

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

LINDEMBERG SOUSA MASSA

REPRESENTAÇÃO DE SCHMIDT DE OPERADORES
BILINEARES COMPLETAMENTE CONTÍNUOS ENTRE
ESPAÇOS DE BANACH

Maringá-PR

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

REPRESENTAÇÃO DE SCHMIDT DE OPERADORES BILINEARES COMPLETAMENTE CONTÍNUOS ENTRE ESPAÇOS DE BANACH

Lindemberg Sousa Massa

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva.

Maringá-PR, Dezembro de 2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

M414r Massa, Lindemberg Sousa
Representação de Schmidt de operadores bilineares
completamente contínuos entre espaços de Banach /
Lindemberg Sousa Massa. -- Maringá, 2024.
129 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Eduardo Brandani da
Silva.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-
Graduação em Matemática - Área de Concentração:
Análise, 2024.

1. Operador bilinear. 2. Representação de
Schmidt. 3. Espaço de Banach. 4. Produto tensorial.
5. Infinito nuclear. 6. Bilinear operators. 7.
Schmidt representation. 8. Banach spaces. I. Silva,
Eduardo Brandani da, orient. II. Universidade
Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas.
Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de
Concentração: Análise. III. Título.

CDD 23.ed. 515.724

Edilson Damasio CRB9-1.123

LINDEMBERG SOUSA MASSA

REPRESENTAÇÃO DE SCHMIDT DE OPERADORES BILINEARES COMPLETAMENTE CONTÍNUOS ENTRE ESPAÇOS DE BANACH

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva - UEM (Presidente)

Prof. Dr. Sérgio Antônio Tozoni - UNICAMP

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota - UEM

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM

Aprovada em: 20 de dezembro de 2024.

Local de defesa: Videoconferência – Google Meet (<https://meet.google.com/fhm-rafe-ooo>)

RESUMO

Edmunds e Evans, em [5], obtêm representação análoga à representação de Schmidt para um operador compacto $T : X \rightarrow Y$ quando X e Y são espaços de Banach reflexivos, estritamente convexos e com duais estritamente convexos. Ainda, Silva et al., em [27], definem a representação de Schmidt para um operador bilinear $T : H_1 \times H_2 \rightarrow K$, onde H_1 , H_2 e K são espaços de Hilbert separáveis sobre o corpo dos números reais, definem os autovalores ordenados de um operador $T : H_1 \times H_2 \rightarrow K$ bilinear e provam que se T é compacto, tal que satisfaz o método da ordenação dos autovalores, então T tem uma representação de Schmidt.

Com base em James, [12], e em Alber, [1], Edmunds e Evans fazem uso do conceito da ortogonalidade no sentido de James para suplementar o problema da não existência de produto interno entre espaços de Banach não Hilbert. Temos que esse conceito não se estende naturalmente para o produto cartesiano entre espaços de Banach, bem como o subespaço anulador de subespaços do produto cartesiano entre espaços de Banach. Nesse sentido, apresentamos definições e obtemos resultados necessários para expressar uma representação análoga à obtida por Silva et al. para operadores bilineares completamente contínuos $T : X \times Y \rightarrow Z$, onde X , Y e Z são espaços de Banach sobre o corpo dos números reais, uniformemente convexos e uniformemente suaves. Mostramos também que tal representação pode ser obtida fazendo uso da teoria do produto tensorial entre espaços vetoriais. Por fim, baseado em Ruch, [23], apresentamos condições explícitas para que um operador $T : X \times Y \rightarrow Z$, com X , Y e Z espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves seja infinito-nuclear.

PALAVRAS-CHAVE: Operador Bilinear, Representação de Schmidt, Espaço de Banach, produto tensorial, infinito-nuclear.

ABSTRACT

Edmunds and Evans, in [5], obtain a representation analogous to the Schmidt representation for a compact operator $T : X \rightarrow Y$ when X and Y are reflexive Banach spaces, strictly convex and with strictly convex duals. Furthermore, Silva et al., in [27], define the Schmidt representation for a bilinear operator $T : H_1 \times H_2 \rightarrow K$, where H_1 , H_2 and K are separable Hilbert spaces over the field of real numbers, define the ordered eigenvalues of a bilinear operator $T : H_1 \times H_2 \rightarrow K$ and prove that if T is compact, such that it satisfies the eigenvalue ordering method, then T has a Schmidt representation. Based on James, [12], and Alber, [1], Edmunds and Evans make use of the concept of orthogonality in James's sense to supplement the problem of non-existence of inner product between non-Hilbert Banach spaces. We have that this concept does not extend naturally to the cartesian product between spaces of Banach spaces, as well as the subspace-eliminator of subspaces of the cartesian product between spaces of Banach. In this sense, we present definitions and obtain results necessary for express a representation analogous to that obtained by Silva et al. for bilinear operators completely continuous $T : X \times Y \rightarrow Z$, where X , Y and Z are Banach spaces over the field of real numbers, uniformly convex and uniformly smooth. We show also that such representation can be obtained using tensor product theory between vector spaces. Finally, based on Ruch, [23], we present explicit conditions for an operator $T : X \times Y \rightarrow Z$, with X , Y and Z Banach spaces uniformly convex and uniformly smooth is infinite-nuclear.

KEYWORDS: Bilinear Operator, Schmidt Representation, Banach Space, Tensor Product, Nuclear Infinity.

LISTA DE SÍMBOLOS

X^* . Dual topológico de X .

$[x]$. Espaço gerado por x .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$. Produto escalar na dualidade X e X^* .

$\oplus$. Soma direta.

$\uplus$. Soma ortogonal de James.

κ_X . Mergulho canônico de X em X^{**} .

$\mathbb{L}(X)$. Conjunto de todos os subespaços lineares de um espaço de Banach X .

$\mathcal{B}(X \times Y)$. Espaço dos funcionais bilineares de $X \times Y$.

$\mathcal{B}(X \times Y, Z)$. Espaço dos operadores bilineares de $X \times Y$ em Z .

$\mathcal{K}(X, Y)$. Conjunto dos operadores lineares compactos.

$\mathcal{L}(X, Y)$. Espaço dos operadores lineares de X em Y .

$\mathfrak{L}(X, Y)$. Espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y .

$\mathfrak{L}_r(X, Y)$. Espaço dos operadores r -lineares contínuos de $X = X_1 \times \dots \times X_r$ em Y .

$\rightarrow$. Convergência em norma.

$\rightharpoonup$. Convergência fraca.

$\tilde{J}_X$. Aplicação de dualidade em X .

ξ_j^X . Coeficiente da projeção linear em X .

${}^\circ N$. Conjunto anulador de N em X , com $N \subset X^*$.

$B_{r,X}$. Bola fechada de raio $r > 0$ com centro na origem de X .

$Bil(X \times Y)$. Espaço dos funcionais bilineares contínuos de $X \times Y$.

$Bil(X \times Y, Z)$. Espaço dos operadores bilineares contínuos de $X \times Y$ em Z .

c_0 . Espaço das sequências numéricas $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightarrow 0$.

J_X . Aplicação de dualidade em X com função gauge μ .

$KBil(X \times Y, Z)$. Conjunto dos operadores bilineares compactos.

$M^\perp$. Ortogonal de M .

M° . Conjunto anulador de M em X^* , com $M \subset X$.

P_{k+1}^X . Projeção métrica em X .

S_X . Esfera unitária em X .

S_{k+1}^X . Projeção linear em X .

T^* . Adjunto do operador T .

U_X . Bola unitária em X .

W_m^p . Espaço de Sobolev.

$x \perp^j y$. x j -ortogonal a y .

$X^\sharp$. Dual algébrico de X .

SUMÁRIO

Resumo	5
Abstract	6
Lista de Símbolos	7
Sumário	9
1 Introdução	11
2 Preliminares	17
2.1 Geometria de espaços de Banach	17
2.2 Operadores bilineares limitados e compactos	24
2.3 Produto tensorial de espaços vetoriais	31
2.3.1 Produto tensorial e linearização	35
2.3.2 Tensores como formas bilineares e como aplicações lineares	37
2.3.3 A norma projetiva	40
2.3.4 O espaço dual de $X \hat{\otimes}_\pi Y$	43
2.3.5 Bases do produto tensorial	46
2.3.6 Operadores e formas nucleares bilineares	49
2.3.7 Propriedade de aproximação	52
2.3.8 Reflexividade do produto tensorial	55

3	Representação de Operadores Bilineares	59
3.1	Uma decomposição para os espaços $X, Y, X \times Y$ e Z	59
3.2	Operadores bilineares completamente contínuos	66
3.2.1	Relação entre $\xi_k^Z(z)$ e os elementos das sequências $\{\xi_i^X(x)\}_{i=1}^k$ e $\{\xi_i^Y(y)\}_{i=1}^k$	89
3.2.2	Resultado principal	102
3.3	Representação via produto tensorial	113
4	Representação de Operadores Bilineares Infinito-Nucleares	119
	Referências Bibliográficas	128

Introdução

Issai Schur (1875-1941) e Erhard Schmidt (1876-1959), foram importantes matemáticos contemporâneos na universidade de Berlin, sendo Schmidt orientando de doutorado de David Hilbert, os quais desenvolveram importantes estudos e resultados com relação à operadores lineares em espaços de Hilbert. Na literatura da área podemos ver tais resultados expressos, por exemplo, em J. R. Retherford [21], onde define a representação de Schur de um operador linear limitado $L : H \rightarrow H$, onde H é um espaço de Hilbert, e demonstra que todo L compacto, autoadjunto e não nulo tem uma Representação de Schur, o qual é definido da seguinte forma:

Definição 1.0.1. *Chamamos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, x_n \rangle_H x_n \quad (1.0.1)$$

uma **representação de Schur** do operador linear limitado $L : H \rightarrow H$ se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$;
2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência ortonormal estendida de H , ou seja $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e cada x_i é unitário ou nulo para todo $i \in \mathbb{N}$;
3. $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle_H x_n$, para todo $x \in H$.

A representação de Schur é dita ser monótona se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$. A. Pietsch em [18] define a representação de Schmidt de um operador linear limitado $L : H \rightarrow K$, onde H, K são espaços de Hilbert, e demonstra que todo L compacto e não nulo tem uma Representação de Schmidt.

Definição 1.0.2. Um número positivo τ é dito ser valor singular do operador $T : H \rightarrow K$ se existem vetores unitários $x \in H$ e $y \in K$ tal que

$$T(x) = \tau y \quad e \quad T^*(y) = \tau x$$

onde $T^* : K \rightarrow H$ é o operador adjunto de T . Tem-se:

$$T^*(T(x)) = T^*(\tau y) = \tau(T^*(y)) = \tau^2 x$$

$$T(T^*(y)) = T(\tau x) = \tau(T(x)) = \tau^2 y.$$

Portanto τ^2 é autovalor de (T^*T) e (TT^*) . Chama-se, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < \cdot, x_i >_H y_i$$

uma **representação de Schmidt** do operador $T : H \rightarrow K$ se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $(\tau_i) \in c_0$.
2. (x_i) e (y_i) são sequências ortonormais extendidas de H e K , respectivamente.
3. $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >_H y_i$ para todo $x \in H$.
4. Se $x_i \neq 0$ e $y_i \neq 0$, então segue que $< T(x_i), y_i >_K = \tau_i$. Caso contrário, se pelo menos um dos elementos x_i ou y_i é zero, o valor do coeficiente correspondente τ_i não tem qualquer efeito. E portanto naturalmente assumimos que $\tau_i = 0$. E assim obtemos $< T(x_i), y_i >_K = \tau_i$, para $i \in \mathbb{N}$.

A representação de Schmidt é dita ser monótona se $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq 0$.

Seguindo os caminhos de Retherford, Silva et al., em [26], definem a representação de Schur para um operador bilinear $T : H \times H \rightarrow H$, onde H é um espaço de Hilbert separável sobre o corpo dos números reais. Algumas dificuldades, ao se passar do caso linear para o bilinear aparecem, como a apresentada a seguir:

Se $L : H \rightarrow H$ é um operador linear limitado, autoadjunto e seja $N \subset H$, temos $L(N) \subset N \Leftrightarrow L(N^\perp) \subset N^\perp$. Tal propriedade não é herdada para os operadores bilineares. Em [26] é mostrado que se $x \in H$ é um autovetor de T e $M = [x]$, temos que, mesmo se T for autoadjunto, $T(M, M) \subset M$ não implica que $T(M^\perp, M^\perp) \subset M^\perp$.

Para contornar tal situação, Silva et al., definem os autovalores ordenados de um operador $T : H \times H \rightarrow H$ bilinear e provam que se T é compacto, autoadjunto e não nulo

tal que satisfaz o método da ordenação dos autovalores, então T tem uma Representação de Schur.

Ainda, seguindo Pietsch em [18], Silva et al., em [27], definem a representação de Schmidt para um operador bilinear $T : H_1 \times H_2 \rightarrow K$, onde H_1 , H_2 e K são espaços de Hilbert separáveis sobre o corpo dos números reais e, analogamente ao caso da representação de Schur, definem os autovalores ordenados de um operador $T : H_1 \times H_2 \rightarrow K$ bilinear e provam que se T é compacto, tal que satisfaz o método da ordenação dos autovalores, então T tem uma representação de Schmidt.

A noção de ortogonalidade dada por uma estrutura de espaço de Hilbert é crucial nas demonstrações das representações acima, assim nos deparamos com um problema imediato e óbvio ao tentar estender esses resultados para cobrir operadores lineares compactos T atuando entre os espaços de Banach.

Edmunds e Evans, no livro "Representations of Linear Operator Between Banach Spaces", [5], em que faz uma compilação de artigos publicados entre 2008 e 2013 ([6], [7], [8], [9], [10]), obtém representação análoga à representação de Schmidt para um operador compacto $T : X \rightarrow Y$ quando X e Y são espaços de Banach reflexivos, estritamente convexos e com duais estritamente convexos. Para tal, faz-se uso do conceito da aplicação de dualidade em X (analogamente em Y) com função gauge μ , dada por $J_X : X \rightarrow X^*$, tal que para todo $x \in X$, J_X é o único funcional tal que

$$\langle x, J_X(x) \rangle_X = \|J_X(x)\|_{X^*} \|x\|_X, \quad \|J_X(x)\|_{X^*} = \mu(\|x\|_X),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ é o produto escalar na dualidade X e X^* , enquanto a função gauge é uma função $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua, estritamente crescente e satisfazendo $\mu(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty$. A aplicação J_X é dita normalizada se tem a função gauge $\mu(t) = t$ para todo $t \geq 0$.

Um resultado fundamental para a obtenção da representação é a equação

$$T^* J_Y T x_1 = \lambda J_X x_1, \tag{1.0.2}$$

com J_X normalizada, $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\|_X = 1$ e $\|T x_1\|_Y = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \lambda$ [5, Proposição 2.2.3]

Edmunds e Evans, em [5] faz uso do conceito de ortogonalidade em um espaço de Banach com dual estritamente convexo, o qual foi introduzido por James em [12].

Definição 1.0.3. *Seja X um espaço de Banach com dual estritamente convexo. Dizemos que $x \in X$ é **j-ortogonal** (ou ortogonal no sentido de James ou Birkhoff) a $y \in X$, e escrevemos $x \perp^j y$, se*

$$\|x\|_X \leq \|x + ty\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Um elemento $x \in X$ é j-ortogonal a um conjunto $K \subset X$ ($x \perp^j N$) se x é j-ortogonal a todo elemento em K . Um conjunto $K_1 \subset X$ é j-ortogonal a $K_2 \subset X$ se todo $x \in K_1$ é j-ortogonal a todo $y \in K_2$. Com isto, obtém-se os subespaços

$$M_1 := [J_X x_1] \subset X^*, \quad X_2 := {}^\circ M_1 = \{x \in X; \langle x, \alpha \rangle_X = 0, \alpha \in M_1\} \subset X.$$

Da mesma forma para $J_Y T x_1 \in Y^*$, $N_1 := [J_Y T x_1]$ e $Y_2 := {}^\circ N_1 \subset Y$.

Em [1], Alber define a soma ortogonal de James, onde obtém uma decomposição do espaço de Banach X e ainda prova o seguinte teorema:

Teorema 1.0.4. *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e uniformemente suave e seja M um subespaço fechado de X com conjunto anulador $M^\circ \subset X^*$. Seja J_X a aplicação de dualidade normalizada. Então*

$$X = M \biguplus J_X^{-1} M^\circ \text{ e } X^* = M^\circ \biguplus J_X M.$$

Além disso, tal teorema possibilita obter a decomposição de X em soma direta, como $X = X_2 \oplus [x_1]$ e assim definir $T_2 : X_2 \rightarrow Y_2$, ou seja, T_2 é a restrição de T em X_2 , onde desenvolve o mesmo processo e obtém-se $x_2 \in X_2$, com $\|x_2\|_X = 1$ e $\|T x_2\|_Y = \|T_2\| = \lambda_2$, tendo assim $\lambda_2 \leq \lambda_1 = \lambda$.

Repetindo o processo, obtém-se as seqüências $\{\lambda_k\}$ e $\{x_k\}$, as quais os elementos são chamados de j-autovalores e j-autovetores, respectivamente. Ainda, define-se as projeções

$$\begin{aligned} S_{k+1}^X &: X \rightarrow [x_1, \dots, x_k] \text{ e} \\ P_{k+1}^X &: X \rightarrow X_{k+1}, \end{aligned}$$

com $S_{k+1}^X x = \sum_{i=1}^k \xi_i^X(x) x_i$ e $x - S_{k+1}^X x \in X_{k+1}$, onde os coeficientes são definidos em [5], página 76 e, P_{k+1}^X tal que $\|x - P_{k+1}^X(x)\| = \inf\{\|x - x_{X_{k+1}}\|; x_{X_{k+1}} \in X_{k+1}\}$. O mesmo para Y .

Assim, se X e Y são espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves, $T : X \rightarrow Y$ operador linear compacto de posto infinito, então tem-se o resultado [5, Corolário 2.2.23], o qual enunciaremos como teorema:

Teorema 1.0.5. *Suponha que $\{S_n\}$ seja limitada. Então, $\{x_n\}$ é uma base fraca, e portanto uma base, de $\frac{X}{X_\infty}$. Além disso, $\{\xi_n^X\}$ é uma base de X_∞° . Em particular, se $\text{Nuc}T = \{0\}$, $\{x_n\}$ e $\{\xi_n^X\}$ são bases de X e X^* respectivamente. Portanto, se $\text{Nuc}T = \{0\}$,*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^X(x) x_j, \quad Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j^X(x) y_j, \quad y_j = \frac{Tx_j}{\lambda_j},$$

para todo $x \in X$.

Ressaltamos aqui que a limitação de $\{S_n\}$ é fundamental, como visto em [7].

Nesta tese, seguindo fundamentações análogas às usadas por Edmunds e Evans em [5], para o caso linear, obteremos uma representação, em forma de série, de operadores bilineares completamente contínuos $T : X \times Y \rightarrow Z$, onde X , Y e Z são espaços de Banach sobre o corpo dos números reais, uniformemente convexos e uniformemente suaves, análoga à representação de Schmidt para operadores compactos entre espaços de Hilbert obtida por Silva, et al., em [27].

Observamos ainda que:

- Diferentemente do caso linear, para operadores bilineares não se tem a equivalência entre operadores compactos e operadores completamente contínuos, como podemos ver no exemplo 3.2.2. Contudo, se X , Y e Z são espaços de Banach, com X e Y reflexivos, se $T : X \times Y \rightarrow Z$ é completamente contínuo, então T é compacto.
- Edmunds e Evans, em [5], restringem os espaços de Banach, tratados no trabalho, aos espaços reflexivos, estritamente convexos e com duais estritamente convexos, mesmo fazendo uso da decomposição obtida por Alber, em [1], onde são feitas sobre espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves, além da necessidade dos espaços serem uniformemente convexos para se ter condições necessárias para algumas análises de convergência, como no Teorema 2.2.14 em [5]. Desta forma, mesmo alguns resultados preliminares necessitarem da restrição usada por Edmunds e Evans, trabalharemos sobre os espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. Além disso, veremos, na seção de preliminares desta tese, que um espaço de Banach uniformemente convexo e uniformemente suave pertencem à classe de espaços de Banach reflexivos, estritamente convexos e com duais

estritamente convexos.

A estrutura deste texto está dividido da seguinte forma: no Capítulo 2, trazemos estudos preliminares que fundamentam os resultados objetivados na tese. Iniciamos apresentando o conceito de ortogonalidade em um espaço de Banach com dual estritamente convexo, introduzido por James em [12] e explorado por Alber em [1], dentre outros trabalhos e fortemente usado em [5]. Seguimos apresentando conceitos e importantes resultados sobre operadores bilineares limitados e compactos e finalizamos com uma breve explanação à cerca da teoria sobre o produto tensorial de espaços vetoriais. Este último item, ainda não citado, nos foi interessante por fornecer ambiente natural para o estudo de operadores bilineares devido às várias identificações possíveis, por exemplo, a relação entre tensores em $X \otimes Y$, onde X e Y são espaços vetoriais, com formas bilineares em $X \times Y$, além da possibilidade de linearização de operadores bilineares, dentre outros.

Uma das motivações em incluir o estudo de produto tensorial foi a possibilidade de dar uma versão, via produto tensorial, à representação pretendida. Vimos essa possibilidade ao nos depararmos com um comentário no artigo de Ruch [23, Observação B], onde relata a sugestão de um avaliador sobre a possibilidade para a demonstração de um importante resultado apresentado.

No Capítulo 3 apresentamos o resultado principal desta tese onde, como já relatado, nos baseamos nos trabalhos de Edmunds e Evans, em [5]. Obtemos diversos resultados análogos, para o caso bilinear, aos resultados obtidos no caso linear. Apresentamos o resultado principal na Subseção 3.2.2, Teorema 3.2.33, o qual é o análogo ao Teorema 1.0.5, citado acima. Finalizamos o capítulo dando uma versão, via produto tensorial, deste resultado.

No Capítulo 4, baseado em Ruch, [23], em específico no Teorema 9 deste referido artigo, apresentamos condições explícitas para que um operador $T : X \times Y \rightarrow Z$, com X , Y e Z espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves seja infinito-nuclear.

Preliminares

2.1 Geometria de espaços de Banach

A derivada de Gateaux é uma generalização do conceito de derivada direcional que conhecemos da análise real. Com base em [5] e [28], introduzimos a definição da derivada de Gateaux e usaremos tal conceito para determinar a derivada de uma norma em um espaço de Banach arbitrário, bem como propriedades, e uma importante consequência.

Iniciamos com a seguinte definição dada em [5], página 10.

Definição 2.1.1. *Seja U um subconjunto aberto de um espaço de Banach X e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é **Gateaux diferenciável** em $x_0 \in U$ se existe $x^* \in X^*$ tal que*

$$\langle y_0, x^* \rangle_X = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ty_0) - f(x_0)}{t}, \quad \forall y_0 \in X.$$

O limite acima é chamado de derivada de Gateaux de f em x_0 na direção de y_0 . O funcional x^ é denotado por $\text{grad } f(x_0)$.*

A próxima definição e proposição seguem de [28].

Definição 2.1.2. *Se existe a derivada de Gateaux da norma em x_0 para toda direção $y \in X$ dizemos que a norma é **Gateaux diferenciável em x_0** . Se a norma é Gateaux diferenciável para todo $x \in S_X$, dizemos que a norma é Gateaux diferenciável.*

Proposição 2.1.3. *Seja $x_0 \in X$ e suponha que $\|\cdot\|_X$ seja Gateaux diferenciável em x_0 . Então $\text{grad } \|\cdot\|_X$ é linear em y_0 .*

Demonstração: Ver [28], na proposição 1.9 e seu corolário 1.10. ■

Definição 2.1.4. Um espaço de Banach X é dito ser **estritamente convexo** se para $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$, e $\lambda \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$, então $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_X < 1$.

Podemos ver por [5] que X^* é estritamente convexo se, e somente se, a norma em X é Gateaux diferenciável, como dado na proposição seguinte.

Proposição 2.1.5. Seja X um espaço de Banach. Então X^* é estritamente convexo se, e somente se, $\|\cdot\|_X$ é Gateaux diferenciável.

Demonstração: Ver [5, página 13]. ■

Novamente em [28], temos a seguinte definição.

Definição 2.1.6. Seja X um espaço vetorial normado, seja $f \in X^*$ um funcional linear e $A \subset X$ um subconjunto de X . Dizemos que f é um **funcional suporte para A** se existe $x_0 \in A$ tal que $\langle x_0, f \rangle_X = \sup\{\langle x, f \rangle_X : x \in A\}$ e x_0 é um ponto suporte de A . O conjunto $\{x \in X : \langle x, f \rangle_X = \langle x_0, f \rangle_X\}$ é um hiperplano suporte para A . O hiperplano suporte e f são ambos ditos suporte de A em x_0 .

Observação 2.1.7. Edmunds e Evans, em [5], observa que: seja X é um espaço de Banach e $A \subset X$ um subconjunto convexo. $f \in X^*$ é um funcional suporte de A em x_0 se $\|f\|_{X^*} = 1$ e $\langle x_0, f \rangle_X = \sup\{|\langle x, f \rangle_X| : x \in A\}$. Assim, dos argumentos acima vemos que, se a norma em X é Gateaux diferenciável e $\langle x, \text{grad } \|x\| \rangle_X = \|x\|_X$ se $x \neq 0$, então $\text{grad } \|x\|_X$ é um funcional suporte de U_X para todo ponto x de $U_X \setminus \{0\}$.

Definição 2.1.8. Seja X um espaço vetorial normado e seja $x \in S_X$. Dizemos que x é um **ponto de suavidade** de U_X se existe um único hiperplano suporte para U_X em x . X é chamado suave se para todo $x \in S_X$, x é um ponto de suavidade de U_X .

Ainda em [28], segue a proposição que relaciona a diferenciabilidade da norma com a suavidade de X e a convexidade de X^* .

Proposição 2.1.9. Seja X espaço vetorial normado reflexivo, então são equivalentes:

- A norma é Gateaux diferenciável;
- X é suave;

- X^* é estritamente convexo.

