $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM^n \to T_{\varphi(p)}N^m$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. A aplicação $d\varphi_p$ é chamada de diferencial de φ em p.*

Demonstração: Vide Proposição 2.7 de [7]. ∎

Definição C.9 *O* fibrado tangente *de uma variedade diferenciável M é o conjunto $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$, onde cada T_pM é o espaço tangente em p. Este conjunto possui uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$, com uma projeção natural $\pi : TM \to M$, que associa a cada vetor tangente $v \in T_pM$ o ponto base p.*

Definição C.10 *O* fibrado cotangente *de uma variedade diferenciável M é o conjunto $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$, onde T_p^*M é o espaço dual do espaço tangente T_pM. A projeção canônica $\pi^* : T^*M \to M$ associa a cada 1-forma em T_p^*M, o seu ponto base $p \in M$.*

Referências Bibliográficas

[1] Agrachev, A. A., Gamkrelidze, R. V.: Feedback-invariant optimal control theory and diferential geometry - I.Regular extremals. J Dyn Control Syst. 3:343–89. (1997)

[2] Ardentov, A. A., Le Donne, E., Sachkov, Y.: A sub-Finsler problem on the Cartan group. Proc Steklov Inst Math. 304:49–67. (2019)

[3] Ardentov, A. A., Lokutsievskiy, L. V., Sachkov, Y.: Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2- dimensional control via convex trigonometry. ESAIM Control Optim Calc Var. 27:52. (2021)

[4] Bao, D., Chern, S-S., Shen, Z.: An introduction to Riemann-Finsler geometry (Vol. 200). Springer Science & Business Media. (2012)

[5] Beretovskii, V. N., Zubareva, I. A.: Extremals of a left-invariant sub-Finsler metric on the Engel group. Sib Math J. 61:575–88. (2020)

[6] Carmo, M. P. D.: Geometria diferencial de curvas e superfícies. Sociedade Brasileira de Matemática. (2010)

[7] Carmo, M. P. D.: Geometria Riemanniana. Rio de Janeiro: IMPA (No Title). 5 ed. (2011)

[8] Filippov, A. F.: Differential equations with discontinuous righthand sides: Control systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media. (2013)

[9] Finsler, P.: Über Kurven und Flächen in Allgemeinen Räumen. Phd Thesis, University of Göttingen, Göttingen. (1918)

[10] Fukuoka, R.: A large family of projectively equivalent C^0-Finsler manifolds, Tohoku Math. J. 72, no. 3, 725–750 (2020)

[11] Fukuoka, R., Setti, A. M., Mollifier smoothing of C^0-Finsler structures, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 200, no. 2, 595–639. MR4229543 (2021)

[12] Grünbaum, B.: Convex polytopes (Vol. 16). New York: Interscience. (1967)

[13] Gribanova, I. A.: On a quasihyperbolic plane. Sib Math J. 40:245–57. (1999)

[14] Lokutsievskiy, L. V.: Explicit formulae for geodesics in left-invariant sub-Finsler problems on Heisenberg groups via convex trigonometry. J Dyn Control Syst. 1–21. (2020)

[15] Lee, J. M.: Smooth manifolds. Springer New York. (2012)

[16] Pontryagin, L. S.: Mathematical theory of optimal processes. John Wiley & Sons, (1962)

[17] Prudencio, J. B.: Extremals on three-dimensional Lie groups endowed with left invariant polyhedral Finsler structures, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Maringá. (2022)

[18] Prudencio, J. B., Fukuoka, R.: Extremals on Lie groups with asymmetric polyhedral Finsler structures, J. Dyn. Control Syst.30, no.3, Paper No. 30, 21 pp. (2024)

[19] Riemann, B., Über die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde Liegen, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 13, 133–150. (1868)

[20] Rodrigues, H. M., Fukuoka, R.: Geodesic fields for Pontryagin type C^0-Finsler manifolds. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations (Vol. 28), Paper No. 19, 41. MR4387182. (2022)

[21] Royden, H. L., Fitzpatrick, P.: Real analysis (Vol. 2). New York: Macmillan. (1968)

[22] Sachkov, Y. L.: Optimal bang-bang trajectories in sub-Finsler problems on the Engel group. Russ J Nonlinear Dyn. 16:355–67. (2020)

[23] San Martin, L.: Grupos de Lie. Editora Unicamp. (2016)

[24] Warner, F. W.: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups (Vol. 94). Springer Science & Business Media. (1983)

[25] Spivak, M.: A comprehensive introduction to differential geometry (Vol. 2). Publish and Perish. (1970)

Índice Remissivo