Definição 2.1.10. *Seja X um espaço de Banach, e seja $x \in X$ com $x \neq 0$. Então chamamos*

$$\tilde{J}_X x = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\|_{X^*} = 1, \varphi(x) = \|x\|_X\}$$

a **aplicação de dualidade**.

Vemos pelo exposto acima e, pelo teorema 2.14 de [28] que, para X espaço de Banach reflexivo, estritamente convexo com dual estritamente convexo e $x \in X \setminus \{0\}$, que

$$\tilde{J}_X x := \text{grad } \|x\|_X. \quad (2.1.1)$$

Onde:

- $\tilde{J}_X x \in X^*$;
- $\|\tilde{J}_X x\|_X = 1$;
- $\#\tilde{J}_X x = 1$;
- $\langle x, \tilde{J}_X x \rangle_X = \|x\|_X$.

Edmunds e Evans, em [5], observa ainda que $\tilde{J}_X x$ é positivamente homogênea, ou seja, para $\lambda > 0$,

$$\langle \lambda x, \tilde{J}_X(\lambda x) \rangle_X = \lambda \|x\|_X \quad (2.1.2)$$

e, portanto, $\tilde{J}_X(\lambda x) = \tilde{J}_X x$. Em geral tem-se

$$\tilde{J}_X(\lambda x) = (\text{sgn } \lambda) \tilde{J}_X x. \quad (2.1.3)$$

Definição 2.1.11. *Suponha que X é um espaço de Banach com norma Gateaux diferenciável. Seja $(\cdot, \cdot)_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$(x, h)_X = \begin{cases} \|x\|_X \langle h, \text{grad } \|x\|_X \rangle_X, & x, h \in X, x \neq 0, \\ 0, & x = 0, h \in X. \end{cases}$$

$(x, h)_X$ é chamado de **semi-produto interno** de x e h em X .

Note que $(x, h)_X$ depende linearmente de h , que $(x, x)_X = \|x\|_X^2$ e, em geral, $(x, h)_X \neq (h, x)_X$. Seguindo [5] temos o conceito de ortogonalidade em um espaço de Banach com dual estritamente convexo, o qual foi introduzido por James em [12].

Definição 2.1.12. *Seja X um espaço de Banach com dual estritamente convexo. Dizemos que $x \in X$ é **j-ortogonal** (ou ortogonal no sentido de James ou Birkhoff) a $y \in X$, e escrevemos $x \perp^j y$, se*

$$\|x\|_X \leq \|x + ty\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Um elemento $x \in X$ é j-ortogonal a um conjunto $M \subset X$ ($x \perp^j M$) se x é j-ortogonal a todo elemento em M . Um conjunto $M_1 \subset X$ é j-ortogonal a $M_2 \subset X$ se todo $x \in M_1$ é j-ortogonal a todo $y \in M_2$.

A j-ortogonalidade não é simétrica em espaço de Banach não Hilbert, isto é, $x \perp^j y$ não implica $y \perp^j x$; em [12] é mostrado que, se $\dim X \geq 3$, a simetria da j-ortogonalidade implica que X é um espaço com produto interno. James, em [12], mostrou ainda a relação entre j-ortogonalidade e o semi-produto interno, o qual será reproduzido aqui.

Proposição 2.1.13. *Seja X um espaço de Banach com dual estritamente convexo e $x, h \in X$. Então $x \perp^j h$ se, e somente se, $(x, h)_X := \|x\|_X \langle h, \text{grad}\|x\|_X \rangle_X = 0$. Além disso, dado $x \in X \setminus \{0\}$ e $y \in X$, então existe precisamente um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x \perp^j \lambda x + y$ e dado por*

$$\langle y, \text{grad}\|x\|_X \rangle_X = -\lambda \|x\|_X.$$

Demonstração: Suponha que $x \perp^j h$, $x \neq 0$. Então

$$(x, h)_X = \|x\|_X \langle h, \text{grad}\|x\|_X \rangle_X = \lim_{t \rightarrow 0} \|x\|_X \frac{\|x + th\|_X - \|x\|_X}{t}.$$

Desde que $x \perp^j h$,

$$\frac{\|x + th\|_X - \|x\|_X}{t} \geq 0 \quad \text{quando } t > 0, \text{ e } \frac{\|x + th\|_X - \|x\|_X}{t} \leq 0 \quad \text{quando } t < 0.$$

Portanto $(x, h)_X = 0$. Naturalmente válido para $x = 0$.

Por outro lado, suponha que $(x, h)_X = 0$, assim, temos que $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(\|x + th\|_X - \|x\|_X) = 0$. Tendo que $t \mapsto t^{-1}(\|x + th\|_X - \|x\|_X)$ é crescente para $t > 0$ e, portanto (considerando $-h$ no lugar de h) $t \mapsto t^{-1}(\|x + th\|_X - \|x\|_X) = 0$ é decrescente para $t < 0$. Assim, vemos que $\|x + th\|_X \geq \|x\|_X$, para todo t . Logo $x \perp^j h$.

Finalmente, se $x, y \in X$, $x \neq 0$, então $x \perp^j (\lambda x + y)$ se, e somente se,

$$\langle \lambda x + y, \text{grad}\|x\|_X \rangle_X = 0,$$

que é válido se, e somente se,

$$\langle y, \text{grad}\|x\|_X \rangle_X = -\lambda \langle x, \text{grad}\|x\|_X \rangle_X = -\lambda \|x\|_X.$$

■

Agora, seja N um subconjunto de um espaço de Banach X , o conjunto anulador de N é um subespaço em X^* dado por

$$N^\circ := \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle_X = 0, \forall x \in N\}. \quad (2.1.4)$$

Claramente, N° é um subespaço de X^* e $N^\circ = \overline{N^\circ}$. Analogamente, se M é um subespaço de X^* , definimos o conjunto

$${}^\circ M := \{x \in X : \langle x, x^* \rangle_X = 0, \forall x^* \in M\}. \quad (2.1.5)$$

${}^\circ M$ é fechado e ${}^\circ M = {}^\circ(\overline{M})$. Temos também que $\overline{N} = {}^\circ(N^\circ)$.

Para completar a seção apresentaremos a aplicação de dualidade com função gauge a qual pode ser visto com mais detalhes em [[5], página 15].

Seja $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua, estritamente crescente e satisfazendo $\mu(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty$, tal aplicação é chamada de função gauge. Uma aplicação J_X de um espaço de Banach X em 2^{X^*} , o conjunto de todos os subconjuntos de X^* , é dita uma aplicação de dualidade com função gauge μ se, para todo $x \in X$,

$$J_X(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle_X = \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X, \|x^*\|_{X^*} = \mu(\|x\|_X)\}. \quad (2.1.6)$$

O semi-produto interno, definido em 2.1.11, pode ser expressado em termos da aplicação de dualidade J_X em um espaço de Banach X com função gauge μ ,

$$(x, h)_X = \frac{\|x\|_X}{\mu(\|x\|_X)} \langle h, J_X x \rangle_X, \quad (x \neq 0).$$

A aplicação J_X é dita normalizada se tem a função gauge $\mu(t) = t$ para todo $t \geq 0$. Neste sentido em [28] define, o que se chama de aplicação de dualidade alternativa, como segue:

Definição 2.1.14. *Seja X espaço de Banach. Seja $x \in X$ com $x \neq 0$. A aplicação*

$$J_x = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\|_{X^*} = \|x\|_X, \langle x, \varphi \rangle_X = \|x\|_X^2\}$$

*é uma definição alternativa para a aplicação de dualidade, e também chamada de **aplicação de dualidade alternativa**.*

Naturalmente, para J_X normalizada, as duas definições acima são equivalentes. Ainda, em [[28], lema 4.6] destacamos o seguinte lema o qual será reproduzida sua demonstração.

Lema 2.1.15. *Seja X um espaço vetorial normado reflexivo, estritamente convexo e com*

dual estritamente convexo e seja J_x a aplicação de dualidade alternativa em X . Então J_x é bijetiva e J_x^{-1} é a aplicação de dualidade alternativa em X^ .*

Demonstração: Sendo X reflexivo, então podemos identificar X com X^{**} . Considerando a aplicação de dualidade alternativa em X^* , ou seja: para $\phi \in X^*$ não nulo,

$$J_\phi^* = \{\psi \in X^{**} : \|\phi\|_{X^*} = \|\psi\|_{X^{**}}, \langle \phi, \psi \rangle_{X^*} = \|\phi\|_{X^*}^2\}.$$

Pela reflexividade de X e a unicidade de J_ϕ^* , seja $x = J_\phi^*$. Por J_ϕ^* ser uma aplicação de dualidade alternativa então, $\|x\|_X = \|\phi\|_{X^*}$ e assim:

$$\langle \phi, J_\phi^* \rangle_{X^*} = \|\phi\|_{X^*}^2 = \|x\|_X^2 = \langle x, J_x \rangle_X.$$

Com isto, vemos que $J_x = \phi$ e $J_x \circ J_\phi^* = id_{X^*}$. Nessa mesma direção vemos também que $J_\phi^* \circ J_x = id_X$. Assim temos que J_ϕ^* é bijetiva e $J_x^{-1} = J_\phi^*$. Portanto, J_x^{-1} é a aplicação alternativa em X^* . ■

Juntamente com o lema 4.7, Straatman em [28], traz o importante teorema de Calvert.

Teorema 2.1.16. *Seja X um espaço de Banach reflexivo, estritamente convexo e com dual estritamente convexo. Considere a aplicação de dualidade alternativa $J_x : X \rightarrow X^*$, assim $\|J_x\|_{\mathcal{L}(X, X^*)} = \|x\|_X$ e $\langle x, J_x \rangle_X = \|x\|_X^2$. Então, um subespaço linear $M \subset X$ é imagem de uma projeção linear contrativa se, e somente se, $J_x(M)$ é subespaço linear de X^* .*

Tendo que uma projeção contrativa em um espaço normado E é definida por:

Definição 2.1.17. *Uma **projeção contrativa** em um espaço normado E é uma aplicação $f : E \rightarrow E$ tal que $f \circ f = f$, isto é, f é uma projeção e, se $x, y \in E$ tem-se:*

$$\|f(x) - f(y)\|_E \leq \|x - y\|_E.$$

Em [5] traz o chamado teorema de Alber sobre decomposição de um espaço de Banach X uniformemente convexo e uniformemente suave no sentido da ortogonalidade de James o qual, originalmente, é encontrado em [1]. Antes de enunciarmos o teorema, definiremos espaços uniformemente convexos e uniformemente suaves além de alguns resultados importantes envolvendo tais espaços.

Definição 2.1.18. *Dizemos que um espaço normado X é **uniformemente convexo** se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in U_X$ e $\|x - y\|_X \geq 2\epsilon$ então $\|\frac{x+y}{2}\|_X \leq 1 - \delta$.*

Teorema 2.1.19. (Milman-Pettis) *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração: Ver [4], teorema 3.66. ■

Proposição 2.1.20. *Seja $\{x_k\}$ uma sequência em um espaço de Banach uniformemente convexo X tal que converge fracamente para $x \in X$, com $\|x_k\|_X \rightarrow \|x\|_X$. Então $\|x_k - x\|_X \rightarrow 0$.*

Demonstração: Ver [5], proposição 1.1.13. ■

Definição 2.1.21. *Dizemos que um espaço normado X é **uniformemente suave** se dado $\epsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que se $x, y \in U_X$ e $\|x - y\|_X \leq 2\epsilon$ então $\|\frac{x+y}{2}\|_X \geq 1 - \epsilon\tau$.*

Lema 2.1.22. *Seja X um espaço de Banach. Então, X é uniformemente suave se, e somente se, o limite*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + th\|_X - \|x\|_X}{t} = \langle h, \text{grad}\|x\|_X \rangle_X$$

existe, uniformemente para $x, h \in S_X$.

Demonstração: Ver [5], lema 1.1.22. ■

A convexidade uniforme e a convexidade suave de um espaço de Banach X tem importantes implicações no espaço dual X^* , é o que veremos no próximo teorema.

Teorema 2.1.23. *Seja X um espaço de Banach. Então:*

- *X é uniformemente convexo se, e somente se, X^* é uniformemente suave.*
- *X é uniformemente suave se, e somente se, X^* é uniformemente convexo.*

Demonstração: Ver [5], teorema 1.1.24. ■

Como já comentado, traremos a definição da decomposição de um espaço de Banach X uniformemente convexo e uniformemente suave no sentido da ortogonalidade de James, como segue:

Definição 2.1.24. *Dizemos que um espaço de Banach X é uma **soma ortogonal de James** de subconjuntos fechados $M_1 \subset X$ e $M_2 \subset X$ e denotado por $X = M_1 \uplus M_2$, se:*

1. cada $x \in X$ tem uma única decomposição $x = m_1 + m_2$, onde $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$;
2. $M_2 \perp^j M_1$;
3. $M_1 \cap M_2 = 0_X$.

Teorema 2.1.25. *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e uniformemente suave e seja M um subespaço fechado de X com conjunto polar $M^\circ \subset X^*$. Seja J_X a aplicação de dualidade normalizada. Então*

$$X = M \biguplus J_X^{-1} M^\circ \text{ e } X^* = M^\circ \biguplus J_X M.$$

Demonstração: Ver em [1], teorema 2.13. ■

Por conta da importância dos resultados apresentados acima, sempre que fizermos uso da aplicação de dualidade com função gauge, a tomaremos normalizada, ou seja, com $\mu(t) = t$ para $t \geq 0$.

Em [1, página 338] temos que a relação acima, assim como em espaços de Hilbert tem a decomposição em somas diretas, a soma ortogonal de James também define subespaços complementares no espaço de Banach X .

Ainda em [1], Alber traz as representações analíticas da aplicação de dualidade normalizada J_X para os espaços de Banach X uniformemente convexos e uniformemente suaves l^p , L^p e W_m^p para $1 < p < \infty$.

$$\begin{aligned} X = l^p &\Rightarrow J_X x = \|x\|_{l^p}^{2-p} y \in l^q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad x = \{x_1, x_2, \dots\}, \\ y &= \{x_1 |x_1|^{p-2}, x_2 |x_2|^{p-2}, \dots\}; \\ X = L^p &\Rightarrow J_X x = \|x\|_{L^p}^{2-p} |x|^{p-2} x \in L^q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \\ X = W_m^p &\Rightarrow J_X x = \|x\|_{W_m^p}^{2-p} \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (|D^\alpha x|^{p-2} D^\alpha x) \in W_{-m}^q. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

2.2 Operadores bilineares limitados e compactos

Sejam X , Y e Z espaços de Banach. Consideremos o produto cartesiano

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

que é também um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y).$$

Definição 2.2.1. Uma aplicação $T : X \times Y \rightarrow Z$ é chamada de **operador bilinear** se é linear em cada coordenada, isto é, para todos os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, temos:

1. $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1) = \alpha_1 T(x_1, y_1) + \alpha_2 T(x_2, y_1);$
2. $T(x_1, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 T(x_1, y_1) + \beta_2 T(x_1, y_2).$

Seja $Bil(X \times Y, Z)$ o conjunto dos operadores bilineares de $X \times Y$ em Z . Se $T, S \in Bil(X \times Y, Z)$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos $T + S$ e aT , aplicações de $X \times Y$ em Z , por

$$\begin{aligned}(T + S)(x, y) &= T(x, y) + S(x, y); \\ (aT)(x, y) &= aT(x, y),\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$. É fácil verificar que $T + S$ e aT são operadores bilineares, isto é, elementos de $Bil(X \times Y, Z)$. Concluimos que $Bil(X \times Y, Z)$, munido das leis de adição $(T, S) \mapsto T + S$ e de multiplicação por escalar $(a, T) \mapsto aT$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Em 2.2.1 definimos um operador bilinear $T \in Bil(X \times Y, Z)$ onde X, Y e Z são espaços de Banach. Seguindo a analogia com o caso linear, vamos mostrar que um operador bilinear $T \in Bil(X \times Y, Z)$ é contínuo se, e somente se, é limitado.

Definição 2.2.2. Um operador bilinear $T \in Bil(X \times Y, Z)$ é contínuo se é contínuo como uma aplicação entre dois espaços normados.

Como uma consequência desta definição, como no caso linear, temos o seguinte resultado que caracteriza os operadores bilineares contínuos.

Teorema 2.2.3. Seja $T \in Bil(X \times Y, Z)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. T é contínuo;
2. T é contínuo em $(0, 0)$;
3. existe uma constante $c > 0$ tal que $\|T(x, y)\|_Z \leq c\|x\|_X\|y\|_Y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2) É evidente.

2) $\Rightarrow$ 3) Assuma que 3) é falso. Então para todo $c > 0$, existem $x_c \in X$, $y_c \in Y$ tal que

$\|T(x_c, y_c)\|_Z > c\|x_c\|_X \|y_c\|_Y$. Particularmente, para $c = n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in X$, $y_n \in Y$ tal que

$$\|T(x_n, y_n)\|_Z > n\|x_n\|_X \|y_n\|_Y, \quad (2.2.8)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $T(x, 0) = T(0, y) = 0$ para todo $x \in X$, $y \in Y$, logo por (2.2.8), temos que $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim podemos considerar as sequências $a_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|_X} \in X$ e $b_n = \frac{y_n}{\sqrt{n}\|y_n\|_Y} \in Y$. Temos que $\|a_n\|_X \rightarrow 0$ e $\|b_n\|_Y \rightarrow 0$, portanto $(a_n, b_n) \rightarrow (0, 0)$ em $X \times Y$. Como T é contínua em $(0, 0)$, temos que

$$T(a_n, b_n) \rightarrow T(0, 0) = 0. \quad (2.2.9)$$

Mas $\|T(a_n, b_n)\|_Z = \frac{1}{n\|x_n\|_X \|y_n\|_Y} \|T(x_n, y_n)\|_Z > 1$ por (2.2.8), para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo por (2.2.9), temos uma contradição, portanto 3) é verdadeira.

3) $\Rightarrow$ 2) Seja $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ em $X \times Y$, isto é, $x_n \rightarrow 0$ em X e $y_n \rightarrow 0$ em Y . Temos

$$\|T(x_n, y_n)\|_Z \leq c\|x_n\|_X \|y_n\|_Y, \quad (2.2.10)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Visto que $\|x_n\|_X \rightarrow 0$ e $\|y_n\|_Y \rightarrow 0$, por (2.2.10), temos

$$T(x_n, y_n) \rightarrow 0 = T(0, 0),$$

ou seja, T é contínua em $(0, 0)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Seja $x, x_0 \in X$ e $y, y_0 \in Y$. Temos

$$\begin{aligned} T(x, y) - T(x_0, y_0) &= T(x, y) - T(x_0, y) + T(x_0, y) - T(x_0, y_0) \\ &= T(x - x_0, y) + T(x_0, y - y_0). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \|T(x, y) - T(x_0, y_0)\|_Z &\leq \|T(x - x_0, y)\|_Z + \|T(x_0, y - y_0)\|_Z \\ &\leq c \cdot (\|x - x_0\|_X \|y\|_Y + \|x_0\|_X \|y - y_0\|_Y). \quad (**) \end{aligned}$$

Seja $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ em $X \times Y$, isto é, $x_n \rightarrow x_0$ em X e $y_n \rightarrow y_0$ em Y , ou seja, $\|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0$ e $\|y_n - y_0\|_Y \rightarrow 0$, isto é, $\|x_n\|_X \rightarrow \|x_0\|_X$ e $\|y_n\|_Y \rightarrow \|y_0\|_Y$.

Portanto, temos que $(\|x_n\|_X)$ e $(\|y_n\|_Y)$ são sequências limitadas, isto é, existem constantes c_1 e c_2 tais que $\|x_n\|_X \leq c_1$ e $\|y_n\|_Y \leq c_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De (**) temos

$$\begin{aligned} \|T(x_n, y_n) - T(x_0, y_0)\|_Z &\leq c \cdot (\|x_n - x_0\|_X \|y_n\|_Y + \|x_0\|_X \|y_n - y_0\|_Y) \\ &\leq c \cdot (\|x_n - x_0\|_X c_2 + \|x_0\|_X \|y_n - y_0\|_Y). \end{aligned}$$

Portanto, se $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ então $T(x_n, y_n) \rightarrow T(x_0, y_0)$. Logo T é contínua em $(x_0, y_0) \in X \times Y$. ■

Se $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$, temos como consequência do item 3 do Teorema 2.2.3 que

$$\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \equiv \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x, y)\|_Z < \infty ,$$

e neste caso T será chamado de operador bilinear limitado. É simples verificar que $\|T\|$ é uma norma, e neste caso chamaremos de norma do operador. Se X, Y e Z são espaços de Banach, o espaço $\text{Bil}(X \times Y, Z)$ dotado da norma do operador também é um espaço de Banach.

Observação 2.2.4. Como consequência direta da definição, se $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$, então para todo $x \in X$ e $y \in Y$ temos $\|T(x, y)\|_Z \leq \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \|x\|_X \|y\|_Y$.

Definição 2.2.5. Seja $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$. Para todo $x \in X$ e $y \in Y$ fixos, os operadores $T_x = T(x, \cdot) : Y \rightarrow Z$ e $T_y = T(\cdot, y) : X \rightarrow Z$ são lineares por definição e são chamados de operadores lineares associados ao operador bilinear T .

Observação 2.2.6. Se $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$ então os operadores lineares T_x e T_y também são contínuos. A volta também vale nesse caso, pois X ou Y são espaços de Banach. Este fato é provado no livro de W. Rudin [25, Teorema 2.17]. A prova baseia-se no princípio de Banach-Steinhaus. No trabalho de A. Bényi e R. H. Torres [2] é dado um exemplo de um operador em que T_x e T_y são contínuos, mas T não é contínuo.

Proposição 2.2.7. Seja $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$. Então

$$\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x, y)\|_Z = \sup_{\|x\|_X = 1, \|y\|_Y = 1} \|T(x, y)\|_Z . \quad (2.2.11)$$

Demonstração: Seja

$$D = \{\|T(x, y)\|_Z : \|x\|_X = 1, \|y\|_Y = 1\} \text{ e } C = \{\|T(x, y)\|_Z : \|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1\} .$$

Temos $D \subset C$. Portanto

$$\sup_{\|x\|_X = 1, \|y\|_Y = 1} \|T(x, y)\|_Z = \sup D \leq \sup C = \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x, y)\|_Z . \quad (2.2.12)$$

Agora, seja $0 \neq x \in X$, $0 \neq y \in Y$, com $\|x\|_X \leq 1$ e $\|y\|_Y \leq 1$, então

$$\frac{\|T(x, y)\|_Z}{\|x\|_X \|y\|_Y} = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_X}, \frac{y}{\|y\|_Y} \right) \right\|_Z \leq \sup_{\|x'\|_X = 1, \|y'\|_Y = 1} \|T(x', y')\|_Z$$

e daí

$$\|T(x, y)\|_Z \leq \sup_{\|x'\|_X=1, \|y'\|_Y=1} \|T(x', y')\|_Z \|x\|_X \|y\|_Y .$$

Tomando o supremo, com $\|x\|_X \leq 1$ e $\|y\|_Y \leq 1$

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x, y)\|_Z \leq \sup_{\|x'\|_X=1, \|y'\|_Y=1} \|T(x', y')\|_Z . \quad (2.2.13)$$

Portanto de (2.2.12) e (2.2.13) concluímos a demonstração. $\blacksquare$

A seguir vamos definir uma classe especial de operadores bilineares que será de grande importância nos capítulos posteriores do trabalho. No que segue, escreveremos

$$B_{r,X} = \{x \in X : \|x\|_X \leq r\}$$

para indicar a bola fechada de raio $r > 0$ com centro na origem de um espaço normado X . Quando estiver claro no contexto o espaço normado X , iremos indicar $B_{r,X}$ simplesmente por B_r , e no caso $r = 1$, denotamos $B_{1,X}$ por U_X .

Definição 2.2.8. *Sejam X , Y e Z espaços vetoriais normados. Um operador bilinear $T : X \times Y \rightarrow Z$ é chamado de **operador bilinear compacto** se $T(U_X \times U_Y)$ é pré-compacto em Z , ou seja, o fecho $\overline{T(U_X \times U_Y)}$ é compacto em Z .*

Proposição 2.2.9. *Sejam X , Y e Z espaços vetoriais normados e $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. T é compacto;
2. $T(U_{X \times Y})$ é pré-compacto;
3. para todo $r > 0$, $T(B_{r, X \times Y})$ é pré-compacto;
4. para todo $r_1, r_2 > 0$, $T(B_{r_1, X} \times B_{r_2, Y})$ é pré-compacto;
5. para todo limitado $M \subset X \times Y$, $T(M)$ é pré-compacto;
6. para todo limitado $A \subset X$, $B \subset Y$, $T(A \times B)$ é pré-compacto;
7. para toda sequência limitada $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times Y$, a sequência $\{T(x_n, y_n)\}$ tem uma subsequência convergente em Z .

Além disso, se Z é um espaço de Banach, então 1. é também equivalente a:

8. para todo limitado $M \subset X \times Y$, $T(M)$ é totalmente limitado.

Demonstração: Ver o apêndice do trabalho de A. Bényi e R. H. Torres [2]. ■

O conjunto de todos operadores bilineares compactos $T : X \times Y \rightarrow Z$ será denotado por $KBil(X \times Y, Z)$, onde X, Y e Z são espaços vetoriais normados. Com esta notação temos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.10. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados. Se Z é um espaço de Banach, então $KBil(X \times Y, Z)$ é um subespaço fechado de $Bil(X \times Y, Z)$.*

Demonstração: Ver a Proposição 3 do trabalho de A. Bényi e R. H. Torres [2]. ■

Observação 2.2.11. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados e $T \in Bil(X \times Y, Z)$. Sejam T_x, T_y os operadores lineares definidos em 2.2.5. Se $T \in KBil(X \times Y, Z)$ então temos que os operadores lineares associados T_x e T_y também são compactos. Veremos no Exemplo 2.2.12 que se T_x e T_y forem compactos não temos necessariamente que T seja compacto, mesmo se X, Y e Z forem espaços de Banach. No trabalho de Ramanujan e Schock [20], temos na Proposição 2.1 uma condição necessária e suficiente que nos garante que se T_x e T_y forem compactos então T é compacto.*

Exemplo 2.2.12. *Sejam $x, y \in l^2$ tal que $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ e $z = \{z_n\} \in l^1$. Defina $T : l^2 \times l^2 \rightarrow l^1$ como*

$$T(x, y) = z \Leftrightarrow z_n = x_n y_n .$$

Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty , \end{aligned}$$

pois $x, y \in l^2$. Logo T é bilinear e está bem definido. Seja $x \in l^2$ fixo. Defina o operador linear $T_x^n : l^2 \rightarrow l^1$ como $T_x^n(y) = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n, 0, 0, \dots\}$. Temos que T_x^n é um operador de posto finito, logo compacto. Como $x \in l^2$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, logo temos que, para todo $y \in l^2$ com $\|y\|_2 = 1$

$$\|T_x^n(y) - T_x(y)\|_{l^1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i y_i| \rightarrow 0 , \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Logo T_x é compacto. O mesmo vale para o operador T_y , para todo $y \in l^2$ fixo.

Seja $\{e_n\}_n$ a base canônica de l^2 . Temos que $\{e_n, e_n\}_n$ é uma sequência limitada em $l^2 \times l^2$ e $T(e_n, e_n) = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\|e_i - e_j\|_{l^1} = 2$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ com $i \neq j$, então $\{e_n\}_n$ não tem subsequência convergente em l^1 , logo T não é compacto.

Exemplo 2.2.13. Seja $T \in \text{Bil}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, com n, m, p inteiros positivos. Temos que para todo limitado $B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $T(B)$ é pré-compacto em $\mathbb{R}^p$. Portanto $T \in \text{KBil}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.

No que segue, $c_0 = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}; a_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } a_n \rightarrow 0\}$.

Exemplo 2.2.14. Seja $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_0 \subset l^\infty$. Defina $T : l^2 \times l^2 \rightarrow l^1$ como, se $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in l^2$ e $z = \{z_n\} \in l^1$,

$$T(x, y) = z \Leftrightarrow z_n = a_n x_n y_n. \quad (2.2.14)$$

Note que o operador é bilinear e está bem definido, pois, devido a desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x_n| |y_n| \leq \|a\|_{l^\infty} \|x\|_{l^2} \|y\|_{l^2}.$$

Além disso, se $z = \{z_n\}$ como em (2.2.14), podemos definir

$$T_n : l^2 \times l^2 \rightarrow l^1, T_n(x, y) = \{z_1, z_2, \dots, z_n, 0, 0, \dots\}.$$

Visto que $T_n(l^2 \times l^2)$ está contido em um subespaço n -dimensional de l^1 , e que para qualquer subconjunto limitado U de $l^2 \times l^2$, temos que $T_n(U)$ é um subconjunto limitado de um subespaço n -dimensional de l^1 , concluímos que necessariamente $T_n(U)$ é pré-compacto. Assim, T_n é um operador bilinear compacto. Agora, para todo $x, y \in U_{l^2}$, temos

$$\|T_n(x, y) - T(x, y)\|_{l^1} = \|(0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots)\|_{l^1} = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| |x_j| |y_j|$$

implicando que $\|T_n - T\|_{\text{Bil}(l^2 \times l^2, l^1)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, pois $a_j \rightarrow 0$. Logo pela Proposição 2.2.10 concluímos que T é compacto.

2.3 Produto tensorial de espaços vetoriais

Vamos, baseado em Köthe ([13] e [14]) e Ryan [22], transcrever alguns conceitos e resultados do produto tensorial entre dois espaços vetoriais.

Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Seja o conjunto $\wedge(X \times Y)$, de todas as combinações linear finitas $\sum_{(x,y) \in X \times Y} (x,y)\alpha_{x,y}$ de elementos de $X \times Y$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. $\wedge(X \times Y)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com

$$\left[\sum (x,y)\alpha_{x,y} \right] \beta = \sum (x,y)\alpha_{x,y}\beta$$

$$e$$

$$\sum (x,y)\alpha_{x,y} + \sum (x,y)\beta_{x,y} = \sum (x,y)(\alpha_{x,y} + \beta_{x,y}).$$

O elemento zero é obtido quando todos os coeficientes $\alpha_{x,y}$ são iguais a zero. Escrevemos (x,y) por $(x,y)1$.

Agora seja o subespaço gerado pelo conjunto $\wedge_0$ em $\wedge(X \times Y)$ de todos os elementos da forma

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \sum_{k=1}^m y_k \beta_k \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (x_i, y_k) \alpha_i \beta_k \quad (2.3.15)$$

O espaço quociente $\wedge/\wedge_0$ é chamado **produto tensorial**, ou **produto direto**, $X \otimes Y$ de X e Y e os elementos, $(x,y)\alpha$, pertencente a esse espaço é denotado por $(x \otimes y)\alpha$.

De (2.3.15) segue o cálculo do produto tensorial em $X \times Y$.

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \otimes \sum_{k=1}^m y_k \beta_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (x_i \otimes y_k) \alpha_i \beta_k. \quad (2.3.16)$$

com $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$.

Na proposição seguinte são apresentadas propriedades as quais são demonstradas em [[13], página 77].

Proposição 2.3.1. *São válidas as seguintes propriedades:*

1. *O produto tensorial é comutativo; isto é, $X \times Y$ é isomorfo a $Y \times X$ com a correspondência $x \otimes y \leftrightarrow y \otimes x$.*
2. *Se $y_1, \dots, y_n$ são elementos linearmente independentes de Y , e se $\sum_{i=1}^n (x_i \otimes y_i) = 0$ então $x_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.*

3. Se $\{x_\nu\}$, $\nu \in N$, é uma base de X e $\{y_\mu\}$, $\mu \in M$, é uma base para Y , então $\{x_\nu \otimes y_\mu\}$, $(\nu, \mu) \in N \times M$, é base para $X \otimes Y$.
4. Se A e B são subespaços de X e Y respectivamente, então $A \otimes B$ é isomorfo a um subespaço linear de $X \otimes Y$ gerado pelos elementos $a \otimes b$, $a \in A$ e $b \in B$.
5. Todo elemento $z \neq 0$ de $X \otimes Y$ tem a representação $z = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$ onde os subconjuntos $\{x_i\}_{i=1}^r$ e $\{y_i\}_{i=1}^r$ são linearmente independentes em X e Y respectivamente.
6. O posto de um elemento $z \in X \otimes Y$ é igual ao posto da matriz $((\alpha_{\nu\mu}))$, para qualquer representação $z = \sum_\nu \sum_\mu (x_\nu \otimes y_\mu) \alpha_{\nu\mu}$ em termos das bases $\{x_\nu\}$ e $\{y_\mu\}$ de X e Y .

Segue do resultado acima que, se X e Y são espaços de dimensão finita, então

$$\dim(X \otimes Y) = \dim(X)\dim(Y). \quad (2.3.17)$$

Em [22] é apresentada a construção do produto tensorial de $X \times Y$ como subespaço de funcionais bilineares sobre $\mathcal{B}(X \times Y)$ da seguinte maneira: dados $x \in X$, $y \in Y$, denotaremos por $x \otimes y$ o funcional dado pela avaliação de uma forma bilinear A no ponto $(x, y) \in X \times Y$, isto é,

$$\begin{aligned} x \otimes y : \mathcal{B}(X \times Y) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto \langle A, x \otimes y \rangle_{\mathcal{B}(X \times Y)} = \langle (x, y), A \rangle_{X \times Y}. \end{aligned}$$

O funcional $x \otimes y$ é chamado *tensor elementar*. Temos ainda que o tensor é linear.

Definição 2.3.2. O subespaço do dual algébrico $\mathcal{B}(X \times Y)^\#$ gerado pelos elementos $x \otimes y$, com $x \in X$ e $y \in Y$, será chamado de **produto tensorial**, denotado por $X \otimes Y$, e chamaremos os elementos de $X \otimes Y$ de **tensores**.

$$\begin{aligned} X \otimes Y &= [x \otimes y : x \in X, y \in Y] \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i; n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in X, y_i \in Y, i = 1, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

Assim, um típico tensor em $X \otimes Y$ tem a forma

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i, \quad (2.3.18)$$

Observa-se que essa representação de u não é única.

Se $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ e $A \in \mathcal{B}(X \times Y)$, então a ação de u em A é dada por

$$u(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle (x_i, y_i), A \rangle_{X \times Y}. \quad (2.3.19)$$

Tal expressão não depende da representação de u .

Proposição 2.3.3. *Sejam X, Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ um corpo. Então*

1. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, para todos $x_1, x_2 \in X$ e $y \in Y$.
2. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, para todos $x \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$.
3. $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$, para todos $x \in X, y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$, para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Proposição 2.3.4. *Sejam $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ e $n \in \mathbb{N}$. São equivalentes:*

1. $u = 0$;
2. $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i) = 0$, para todos $\varphi \in X^\sharp, \psi \in Y^\sharp$;
3. $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) y_i = 0$, para todos $\varphi \in X^\sharp$;
4. $\sum_{i=1}^n \psi(y_i) x_i = 0$, para todos $\psi \in Y^\sharp$.

Demonstração: A demonstração das implicações pode ser vista em [22, Proposição 1.2].

No entanto destacaremos a implicação $(4) \Rightarrow (1)$.

Sejam $A : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear, $E = [x_1, \dots, x_n]$, $F = [y_1, \dots, y_n]$ subespaços de X e Y respectivamente, e $T : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ a restrição de A em $E \times F$. Escolhendo bases para os subespaços de dimensão finita E, F e expandindo T em relação a essas bases, produzimos uma representação para T da forma

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^m \theta_j(x) \omega_j(y), \quad (2.3.20)$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $\theta_j \in E^\sharp$ e $\omega_j \in F^\sharp$. Podemos estender o domínio de θ_j e ω_j para X e Y respectivamente da seguinte maneira: escolhendo complementos algébricos G, H para E e F respectivamente de tal modo que $X = E \oplus G$ e $Y = F \oplus H$. Então, se $x = x_1 + x_2 \in X$

com $x_1 \in E$ e $x_2 \in G$, definimos $\theta_j(x) = \theta_j(x_1)$. Definimos os funcionais ω_j da mesma forma. Agora, podemos considerar T como uma forma bilinear em $X \times Y$ usando a representação dada em (2.3.20). Em geral A e T são formas bilineares diferentes em $X \times Y$ mas que coincidem em $E \times F$. Assim, usando (4), para todo $A \in \text{Bil}(X \times Y)$ temos

$$\begin{aligned} u(A) &= \sum_{i=1}^n A(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_j(x_i) \omega_j(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_j(\omega_j(y_i) x_i) = \sum_{j=1}^m \theta_j \left(\sum_{i=1}^n \omega_j(y_i) x_i \right), \end{aligned}$$

e portanto $u = 0$. ■

Diz-se que um conjunto S de um espaço dual $X^\#$ é dito **separador de pontos** se ele contém funcionais lineares suficientes para distinguir os pontos de X , isto é, se $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in S$, então $x = 0$. Equivalentemente, se $x \neq y$ então $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, para todo $\varphi \in S$. Podemos usar tal fato para mostrar que $\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i = 0$ em $X^\# \otimes Y^\#$ é suficiente ter $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(y) = 0$, para todos $x \in X$ e $y \in Y$. De fato, considere que $\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i = 0$. Usando a proposição 2.3.4, temos que $\sum_{i=1}^n \theta(\varphi_i) \omega(\psi_i) = 0$, para todos $\theta \in X^{\#\#}$ e $\omega \in Y^{\#\#}$. Sendo $\kappa_X : X \rightarrow X^{\#\#}$ e $\kappa_Y : Y \rightarrow Y^{\#\#}$ mergulhos canônicos, como os conjuntos $\kappa_X(X)$ e $\kappa_Y(Y)$ são separadores de pontos de $X^\#$ e $Y^\#$ respectivamente, (Veja [3], exercício 4.5.11), temos assim

$$0 = \sum_{i=1}^n \kappa_X(x)(\varphi_i) \kappa_Y(y)(\psi_i) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(y),$$

para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Agora, sejam E e F subespaços dos espaços vetoriais de X e Y respectivamente. Então $E \otimes F$ pode ser considerado como um subespaço do produto tensorial $X \otimes Y$. Se $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, então podemos olhar u como elemento de $X \otimes Y$ dado por

$$u(A) = \sum_{i=1}^n A(x_i, y_i),$$

onde $A \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Isso nos dá uma aplicação injetiva de $E \otimes F$ em $X \otimes Y$. De fato, considere a aplicação inclusão $I : E \otimes F \rightarrow X \otimes Y$. Suponha que $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ em $X \otimes Y$. Pela demonstração da proposição 2.3.4, para cada forma bilinear T em $E \times F$, existe uma forma bilinear $A \in \mathcal{B}(X \times Y)$ tal que $\sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n A(x_i, y_i)$. Isso

implica que $\sum_{i=1}^n T(x_i, y_i) = 0$. Daí, segue que $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ em $E \otimes F$ e, portanto, I é injetiva.

2.3.1 Produto tensorial e linearização

Seja $A : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Recordamos que cada tensor $u \in X \otimes Y$ atua como um funcional linear no espaço das formas bilineares e, portanto, podemos definir uma aplicação

$$\begin{aligned}\tilde{A} : X \otimes Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \tilde{A}(u) = u(A).\end{aligned}$$

$\tilde{A}$ está bem definida e é um funcional linear em $X \otimes Y$. Além disso, temos $\tilde{A}(x \otimes y) = \langle A, x \otimes y \rangle = A(x, y)$ e segue que

$$\tilde{A}\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^n A(x_i, y_i).$$

Por outro lado, se $\psi : X \otimes Y \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que a composição de ψ com a aplicação bilinear $\theta : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$, definida por $\theta(x, y) = x \otimes y$, tem por resultado a forma bilinear A em $X \times Y$, isto é, $\psi \circ \theta = A = \tilde{A} \circ \theta$, então $\psi = \tilde{A}$. De fato, dado $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, temos

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^n \psi(x_i \otimes y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \psi(\theta(x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^n (\psi \circ \theta)(x_i, y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\tilde{A} \circ \theta)(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}(\theta(x_i, y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{A}(x_i \otimes y_i) = \tilde{A}\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = \tilde{A}(u).\end{aligned}$$

O que garante a unicidade do funcional linear $\tilde{A}$. Assim, as formas bilineares em $X \times Y$ estão em correspondência um a um com os funcionais lineares em $X \otimes Y$. Em resumo, temos

$$\mathcal{B}(X \times Y) = (X \otimes Y)^\sharp. \quad (2.3.21)$$

Podemos aplicar a mesma idéia às aplicações bilineares. Se $A : X \times Y \rightarrow Z$ é uma

aplicação bilinear, definimos uma aplicação $\tilde{A} : X \otimes Y \longrightarrow Z$ por

$$\tilde{A} \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n A(x_i, y_i).$$

$\tilde{A}$ está bem definida. De fato, suponha que $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$. Então, para cada $\varphi \in Z^\sharp$, a composição $\varphi \circ A$ é um funcional bilinear em $X \times Y$ e, portanto,

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n A(x_i, y_i) \right) = \sum_{i=1}^n \varphi \circ A(x_i, y_i) = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \varphi \circ A \right\rangle = 0.$$

E segue que $\sum_{i=1}^n A(x_i, y_i) = 0$. Portanto $\tilde{A}$ é bem definida. Assim a aplicação bilinear A é associada com a aplicação linear $\tilde{A}$ e temos a seguinte identificação.

$$\mathcal{B}(X \times Y, Z) = \mathcal{L}(X \otimes Y, Z).$$

Ou ainda

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{A} & Z \\ \theta \downarrow & \nearrow \tilde{A} & \\ X \otimes Y & & \end{array}.$$

A aplicação especial $\theta : X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$ age como uma aplicação bilinear universal. Toda aplicação bilinear em $X \times Y$ se fatora por θ via aplicação linear definida no produto tensorial $X \otimes Y$. Em resumo temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.5. *Sejam X , Y e Z espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$. Para cada aplicação bilinear $A : X \times Y \longrightarrow Z$ existe uma única aplicação linear $\tilde{A} : X \otimes Y \longrightarrow Z$ tal que $A(x, y) = \tilde{A}(x \otimes y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Além disso, a correspondência $A \longleftrightarrow \tilde{A}$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ e $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$.*

Fazendo uso da linearização exposta acima podemos definir o produto tensorial de aplicações lineares.

Definição 2.3.6. *Sejam $S : X \longrightarrow E$ e $T : Y \longrightarrow F$ aplicações lineares. Definimos a aplicação (linear) $S \otimes T : X \otimes Y \longrightarrow E \otimes F$, chamada produto tensorial das aplicações lineares S e T , como a linearização da aplicação $A : X \times Y \longrightarrow E \otimes F$ dada por $A(x, y) = S(x) \otimes T(y)$. Assim, temos $S \otimes T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.*

A aplicação produto tensorial $S \otimes T$ herda algumas propriedades de seus componentes.

Por exemplo, se S e T são injetivas (respectivamente, sobrejetivas), então $S \otimes T$ é injetiva (respectivamente, sobrejetiva).

2.3.2 Tensores como formas bilineares e como aplicações lineares

Inicialmente, definimos o produto tensorial $X \otimes Y$ como o espaço de funcionais lineares sobre o espaço $\mathcal{B}(X \times Y)$. Veremos agora que os tensores podem ser vistos como formas bilineares e como aplicações lineares.

Para cada $x \in X$ e $y \in Y$ associamos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B_{x,y} : X^\# \times Y^\# &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\phi, \varphi) &\longmapsto B_{x,y}(\phi, \varphi) = \phi(x)\varphi(y). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

A aplicação

$$\begin{aligned} A : X \times Y &\longrightarrow \mathcal{B}(X^\# \times Y^\#) \\ (x, y) &\longmapsto B_{x,y} \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

é bilinear, portanto, pela proposição 2.3.5, existe uma única aplicação $\tilde{A} : X \otimes Y \longrightarrow \mathcal{B}(X^\# \times Y^\#)$ que aplica $x \otimes y$ em $B_{x,y}$. Para vermos que a aplicação $\tilde{A}$ é injetiva, suponha que $\sum_{i=1}^n B_{x_i, y_i} = 0$. Então $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$, para todos $\varphi \in X^\#, \psi \in Y^\#$ e a proposição 2.3.4 assegura que $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ em $X \otimes Y$. Dessa forma, podemos ver canonicamente a inclusão

$$X \otimes Y \subset \mathcal{B}(X^\# \times Y^\#)$$

por meio da aplicação que associa cada tensor $x \otimes y$ à forma bilinear $B_{x,y}$.

Quando os espaços em questão são reflexivos, ($X^{\#\#} = X$ e $Y^{\#\#} = Y$), temos,

$$X^\# \otimes Y^\# \subset \mathcal{B}(X^{\#\#} \times Y^{\#\#}) \implies X^\# \otimes Y^\# \subset \mathcal{B}(X \times Y) = (X \otimes Y)^\#, \quad (2.3.24)$$

onde o tensor $\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i$ é identificado com a forma bilinear que aplica (x, y) em $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x)\psi_i(y)$. Dessa forma, devido a essa imersão canônica, poderemos considerar os tensores como formas bilineares quando assim for necessário.

Se X e Y são de dimensão finita, segue de (2.3.17) que

$$\dim(X^\# \otimes Y^\#) = \dim(X^\#)\dim(Y^\#) = \dim(X)\dim(Y) = \dim(X \otimes Y). \quad (2.3.25)$$

Portanto,

$$X^\# \otimes Y^\# = \mathcal{B}(X \times Y) = (X \otimes Y)^\#, \quad (2.3.26)$$

com a seguinte relação de dualidade entre os espaços $X \otimes Y$ e $X^\# \otimes Y^\#$:

$$\begin{aligned} \Phi : X^\# \otimes Y^\# &\longrightarrow (X \otimes Y)^\# \\ \varphi \otimes \psi &\longmapsto \Gamma : X \otimes Y \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \otimes y &\longmapsto \Gamma(x \otimes y) = \varphi \otimes \psi(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y). \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Neste caso, cada um dos produtos tensoriais $X \otimes Y$ e $X^\# \otimes Y^\#$ é o dual do outro, o qual será chamado de *dualidade tensorial*.

É possível ver os tensores como aplicações lineares da seguinte maneira: se B é uma forma bilinear em $X \times Y$, então podemos associar duas aplicações lineares com B , a aplicação $L_B : X \rightarrow Y^\#$, e a aplicação $R_B : Y \rightarrow X^\#$, definidas por

$$\langle y, L_B(x) \rangle = \langle x, R_B(y) \rangle = B(x, y).$$

Por (2.3.21) e pelas igualdades acima temos as seguintes identificações:

$$\mathcal{B}(X \times Y) = (X \otimes Y)^\# = \mathcal{L}(X, Y^\#) = \mathcal{L}(Y, X^\#). \quad (2.3.28)$$

Da mesma forma, pela proposição 2.3.5,

$$\mathcal{B}(X \times Y, Z) = \mathcal{L}(X \otimes Y, Z) = \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z)) = \mathcal{L}(Y, \mathcal{L}(X, Z)). \quad (2.3.29)$$

Com a definição 2.3.6 foi introduzido o produto tensorial $S \otimes T$ de duas aplicações lineares $S \in \mathcal{L}(X, E)$, $T \in \mathcal{L}(Y, F)$. Agora, seguindo [14], em §41.1, vamos determinar a estrutura do núcleo de $S \otimes T$.

Sejam M subespaço de X e N subespaço de Y . Denotando por $D[M, N]$ o subespaço de $X \otimes Y$ gerado pelos elementos $x \otimes y$, onde $x \in M$ ou $y \in N$, ou seja,

$$D[M, N] = M \otimes Y + X \otimes N. \quad (2.3.30)$$

Proposição 2.3.7. *Seja S, T aplicações lineares de X em E e Y em F , respectivamente. Então $S \otimes T$ é aplicação linear de $X \otimes Y$ em $E \otimes F$. O núcleo $Nuc(S \otimes T)$ é o espaço $D[N_1, N_2]$, onde $N_1 = Nuc(S)$, $N_2 = Nuc(T)$.*

Demonstração: A primeira parte da proposição é dada pela linearização da aplicação $A : X \times Y \longrightarrow E \otimes F$ dada por $A(x, y) = S(x) \otimes T(y)$ e ainda, por 2.3.6 e 2.3.4, vemos que $N = Nuc(S \otimes T) \supset D[N_1, N_2] = D$.

Seja agora

$$\begin{aligned}
 K : X \otimes Y &\rightarrow \frac{X \otimes Y}{D} & (2.3.31) \\
 x \otimes y &\mapsto \overline{x \otimes y}, & \overline{x \otimes y} = x \otimes y - (n_1 \otimes y + x \otimes n_2), \quad n_1 \in N_1 \text{ e } n_2 \in N_2 \\
 & & = \bar{x} \otimes y + x \otimes \bar{y}, & \bar{x} \in \frac{X}{N_1} \text{ e } \bar{y} \in \frac{Y}{N_2},
 \end{aligned}$$

a aplicação canônica de $X \otimes Y$ em $\frac{X \otimes Y}{D}$. Para $x_1, x_2 \in \bar{x} \in \frac{X}{N_1}$; então $x_1 \otimes y - x_2 \otimes y = (x_1 - x_2) \otimes y \in D$. Assim $K(x_1 \otimes y) = K(x_2 \otimes y)$. Analogamente, $K(x \otimes y_1) = K(x \otimes y_2)$ se $y_1, y_2 \in \bar{y} \in \frac{Y}{N_2}$ e concluímos que K define uma aplicação bilinear $K_o(\bar{x}, \bar{y})$ em $\frac{X}{N_1} \times \frac{Y}{N_2}$. Se $S = \bar{S}K_1$, onde K_1 é a aplicação canônica de X em $\frac{X}{N_1}$, e similarmente $T = \bar{T}K_2$, obtemos para $x_1 = \bar{S}\bar{x}$ e $y_1 = \bar{T}\bar{y}$, que

$$K(x \otimes y) = K_o(\bar{x}, \bar{y}) = K_o(\bar{S}^{-1}x_1, \bar{T}^{-1}y_1) = B_o(x_1, y_1),$$

onde B_o é uma aplicação bilinear de $E \times F$ em $\frac{X \otimes Y}{D}$. Assim $B_o(x_1, y_1) = \dot{B}_o(x_1 \otimes y_1)$, sendo $\dot{B}_o \in \mathcal{L}(E \otimes F, \frac{X \otimes Y}{D})$. Segue que

$$\dot{B}_o(x_1 \otimes y_1) = \dot{B}_o((S \otimes T)(x \otimes y)) = K(x \otimes y).$$

Portanto, se $z \in N$, então $\dot{B}_o((S \otimes T)z) = 0 = Kz$ ou $z \in D[N_1, N_2]$. ■

Uma segunda demonstração, mais simples, também é dada em [14], §41.1(6).

Demonstração: Existe decomposições $X = G \oplus Nuc(S)$, $Y = H \oplus Nuc(T)$. Para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
 x \otimes y &= (x_1 + x_2) \otimes (y_1 + y_2), \quad (x_1 \in G, x_2 \in Nuc(S), y_1 \in H, y_2 \in Nuc(T)) \\
 &= x_1 \otimes y_1 + [x_1 \otimes y_2 + x_2 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2] \\
 &= x_1 \otimes y_1 + t, \quad t \in D = D[Nuc(S), Nuc(T)].
 \end{aligned}$$

Portanto, $X \otimes Y = G \otimes H + D$. Temos então uma soma direta e $N \subset D$ para $(S \otimes T)z \neq 0$ para todo $z \in G \otimes H$, $z \neq 0$. De fato, seja z com a representação $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, $n \geq 1$, com $x_i \in G$ e $y_i \in H$ linearmente independentes. Desde que S e T têm correspondência um a um em G e H , respectivamente, então $\{Sx_i\}_{i=1}^n \in E$ e $\{Ty_i\}_{i=1}^n \in F$ são linearmente independentes e assim são $Sx_i \otimes Ty_i \in E \otimes F$. Portanto, $(S \otimes T)z = \sum_{i=1}^n Ax_i \otimes By_i \neq 0$. ■

Observação 2.3.8. A igualdade, $Nuc(S \otimes T) = D[Nuc(S), Nuc(T)]$, é válida para

aplicações arbitrárias S e T . Para tal, basta, em 2.3.7, alterar E e F por $R[S]$ e $R[T]$; o que não afeta o núcleo das aplicações.

Corolário 2.3.9. *Sejam K_1 e K_2 , aplicações canônicas de X em $\frac{X}{N_1}$ e de Y em $\frac{Y}{N_2}$, onde N_1 e N_2 são subespaços de X e Y , respectivamente. Então, $K_1 \otimes K_2$ é uma aplicação linear de $X \otimes Y$ em $\frac{X}{N_1} \otimes \frac{Y}{N_2}$ o qual induz o isomorfismo canônico $\bar{z} \rightarrow (K_1 \otimes K_2)z$ de $\frac{X \otimes Y}{D[N_1, N_2]}$ em $\frac{X}{N_1} \otimes \frac{Y}{N_2}$.*

2.3.3 A norma projetiva

Sejam X e Y espaços de Banach. Considerando um tensor elementar $x \otimes y \in X \otimes Y$, é natural exigir que a desigualdade

$$\|x \otimes y\|_{X \otimes Y} \leq \|x\|_X \|y\|_Y \quad (2.3.32)$$

seja satisfeita. Agora, considere $u \in X \otimes Y$ um tensor qualquer. Se $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ é uma representação de u , então decorre da desigualdade triangular que a norma satisfaz

$$\|u\|_{X \otimes Y} \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \|y_i\|_Y. \quad (2.3.33)$$

Como a desigualdade (2.3.33) deve ser válida para qualquer representação de u , tomando o ínfimo sobre todas as representações, segue que

$$\|u\|_{X \otimes Y} \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \|y_i\|_Y \right\}. \quad (2.3.34)$$

O fato do zero ser uma cota inferior para o conjunto $\{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \|y_i\|_Y\}$ faz com que o ínfimo tomado acima esteja bem definido. Como utilizamos a desigualdade triangular em (2.3.33), o lado direito da desigualdade (2.3.34) se torna o maior candidato possível para uma norma natural em $X \otimes Y$.

Definição 2.3.10. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada tensor $u \in X \otimes Y$, definimos a norma projetiva de u como*

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \|y_i\|_Y : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}, \quad (2.3.35)$$

Proposição 2.3.11. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então π é uma norma em $X \otimes Y$ e $\pi(x \otimes y) = \|x\|_X \|y\|_Y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.*

Demonstração: Ver [22], página 16. ■

Denota-se por $X \otimes_{\pi} Y$ o produto tensorial $X \otimes Y$ munido da norma projetiva.

Sendo X e Y espaços normados de dimensão finita então pode-se provar que $X \otimes_{\pi} Y$ é completo, o que não se pode afirmar caso X e Y não sejam de dimensão finita. Ou seja, se X e Y são espaços vetoriais de dimensão infinita, então o produto tensorial $X \otimes_{\pi} Y$ não é um espaço completo em geral. Assim, é denotado por $X \hat{\otimes}_{\pi} Y$ o completamento de $X \otimes_{\pi} Y$. O espaço de Banach $X \hat{\otimes}_{\pi} Y$ será chamado de produto tensorial projetivo dos espaços normados X e Y .

Ainda por [22] e [14] destacaremos, para o produto tensorial projetivo dos espaços normados X e Y , análogos da definição 2.3.6, da proposição 2.3.7, da observação 2.3.8 e do corolário 2.3.9 onde foram apresentadas para o produto tensorial algébrico entre os espaços vetoriais X e Y .

Proposição 2.3.12. *Sejam X, Y, W e Z espaços vetoriais normados e $S : X \rightarrow W$, $T : Y \rightarrow Z$ operadores contínuos. Então existe um único operador linear contínuo $S \otimes_{\pi} T : X \hat{\otimes}_{\pi} Y \rightarrow W \hat{\otimes}_{\pi} Z$ tal que $S \otimes_{\pi} T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Além disso, $\|S \otimes_{\pi} T\| = \|S\|_{\mathcal{L}(X,W)} \|T\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}$.*

O produto tensorial projetivo não respeita subespaços, isto é, se W é um subespaço do espaço Banach X , de tal forma que $W \otimes Y$ seja um subespaço algébrico de $X \otimes Y$, então a norma induzida em $W \otimes Y$ por $X \otimes_{\pi} Y$ não é, geralmente, a norma projetiva $\pi_{W,Y}(\cdot)$. No entanto temos que isso não acontece para espaços complementados, como veremos na proposição que segue.

Proposição 2.3.13. *Sejam E e F subespaços complementados de X e Y respectivamente. Então $E \otimes F$ é complementado em $X \otimes_{\pi} Y$ e a norma em $E \otimes F$ induzida pela norma projetiva de $X \otimes_{\pi} Y$ é equivalente à norma projetiva $\pi_{E,F}$. Se E e F são complementados por projeções de norma unitária, então $E \otimes_{\pi} F$ é um subespaço de $X \otimes_{\pi} Y$ que é também complementado por projeção de norma unitária.*

Demonstração: Sejam P, Q projeções de X, Y em E, F respectivamente. Tem-se que $P \otimes Q$ é a projeção de $X \otimes_{\pi} Y$ em $E \otimes F$. Seja $u \in E \otimes F$. Temos que $\pi_{X,Y}(u) \leq \pi_{E,F}(u)$. Agora, seja $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ a representação de u em $X \otimes Y$. Então $P \otimes Q(u) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \otimes$

$Q(y_i)$ é uma representação em $E \otimes F$. Portanto

$$\pi_{E,F}(u) \leq \sum_{i=1}^n \|Px_i\|_X \|Qy_i\|_Y \leq \|P\|_{\mathfrak{L}(X)} \|Q\|_{\mathfrak{L}(Y)} \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \|y_i\|_Y.$$

Sendo válido para toda representação de u em $X \otimes Y$, segue que

$$\pi_{X,Y}(u) \leq \pi_{E,F}(u) \leq \|P\|_{\mathfrak{L}(X)} \|Q\|_{\mathfrak{L}(Y)} \pi_{X,Y}(u).$$

Se E e F são complementados pelas projeções de norma unitária, então temos $\pi_{E,F}(u) = \pi_{X,Y}(u)$ para todo $u \in E \otimes F$. Além disso, $\|P \otimes Q\| = \|P\|_{\mathfrak{L}(X)} \|Q\|_{\mathfrak{L}(Y)} = 1$ e, portanto, $P \otimes Q$ é uma projeção unitária em $E \otimes F$. ■

Observação 2.3.14. em [14], §41.5(5), temos um resultado onde afirma que o produto tensorial projetivo de dois subespaços complementados de F_1 e F_2 , respectivamente, é um subespaço complementado do produto tensorial projetivo dos espaços F_1 e F_2 . Mais precisamente.

Proposição 2.3.15. *Seja F_1, F_2 espaços localmente convexos, P_1, P_2 projeções contínuas com imagens $P_1(F_1) = E_1, P_2(F_2) = E_2$ e núcleos N_1, N_2 . Então $P_1 \otimes P_2$ é uma projeção contínua de $F_1 \otimes_\pi F_2$ no subespaço $E_1 \otimes_\pi E_2$ com núcleo $D[N_1, N_2]$ e $P_1 \hat{\otimes}_\pi P_2$ é projeção contínua de $F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2$ no subespaço $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ com núcleo $\overline{D[N_1, N_2]}$, que é o fecho sobre $F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2$.*

Demonstração: Pela proposição 2.3.12 tem-se que $P_1 \otimes P_2$ é uma aplicação contínua tendo por imagem $E_1 \otimes E_2 \subset F_1 \otimes F_2$. Denotamos $E_1 \otimes E_2$, dotado com a topologia induzida por $F_1 \otimes_\pi F_2$ por $(E_1 \otimes E_2)_\pi$. Afirmamos que $(E_1 \otimes E_2)_\pi$ é isomorfo a $E_1 \otimes_\pi E_2$. Com efeito, sejam J_1, J_2 injeções de E_1, E_2 em F_1 e F_2 , respectivamente, então $J_1 \otimes J_2$ é uma injeção contínua de $E_1 \otimes_\pi E_2$ em $F_1 \otimes_\pi F_2$; assim a topologia de $E_1 \otimes_\pi E_2$ é mais fina que a topologia de $(E_1 \otimes E_2)_\pi$. Por outro lado, considerando P_1 e P_2 elementos de $\mathfrak{L}(F_1, E_1)$ e $\mathfrak{L}(F_2, E_2)$, respectivamente, então $P_1 \otimes P_2$ é uma aplicação contínua de $F_1 \otimes_\pi F_2$ em $E_1 \otimes_\pi E_2$; portanto a restrição à $(E_1 \otimes E_2)_\pi$ é contínua e a topologia de $(E_1 \otimes E_2)_\pi$ é mais fina que a topologia de $E_1 \otimes_\pi E_2$.

Isto prova a primeira parte e $F_1 \otimes_\pi F_2$ é a soma direta $E_1 \otimes_\pi E_2 \oplus D[N_1, N_2]$. Tendo que o completamento de tal soma é a soma direta dos subespaços completados, $F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2 = E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2 \oplus \overline{D[N_1, N_2]}$, implica assim a segunda parte. ■

Por [22] temos as seguinte definições e resultados.

Definição 2.3.16. *Seja $Q \in \mathfrak{L}(Z, Y)$. Dizemos que $Q : Z \longrightarrow Y$ é um operador quociente se Q é sobrejetor e $\|y\| = \inf\{\|z\|_Z : z \in Z, Q(z) = y\}$, ou equivalente, Q aplica a bola aberta unitária de Z na bola aberta unitária de Y .*

Ou seja, Y é isometricamente isomorfo ao espaço quociente $Z/\text{Nuc } Q$.

Proposição 2.3.17. *Sejam $Q \in \mathfrak{L}(W, X)$, $R \in \mathfrak{L}(Z, Y)$ operadores quocientes. Então $Q \otimes_\pi R : W \otimes_\pi Z \longrightarrow X \otimes_\pi Y$ é um operador quociente.*

Demonstração: Ver [22], página 19. ■

Definição 2.3.18. *Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que Y é um quociente de X se existe um subespaço fechado $W \subseteq X$ tal que $Y = X/W$.*

Corolário 2.3.19. *Sejam X_1, X_2, Y_1 e Y_2 espaços normados. Se Y_i é um quociente de X_i , para $i = 1, 2$, então $Y_1 \otimes_\pi Y_2$ é um quociente de $X_1 \otimes_\pi X_2$.*

Demonstração: Desde que, por hipótese, Y_i é um quociente de X_i para todo $i = 1, 2$, existem subespaços fechados $W_i \subseteq X_i$ tais que $Y_i = X_i/W_i$, $i = 1, 2$. Seja $\pi_i : X_i \rightarrow X_i/W_i$ as projeções canônicas (que são operadores quocientes). Da proposição 2.3.17, segue que, $\pi_1 \otimes_\pi \pi_2 : X_1 \otimes_\pi X_2 \longrightarrow Y_1 \otimes_\pi Y_2$ é um operador quociente. Portanto, $Y_1 \otimes_\pi Y_2 = \frac{X_1 \otimes_\pi X_2}{\text{Nuc}(\pi_1 \otimes_\pi \pi_2)}$, isto é, $Y_1 \otimes_\pi Y_2$ é um quociente de $X_1 \otimes_\pi X_2$. ■

Em [14], §41.5(8), tem-se

Proposição 2.3.20. *Seja E e F espaços metrizáveis, $\frac{E}{M}$ e $\frac{F}{N}$ dois quocientes. Então $\frac{E}{M} \hat{\otimes}_\pi \frac{F}{N}$ é isomorfo a $\frac{E \hat{\otimes}_\pi F}{D[M, N]}$. Se E e F são espaços normados, o isomorfismo é um isomorfismo isométrico.*

Demonstração: Em [14], página 190. ■

2.3.4 O espaço dual de $X \hat{\otimes}_\pi Y$.

Em 1.3.1 é apresentada a linearização de uma aplicação bilinear $A \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$. Temos que tal linearização é também aplicada ao produto tensorial projetivo entre os espaços X e Y .

Proposição 2.3.21. *Seja $B \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$ uma aplicação bilinear contínua. Então existe um único operador linear contínuo $\tilde{B} : X \hat{\otimes}_\pi Y \longrightarrow Z$, satisfazendo $\tilde{B}(x \otimes y) = B(x, y)$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Além disso, a correspondência $B \longleftrightarrow \tilde{B}$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços $\text{Bil}(X \times Y, Z)$ e $\mathfrak{L}(X \hat{\otimes}_\pi Y, Z)$.*

Demonstração: Ver [22], página 22. ■

Assim, temos a seguinte identificação canônica.

$$\text{Bil}(X \times Y, Z) = \mathfrak{L}(X \hat{\otimes}_\pi Y, Z).$$

Se Z for o corpo de escalares, temos uma identificação canônica do espaço dual do produto tensorial projetivo com o espaço das formas bilineares contínuas.

$$\text{Bil}(X \times Y) = (X \hat{\otimes}_\pi Y)^*. \quad (2.3.36)$$

Com a identificação acima, a ação de uma forma bilinear contínua B como um funcional bilinear contínuo em $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é dada por

$$B \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n B(x_i, y_i).$$

Essa dualidade produz uma nova fórmula para a norma projetiva:

$$\pi(u) = \sup\{|B(u)| : B \in \text{Bil}(X \times Y), \|B\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \leq 1\}. \quad (2.3.37)$$

A teoria da dualidade entre os produtos tensoriais projetivos e os espaços de formas bilineares contínuas pode ser formulada em termos de espaços de operadores lineares contínuos.

A cada forma bilinear contínua $B \in \text{Bil}(X \times Y)$ existe um operador linear contínuo associado $L_B \in \mathfrak{L}(X, Y^*)$ definido por $\langle y, L_B(x) \rangle = B(x, y)$. Tem-se que a aplicação $B \longrightarrow L_B$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços $\text{Bil}(X \times Y)$ e $\mathfrak{L}(X, Y^*)$. Assim, temos a identificação:

$$(X \hat{\otimes}_\pi Y)^* = \text{Bil}(X \times Y) = \mathfrak{L}(X, Y^*), \quad (2.3.38)$$

através da qual a ação de um operador linear contínuo $S : X \longrightarrow Y^*$ como um funcional linear em $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é dado por

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, S \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle y_i, Sx_i \rangle.$$

De modo análogo, temos outra identificação

$$(X \hat{\otimes}_\pi Y)^* = \text{Bil}(X \times Y) = \mathfrak{L}(Y, X^*), \quad (2.3.39)$$

onde a ação de $T \in \mathfrak{L}(Y, X^*)$ em $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é dada por

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, T \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, T y_i \rangle.$$

As identificações (2.3.38) e (2.3.39), produzem mais duas variações na fórmula de dualidade para a norma projetiva de um elemento de $X \hat{\otimes}_\pi Y$:

$$\begin{aligned} \pi(u) &= \{|S(u)| : S \in \mathfrak{L}(X, Y^*), \|S\|_{\mathfrak{L}(X, Y^*)} \leq 1\} \\ &= \{|T(u)| : T \in \mathfrak{L}(Y, X^*), \|T\|_{\mathfrak{L}(Y, X^*)} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Com ajuda dessa teoria da dualidade, agora examinamos novamente a questão de quando o produto tensorial projetivo respeita subespaços. A seguinte proposição é uma consequência direta da fórmula da dualidade em (2.3.37) e do teorema de Hahn-Banach.

Proposição 2.3.22. *Sejam W e Z subespaços de X e Y respectivamente. Então $W \hat{\otimes}_\pi Z$ é um subespaço de $X \hat{\otimes}_\pi Y$ se, e somente se, toda forma bilinear em $W \times Z$ se estende a uma forma bilinear em $X \times Y$ com a mesma norma.*

Se fixarmos o segundo subespaço componente e usarmos (2.3.38), a existência de extensões do tipo Hahn-Banach de formas bilineares implica em uma propriedade de extensões dos operadores lineares.

Corolário 2.3.23. *Seja W subespaço de X . Então $W \hat{\otimes}_\pi Y$ é um subespaço de $X \hat{\otimes}_\pi Y$ se, e somente se, todo operador de W em Y^* se estende a um operador de mesma norma de X em Y^* .*

Um espaço de Banach Z é dito *injetivo* se tem a seguinte propriedade: para todo espaço de Banach X e todo subespaço W de X , todo operador de W em Z estende a um operador de X em Z de mesma norma.

O corolário acima mostra que o produto tensorial projetivo com o espaço de Banach Y respeita subespaços se, e somente se, Y^* é um espaço injetivo.

2.3.5 Bases do produto tensorial

Bases de Schauder em espaços de Banach

Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. A sequência $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X é uma base de Schauder de X se, dado qualquer $x \in X$, existe única sequência de escalares $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n; \text{ ou seja, } \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^N x_n e_n \right\|_X = 0.$$

Dizemos que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência básica se $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder do subespaço linear fechado gerado pelos e_n . Se X tem uma base $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, o conjunto $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente e X é separável. Pela unicidade da sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definimos a sequência de funcionais lineares $e_n^* \in X^*$ dada por

$$e_n^*(x) = e_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \right) = x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tais funcionais são chamados *funcionais coordenadas*.

Definição 2.3.24. *Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Consideremos a sequência de operadores $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por*

$$P_n : X \rightarrow X; \quad P_n x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

onde $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in X$. Os P_n são chamados de *projeções canônicas associadas a base* $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Observação 2.3.25. *Note que $\|P_n\|_{\mathcal{L}(X)} \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato,*

$$\begin{aligned} \|P_n\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|P_n(x)\|_X \geq \left\| P_n \left(\frac{x_n}{\|x_n\|_X} \right) \right\|_X = \frac{1}{\|x_n\|_X} \|P_n(x_n)\|_X \\ &= \frac{1}{\|x_n\|_X} \left\| \sum_{i=1}^n e_i^*(x_n) e_i \right\|_X = \frac{1}{\|x_n\|_X} \|x_n\|_X = 1. \end{aligned}$$

Proposição 2.3.26. *As projeções canônicas $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associadas a base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ do espaço de Banach X são contínuas.*

Demonstração: Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ e cada $e_i \in X$ defina $e_i^* \otimes e_i : X \rightarrow X$ por $e_i^* \otimes e_i(x) = e_i^*(x) e_i$. Note que $e_i^* \otimes e_i = \iota_i \circ e_i^*$, onde $\iota_i : \mathbb{R} \rightarrow X$

é dada por $\iota_i(a) = ae_i$, para todo $a \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. Como ι_i e e_i^* são contínuas, segue que $e_i^* \otimes e_i$ é contínua. Além disso, para todo $x \in X$ temos que

$$P_n(x) = P_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i.$$

Ou seja, $P_n = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i$, concluimos que P_n é contínua. ■

Proposição 2.3.27. *Sejam $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ as projeções canônicas associadas a base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ do espaço de Banach X . Então $\sup_n \|P_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.*

Demonstração: Para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, como $P_n x = P_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e a sequência $\{\sum_{i=1}^n x_i e_i\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x , segue que a sequência $\{\|P_n\|_{\mathcal{L}(X)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada. Logo, para cada $x \in X$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|P_n(x)\|_X\} < \infty$. Como X é espaço de Banach e cada P_n é contínua, segue do Teorema de Banach-Steinhaus que $\sup_n \|P_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$. ■

Definição 2.3.28. *Sejam $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ as projeções canônicas associadas a base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ do espaço de Banach X . O número $\sup_n \|P_n\|_{\mathcal{L}(X)}$ é chamado de constante de base e é denotado por $K_{\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$.*

Teorema 2.3.29. *Sejam $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $\{e_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ seus funcionais coordenadas. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$1 \leq \|e_k^*\|_{X^*} \|e_k\|_X \leq 2K_{\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}}.$$

Demonstração: Considerando as projeções canônicas $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associadas a base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, segue que:

$$\begin{aligned} 1 &= |e_k^*(e_k)| \leq \|e_k^*\|_{X^*} \|e_k\|_X = \|e_k^* \otimes e_k\|_{X^* \otimes X} = \left\| \sum_{i=1}^k e_i^* \otimes e_i - \sum_{i=1}^{k-1} e_i^* \otimes e_i \right\|_{X^* \otimes X} \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^k e_i^* \otimes e_i \right\|_{X^* \otimes X} + \left\| \sum_{i=1}^{k-1} e_i^* \otimes e_i \right\|_{X^* \otimes X} = \|p_k\|_{\mathcal{L}(X)} + \|p_{k-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2 \sup_n \|P_n\|_{\mathcal{L}(X)} = 2K_{\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}}. \end{aligned}$$

■

Definição 2.3.30. *Sejam X um espaço de Banach e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequências em X e X^* , respectivamente. Dizemos que $\{y_n, y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal se $y_i^*(y_j) = \delta_{ij}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Neste caso, as funções $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dadas por*

$$P_n : X \rightarrow X; \quad P_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i^*(x) y_i$$

são chamadas projeções canônicas do sistema biortogonal $\{y_n, y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 2.3.31. *Sejam $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $\{e_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ seus funcionais coordenadas. $\{e_n\}$ é chamada de shrinking se $\overline{[e_n^*; n \in \mathbb{N}]} = X^*$, e é dito completamente contínuo se $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ converge sempre que $\sup_n \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_X < \infty$.*

Teorema 2.3.32. *Seja $\{e_n, e_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema biortogonal em um espaço de Banach X e considere as projeções $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associadas a $\{e_n, e_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é base de Schauder de X ;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x$ para todo $x \in X$;
3. $\overline{[e_n; n \in \mathbb{N}]} = X$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x)\|_X < \infty$ para todo $x \in X$;
4. $\overline{[e_n; n \in \mathbb{N}]} = X$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.

Demonstração: Ver [19], teorema 2.2.22. ■

Corolário 2.3.33. *Se $\{e_n, e_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal no espaço de Banach X e*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

então $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder de um subespaço fechado de X .

Demonstração: Ver [19], corolário 2.2.23. ■

Bases do Produto Tensorial

Sejam X e Y espaços de Banach com bases de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ respectivamente. O produto tensorial $e_n \otimes f_m$ pode ser ordenado como mostra o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
e_1 \otimes f_1 & \rightarrow & e_1 \otimes f_2 & & e_1 \otimes f_3 & & e_1 \otimes f_4 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
e_2 \otimes f_1 & \leftarrow & e_2 \otimes f_2 & & e_2 \otimes f_3 & & e_2 \otimes f_4 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
e_3 \otimes f_1 & \leftarrow & e_3 \otimes f_2 & \leftarrow & e_3 \otimes f_3 & & e_3 \otimes f_4 \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & \dots & e_4 \otimes f_3 & \leftarrow & e_4 \otimes f_4
\end{array} \tag{2.3.40}$$

Assim, a ordenação segue da forma $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_2, e_2 \otimes f_1, e_1 \otimes f_3, e_2 \otimes f_3, \dots$. Tal ordenação é chamada de ordenação quadrada.

Denote por P_n^1 e P_n^2 as projeções canônicas em X e Y respectivamente. Assim, $P_n^1 x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i$ e $P_n^2 y = \sum_{i=1}^n f_i^*(y)f_i$. Se $u = \sum_{i,j} a_{i,j}e_i \otimes f_j$ é uma soma finita em $X \otimes Y$, então os coeficientes $a_{i,j}$ são dados por $a_{i,j} = e_i^* \otimes f_j^*(u)$. Portanto, a projeção de u nas primeiras k coordenadas é dado por

$$P_k u = \sum_{(i,j) \in E_k} e_i^* \otimes f_j^*(u),$$

onde E_k é um conjunto dos primeiros k pares ordenados de índices (i, j) na ordenação quadrada. Ainda, se $k = n^2$, então $P_k = P_n^1 \otimes P_n^2$.

Sejam $A_{\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ e $B_{\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ constantes das bases de X e Y respectivamente. Então $\|e_n^* \otimes e_n\|_{X^* \otimes X} \leq 2A_{\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ e $\|f_n^* \otimes f_n\|_{Y^* \otimes Y} \leq 2B_{\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$. A norma projetiva satisfaz $\|S \otimes T\| = \|S\| \|T\|$ onde S e T são operadores. Portanto $\|P_k\|_{\mathcal{L}(X) \otimes \mathcal{L}(Y)} \leq 3A_{\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}} B_{\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Ainda, o produto tensorial $e_n \otimes f_n$ gera um espaço denso no produto tensorial projetivo. Temos assim,

Proposição 2.3.34. *Seja X e Y espaços de Banach com bases de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ respectivamente. Então, a sequência $\{e_n \otimes f_m\}_{n,m \in \mathbb{N}}$, com a ordenação quadrada, é uma base de Schauder para $X \hat{\otimes}_\pi Y$.*

2.3.6 Operadores e formas nucleares bilineares

Vimos por (2.3.26) que tensores podem ser vistos como formas bilineares por meio de aplicações canônicas lineares que associa a cada tensor $u = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i \in X^\# \otimes Y^\#$ a forma bilinear $B_u \in \text{Bil}(X \times Y)$ dado pela fórmula $B_u(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)\psi_i(y)$. Agora, se

X e Y são espaços de Banach, os elementos do produto tensorial $X^* \otimes Y^*$ definem formas bilineares limitadas em $X \times Y$ e assim obtemos um operador injetivo de norma unitária de $X^* \otimes_\pi Y^*$ em $Bil(X \times Y)$. Tomando a extensão deste operador ao completamento, teremos o operador

$$J : X^* \hat{\otimes}_\pi Y^* \longrightarrow Bil(X \times Y), \quad (2.3.41)$$

de norma unitária. Uma forma bilinear em $X \times Y$ é dita *nuclear* se pertence à imagem deste operador.

Na seguinte proposição, vista em [22], traz a representação dos elementos de um produto tensorial projetivo completo.

Proposição 2.3.35. *Sejam X e Y espaços de Banach, $u \in X \hat{\otimes}_\pi Y$ e $\epsilon > 0$. Então existem sequências limitadas $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ em X e Y , respectivamente, tais que a série $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ converge para u e*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y < \pi(u) + \epsilon.$$

Demonstração: Ver [22], página 21. ■

Em [14] também apresenta um resultado sobre tal representação:

Proposição 2.3.36. *Sejam X e Y espaços normados, u um elemento de $X \hat{\otimes}_\pi Y$. Então para todo $\epsilon > 0$, u tem a seguinte representação*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i (x_i \otimes y_i), \quad x_i \in X, \|x_i\|_X \leq 1, \quad y_i \in Y, \|y_i\|_Y \leq 1 \quad (2.3.42)$$

$$\text{e escalares } \gamma_i, i \in \mathbb{N}, \text{ tais que } \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| \leq \pi(u) + \epsilon.$$

Demonstração: Ver [14], página 183. ■

Segue das proposições acima que,

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y : \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y < \infty, u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \right\}, \quad (2.3.43)$$

o ínfimo sendo tomado sobre todas as representações de $u \in X \hat{\otimes}_\pi Y$. Existem outras variações dessa fórmula que são úteis. Por exemplo, podemos escrever u na forma $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i$ onde $\|x_i\|_X = \|y_i\|_Y = 1$ para todo i , ou mesmo como $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i x_i \otimes y_i$ onde $x_i \rightarrow 0$ e $y_i \rightarrow 0$. Temos as correspondentes fórmulas para a norma projetiva:

$$\begin{aligned}
\pi(u) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| : u = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| < \infty, \|x_i\|_X = \|y_i\|_Y = 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| \|x_i\|_X \|y_i\|_Y : u = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| < \infty, x_i, y_i \rightarrow 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.3.44}$$

Pela representação apresentada em (2.3.43), temos que uma forma bilinear é nuclear se, e somente se, existem sequências limitadas $\{\varphi_i\}$ e $\{\psi_i\}$ em X^* e Y^* respectivamente, satisfazendo $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{X^*} \|\psi_i\|_{Y^*} < \infty$, tal que

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \psi_i(y),$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$. A expressão na forma $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes \psi_i$ é dita uma representação nuclear de B .

A norma nuclear de B é definida por

$$\|B\|_N = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{X^*} \|\psi_i\|_{Y^*} : B(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \psi_i(y) \right\},$$

o ínfimo sendo tomado sobre todas as representações nucleares de B . Temos que

$$\|B\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \leq \|B\|_N$$

e segue que a norma nuclear é de fato uma norma. Denotaremos por $\text{Bil}_N(X \times Y)$ o espaço das formas nucleares bilineares com norma nuclear. Observa-se ainda que $\text{Bil}_N(X \times Y)$ é um espaço de Banach, no entanto, a aplicação

$$J : X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^* \longrightarrow \text{Bil}_N(X \times Y)$$

não é injetiva. De fato, seja $u \in X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^*$ e seja $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes \psi_i$ uma representação de u . Agora, se a correspondente forma bilinear B é zero, então $B(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \psi_i(y) = 0$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Mas, para deduzir que $u = 0$, devemos ter $\langle u, A \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} A(\varphi_i, \psi_i) = 0$ para todo $A \in \text{Bil}(X^* \times Y^*) = (X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^*)^*$. Em geral, estas condições não são equivalentes. O que "impede" de termos a igualdade $\text{Bil}_N(X \times Y) = X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^*$ é o núcleo de J :

$$\text{Nuc } J = \{u \in X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^* : B_u(x, y) = 0, \forall x \in X, y \in Y\}. \tag{2.3.45}$$

Olhando novamente para a definição da norma nuclear, vemos que é a norma quociente de $X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^* / \text{Nuc } J$ e, portanto, podemos dizer que

$$\text{Bil}_N(X \times Y) = X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^* / \text{Nuc } J. \tag{2.3.46}$$

Seguiremos a análise dos operadores e formas nucleares na próxima seção.

2.3.7 Propriedade de aproximação

Recordamos que a Proposição 2.3.1, as propriedades 5 e 6 versam sobre a representação e posto de um elemento $u \in X \otimes Y$. Da mesma forma, em [22, página 3], define o posto de $u \in X \otimes Y$, não nulo, como o menor número $n \in \mathbb{N}$ tal que exista uma representação de u contendo n termos, ou seja, $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$.

Vimos, pela Proposição 2.3.4, que um tensor de posto finito, $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$, é zero se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) y_i = 0 \quad (2.3.47)$$

para todo $\varphi \in X^*$. Consideremos agora o problema de identificar quando um elemento do produto tensorial completo $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é zero.

Seja $\sum_{i=1}^\infty x_i \otimes y_i$, uma representação para o tensor $u \in X \hat{\otimes}_\pi Y$, de modo que

$$\sum_{i=1}^\infty \varphi(x_i) y_i = 0, \quad \forall \varphi \in X^*. \quad (2.3.48)$$

Como observado na seção anterior, a igualdade (2.3.48) não garante $u = 0$. No entanto, como o dual de $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é $\text{Bil}(X \times Y) = \mathfrak{L}(X, Y^*)$, temos que $u = 0$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^\infty \langle y_n, T x_n \rangle = 0, \quad \forall T \in \mathfrak{L}(X, Y^*). \quad (2.3.49)$$

Segue de (2.3.47) que $\sum_{i=1}^\infty \langle y_n, T x_n \rangle = 0$ para todo operador de posto finito T . Agora, se X e Y são de dimensão infinita, teremos operadores que não são de posto finito. Assim, há uma lacuna entre as condições (2.3.47) e (2.3.48). Essa lacuna pode ser superada se for possível aproximar um operador arbitrário por um operador de posto finito ao menos para um conjunto $\{x_n\}$. Assumindo, sem perda de generalidade, que a sequência (x_n) tende a zero, então o conjunto $\{x_n\}$ é relativamente compacto e chegamos à seguinte condição no espaço X : todo operador de X em Y^* pode ser aproximado, em um subespaço compacto de X , por um operador de posto finito. Naturalmente, é uma formulação equivalente a (2.3.47) e que leva à uma formulação semelhante para operadores de Y a X^* .

Proposição 2.3.37. *Seja X um espaço de Banach, então os seguintes itens são equivalentes:*

1. Para todo subconjunto compacto K de X e todo $\epsilon > 0$, existe um operador de posto

finito $S : X \rightarrow X$ tal que $\|x - Sx\|_X \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.

2. Para todo espaço de Banach Y , todo operador $T : X \rightarrow Y$, todo subconjunto compacto K de X e todo $\epsilon > 0$, existe um operador de posto finito $S : X \rightarrow Y$ tal que $\|Tx - Sx\|_Y \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.

3. Para todo espaço de Banach Y , todo operador $T : Y \rightarrow X$, todo subconjunto compacto K de Y e todo $\epsilon > 0$, existe um operador de posto finito $S : Y \rightarrow X$ tal que $\|Ty - Sy\|_X \leq \epsilon$ para todo $y \in K$.

Demonstração: Ver [22], página 72. ■

É dito que um espaço de Banach X tem *propriedade de aproximação* se as equivalências da proposição acima sejam válidas para X .

Segue, ainda por [22], alguns resultados sobre propriedade de aproximação.

Proposição 2.3.38. *Suponha que exista uma sequência uniformemente limitada (T_n) de operadores de posto finito em X tal que $T_n x \rightarrow x$ para todo $x \in X$. Então X tem propriedade de aproximação.*

Demonstração: Ver [22], página 73. ■

Corolário 2.3.39. *Todo espaço de Banach com uma base de Schauder tem propriedade de aproximação.*

Demonstração: Seja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Schauder para X e seja e_n^* os funcionais coordenados associados. Para cada n , seja P_n o operador de posto finito em X dado por $P_n x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$. Então os operadores P_n são uniformemente limitados e $P_n x \rightarrow x$ para todo $x \in X$. Portanto X tem propriedade de aproximação. ■

Para a próxima proposição faz-se uso do seguinte lema, cuja demonstração pode ser conferida em [5], página 38.

Lema 2.3.40. *Seja K um subconjunto fechado de um espaço de Banach X . Então K é compacto se, e somente se, existe uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que $x_n \rightarrow 0$ e K está contido no fecho convexo $\overline{\text{conv}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} := C$ de x_n .*

Proposição 2.3.41. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. X tem propriedade de aproximação.
2. Seja $u = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \otimes x_n \in X^* \hat{\otimes}_{\pi} X$, onde (φ_n) , (x_n) são seqüências limitadas em X^* e X respectivamente, com $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|_{X^*} \|x_n\|_X < \infty$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) x_n = 0$ para todo $x \in X$, então $u = 0$.
3. Para todo espaço de Banach Y , seja $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X \hat{\otimes}_{\pi} Y$, onde (x_n) , (y_n) são seqüências limitadas em X e Y respectivamente, com $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \|y_n\|_Y < \infty$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) y_n = 0$ para todo $\varphi \in X^*$, então $u = 0$.
4. Para todo espaço de Banach Y , seja $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X \hat{\otimes}_{\pi} Y$, onde (x_n) , (y_n) são seqüências limitadas em X e Y respectivamente, com $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \|y_n\|_Y < \infty$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(y_n) x_n = 0$ para todo $\psi \in Y^*$, então $u = 0$.

Demonstração: 1 implica 4: Suponha que X tenha a propriedade de aproximação. Seja $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X \hat{\otimes}_{\pi} Y$, onde (x_n) e (y_n) são seqüências limitadas em X e Y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \|y_n\|_Y < \infty$, e suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(y_n) x_n = 0$ para todo $\psi \in Y^*$. Assuma, sem perda de generalidade, que $x_n \rightarrow 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y < \infty$. Seja $T \in \mathfrak{L}(X, Y^*) = (X \hat{\otimes}_{\pi} Y)^*$ e seja $\epsilon > 0$. Como X tem propriedade de aproximação, então existe um operador de posto finito, $S : X \rightarrow Y^*$, tal que $\|Tx_n - Sx_n\|_{Y^*} \leq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos $Sx = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \psi_i$, onde $\varphi_i \in X^*$ e $\psi_i \in Y^*$. Agora

$$\langle u, S \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_n) \psi_i(y_n) = \sum_{i=1}^m \varphi_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_i(y_n) x_n \right) = 0.$$

Portanto,

$$|\langle u, T \rangle| \leq |\langle u, T - S \rangle| + |\langle u, S \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n - Sx_n\|_{Y^*} \|y_n\|_Y \leq \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $\langle u, T \rangle = 0$ para todo $T \in \mathfrak{L}(X, Y^*)$. Portanto, $u = 0$.

4 implica 3: Suponha que $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \in X \hat{\otimes}_{\pi} Y$ satisfaz a condição dada. Então, para todo $\varphi \in X^*$ e $\psi \in Y^*$,

$$0 = \psi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) y_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \psi(y_n) = \psi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi(y_n) x_n \right).$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(y_n)x_n = 0$ para todo $\psi \in Y^*$, e assim, por 4, temos $u = 0$.

As demais implicações podem ser conferidas em [22], página 75. ■

Observe que $X^* \hat{\otimes}_{\pi} X$ é um subespaço de $X^* \hat{\otimes}_{\pi} X^{**}$. Aplicando este fato, juntamente com a observação de que X é um conjunto separador de pontos de X^* , obtemos:

Corolário 2.3.42. *Se X^* tem a propriedade de aproximação, então X também tem.*

O próximo corolário relaciona diretamente a propriedade de aproximação com (2.3.45) e (2.3.46).

Corolário 2.3.43. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se X^* ou Y^* tem propriedade de aproximação, então*

$$X^* \hat{\otimes}_{\pi} Y^* = \text{Bil}_N(X \times Y).$$

Pelo corolário 2.3.43, (2.3.45) e (2.3.46) nos diz que: Se X^* ou Y^* tem propriedade de aproximação então o $\text{Nuc } J$ é trivial.

A propriedade de aproximação pode ser formulada em termos da aproximação uniforme de operadores compactos. Observando que, um operador é dito aproximável se é limite, em norma, de uma sequência de operadores de posto finito.

Proposição 2.3.44. *Seja X um espaço Banach.*

1. *X tem propriedade de aproximação se, e somente se, para todo espaço de Banach Y , todo operador compacto de Y em X é aproximável.*
2. *X^* tem propriedade de aproximação se, e somente se, para todo espaço de Banach Y , todo operador compacto de X em Y é aproximável.*

A demonstração, que pode ser conferida em [22], página 79, usa o fato de $T : W \rightarrow Z$, um operador injetivo, então $T^*(Z^*)$ é denso em W^* para qualquer topologia localmente convexa em relação à qual o espaço dual de W^* é W . Em particular vale para a topologia de convergência uniforme nos subconjuntos compactos de W .

2.3.8 Reflexividade do produto tensorial

O produto tensorial de dois espaços reflexivos pode não ser reflexivo. Em [22], exemplo 2.10, mostra que, mesmo l_2 sendo reflexivo, o espaço $l_2 \hat{\otimes}_{\pi} l_2$ não o é.

Veremos a seguir condições para que o produto tensorial $X \hat{\otimes}_\pi Y$ seja reflexivo. Para tal, observamos que o dual do espaço $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é $\mathfrak{L}(X, Y^*)$, assim, para que $X \hat{\otimes}_\pi Y$ seja reflexivo é necessário e suficiente que $\mathfrak{L}(X, Y^*)$ seja.

Lema 2.3.45. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Uma sequência limitada $\{T_n\}$ em $\mathcal{K}(X, Y)$ converge fracamente a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ se, e somente se, a sequência $\{T_n x\}$ converge fracamente para Tx para todo $x \in X$.*

Demonstração: A condição é claramente necessária. Para a suficiência, consideremos o espaço compacto $K = B_X \times B_{Y^*}$, onde B_X e B_{Y^*} carregam, respectivamente, a topologia fraca e a fraca estrela. Para cada operador compacto $T : X \rightarrow Y$ definimos o funcional contínuo f_T , em K , dado por $f_T(x, \psi) = \langle Tx, \psi \rangle$, com $\|T\|_{\mathcal{K}(X, Y)} = \|f_T\|_\infty$. Portanto, $\mathcal{K}(X, Y)$ pode ser considerado um subespaço fechado de $C(K)$. Agora seja $\{T_n\}$ uma sequência limitada em $\mathcal{K}(X, Y)$ e suponha que $T_n x$ converge fracamente para Tx para todo $x \in X$. Então a sequência de funcionais f_{T_n} converge pontualmente para f_T . Além disso, a sequência é limitada em $C(K)$. Segue do teorema da representação de Riesz para o espaço dual de $C(K)^*$ e do teorema da convergência limitada que f_{T_n} converge fracamente para f_T em $C(K)$. Portanto $\{T_n\}$ converge fracamente para T em $\mathcal{K}(X, Y)$. ■

Teorema 2.3.46. *Sejam X e Y espaços de Banach reflexivos. Se todo operador de X em Y é compacto, então $\mathfrak{L}(X, Y)$ é reflexivo.*

Demonstração: Seja $\{T_n\}$ uma sequência na bola unitária fechada de $\mathfrak{L}(X, Y)$. Provaremos que $\{T_n\}$ tem uma subsequência fracamente convergente.

Inicialmente iremos supor que X é separável. Seja $\{x_k\}$ um subconjunto enumerável e denso de X . Pela reflexividade de Y , a sequência $\{T_n x_k\}_n$ tem uma subsequência fracamente convergente para todo k . Portanto, existe uma subsequência $\{T_{n_j}\}$ de $\{T_n\}$ tal que a sequência $\{T_{n_j} x_k\}_j$ converge para todo k . Segue que a sequência $\{T_{n_j} x\}$ converge fracamente para todo $x \in X$. De fato, seja $x \in X$ e seja $\epsilon > 0$. Escolhendo k tal que $\|x - x_k\|_X < \epsilon/2$, teremos

$$T_{n_r} x - T_{n_s} x = (T_{n_r} - T_{n_s})(x - x_k) + (T_{n_r} x_k - T_{n_s} x_k)$$

para todos r e s . Como

$$\|(T_{n_r} - T_{n_s})(x - x_k)\|_Y < \epsilon$$

para todos r e s , segue que a sequência $\{T_{n_j}x\}$ é fracamente de Cauchy em Y .

Definimos $T : X \rightarrow Y$ tomando Tx o limite fraco da sequência $\{T_{n_j}x\}$ e segue do princípio da limitação uniforme que $T \in \mathfrak{L}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)$ [4, Corolário 2.12]. Aplicando o lema acima, vemos que $\{T_{n_j}\}$ converge fracamente para T .

Agora abandonando a condição que X é separável. Cada operador adjunto $T_n^* : Y^* \rightarrow X^*$ é compacto e, como resultado, $T_n^*(Y^*) \subset X^*$ é separável. Portanto, existe um subespaço separável Z de X^* , tal que $T_n^*(Y^*) \subset Z$ para todo n . Seja Q um operador quociente de X em $X/^\circ Z$. Temos que $X/^\circ Z$ é um espaço reflexivo e separável, já que é espaço dual de Z . Além disso, cada operador T_n fatora através desse espaço quociente. De fato, seja $x \in X$ e suponha que $Qx = 0$, isto é, $x \in ^\circ Z$. Então, para todo $\psi \in Y^*$, teremos

$$\langle T_n x, \psi \rangle = \langle x, T_n^* \psi \rangle = 0.$$

Segue que $T_n x = 0$ para todo n . Portanto, existe um operador $S_n : X/^\circ Z \rightarrow Y$ tal que $S_n Q = T_n$ e $\|S_n\| \leq 1$ para todo n . Agora, $Q(B_X)$ é denso na bola unitária fechada de $X/^\circ Z$ e assim todo operador de $X/^\circ Z$ em Y é compacto. Pela primeira parte da demonstração, $\{S_n\}$ tem uma subsequência $\{S_{n_j}\}$ que converge fracamente para algum operador S . Então, pelo lema anterior, a sequência $\{T_{n_j}\}$ converge fracamente para $T = SQ$. ■

A implicação contrária também é válida desde que assumindo que um dos espaços tenha a propriedade de aproximação.

Teorema 2.3.47. *Sejam X e Y espaços de Banach reflexivos, onde um dos quais tem a propriedade de aproximação. Se $\mathfrak{L}(X, Y)$ é reflexivo, então todo operador de X em Y é compacto.*

Demonstração: Suponha que exista um operador $T : X \rightarrow Y$ não compacto. Então existe uma sequência $\{x_n\}$ na bola unitária de X que converge fracamente para x , e a sequência $\{Tx_n\}$ não converge em norma. Tomando uma subsequência adequada da sequência $\{x_n - x\}$, obtemos a sequência $\{w_n\}$ que converge fracamente para zero e $\delta > 0$, tal que $\|Tw_n\| \geq \delta$ para todo n . Agora, como $(X \hat{\otimes}_\pi Y^*)^* = \mathfrak{L}(X, Y)$, temos que $X \hat{\otimes}_\pi Y^*$

é reflexivo. Portanto, a sequência limitada $\{w_n \otimes \psi_n\}$ tem uma subsequência $\{w_{n_k} \otimes \psi_{n_k}\}$ que converge fracamente para algum $u \in X \hat{\otimes}_\pi Y^*$. Como $\langle w_{n_k} \otimes \psi_{n_k}, T \rangle \geq \delta$ para todo k , assim $\langle u, T \rangle \geq \delta$.

Se $\varphi \in X^*$ e $y \in Y$, então

$$\langle w_{n_k} \otimes \psi_{n_k}, \varphi \otimes y \rangle = \varphi(w_{n_k})\psi_{n_k}(y) \rightarrow 0,$$

e portanto $\langle u, \varphi \otimes y \rangle = 0$. Assim, u é zero quando considerado como uma forma bilinear em $X^* \times Y$. Contudo, como X ou Y^* tem propriedade de aproximação, por 2.3.43, a aplicação canônica de $X \hat{\otimes}_\pi Y^*$ em $Bil(X^* \times Y)$ é injetora. Desta forma $u = 0$ em $X \hat{\otimes}_\pi Y^*$, o que implica $\langle u, T \rangle = 0$ e obtendo assim uma contradição. ■

Ainda em [22], teorema 4.21, diz que: se X^* ou Y^* tem propriedade de aproximação então $X \hat{\otimes}_\pi Y$ é reflexivo se, e somente se, todo operador de X em Y^* é compacto, ou seja, $\mathcal{K}(X, Y^*) = \mathfrak{L}(X, Y^*)$.

Representação de Operadores Bilineares

Neste capítulo temos por objetivo obter uma representação de um operador bilinear completamente contínuo $T : X \times Y \rightarrow Z$, onde X, Y e Z são espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. Trataremos o caso em que T não tem dimensão finita. Num primeiro momento, vamos fazer uso de alguns argumentos usados por Edmunds e Evans para o caso linear e chegarmos à uma representação similar ao obtido em [5]. Seguindo, faremos uso da teoria do produto tensorial, trazida em partes na seção 1.3 deste texto, para termos algumas identificações de espaços e também informações de comportamento de formas bilineares nucleares e, novamente, chegando que a representação é, também, assim justificada.

3.1 Uma decomposição para os espaços $X, Y, X \times Y$ e Z

Ruch, em [23], define a aplicação $\kappa : X \times Y \rightarrow Bil(X \times Y)^*$.

$$\begin{aligned} \kappa : X \times Y &\rightarrow Bil(X \times Y)^* \\ (x, y) &\mapsto \kappa_{(x,y)} : Bil(X \times Y) \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \kappa_{(x,y)}(\alpha) = \alpha(x, y) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Com $\kappa_{(x,y)} \in Bil(X \times Y)^*$ e $\alpha \in Bil(X \times Y)$.

Agora, para cada $x \in X$ definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}
\Gamma_x &: Bil(X \times Y) \rightarrow Y^* \\
\alpha &\mapsto \Gamma_x(\alpha) = \alpha_x : Y \rightarrow \mathbb{R} \\
y &\mapsto \alpha_x(y) = \alpha(x, y)
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Da mesma forma, definimos, para cada $y \in Y$

$$\begin{aligned}
\Gamma_y &: Bil(X \times Y) \rightarrow X^* \\
\alpha &\mapsto \Gamma_y(\alpha) = \alpha_y : X \rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \alpha_y(x) = \alpha(x, y)
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Proposição 3.1.1. *Seja $x_0 \in X$ não nulo, então $\Gamma_{x_0} : Bil(X \times Y) \rightarrow Y^*$ é sobrejetora.*

Demonstração: Seja $\beta \in Y^*$. Dado $x_0 \in X$, pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x_0) = 1$.

Defina

$$\alpha(x, y) = \varphi(x)\beta(y),$$

então

$$\Gamma_{x_0}(\alpha) \in Y^*$$

e

$$\Gamma_{x_0}(\alpha)(y) = \alpha_{x_0}(y) = \alpha(x_0, y) = \varphi(x_0)\beta(y) = \beta(y), \quad \forall y \in Y.$$

Desta forma, dado $\beta \in Y^*$, existe $\alpha \in Bil(X \times Y)$ tal que

$$\Gamma_{x_0}(\alpha) = \beta,$$

implicando que Γ_{x_0} é sobrejetora, para todo $x_0 \neq 0$. ■

Analogamente verifica-se que $\Gamma_{y_0} : Bil(X \times Y) \rightarrow X^*$ é sobrejetora para todo $y_0 \in Y$ não nulo.

Para $x \in X$, o núcleo do operador $\Gamma_x : Bil(X \times Y) \rightarrow Y^*$ é dado por

$$\begin{aligned}
Nuc \Gamma_x &= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \Gamma_x(\alpha) = 0_Y^*\} \\
&= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \alpha_x = 0_Y^*\} \\
&= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \alpha(x, y) = 0, \quad \forall y \in Y\}.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Da mesma forma, para $y \in Y$

$$\begin{aligned}
Nuc \Gamma_y &= \{\beta \in Bil(X \times Y); \Gamma_y(\beta) = 0_X^*\} \\
&= \{\beta \in Bil(X \times Y); \beta_y = 0_X^*\} \\
&= \{\beta \in Bil(X \times Y); \beta(x, y) = 0, \forall x \in X\}.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Sendo X e Y espaços de Banach e M , N subespaços fechados de X e Y respectivamente, por (2.1.4) definimos:

$$\begin{aligned}
M^Y &= \bigcap_{x \in M} Nuc \Gamma_x \\
&= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \Gamma_x(\alpha) = 0_Y^*, \forall x \in M\} \\
&= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \alpha_x = 0_Y^*, \forall x \in M\} \\
&= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \alpha(x, y) = 0, \forall x \in M, \forall y \in Y\} \\
&= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \alpha_y \in M^\circ \subset X^*, \forall y \in Y\}.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
N^X &= \bigcap_{y \in N} Nuc \Gamma_y \\
&= \{\beta \in Bil(X \times Y); \Gamma_y(\beta) = 0_X^*, \forall y \in N\} \\
&= \{\beta \in Bil(X \times Y); \beta_y = 0_X^*, \forall y \in N\} \\
&= \{\beta \in Bil(X \times Y); \beta(x, y) = 0, \forall y \in N, \forall x \in X\} \\
&= \{\beta \in Bil(X \times Y); \beta_x \in N^\circ \subset Y^*, \forall x \in X\}.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Por (3.1.6) e (3.1.7) definimos o subespaço anulador de $M \times N \subset X \times Y$ em $Bil(X \times Y)$,

$$\begin{aligned}
(M \times N)^\circ &= M^Y \cap N^X \\
&= \{\alpha \in Bil(X \times Y); \alpha(x, y) = 0; \alpha_x \in N^\circ, \forall x \in X \text{ e } \alpha_y \in M^\circ, \forall y \in Y\}.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Proposição 3.1.2. $(M \times N)^\circ$ é subespaço fechado de $Bil(X \times Y)$.

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta \in (M \times N)^\circ$ e $\lambda \in R$. Então, para $m \in M$ e $y \in Y$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \lambda\beta)(m, y) &= \alpha(m, y) + \lambda\beta(m, y) \\
&= 0 + 0,
\end{aligned}$$

pois $\alpha, \beta \in M_Y$. Da mesma forma, se $x \in X$ e $n \in N$ temos

$$(\alpha + \lambda\beta)(x, n) = 0,$$

onde, também, $\alpha, \beta \in N_X$. Logo, $\alpha + \lambda\beta \in (M \times N)^\circ$.

Agora, seja $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (M \times N)^\circ$ tal que $\alpha_k \rightarrow \alpha \in \text{Bil}(X \times Y)$, ou seja,

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}; \|\alpha_k - \alpha\|_{\text{Bil}(X \times Y)} < \epsilon, \forall k > k_0. \quad (3.1.9)$$

Suponha que $\alpha \notin (M \times N)^\circ$. Assim, $\alpha_x \notin N^\circ, \forall x \in X$ e $\alpha_y \notin M^\circ, \forall y \in Y$. Desta forma, sem perda de generalidade, existe $m \in M$ e $y \in Y$ com $\alpha(m, y) \neq 0$. Podemos supor também que $\|m\|_X = \|y\|_Y = 1$. Temos ainda que $\alpha_k(m, y) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Assim, para $\epsilon = |\alpha(m, y)| > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, satisfaz (3.1.9). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\alpha_k - \alpha\|_{\text{Bil}(X \times Y)} &= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \{ |(\alpha_k - \alpha)(x, y)| \} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \{ |(\alpha_k(x, y) - \alpha(x, y))| \} \\ &\geq |(\alpha_k(m, y) - \alpha(m, y))| = |\alpha(m, y)| = \epsilon. \end{aligned}$$

Obtendo assim uma contradição. Logo, $(M \times N)^\circ$ é fechado. ■

Proposição 3.1.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e subespaços fechados $M \subset X$ e $N \subset Y$. Então $(M \times N)^\circ$ é isomorfo a $\text{Bil}(\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N})$.*

Demonstração: Defina a aplicação

$$\begin{aligned} F : (M \times N)^\circ &\rightarrow \text{Bil}(\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N}) \\ \alpha &\mapsto F(\alpha). \end{aligned}$$

Onde $F(\alpha)(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(x, y)$.

1. $F(\alpha)$ está bem definida.

Se $x_1, x_2 \in \bar{x}, y_1, y_2 \in \bar{y}$, teremos que

$$x_1 = x + m_1, \quad x_2 = x + m_2, \quad y_1 = y + n_1, \quad y_2 = y + n_2,$$

com $m_1, m_2 \in M$ e $n_1, n_2 \in N$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, y_1) &= \alpha(x + m_1, y + n_1) \\ &= \alpha(x, y) + \alpha(x, n_1) + \alpha(m_1, y) + \alpha(m_1, n_1) \\ &= \alpha(x, y) \end{aligned}$$

Da mesma forma $\alpha(x_2, y_2) = \alpha(x, y)$. Obtendo então $\alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$.

2. $F(\alpha)$ é bilinear pois α é bilinear.

3. F é linear.

Sejam α e $\beta \in (M \times N)^\circ$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} F(\alpha + \lambda\beta)(\bar{x}, \bar{y}) &= (\alpha + \lambda\beta)(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= \alpha(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda\beta(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= F(\alpha)(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda F(\beta)(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= (F(\alpha) + \lambda F(\beta))(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned}$$

para todo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \frac{X}{M} \times \frac{Y}{N}$. Logo obtemos que $F(\alpha + \lambda\beta) = F(\alpha) + \lambda F(\beta)$.

4. F é limitada.

De fato,

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup_{\substack{\alpha \in (M \times N)^\circ \\ \|\alpha\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = 1}} \|F(\alpha)\|_{\text{Bil}(\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N})} \\ &= \sup_{\substack{\alpha \in (M \times N)^\circ \\ \|\alpha\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = 1}} \left\{ \sup_{\|(\bar{x}, \bar{y})\|_{\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N}} \leq 1} \{|F(\alpha)(\bar{x}, \bar{y})|\} \right\} \\ &= \sup_{\substack{\alpha \in (M \times N)^\circ \\ \|\alpha\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = 1}} \left\{ \sup_{\|(x, y)\|_{X \times Y} \leq 1} \{|\alpha(x, y)|\} \right\} \\ &= \sup_{\substack{\alpha \in (M \times N)^\circ \\ \|\alpha\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = 1}} \{\|\alpha\|_{\text{Bil}(X \times Y)}\} = 1. \end{aligned}$$

Como F é limitada, ela é contínua. Além disso,

5. F é injetora.

Com efeito, sejam $\alpha, \beta \in (M \times N)^\circ$. Suponha que $F(\alpha) = F(\beta)$. Então,

$$\begin{aligned} F(\alpha)(\bar{x}, \bar{y}) &= F(\beta)(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \frac{X}{M} \times \frac{Y}{N} \\ \Rightarrow \alpha(x, y) &= \beta(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y. \end{aligned}$$

Assim $\alpha = \beta$, implicando que F é injetora.

6. F é sobrejetora.

Seja $s \in \text{Bil}(\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N})$. Defina

$$\beta(x, y) = s(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

β é bilinear, pois, para $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \beta(x_1 + kx_2, y) &= s((x_1 + kx_2), \bar{y}) \\ &= s(\bar{x}_1 + k\bar{x}_2, \bar{y}) \\ &= s(\bar{x}_1, \bar{y}) + ks(\bar{x}_2, \bar{y}) \\ &= \beta(x_1, y) + k\beta(x_2, y). \end{aligned}$$

E o mesmo para a segunda coordenada.

Agora vamos olhar a norma no quociente.

Se $\|x\|_X \leq 1$, então

$$\|\bar{x}\|_{X/M} = \inf_{m \in M} \{\|x - m\|_X\} \leq \|x - 0\|_X = \|x\|_X \leq 1.$$

Logo, $\|\bar{x}\|_X \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\beta\|_{\text{Bil}(X \times Y)} &= \sup_{\|(x, y)\|_{X \times Y} \leq 1} \{|\alpha(x, y)|\} \\ &= \sup_{\|(x, y)\|_{X \times Y} \leq 1} \{|s(\bar{x}, \bar{y})|\} \\ &\leq \sup_{\|(\bar{x}, \bar{y})\|_{\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N}} \leq 1} \{|s(\bar{x}, \bar{y})|\} \\ &= \|s\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \leq \infty \end{aligned}$$

Portanto, β é contínua.

Por fim, afirmamos que $\beta \in (M \times N)^\circ$. Com efeito, seja $x \in M$. Então, $\bar{x} \equiv \bar{0} \in \frac{X}{M}$. Assim, para qualquer $y \in Y$,

$$\beta(x, y) = s(\bar{x}, \bar{y}) = s(\bar{0}, \bar{y}) = 0.$$

Da mesma forma, para $y \in N$. Então, $\bar{y} \equiv \bar{0} \in \frac{Y}{N}$ e, para qualquer $x \in X$,

$$\beta(x, y) = s(\bar{x}, \bar{y}) = s(\bar{x}, \bar{0}) = 0.$$

Portanto, por (3.1.8), temos a afirmação confirmada.

Sabemos que, para E e F espaços de Banach e $A : E \rightarrow F$ uma aplicação linear e limitada. Então A é um isomorfismo se, e somente se, A é bijetora. Assim, como $(M \times N)^\circ$, por 3.1.2, é um subespaço fechado do espaço de Banach $\text{Bil}(X \times Y)$, portanto, um espaço de Banach. Como provado acima, a aplicação $F : (M \times$

$N)^\circ \rightarrow \text{Bil} \left(\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N} \right)$ é linear, limitada e bijetora. Logo, F é um isomorfismo e $(M \times N)^\circ \cong \text{Bil} \left(\frac{X}{M} \times \frac{Y}{N} \right)$.

■

Exemplo 3.1.4. *Seja* $\alpha : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$
 $((x, y, z, w), (a, b, c, d)) \rightarrow a.x + d.w$

$$\alpha((x, y, z, w), (a, b, c, d)) = a.x + d.w = 0 = (x, w).(a, d).$$

Para qualquer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$\alpha_{(a,b,c,d)}(x, y, w, z) = 0 \Leftrightarrow 0 = a.x + d.w = (0, y, z, 0).(a, b, c, d),$$

ou seja, $x = w = 0$ e $y, z \in \mathbb{R}$. E, para qualquer $(w, y, z, d) \in \mathbb{R}^4$,

$$\alpha_{(x,y,z,w)}(a, b, c, d) = 0 \Leftrightarrow 0 = a.x + d.w = (x, y, z, w).(0, b, c, 0),$$

temos, $a = d = 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

Sejam $N_1^\alpha = \{(0, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$ e $N_2^\alpha = \{(0, b, c, 0) \in \mathbb{R}^4\}$. Desta forma podemos dizer que $\alpha \in (N_1^\alpha \times N_2^\alpha)^\circ$.

Em [15], nas hipóteses do teorema 1.1, que generaliza o teorema de Lax-Milgram, se define, em (ii), o que são chamados de espaços nulos K^X e K^Y . No que segue, para $\beta \in \text{Bil}(X \times Y)$, sejam:

$$K^X := \{u \in X; \beta(u, v) = 0, \forall v \in Y\} \quad (3.1.10)$$

$$K^Y := \{v \in Y; \beta(u, v) = 0, \forall u \in X\}.$$

Da definição acima, de (2.1.5), (3.1.6), (3.1.7) e (3.1.8) podemos definir os anuladores de M^Y e N^X .

$${}^\circ M^Y := \{x \in X; \langle (x, y), \alpha \rangle = 0, \forall \alpha \in M^Y \text{ e } \forall y \in Y\} \quad (3.1.11)$$

$${}^\circ N^X := \{y \in Y; \langle (x, y), \alpha \rangle = 0, \forall \alpha \in N^X \text{ e } \forall x \in X\} \quad (3.1.12)$$

Com isto, definiremos o anulador de $(M \times N)^\circ$ em $X \times Y$.

$${}^\circ[(M \times N)^\circ] := \{(x, y) \in X \times Y; \langle (x, y), \alpha \rangle = 0, \forall \alpha \in (M \times N)^\circ\}. \quad (3.1.13)$$

Podemos ver (3.1.13) como sendo formado pelos elementos $(x, y) \in X \times Y$ tais que $x \in {}^\circ M^Y$ ou $y \in {}^\circ N^X$. Desta forma, podemos escrever:

$${}^\circ[(M \times N)^\circ] := (M \times Y) \cup (X \times N). \quad (3.1.14)$$

3.2 Operadores bilineares completamente contínuos

Operadores lineares completamente contínuos são aqueles que levam seqüências fracamente convergentes em seqüências convergentes em norma. Em [24], Ruch define os operadores completamente contínuos para o caso multilinear. Seguindo, e restringindo ao caso bilinear, temos:

Definição 3.2.1. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Um operador bilinear $T : X \times Y \rightarrow Z$ é chamado de completamente contínuo se $x_k \rightharpoonup x_0$ e $y_k \rightharpoonup y_0$ implica que $T(x_k, y_k) \rightarrow T(x_0, y_0)$.*

É sabido que, para o caso linear, se $T : X \rightarrow Y$ é compacto, para toda seqüência fracamente convergente $\{u_n\}$ em X , $u_n \rightharpoonup u$, implica $Tu_n \rightarrow Tu$. Isto é, se T é compacto então é completamente contínuo. No entanto, para operadores multilineares esta implicação pode não ser válida. Nesse sentido Ruch traz, em [24], o seguinte exemplo.

Exemplo 3.2.2. *Seja o operador $B : H \times H \rightarrow H$, onde H é um espaço de Hilbert com seqüência ortonormal $\{e_i\}$ e produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definido por: $B(x, y) = \langle x, y \rangle e_1$. B é de posto finito, portanto compacto. Agora, $e_i \rightharpoonup 0$ mas $\|B(e_i, e_i)\|_{\text{Bil}(H \times H, H)} = 1$ para todo i . Assim, B não é completamente contínuo.*

É sabido também que, para X e Y espaços de Banach, com X reflexivo, se $T : X \rightarrow Y$ é completamente contínuo então T é compacto. Novamente por [24], no teorema 3.1, prova-se o equivalente para o caso multilinear. Reproduziremos este resultado para operadores bilineares.

Teorema 3.2.3. *Seja X, Y e Z espaços de Banach, com X e Y reflexivos. Se $M \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$ é completamente contínuo, então M é compacto.*

Demonstração: Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ seqüências em $U_X \subset X$ e $U_Y \subset Y$ respectivamente. Pela reflexividade de X e Y , temos que existem subsequências $\{x_{n_k}\}$ e $\{y_{n_k}\}$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ e $y_{n_k} \rightharpoonup y_0$. Por hipótese, $M(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow M(x_0, y_0)$. Portanto, M é compacto. ■

Sejam H e K espaços de Hilbert sobre o corpo dos reais e $T : H \rightarrow K$ um operador linear limitado. Temos a seguinte definição, dada em [18]:

Definição 3.2.4. *Um número positivo τ é dito ser valor singular do operador $T : H \rightarrow K$ se existem vetores unitários $x \in H$ e $y \in K$ tal que*

$$T(x) = \tau y \quad e \quad T^*(y) = \tau x$$

onde $T^* : K \rightarrow H$ é o operador adjunto de T . Temos:

$$\begin{aligned} T^*(T(x)) &= T^*(\tau y) = \tau(T^*(y)) = \tau^2 x \\ T(T^*(y)) &= T(\tau x) = \tau(T(x)) = \tau^2 y. \end{aligned}$$

Portanto τ^2 é autovalor de (T^*T) e (TT^*) . Note que T e T^* têm os mesmos valores singulares.

Agora, considerando H_1 , H_2 e K espaços de Hilbert separáveis sobre o corpo dos reais. Tendo como motivação a definição de valor singular para o caso linear, Silva et al., em [27], traz a definição de valor singular de um operador bilinear $T \in \text{Bil}(H_1 \times H_2, K)$, como segue:

Definição 3.2.5. *Dado $T \in \text{Bil}(H_1 \times H_2, K)$, sejam*

$$\phi_{H_1} : H_2 \rightarrow \mathfrak{L}(H_1, K)$$

$$\phi_{H_2} : H_1 \rightarrow \mathfrak{L}(H_2, K)$$

definidos como: se $x \in H_1$, $y \in H_2$, temos

$$\phi_{H_1}(y)(x) = T(x, y)$$

$$\phi_{H_2}(x)(y) = T(x, y).$$

Definição 3.2.6. *Um número positivo τ é um valor singular de $T \in \text{Bil}(H_1 \times H_2, K)$, se existem elementos normalizados $x_0 \in H_1$, $y_0 \in H_2$ e $z_0 \in K$ tal que*

$$T(x_0, y_0) = \tau z_0$$

$$\phi_{H_1}^*(y_0)(z_0) = \tau x_0$$

$$\phi_{H_2}^*(x_0)(z_0) = \tau y_0$$

onde

$$\phi_{H_1}(y_0): H_1 \rightarrow K, \quad \phi_{H_2}(x_0): H_2 \rightarrow K, \quad \phi_{H_1}^*(y_0): K \rightarrow H_1 \quad \text{e} \quad \phi_{H_2}^*(x_0): K \rightarrow H_2.$$

Neste caso, dizemos que (x_0, y_0, z_0) é uma terna de vetores singulares associados ao valor singular τ .

Como no caso linear, Silva et al., mostra que se o operador bilinear, $T \in \text{Bil}(H_1 \times H_2, K)$, for compacto então existe pelo menos um valor singular.

Teorema 3.2.7. *Seja $T \in \text{Bil}(H_1 \times H_2, K)$ compacto. Se $T \neq 0$, então $\tau = \|T\|_{\text{Bil}(H_1 \times H_2, K)}$ é um valor singular de T .*

Demonstração: Ver [27], teorema 2. ■

Em Edmunds e Evans [5, Proposição 2.2.3] prova-se que, para X e Y espaços de Banach e $T: X \rightarrow Y$ compacto, então existe $x_1 \in X$, com $\|x_1\|_X = 1$, tal que $\|T\|_{\mathfrak{L}(X, Y)} = \|Tx_1\|_Y$. Nesse sentido, apresentamos resultado análogo para operadores bilineares completamente contínuos, entre espaços de Banach X e Y em Z com X e Y reflexivos. Observamos aqui que, pelo exemplo 3.2.2 e pelo teorema 3.2.3, o teorema a seguir pode ser visto como uma generalização do teorema 3.2.7.

Teorema 3.2.8. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach com X e Y reflexivos, $T: X \times Y \rightarrow Z$ bilinear e completamente contínuo. Então existe $(x_1, y_1) \in X \times Y$, com $\|x_1\|_X = \|y_1\|_Y = 1$, tal que $\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \|T(x_1, y_1)\|_Z$.*

Demonstração: Sabemos, pela proposição 2.2.7, que $\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \sup_{\|x\|_X=1, \|y\|_Y=1} \|T(x, y)\|_Z$. Portanto existe uma sequência $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in X \times Y$, com $\|x_k\|_X = \|y_k\|_Y = 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(x_k, y_k)\|_Z = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}$.

Sendo X e Y reflexivos, então $U_X \subset X$ e $U_Y \subset Y$ são compactos na topologia fraca. Desta forma, existem subsequências $\{x_{k'}\}, \{y_{k'}\}$ tais que $x_{k'} \rightharpoonup x$ e $y_{k'} \rightharpoonup y$ em U_X e U_Y , respectivamente. Ainda, temos que

$$\begin{aligned} \|x\|_X &\leq \liminf \|x_{k'}\|_X \leq 1 \\ &\text{e} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

$$\|y\|_Y \leq \liminf \|y_{k'}\|_Y \leq 1.$$

Como T é completamente contínuo, então

$$T(x_{k'}, y_{k'}) \rightarrow T(x, y) \quad (3.2.16)$$

e assim, $\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \lim_{k' \rightarrow \infty} \|T(x_{k'}, y_{k'})\|_Z = \|T(x, y)\|_Z$ e, pela proposição 2.2.7, fazendo $(x, y) = (x_1, y_1)$, temos assim $\|x_1\|_X = \|y_1\|_Y = 1$ com $\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \|T(x_1, y_1)\|_Z$.

■

Ramanujan e Schock em [20], apresenta no lema 2.2 um resultado, o qual é consequência direta do seguinte corolário do teorema de Hahn-Banach na sua forma analítica e que o enunciaremos como lema.

Lema 3.2.9. *Seja E um espaço vetorial normado. Então, para cada $x_0 \in E$, existe uma forma $f_0 \in E^*$ tal que $\|f_0\|_{E^*} = \|x_0\|_E$ e $\langle x_0, f_0 \rangle = \|x_0\|_E^2$.*

Demonstração: Ver [4], página 29. ■

Observação 3.2.10. *Em 3.2.9, definindo $f_1 \in E^*$, tal que $f_1 = \frac{f_0}{\|x_0\|_E}$, se $\|x_0\|_E \neq 0$ e $f_1 = 0$, caso contrário. Então, $\|f_1\|_{E^*} = 1$ e $\langle x_0, f_0 \rangle = \|x_0\|_E$.*

Devido a importância que o lema de Ramanujan e Schock terá na sequência do texto o apresentaremos como proposição.

Proposição 3.2.11. *Sejam X e Y espaços de Banach; para $(x_0, y_0) \in X \times Y$, existe um funcional bilinear contínuo ϕ em $X \times Y$ tal que $\|\phi\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = 1$ e*

$$\phi(x_0, y_0) = \|x_0\|_X \|y_0\|_Y, \text{ se } \|x_0\|_X \|y_0\|_Y \neq 0 \text{ e } \phi = 0, \text{ caso contrário.}$$

Demonstração: A prova segue direto do lema 3.2.9 e da observação 3.2.10 onde, para $(x_0, y_0) \in X \times Y$, $\phi \in \text{Bil}(X \times Y)$ é definido como $\phi(x, y) = x^*(x) y^*(y)$, $\forall (x, y) \in X \times Y$, com

$$\begin{aligned} x^*(x_0) &= \|x_0\|_X, \quad x^* \in X^*, \\ y^*(y_0) &= \|y_0\|_Y, \quad y^* \in Y^* \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

e $\|x^*\|_{X^*} = \|y^*\|_{Y^*} = 1$. ■

Como definido em 2.1.10, tendo X e Y espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves, temos que os funcionais $\tilde{J}_X x_0$ e $\tilde{J}_Y y_0$ satisfazem a condição (3.2.17), ou seja: $x^* = \tilde{J}_X x_0$, $y^* = \tilde{J}_Y y_0$ e, assim:

$$\begin{aligned} x^*(x_0) &= \left\langle x_0, \tilde{J}_X x_0 \right\rangle_X = \|x_0\|_X, \\ y^*(y_0) &= \left\langle y_0, \tilde{J}_Y y_0 \right\rangle_Y = \|y_0\|_Y, \end{aligned}$$

com $\|\tilde{J}_X x_0\|_{X^*} = \|\tilde{J}_Y y_0\|_{Y^*} = 1$. Com isto, podemos definir o funcional bilinear $\tilde{J}_{X \times Y}(x_0, y_0) \in \text{Bil}(X \times Y)$ como:

$$\phi = \tilde{J}_{X \times Y}(x_0, y_0) \in \text{Bil}(X \times Y), \quad (3.2.18)$$

onde ϕ é o funcional satisfazendo a proposição 3.2.11. Assim,

$$\phi(x_0, y_0) = \left\langle (x_0, y_0), \tilde{J}_{X \times Y}(x_0, y_0) \right\rangle_{X \times Y} = \|x_0\|_X \|y_0\|_Y, \quad \|x_0\|_X \|y_0\|_Y \neq 0$$

e, para $(x, y) \in X \times Y$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= x^*(x) y^*(y) \\ &= \left\langle x, \tilde{J}_X x_0 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_0 \right\rangle_Y \\ &= \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_0, y_0) \right\rangle_{X \times Y}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_0, y_0) \right\rangle_{X \times Y} = \left\langle x, \tilde{J}_X x_0 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_0 \right\rangle_Y. \quad (3.2.19)$$

Tomando $(x_1, y_1) \in X \times Y$ obtidos no teorema 3.2.8, tal que $\|T(x_1, y_1)\|_Z = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}$. Teremos assim $\tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \in \text{Bil}(X \times Y)$ tal que, para todos $(x, y) \in X \times Y$,

$$\left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} = \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y. \quad (3.2.20)$$

Em particular, se $(x, y) = (x_1, y_1)$,

$$\begin{aligned} \left\langle (x_1, y_1), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} &= \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\ &= \|x_1\|_X \|y_1\|_Y = 1. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Considerando [15] e as hipóteses do teorema 1.1, em (ii), (1.2) e (1.3) definem, para X e Y espaços de Banach reflexivos, os subespaços nulos $K^X \subset X$ e $K^Y \subset Y$ associados à forma bilinear β , como definidos em (3.1.10). Ainda por (ii), existem subespaços fechados $R^X \subset X$ e $R^Y \subset Y$ tais que:

$$X = K^X \oplus R^X \quad (3.2.22)$$

$$Y = K^Y \oplus R^Y.$$

Desta forma, por (3.2.20), fazendo $\beta = \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \in \text{Bil}(X \times Y)$, obtemos:

$$\begin{aligned} K^X &= \{x \in X; \langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \rangle_{X \times Y} = 0, \forall y \in Y\} \\ &= \{x \in X; \langle x, \tilde{J}_X x_1 \rangle_X \langle y, \tilde{J}_Y y_1 \rangle_Y = 0, \forall y \in Y\} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

e

$$\begin{aligned} K^Y &= \{y \in Y; \langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \rangle_{X \times Y} = 0, \forall x \in X\}. \\ &= \{y \in Y; \langle x, \tilde{J}_X x_1 \rangle_X \langle y, \tilde{J}_Y y_1 \rangle_Y = 0, \forall x \in X\}. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Faremos aqui algumas observações que serão importantes na sequência do texto.

Observação 3.2.12. *Edmunds e Evans, em [5], página 73, relaciona a aplicação de dualidade $\tilde{J}_X$ com a aplicação de dualidade com função gauge μ , definida em 2.1.6.*

$$J_X x := \mu(\|x\|_X) \tilde{J}_X x, \quad x \in X \setminus \{0\}, \quad J_X(0) = 0. \quad (3.2.25)$$

Sendo $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, contínua, estritamente crescente com $\mu(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty$. Como mencionado no final da primeira seção do capítulo 1, tomamos a aplicação de dualidade com função de gauge normalizada. Assim, para $x_1 \in U_X$ e $y_1 \in U_Y$ obtidos acima, temos que

$$J_X x_1 := \mu(\|x_1\|) \tilde{J}_X x_1 \quad (3.2.26)$$

e

$$J_Y y_1 := \mu(\|y_1\|) \tilde{J}_Y y_1. \quad (3.2.27)$$

Como $\mu(\|x_1\|) = \mu(\|y_1\|) = \mu(\|1\|) = 1$. Por (3.2.26) e (3.2.27), teremos então $J_X x_1 := \tilde{J}_X x_1$ e $J_Y y_1 := \tilde{J}_Y y_1$.

Definindo $X_1 = X$, $\lambda_1 = \|T(x_1, y_1)\|_Z = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}$ e chamando $K^Y = X_2 \subset X$, ou seja,

$$X_2 = \left\{ x \in X; \langle x, \tilde{J}_X x_1 \rangle_X = 0 \right\}. \quad (3.2.28)$$

Temos assim, pela definição 2.1.10 e pela proposição 2.1.13, que $[x_1] \perp^j X_2$.

Da mesma forma, definindo $Y_1 = Y$ e chamando $K^Y = Y_2 \subset Y$, onde

$$Y_2 = \left\{ y \in Y; \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = 0 \right\}, \quad (3.2.29)$$

teremos $[y_1] \perp^j Y_2$.

Observação 3.2.13. .

1. Pela definição do semi-produto interno em 2.1.11, por (3.2.28) e (3.2.29) temos que

$$(x_1, x) = \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X = 0, \quad \forall x \in X_2$$

e

$$(y_1, y) = \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = 0, \quad \forall y \in Y_2.$$

2. Pelas observações que seguem de (3.2.28) e (3.2.29), ou seja, $[x_1] \perp^j X_2$ e $[y_1] \perp^j Y_2$, pela definição 2.1.24 e pelo teorema 2.1.25, teremos que $X = X_2 \uplus J_X^{-1} X_2^\circ$ e $Y = Y_2 \uplus J_Y^{-1} Y_2^\circ$.

Destacamos aqui, em relação às aplicações de dualidade $\tilde{J}$, a aplicação de dualidade com função gauge μ e em específico a aplicação de dualidade normalizada a qual é usada nesse texto. Temos por objetivo principal a obtenção de uma representação de operadores bilineares completamente contínuo em espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves, desta forma necessitamos de ferramentas que possibilite estabelecer critérios de ortogonalidade e reproduza, o mais próximo, ao produto interno em espaços de Hilbert. Neste sentido temos o semi-produto interno que equivale a aplicação do funcional $\tilde{J}$ nesses espaços com as referidas condições. Assim, mesmo tendo a equivalência, para o caso normalizado, usaremos o funcional $\tilde{J}$, menos em casos que se aplica os teoremas 2.1.16 e 2.1.25.

Desta forma, tomamos

$$M_1^X = X_2^\circ = [J_X x_1] \subset X^* \quad \text{e} \quad M_1^Y = Y_2^\circ = [J_Y y_1] \subset Y^*. \quad (3.2.30)$$

Com isto, pela definição 2.1.24 e pelo teorema 2.1.25, obtemos as seguintes decomposições: $X = X_2 \uplus [x_1]$ e $Y = Y_2 \uplus [y_1]$. Assim, pela observação em [[1], página 338], a soma ortogonal de James define subespaços complementares em espaços de Banach. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} X &= X_2 \oplus [x_1] = X_2 \oplus R_1^X \quad \text{e} \\ Y &= Y_2 \oplus [y_1] = Y_2 \oplus R_1^Y, \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

onde $R_1^X = [x_1] = J_X^{-1}X_2^\circ$ e $R_1^Y = [y_1] = J_Y^{-1}Y_2^\circ$, os quais satisfazem (3.2.22) para $\tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \in (X_2 \times Y_2)^\circ$.

Ainda, por (3.1.8) e (3.1.13), teremos:

$$(X_2 \times Y_2)^\circ = \{\alpha \in \text{Bil}(X \times Y); \alpha(x, y) = 0; \alpha_y \in M_1^X, \forall y \in Y \text{ e } \alpha_x \in M_1^Y, \forall x \in X\} \quad (3.2.32)$$

e

$$\begin{aligned} {}^\circ[(X_2 \times Y_2)^\circ] &= \{(x, y) \in X \times Y; \langle (x, y), \alpha \rangle = 0, \forall \alpha \in (X_2 \times Y_2)^\circ\} \quad (3.2.33) \\ &= (X_2 \times Y) \cup (X \times Y_2). \end{aligned}$$

Lema 3.2.14. *Sejam X e Y espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves e subespaços $X_2 \subset X$ e $Y_2 \subset Y$ satisfazendo (3.2.28) e (3.2.29) respectivamente. Se $(x, y) \notin {}^\circ[(X_2 \times Y_2)^\circ]$, então x e y pertencem aos subespaços gerados por x_1 em X e y_1 em Y , respectivamente.*

Demonstração: Seja $\alpha \in (X_2 \times Y_2)^\circ$ e $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Teremos, primeiramente, para qualquer $y \in Y$,

$$\begin{aligned} \alpha_y(x) \neq 0 &\Rightarrow \langle x, \tilde{J}_X x_1 \rangle_X = a = a \|x_1\|_X = a \langle x_1, \tilde{J}_X x_1 \rangle_X \\ &\Rightarrow \langle x, \tilde{J}_X x_1 \rangle_X = \langle a x_1, \tilde{J}_X x_1 \rangle_X \\ &\Rightarrow \langle (x - a x_1), \tilde{J}_X x_1 \rangle_X = 0_X. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Mas $(x - a x_1) \notin X_2$, pois x e $x_1 \notin X_2$. Desta forma, $x - a x_1 = 0$

$$\Rightarrow x \in [x_1] \subset X$$

e, para qualquer $x \in X$,

$$\begin{aligned} \alpha_x(y) \neq 0 &\Rightarrow \langle y, \tilde{J}_Y y_1 \rangle_Y = b = b \|y_1\|_Y = b \langle y_1, \tilde{J}_Y y_1 \rangle_Y \\ &\Rightarrow \langle y, \tilde{J}_Y y_1 \rangle_Y = \langle b y_1, \tilde{J}_Y y_1 \rangle_Y \\ &\Rightarrow \langle (y - b y_1), \tilde{J}_Y y_1 \rangle_Y = 0_Y. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Mas $(y - b y_1) \notin Y_2$, pois y e $y_1 \notin Y_2$. Desta forma, $y - b y_1 = 0$

$$\Rightarrow y \in [y_1] \subset X.$$

■

Em Z , definindo $Z_1 = Z$, seja $z_1 = \frac{T(x_1, y_1)}{\|T(x_1, y_1)\|_Z} = \frac{T(x_1, y_1)}{\lambda_1}$, com

$$\lambda_1 = \|T(x_1, y_1)\|_Z = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}. \quad (3.2.36)$$

De (2.1.2) observamos que $\tilde{J}_Z$ é positivamente homogênea, ou seja, para $\lambda > 0$, $\tilde{J}_Z(\lambda z) = \tilde{J}_Z z$. Além disso, como $\|z_1\| = 1$ e, pela observação 3.2.12, temos que $J_Z z_1 = \tilde{J}_Z z_1$. Assim, como $\lambda_1 > 0$ e para todo $z \in Z$, teremos

$$\langle z, J_Z z_1 \rangle_Z = \langle z, \tilde{J}_Z z_1 \rangle_Z = \left\langle z, \tilde{J}_Z \left(\frac{T(x_1, y_1)}{\lambda_1} \right) \right\rangle_Z = \left\langle z, \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z. \quad (3.2.37)$$

As decomposições para X e Y , dadas em (3.2.31), também se aplicam em Z . Ou seja, fazendo $M_1^Z = [J_Z z_1]$ e $Z_2 \subset Z$, tal que

$$Z_2 = {}^\circ M_1^Z = \{z \in Z; \langle z, \alpha \rangle = 0; \alpha \in M_1^Z\}. \quad (3.2.38)$$

Assim, $[z_1] \perp^j Z_2$ e teremos $Z = Z_2 \oplus R_1^Z$, onde $R_1^Z = [z_1] = J_Z^{-1} Z_2^\circ \subset Z$.

Ramanujan e Schock, em [20], definem o operador adjunto $T^* : Z^* \rightarrow \text{Bil}(X \times Y)$ por

$$(T^* z^*)(x, y) = z^* T(x, y). \quad (3.2.39)$$

Assim, em (3.2.37) para $z = T(x, y)$ e por (3.2.39), teremos,

$$\left\langle z, \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z = \left\langle T(x, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z = \left\langle (x, y), T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y}. \quad (3.2.40)$$

Partiremos agora estabelecer relação entre os funcionais bilineares $T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1)$ e $\tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1)$ em $\text{Bil}(X \times Y)$, ou seja, relacionar a igualdade em (3.2.20):

$$\left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} = \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y,$$

com (3.2.40) acima.

Nesse sentido provaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.15. *Sejam X , Y e Z espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. Seja $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$ completamente contínuo. Então existem $(x_1, y_1) \in U_X \times U_Y$ com $\|T(x_1, y_1)\|_Z = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \lambda_1$, funcionais $\tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \in Z^*$ e $\tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \in \text{Bil}(X \times Y)$ tais que:*

$$T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) = \lambda_1 \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1). \quad (3.2.41)$$

Demonstração: Sejam os espaços X , Y , Z e o operador T como nas hipóteses da proposição. Então, pelo teorema 3.2.8, existem $(x_1, y_1) \in U_X \times U_Y$ tais que $\|T(x_1, y_1)\|_Z =$

$\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \lambda_1$, onde a última igualdade é dada por (3.2.36). Ainda, pela proposição 3.2.11, obtemos os funcionais $\tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \in Z^*$ e $\tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \in \text{Bil}(X \times Y)$ satisfazendo (3.2.20) e (3.2.40) respectivamente. Assim, para provarmos a igualdade (3.2.41), tomamos inicialmente as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} T_{x_1} &: Y \rightarrow Z \\ y &\mapsto T_{x_1}(y) = T(x_1, y) \\ T_{y_1} &: X \rightarrow Z \\ x &\mapsto T_{y_1}(x) = T(x, y_1). \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Vemos facilmente que

$$\|T_{x_1}\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} = \|T_{x_1}(y_1)\|_Z = \|T(x_1, y_1)\|_Z = \|T_{y_1}(x_1)\|_Z = \|T_{y_1}\|_{\mathcal{L}(X, Z)} = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = \lambda_1.$$

Observamos ainda que as aplicações em (3.2.42) são lineares e compactas. Agora, para T_{x_1} , procedendo de maneira análoga à proposição 2.2.3 de Edmunds e Evans [5], teremos

$$\|T_{x_1}\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} = \|T_{x_1}(y_1)\|_Z = \max_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|T_{x_1}y\|_Z}{\|y\|_Y}. \tag{3.2.43}$$

Segue que, para todo $y \in Y$, tomando $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \frac{\|T_{x_1}(y_1 + ty)\|_Z}{\|y_1 + ty\|_Y} = \frac{\|T_{x_1}(y_1) + tT_{x_1}(y)\|_Z}{\|y_1 + ty\|_Y}, \tag{3.2.44}$$

assume seu valor máximo em $f(0) = \frac{\|T_{x_1}(y_1)\|_Z}{\|(y_1)\|_Y} = \|T_{x_1}(y_1)\|_Z = \|T(x_1, y_1)\|_Z$. Ou seja,

$$f'(0) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1) - tT_{x_1}(y)\|_Z}{\|y_1 - ty\|_Y} \right)_{t=0} = 0.$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} f(t) - f(0) &= \frac{\|T_{x_1}(y_1) - tT_{x_1}(y)\|_Z}{\|y_1 - ty\|_Y} - \|T_{x_1}(y_1)\|_Z \\ &= \frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}(y_1)\|_Z \|y_1 - ty\|_Y}{\|y_1 - ty\|_Y} \\ &\leq \frac{\|T_{x_1}\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \|y_1 - ty\|_Y - \|T_{x_1}(y_1)\|_Z \|y_1 - ty\|_Y}{\|y_1 - ty\|_Y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f(t) \leq f(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, confirmando que $f(0)$ é o valor máximo de f . Assim,

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\|T_{x_1}(y_1) - tT_{x_1}(y)\|_Z}{\|y_1 - ty\|_Y} - \|T_{x_1}(y_1)\|_Z}{t} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}(y_1)\|_Z}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}(y_1)\|_Z\|y_1 - ty\|_Y - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)} + \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)}}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)}(\|y_1 - ty\|_Y - 1)}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)}}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|y_1 - ty\|_Y - \|y_1\|_Y}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Segue que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)}}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) = \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|y_1 - ty\|_Y - \|y_1\|_Y}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) \quad (3.2.45)$$

① ②

Analisaremos os limites ① e ② da igualdade acima.

Em ①, fazendo $p(t) = \frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)}}{t}$ e $h(t) = \frac{1}{\|y_1 - ty\|_Y}$. Temos que, pela definição 2.1.1 e por (2.1.1),

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)}}{t} \right) = \left\langle T_{x_1}(y), \tilde{J}_Z T_{x_1}(y_1) \right\rangle_Z$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\|y_1 - ty\|_Y} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|T_{x_1}(y_1 - ty)\|_Z - \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)}}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} p(t)h(t) = \left\langle T_{x_1}(y), \tilde{J}_Z T_{x_1}(y_1) \right\rangle_Z. \quad (3.2.46)$$

Analogamente em ②, fazendo $q(t) = \frac{\|y_1 - ty\|_Y - \|y_1\|_Y}{t}$ e, novamente, $h(t) = \frac{1}{\|y_1 - ty\|_Y}$. Temos, pela definição 2.1.1 e por (2.1.1),

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|y_1 - ty\|_Y - \|y_1\|_Y}{t} \right) = \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\|y_1 - ty\|_Y - \|y_1\|_Y}{t\|y_1 - ty\|_Y} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} q(t)h(t) = \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y. \quad (3.2.47)$$

Desta forma, por (3.2.46) e (3.2.47), a igualdade (3.2.45) é reescrita da seguinte forma:

$$\left\langle T_{x_1}(y), \tilde{J}_Z T_{x_1}(y_1) \right\rangle_Z = \|T_{x_1}\|_{\mathfrak{L}(Y,Z)} \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = \lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y. \quad (3.2.48)$$

Ou ainda,

$$\left\langle T(x_1, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = \lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y. \quad (3.2.49)$$

De maneira análoga, para todo $x \in X$, seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \frac{\|T_{y_1}(x_1 + tx)\|_Z}{\|x_1 + tx\|_X} = \frac{\|T_{y_1}(x_1) + tT_{y_1}(x)\|_Z}{\|x_1 + tx\|_X}. \quad (3.2.50)$$

Temos que g também assume seu valor máximo em $t = 0$. Ou seja, $g(0) = \frac{\|T_{y_1}(x_1)\|_Z}{\|(x_1)\|_X} = \|T(x_1, y_1)\|_Z$ e

$$g'(0) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\|T_{y_1}(x_1) - tT_{y_1}(x)\|_Z}{\|x_1 - tx\|_X} \right)_{t=0} = 0.$$

Seguindo processo análogo ao efetuado para a função f , obteremos a igualdade

$$\left\langle T_{y_1}(x), \tilde{J}_Z T_{y_1}(x_1) \right\rangle_Z = \|T_{y_1}\|_{\mathfrak{L}(X,Z)} \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X = \lambda_1 \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X. \quad (3.2.51)$$

Agora, considerando a aplicação T_{x_1} dada em (3.2.42), com $y \in Y = Y_2 \oplus R_1^Y$. Ou seja, $y = y_{Y_2} + y_{R_1^Y} = y_{Y_2} + by_1$, $b \in \mathbb{R}$. Teremos,

$$\begin{aligned} \left\langle T_{x_1}(y), \tilde{J}_Z T_{x_1}(y_1) \right\rangle &= \left\langle T(x_1, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z = \lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\ &= \lambda_1 \left\langle y_{Y_2} + y_{R_1^Y}, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = \lambda_1 \left(\left\langle y_{Y_2}, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y + \left\langle y_{R_1^Y}, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \right) \\ &= \lambda_1 \left\langle by_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = \lambda_1 b \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = \lambda_1 b. \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

O mesmo ocorre com $T_{y_1}(X)$. Assim, para $x \in X = X_2 \oplus R_1^X$, com $x = x_{X_2} + x_{R_1^X} = x_{X_2} + ax_1$, $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left\langle T_{y_1}(x), \tilde{J}_Z T_{y_1}(x_1) \right\rangle &= \left\langle T(x, y_1), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z = \lambda_1 \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \\ &= \lambda_1 \left\langle x_{X_2} + x_{R_1^X}, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X = \lambda_1 \left(\left\langle x_{X_2}, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X + \left\langle x_{R_1^X}, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \right) \\ &= \lambda_1 \left\langle ax_1, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X = \lambda_1 a \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X = \lambda_1 a. \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Agora, considere (3.2.42) para

$$T_{ax_1} : Y \rightarrow Z \quad (3.2.54)$$

$$y \mapsto T_{ax_1}(y) = T(ax_1, y),$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $ax_1 \in R_1^X$. Assim, (3.2.44) é reescrita como:

$$\begin{aligned} f_{R_1^X}(t) &= \frac{\|T_{ax_1}(y_1 + ty)\|_Z}{\|y_1 + ty\|_Y} = \frac{\|T(ax_1, y_1 + ty)\|_Z}{\|y_1 + ty\|_Y} \\ &= \frac{|a|\|T(x_1, y_1 + ty)\|_Z}{\|y_1 + ty\|_Y} = \frac{|a|\|T_{x_1}(y_1 + ty)\|_Z}{\|y_1 + ty\|_Y} \\ &= |a|f(t). \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

Seu valor máximo é assumido em $f_{R_1^X}(0) = |a|f(0) = |a|\|T(x_1, y_1)\|_Z$.

Vemos claramente que $f_{R_1^X}(t) \leq f_{R_1^X}(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e, portanto, $f'_{R_1^X}(0) = 0$.

Procedendo de maneira análoga à desenvolvida para f , obteremos:

$$\left\langle T_{ax_1}(y), \tilde{J}_Z T_{ax_1}(y_1) \right\rangle_Z = |a|\|T_{x_1}\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = |a|\lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y. \quad (3.2.56)$$

Novamente fazendo uso da homogeneidade de $\tilde{J}$, agora em termos gerais como em (2.1.3),

$$\tilde{J}(ax) = (\operatorname{sgn} a)\tilde{J}x.$$

Segue então que,

$$\begin{aligned} \left\langle T_{ax_1}(y), \tilde{J}_Z T_{ax_1}(y_1) \right\rangle_Z &= \left\langle T(ax_1, y), \tilde{J}_Z T(ax_1, y_1) \right\rangle_Z \\ &= \left\langle T(ax_1, y), \tilde{J}_Z (aT(x_1, y_1)) \right\rangle_Z \\ &= (\operatorname{sgn} a) \left\langle T(ax_1, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z. \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

Assim, por (3.2.56) e (3.2.57) teremos:

$$\begin{aligned} \left\langle T_{ax_1}(y), \tilde{J}_Z T_{ax_1}(y_1) \right\rangle_Z &= |a|\lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \Rightarrow \\ (\operatorname{sgn} a) \left\langle T(ax_1, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z &= |a|\lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \Rightarrow \\ \left\langle T(ax_1, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z &= (\operatorname{sgn} a)|a|\lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \Rightarrow \\ \left\langle T(ax_1, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z &= a\lambda_1 \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y. \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

Tomando a aplicação dada em (3.2.54), com $y \in Y = Y_2 \oplus R_1^Y$, ou seja, $y = y_{Y_2} + y_{R_1^Y} =$

$y_{Y_2} + by_1$, $b \in \mathbb{R}$, por (3.2.58) e seguindo (3.2.52), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \left\langle T(ax_1, y_{Y_2} + by_1), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z &= \lambda_1 a \left\langle y_{Y_2} + by_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\
 &= \lambda_1 a \left(\left\langle y_{Y_2}, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y + \left\langle by_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \right) \\
 &= \lambda_1 a b \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\
 &= \lambda_1 a b.
 \end{aligned} \tag{3.2.59}$$

Por outro lado, de (3.2.40), teremos

$$\lambda_1 a b = \left\langle T(ax_1, y_{Y_2} + by_1), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z = \left\langle (ax_1, y_{Y_2} + by_1), T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y}. \tag{3.2.60}$$

Em (3.2.60), fixando $y = y_{Y_2} + by_1 \in Y$ e para todo $a \in \mathbb{R}$, definimos o funcional

$$\begin{aligned}
 \left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y : R_1^X &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 ax_1 &\mapsto \left\langle (ax_1, y), T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y}.
 \end{aligned} \tag{3.2.61}$$

Como $X = X_2 \oplus R_1^X$, existe então uma extensão $\overline{\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y}$ de (3.2.61) em X tal que, para qualquer $x = x_{X_2} + ax_1 \in X$,

$$\begin{aligned}
 \left\langle x, \overline{\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y} \right\rangle_X &= \left\langle x_{X_2} + ax_1, \overline{\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y} \right\rangle_X \\
 &= \left\langle (x_{X_2} + ax_1, y), \overline{\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y} \right\rangle_{X \times Y} \\
 &= \left\langle (x_{X_2} + ax_1, y_{Y_2} + by_1), \overline{\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y} \right\rangle_{X \times Y}
 \end{aligned} \tag{3.2.62}$$

e

$$\left\langle ax_1, \overline{\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y} \right\rangle_X = \left\langle ax_1, \left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y \right\rangle_X.$$

Ou seja, $\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y$ é a restrição de $\overline{\left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y}$ em $R_1^X \subset X$. Desta forma, para $x = x_{X_2} + ax_1 \in X$ e $y = y_{Y_2} + by_1 \in Y$,

$$\left\langle x, \left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y \right\rangle_X = \left\langle ax_1, \left(T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right)_y \right\rangle_X.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\langle T(x, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} &= \left\langle (x, y), T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} \\
&= \left\langle (x_{X_2} + a x_1, y_{Y_2} + b y_1), T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} \\
&= \lambda_1 a b \\
&= \lambda_1 \left\langle x_{X_2} + a x_1, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y_{Y_2} + b y_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\
&= \lambda_1 \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\
&= \lambda_1 \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y}.
\end{aligned} \tag{3.2.63}$$

Portanto, da primeira e última igualdade,

$$T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) = \lambda_1 \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1). \tag{3.2.64}$$

Verificando assim (3.2.41). ■

A mesma análise pode ser feita para $g_{R^Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Para $(x, y) = (x_1, y_1)$ em (3.2.63) e por (3.2.21) teremos

$$\begin{aligned}
\|T(x_1, y_1)\|_Z &= \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z \\
&= \left\langle (x_1, y_1), T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z \\
&= \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \left\langle (x_1, y_1), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} \\
&= \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\
&= \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \|x_1\|_X \|y_1\|_Y = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \lambda_1.
\end{aligned}$$

E, análogo ao observado em [5], página 74, para qualquer $(x, y) \in X \times Y \setminus \{(0, 0)\}$ e algum $\nu \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|T(x, y)\|_Z &= \left\langle T(x, y), \tilde{J}_Z T(x, y) \right\rangle_Z \\
&= \nu \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x, y) \right\rangle_{X \times Y} \\
&= \nu \left\langle x, \tilde{J}_X x \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y \right\rangle_Y \\
&= \nu \|x\|_X \|y\|_Y.
\end{aligned} \tag{3.2.65}$$

Como $\|T(x, y)\|_Z \leq \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \|x\|_X \|y\|_Y$, para todo $(x, y) \in X \times Y$ e por (3.2.65)

$$0 \leq \|T(x, y)\|_Z = \nu \|x\|_X \|y\|_Y \leq \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \|x\|_X \|y\|_Y.$$

Logo $0 \leq \nu \leq \|T\|$.

Voltando na observação 3.2.12, em específico a igualdade (3.2.25), onde estamos tomando a aplicação de dualidade com função gauge normalizada, isto é, com $\mu(t) = t$, $t \geq 0$. Desta forma, podemos fazer

$$\begin{aligned}
 J_Z T(x_1, y_1) &:= \mu(\|T(x_1, y_1)\|_Z) \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \\
 &= \mu(\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}) \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \\
 &= \mu(\lambda_1) \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \\
 &= \lambda_1 \tilde{J}_Z T(x_1, y_1),
 \end{aligned} \tag{3.2.66}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
 \langle T(x, y), J_Z T(x_1, y_1) \rangle_Z &= \left\langle T(x, y), \mu(\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}) \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z \\
 &= \mu(\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}) \left\langle T(x, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z \\
 &= \mu(\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}) \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} \\
 &= \mu(\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}) \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\
 &= \lambda_1^2 \langle x, J_X x_1 \rangle_X \langle y, J_Y y_1 \rangle_Y.
 \end{aligned} \tag{3.2.67}$$

Fazendo $\nu_1 = \mu(\|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}) \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \lambda_1^2$, temos

$$\langle T(x, y), J_Z T(x_1, y_1) \rangle_Z = \nu_1 \langle x, J_X x_1 \rangle_X \langle y, J_Y y_1 \rangle_Y. \tag{3.2.68}$$

Ainda,

$$\langle (x, y), T^* J_Z T(x_1, y_1) \rangle_Z = \nu_1 \langle x, J_X x_1 \rangle_X \langle y, J_Y y_1 \rangle_Y. \tag{3.2.69}$$

Voltando em (3.2.38) e (3.2.40), lembrando que $\tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \in M_1^Z \subset Z^*$ e

$$Z_2 = {}^\circ M_1^Z = \{z \in Z; \langle z, \alpha \rangle_Z = 0; \alpha \in M_1^Z\}.$$

Assim, para $z = T(x, y) \in Z$,

$$\begin{aligned}
 \left\langle z, \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z &= \left\langle T(x, y), \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z \\
 &= \left\langle (x, y), T^* \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_{X \times Y} \\
 &= \lambda_1 \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y.
 \end{aligned} \tag{3.2.70}$$

Vemos que, se $x = x_{X_2} \in X_2$ ou $y = y_{Y_2} \in Y_2$,

$$\left\langle z, \tilde{J}_Z T(x_1, y_1) \right\rangle_Z = \lambda_1 \left\langle x, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y = 0,$$

ou seja, $z = T(x, y) \in Z_2$, e concluímos que, se $(x, y) \in {}^\circ[(X_2 \times Y_2)^\circ]$, então $T(x, y) \in Z_2$. Consequentemente, se $(x, y) \notin {}^\circ[(X_2 \times Y_2)^\circ]$, pelo lema 3.2.14, então $(x, y) \in R_1^X \times R_1^Y \subset X \times Y$ e $T(x, y) \in R_1^Z \subset Z$.

Em resumo: denotando ${}_1T = T|_{R_1^X \times R_1^Y}$,

$${}_1T(X \times Y) = T(R_1^X \times R_1^Y) \subset R_1^Z. \quad (3.2.71)$$

Observamos ainda que, $Nuc {}_1T = {}^\circ[(X_2 \times Y_2)^\circ]$.

Tomando agora $T_2 = T|_{X_2 \times Y_2}$, ou seja, $T : X_2 \times Y_2 \rightarrow Z$, onde

$$T(X_2 \times Y_2) = \{T(x, y) \in Z; x \in X_2 \text{ e } y \in Y_2\}.$$

Como analisado acima, temos que $T(X_2 \times Y_2) \subset Z_2$. Assim, podemos escrever T_2 como

$$T : X_2 \times Y_2 \rightarrow Z_2.$$

Novamente, pelo teorema 3.2.8, existe $(x_2, y_2) \in X_2 \times Y_2$, com $\|x_2\|_X = \|y_2\|_Y = 1$ e $\|T_2(x_2, y_2)\|_Y = \|T_2\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \lambda_2$. Como $X_2 \times Y_2 \subset X \times Y \Rightarrow \lambda_2 \leq \lambda_1 = \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}$. Além disso, analogamente à (3.2.63), para $(x, y) \in (X_2 \times Y_2) \setminus \{(0, 0)\}$, teremos

$$\begin{aligned} \left\langle T_2(x, y), \tilde{J}_{Z_2} T_2(x_2, y_2) \right\rangle_{Z_2} &= \|T_2\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X_2 \times Y_2}(x_2, y_2) \right\rangle_{X_2 \times Y_2} \\ &= \lambda_2 \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X_2 \times Y_2}(x_2, y_2) \right\rangle_{X_2 \times Y_2}. \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

Por (2.1.5), $Z_2 = {}^\circ M_1$ é um subespaço fechado de Z . Então, Z_2^* é isometricamente isomorfo a Z^*/Z_2° , [5, Proposição 2.2.1]. Segue que, $\tilde{J}_Z z - \tilde{J}_{Z_2} z \in Z_2^\circ$ para qualquer $z \in Z_2$ e, portanto, para $(x, y) \in X_2 \times Y_2$,

$$\begin{aligned} \left\langle T_2(x, y), \tilde{J}_Z T_2(x_2, y_2) \right\rangle_Z &= \left\langle T_2(x, y), \tilde{J}_{Z_2} T_2(x_2, y_2) \right\rangle_{Z_2} \\ &= \lambda_2 \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X_2 \times Y_2}(x_2, y_2) \right\rangle_{X_2 \times Y_2} \\ &= \lambda_2 \left\langle x, \tilde{J}_{X_2} x_2 \right\rangle_{X_2} \left\langle y, \tilde{J}_{Y_2} y_2 \right\rangle_{Y_2} \\ &= \lambda_2 \left\langle x, \tilde{J}_X x_2 \right\rangle_X \left\langle y, \tilde{J}_Y y_2 \right\rangle_Y. \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

A última igualdade se dá por conta das identificações de Y_2^* com Y^*/Y_2° e de X_2^* com X^*/X_2° . Dessa forma, temos

$$\left\langle T_2(x, y), \tilde{J}_Z T_2(x_2, y_2) \right\rangle_Z = \lambda_2 \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_2, y_2) \right\rangle_{X \times Y},$$

e

$$T_2^* \tilde{J}_Z T_2(x_2, y_2) = \lambda_2 \tilde{J}_{X \times Y}(x_2, y_2). \quad (3.2.74)$$

Ainda, análogo à (3.2.68), temos

$$\langle T_2(x, y), J_Z T_2(x_2, y_2) \rangle_Z = \nu_2 \langle x, J_X x_2 \rangle_X \langle y, J_Y y_2 \rangle_Y.$$

E também, fazendo

$$T_{y_2} : X \rightarrow Z \quad (3.2.75)$$

$$x \mapsto T_{y_2}(x) = T(x, y_2),$$

$$T_{x_2} : Y \rightarrow Z \quad (3.2.76)$$

$$y \mapsto T_{x_2}(y) = T(x_2, y).$$

Teremos então,

$$T_{y_2}^* J_Z T(x_2, y_2) = \nu_2 J_X x_2, \quad (3.2.77)$$

$$T_{x_2}^* J_Z T(x_2, y_2) = \nu_2 J_Y y_2.$$

Observamos que (3.2.75) e (3.2.76) são lineares e compactas. Além disso, $T_{y_2}(X)$, $T_{x_2}(Y) \subset Z_2$.

Seguindo, obtemos os subespaços $X_3 \subset X_2$, $Y_3 \subset Y_2$ e $Z_3 \subset Z_2$, dados por

$$X_3 = \{x \in X; \langle x, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X = 0\},$$

$$Y_3 = \{y \in Y; \langle y, \tilde{J}_Y y_2 \rangle_Y = 0\}$$

e

$$Z_3 = \left\{ z \in Z; \langle z, \tilde{J}_Z z_2 \rangle_Y = \langle z, \tilde{J}_Z T_2(x_2, y_2) \rangle_Y = 0 \right\},$$

onde $z_2 = \frac{T_2(x_2, y_2)}{\lambda_2}$, e a segunda igualdade se dá por conta da homogeneidade de $\tilde{J}$. Vemos

ainda que $[x_2] \perp^j X_3$, $[y_2] \perp^j Y_3$ e $[z_2] \perp^j Z_3$.

Repetindo o processo descrito acima, teremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, os operadores $T_n = T|_{X_n \times Y_n}$. Ou seja, $T : X_n \times Y_n \rightarrow Z$,

$$T(X_n \times Y_n) = \{T(x, y) \in Z; x \in X_n \text{ e } y \in Y_n\},$$

onde

$$X_n = \{x \in X; \langle x, \tilde{J}_X x_{n-1} \rangle_X = 0\},$$

$$Y_n = \{y \in Y; \langle y, \tilde{J}_Y y_{n-1} \rangle_Y = 0\},$$

$$Z_n = \left\{ z \in Z; \langle z, \tilde{J}_Z z_{n-1} \rangle_Y = \langle z, \tilde{J}_Z T_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}) \rangle_Y = 0 \right\}$$

e $\{(x_n, y_n)\}$ em $X \times Y$ com $x_n \in U_X \cap X_n$ e $y_n \in U_Y \cap Y_n$. Isto é, seqüências de elementos com norma unitária em X e em Y respectivamente. Ainda, $\{z_1, z_2, z_3, \dots\} \subset Z$ tais que $z_n = \frac{T(x_n, y_n)}{\lambda_n}$, com $\|T(x_n, y_n)\|_Z = \|T_n\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \lambda_n$.

Desta forma, $T(X_n \times Y_n) \subset Z_n$ e podemos considerar $T : X_n \times Y_n \rightarrow Z_n$. Temos também $[x_n] \perp^j X_{n+1}$, $[y_n] \perp^j Y_{n+1}$ e $[z_n] \perp^j Z_{n+1}$.

Ainda, como definido em (3.2.30), temos

$$M_n^X = [J_X x_1, \dots, J_X x_n], \quad M_n^Y = [J_Y y_1, \dots, J_Y y_n] \text{ e } M_n^Z = [J_Z z_1, J_Z z_2, \dots, J_Z z_n],$$

com

$$X_{n+1} = {}^\circ M_n^X, \quad Y_{n+1} = {}^\circ M_n^Y \text{ e } Z_{n+1} = {}^\circ M_n^Z.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \{x \in X; \langle x, x^* \rangle = 0; x^* \in M_n^X\}; \\ Y_{n+1} &= \{y \in Y; \langle y, y^* \rangle = 0; y^* \in M_n^Y\}; \\ Z_{n+1} &= \{z \in Z; \langle z, z^* \rangle = 0; z^* \in M_n^Z\}. \end{aligned} \tag{3.2.78}$$

E mais,

$$(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ = \{\alpha \in \text{Bil}(X \times Y); \langle (x, y), \alpha \rangle = 0; \alpha_y \in M_n^X, \forall y \in Y \text{ e } \alpha_x \in M_n^Y, \forall x \in X\}$$

e

$${}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ] = (X_{n+1} \times Y) \cup (X \times Y_{n+1}).$$

Desta forma, temos

$$\left\langle T_n(x, y), \tilde{J}_Z T_n(x_n, y_n) \right\rangle_Z = \lambda_n \left\langle (x, y), \tilde{J}_{X \times Y}(x_n, y_n) \right\rangle_{X \times Y}$$

e

$$T_n^* \tilde{J}_Z T_n(x_n, y_n) = \lambda_n \tilde{J}_{X \times Y}(x_n, y_n). \quad (3.2.79)$$

Ainda, análogo à (3.2.68), temos

$$\langle T_n(x, y), J_Z T_n(x_n, y_n) \rangle_Z = \nu_n \langle x, J_X x_n \rangle_X \langle y, J_Y y_n \rangle_Y.$$

E também, fazendo

$$\begin{aligned} T_{y_n} &: X \rightarrow Z \\ x &\mapsto T_{y_n}(x) = T(x, y_n), \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

$$\begin{aligned} T_{x_n} &: Y \rightarrow Z \\ y &\mapsto T_{x_n}(y) = T(x_n, y). \end{aligned} \quad (3.2.81)$$

Teremos então,

$$\begin{aligned} T_{y_n}^* J_Z T(x_n, y_n) &= \nu_n J_X x_n, \\ T_{x_n}^* J_Z T(x_n, y_n) &= \nu_n J_Y y_n. \end{aligned} \quad (3.2.82)$$

e

$$\begin{aligned} \langle T_l(x_l, y_l), J_Z T_n(x_n, y_n) \rangle_Z &= \nu_n \langle x_l, J_X x_n \rangle_X \langle y_l, J_Y y_n \rangle_Y \\ &= 0, \text{ se } l > n. \end{aligned}$$

Observação 3.2.16. • *Edmunds e Evans, em [5], na construção da representação de um operador linear compacto $T : X \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços de Banach reflexivos, estritamente convexos e com duais estritamente convexos, chama as sequências obtidas $\{x_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ de **j-autovetores** e **j-autovalores** do operador T , respectivamente. De maneira análoga para o caso bilinear, ou seja, dado uma operador $T : X \times Y \rightarrow Z$ bilinear e completamente contínuo, onde X, Y e Z são espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. Chamaremos*

as sequências $\{(x_n, y_n)\}$ em $X \times Y$ com $x_n \in U_X \cap X_n$ e $y_n \in U_Y \cap Y_n$ e $\{\lambda_n\}$ de ***j*-autovetores** e ***j*-autovalores** do operador bilinear T .

- Se X , Y e Z são espaços de Hilbert, então o processo descrito acima satisfaz o método de obtenção dos valores singulares e dos vetores ordenados feitos por Silva et al., em [27, Teorema 3 e Observação 3].

Como em [5], para $k \in \mathbb{N}$ definimos as famílias de aplicações:

$$\begin{aligned} S_{k+1}^X : X &\rightarrow R_k^X &:= [x_1, \dots, x_k]; \\ S_{k+1}^Y : Y &\rightarrow R_k^Y &:= [y_1, \dots, y_k]; \\ S_{k+1}^Z : Z &\rightarrow R_k^Z &:= [z_1, \dots, z_k]. \end{aligned} \quad (3.2.83)$$

Por

$$\begin{aligned} S_{k+1}^X x &= \sum_{i=1}^k \xi_i^X(x) x_i, \\ S_{k+1}^Y y &= \sum_{i=1}^k \xi_i^Y(y) y_i, \\ S_{k+1}^Z z &= \sum_{i=1}^k \xi_i^Z(z) z_i. \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

Os coeficientes ξ_i são escolhidos tais que as aplicações definidas acima satisfazem as condições $(x - S_{k+1}^X x) \in X_{k+1}$, $(y - S_{k+1}^Y y) \in Y_{k+1}$ e $(z - S_{k+1}^Z z) \in Z_{k+1}$ e são dados por:

$$\xi_1^X(x) = \langle x, J_X x_1 \rangle_X \quad e \quad \xi_m^X(x) = \left\langle x - \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^X(x) x_i, J_X x_m \right\rangle_X, \quad 1 < m \leq k, \quad (3.2.85)$$

$$\xi_1^Y(y) = \langle y, J_Y y_1 \rangle_Y \quad e \quad \xi_m^Y(y) = \left\langle y - \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^Y(y) y_i, J_Y y_m \right\rangle_Y, \quad 1 < m \leq k \quad (3.2.86)$$

e

$$\xi_1^Z(z) = \langle z, J_Z z_1 \rangle_Z \quad e \quad \xi_m^Z(z) = \left\langle z - \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^Z(z) z_i, J_Z z_m \right\rangle_Z, \quad 1 < m \leq k. \quad (3.2.87)$$

Vamos, por indução, verificar que os coeficientes dados em (3.2.85) satisfazem $(x - S_{k+1}^X x) \in X_{k+1}$. Para tal, seja $w_{k+1} \in X_{k+1}$, então $w_{k+1} = x - \sum_{i=1}^k \xi_i^X(x) x_i$, para algum $x \in X$.

Se $k = 1$, então

$$\langle w_2, J_X x_1 \rangle_X = \langle x, J_X x_1 \rangle_X - \xi_1^X(x) \langle x_1, J_X x_1 \rangle_X = \langle x, J_X x_1 \rangle_X - \xi_1^X(x) = 0.$$

Agora, suponha que $w_k \in X_k$, e assim $\langle w_k, J_X x_m \rangle_X = 0$, para todo $1 \leq m < k$. Então, para $1 \leq m < k$, segue de $w_{k+1} = w_k - \xi_k^X(x)x_k$ e por (3.2.78), que

$$\langle w_{k+1}, J_X x_m \rangle_X = -\xi_k^X(x) \langle x_k, J_X x_m \rangle_X = 0.$$

Além disso,

$$\langle w_{k+1}, J_X x_k \rangle_X = \left\langle x - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^X(x)x_i, J_X x_k \right\rangle_X - \xi_k^X(x) \langle x_k, J_X x_k \rangle_X = 0$$

por (3.2.85), e assim verificamos que $w_{k+1} \in X_{k+1}$.

Na próxima seção obteremos a relação entre $\xi_k(z)$, para $z = T(x, y)$, e os coeficientes de S_{k+1}^X e S_{k+1}^Y . Antes temos algumas observações.

Sejam:

$$\begin{aligned} P_{k+1}^X &: X \rightarrow X_{k+1}, \\ P_{k+1}^Y &: Y \rightarrow Y_{k+1}, \\ P_{k+1}^Z &: Z \rightarrow Z_{k+1} \end{aligned} \tag{3.2.88}$$

projeções métricas, tais que:

$$\|x - P_{k+1}^X(x)\| = \inf\{\|x - x_{X_{k+1}}\|_X; x_{X_{k+1}} \in X_{k+1}\},$$

$$\|y - P_{k+1}^Y(y)\| = \inf\{\|y - y_{Y_{k+1}}\|_Y; y_{Y_{k+1}} \in Y_{k+1}\},$$

e

$$\|z - P_{k+1}^Z(z)\| = \inf\{\|z - z_{Z_{k+1}}\|_Z; z_{Z_{k+1}} \in Z_{k+1}\},$$

onde $P_{k+1}^X(x)$, $P_{k+1}^Y(y)$ e $P_{k+1}^Z(z)$ são os pontos mais próximos de x , y e z em X_{k+1} , Y_{k+1} e Z_{k+1} respectivamente. Em geral tais projeções são não lineares.

De posse destas projeções, com base no trabalho de Alber, em [1], apresentaremos a seguinte decomposição para o espaço Banach X uniformemente convexo e uniformemente suave: seja $x \in X$ e tomando $J_X x_1 \in X^*$, temos que $J_X x_1 = \mu(\|x_1\|_X) \tilde{J}_X x_1$ e como $\mu(1) = 1$, assim, $J_X x_1 = \tilde{J}_X x_1$.

Pelo teorema 2.1.25, pelas observações 3.2.12 e 3.2.13 teremos que,

$$X_2 = {}^\circ M_1^X = \{x \in X; \langle x, J_X x_1 \rangle_X = 0\},$$

e $X = X_2 \uplus \lambda J_X^* J_X x_1 = X_2 \uplus \lambda x_1$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando (3.2.31), obtemos

$$x = P_2^X x + \langle x, J_X x_1 \rangle_X x_1. \quad (3.2.89)$$

E, por (3.2.85), temos

$$P_2^X x = x - \langle x, J_X x_1 \rangle_X x_1 \quad (3.2.90)$$

$$P_2^X x = x - \xi_1^X(x) x_1.$$

Seguindo o processo e tomamos agora $J_X x_2 \in JX_2 \subset X^*$ com $\|J_X x_2\| = 1$. Com isso, por (3.2.78), obtemos

$$X_3 = {}^\circ M_2^X = \{x \in X; \langle x, J_X x_2 \rangle_X = 0\}.$$

Desta forma $X_2 = X_3 \uplus \lambda J_X^* J_X x_2 = X_3 \uplus \lambda x_2$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, e

$$P_2^X x = P_3^X P_2^X x + \langle P_2^X x, J_X x_2 \rangle_X x_2.$$

Assim

$$P_3^X P_2^X x = P_2^X x - \langle P_2^X x, J_X x_2 \rangle_X x_2. \quad (3.2.91)$$

Ainda por (3.2.90), (3.2.85) e (3.2.84)

$$\begin{aligned} P_3^X P_2^X x &= x - \langle x, J_X x_1 \rangle_X x_1 - \langle x - \langle x, J_X x_1 \rangle_X x_1, J_X x_2 \rangle_X x_2 \\ P_3^X P_2^X x &= x - \xi_1^X(x) x_1 - \langle x - \xi_1^X(x) x_1, J_X x_2 \rangle_X x_2 \\ P_3^X P_2^X x &= x - \xi_1^X(x) x_1 - \xi_2^X(x) x_2 \\ P_3^X P_2^X x &= x - \sum_{i=1}^2 \xi_i^X(x) x_i = x - S_3^X x. \end{aligned} \quad (3.2.92)$$

Portanto,

$$x = P_3^X P_2^X x + \sum_{i=1}^2 \xi_i^X(x) x_i = P_3^X P_2^X x + S_3^X x. \quad (3.2.93)$$

Logo, (3.2.92) pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_3^X P_2^X x = (I - S_3^X)x,$$

onde I é o operador identidade em X . Assim,

$$x = (I - S_3^X)x + S_3^X x.$$

Podemos deduzir que, para todo $n \geq 2$,

$$x = \prod_{i=2}^n P_i^X x + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^X(x) x_i = (I - S_n^X)x + S_n^X x, \quad (3.2.94)$$

onde $\prod_{i=2}^n P_i^X x = P_n^X \dots P_3^X P_2^X x$. A relação (3.2.92) é também obtida em [[5], lema 2.2.10].

Podemos fazer o mesmo processo para a decomposição em Y e Z , obtendo

$$\begin{aligned} y &= \prod_{i=2}^n P_i^Y y + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^Y(y) y_i = (I - S_n^Y)y + S_n^Y y; \\ z &= \prod_{i=2}^n P_i^Z z + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^Z(z) z_i = (I - S_n^Z)z + S_n^Z z. \end{aligned} \quad (3.2.95)$$

Edmunds e Evans, em [5], apresenta o seguinte lema, onde se dá decomposição dos espaços X e X^* .

Lema 3.2.17. *Os espaços X e X^* tem a seguinte decomposição em soma direta*

$$\begin{aligned} X &= X_{k+1} \oplus R_k^X, \\ X^* &= M_k^X \oplus (R_k^X)^\circ \end{aligned} \quad (3.2.96)$$

para $k \in \mathbb{N}$. Os operadores S_{k+1}^X e $(S_{k+1}^X)^*$ são, respectivamente, projeções lineares de X em R_k^X e de X^* em M_k^X . Além disso, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$X_k = X_{k+1} \bigcup [x_k]. \quad (3.2.97)$$

Por (3.2.95) vemos que o lema também é válido para Y e Z .

3.2.1 Relação entre $\xi_k^Z(z)$ e os elementos das sequências $\{\xi_i^X(x)\}_{i=1}^k$ e $\{\xi_i^Y(y)\}_{i=1}^k$

A seguir, obteremos a relação entre os coeficientes $\xi_k^Z(z)$ e os elementos das sequências dos coeficientes $\{\xi_i^X(x)\}_{i=1}^k$ e $\{\xi_i^Y(y)\}_{i=1}^k$, com $z = T(x, y)$ e $k \in \mathbb{N}$.

O processo é análogo para a obtenção dos coeficientes em X e Y dados em (3.2.85) e (3.2.86). Para tal, se usa a aplicação de dualidade com função gauge, no entanto, por (3.2.25), temos que $J_Z(z_k) = \tilde{J}_Z(z_k)$, para cada z_k , com $\|z_k\|_Z = 1$. Observamos aqui

que faremos uso de $\tilde{J}$ pois sua aplicação nos dá a equivalência do semi produto interno, possibilitando obter espaços j-ortogonais. Também faremos uso da homogeneidade de $\tilde{J}_Z$, o qual será de enorme importância para chegarmos ao nosso objetivo.

Antes de iniciarmos o processo enunciado, vamos observar o seguinte: por (3.2.94) e (3.2.95), escrevendo

$$\begin{aligned} x &= x_{k+1}^X + S_{k+1}^X(x); \\ y &= y_{k+1}^Y + S_{k+1}^Y(y), \end{aligned} \quad (3.2.98)$$

e, pela bilinearidade de T , temos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x_{k+1}^X + S_{k+1}^X(x), y_{k+1}^Y + S_{k+1}^Y(y)) \\ &= T(S_{k+1}^X(x), S_{k+1}^Y(y)) + T(x_{k+1}^X, S_{k+1}^Y(y)) + T(S_{k+1}^X(x), y_{k+1}^Y) + T(x_{k+1}^X, y_{k+1}^Y), \end{aligned}$$

onde,

$$(S_{k+1}^X(x), S_{k+1}^Y(y)) \in R_k^X \times R_k^Y$$

e

$$(x_{k+1}^X, S_{k+1}^Y(y)), (S_{k+1}^X(x), y_{k+1}^Y), (x_{k+1}^X, y_{k+1}^Y) \in {}^\circ[(X_{k+1} \times Y_{k+1})^\circ].$$

Observando ainda que

$$\begin{aligned} T(S_{k+1}^X(X), S_{k+1}^Y(Y)) &\subset R_k^Z \subset Z \text{ e} \\ T({}^\circ[(X_{k+1} \times Y_{k+1})^\circ]) &\subset Z_{k+1} \subset Z, \end{aligned} \quad (3.2.99)$$

segue que,

$$\begin{aligned} T(S_{k+1}^X(x), S_{k+1}^Y(y)) &= T\left(\sum_{i=1}^k \xi_i^X(x)x_i, \sum_{i=1}^k \xi_i^Y(y)y_i\right) \\ &= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y)T(x_1, y_1) + \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)T(x_1, y_2) + \cdots + \\ &\quad + \xi_k^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)T(x_k, y_{k-1}) + \xi_k^X(x)\xi_k^Y(y)T(x_k, y_k) \end{aligned}$$

e

$$\left\langle T({}^\circ[(X_{k+1} \times Y_{k+1})^\circ]), \tilde{J}_Z z_l \right\rangle_Z = 0, \quad k+1 > l.$$

Desta forma, para $k = 1$,

$$\begin{aligned}
\xi_1^Z(z) &= \left\langle \xi_1^Z(z)z_1, \tilde{J}_Z z_1 \right\rangle_Z = \left\langle z, \tilde{J}_Z z_1 \right\rangle_Z \\
&= \left\langle T(\xi_1^X(x)x_1, \xi_1^Y(y)y_1), \tilde{J}_Z z_1 \right\rangle_Z \\
&= \left\langle \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y)T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_1 \right\rangle_Z \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_1 \right\rangle_Z \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y)\lambda_1 \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_1 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_1 \right\rangle_Y \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y)\lambda_1.
\end{aligned}$$

Para $k = 2$,

$$\begin{aligned}
\left\langle z, \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z &= \left\langle \sum_{i=1}^2 \xi_i^Z(z)z_i, \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z = \xi_1^Z(z) \left\langle z_1, \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z + \xi_2^Z(z) \left\langle z_2, \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&= \xi_1^Z(z) \left\langle \frac{T(x_1, y_1)}{\lambda_1}, \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z + \xi_2^Z(z) \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y)\lambda_1 \left\langle \frac{T(x_1, y_1)}{\lambda_1}, \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z + \xi_2^Z(z) \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z + \xi_2^Z(z).
\end{aligned} \tag{3.2.100}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left\langle z, \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z &= \left\langle T \left(\sum_{i=1}^2 \xi_i^X(x)x_i, \sum_{i=1}^2 \xi_i^Y(y)y_i \right), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_1, y_2), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_2, y_1), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_2, y_2), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z.
\end{aligned} \tag{3.2.101}$$

De (3.2.100) e (3.2.101), temos

$$\begin{aligned}
\xi_2^Z(z) &= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z - \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_1, y_2), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_2, y_1), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_2, y_2), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \tag{3.2.102} \\
&= \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_1, y_2), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_2, y_1), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_2, y_2), \tilde{J}_Z z_2 \right\rangle_Z \\
&= \left[\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_2 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \right] \lambda_2.
\end{aligned}$$

Portanto, em (3.2.102), fazendo

$$I_2 = \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \right\rangle_X + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_2 \right\rangle_Y, \tag{3.2.103}$$

temos

$$\xi_2^Z(z) = [I_2 + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y)] \lambda_2.$$

Para $k = 3$,

$$\begin{aligned}
\left\langle z, \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z &= \left\langle \sum_{i=1}^3 \xi_i^Z(z) z_i, \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \tag{3.2.104} \\
&= \xi_1^Z(z) \left\langle \frac{T(x_1, y_1)}{\lambda_1}, \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_2^Z(z) \left\langle \frac{T(x_2, y_2)}{\lambda_2}, \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_3^Z(z) \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + [I_2 + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y)] \left\langle T(x_2, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_3^Z(z).
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\left\langle z, \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z &= \left\langle T \left(\sum_{i=1}^3 \xi_i^X(x) x_i, \sum_{i=1}^3 \xi_i^Y(y) y_i \right), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \tag{3.2.105} \\
&= \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_1, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_1^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle T(x_1, y_3), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_2, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_2, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle T(x_2, y_3), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_3^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_3, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_3^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_3, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
&\quad + \xi_3^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle T(x_3, y_3), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z.
\end{aligned}$$

De (3.2.104) e (3.2.105), temos

$$\begin{aligned}
\xi_3^Z(z) = & -\xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z - [I_2 + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y)] \left\langle T(x_2, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
& + \xi_1^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_1, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_1, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
& + \xi_1^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle T(x_1, y_3), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_2, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
& + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_2, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_2^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle T(x_2, y_3), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
& + \xi_3^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle T(x_3, y_1), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z + \xi_3^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle T(x_3, y_2), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z \\
& + \xi_3^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle T(x_3, y_3), \tilde{J}_Z z_3 \right\rangle_Z.
\end{aligned} \tag{3.2.106}$$

$$\begin{aligned}
\xi_3^Z(z) = & [\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y + \xi_1^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \\
& + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y - I_2 \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \\
& + \xi_2^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X + \xi_3^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \\
& + \xi_3^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y + \xi_3^X(x)\xi_3^Y(y)] \lambda_3.
\end{aligned}$$

Em (3.2.106), fazendo

$$\begin{aligned}
I_3 = & \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y + \xi_1^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \tag{3.2.107} \\
& + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y - I_2 \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \\
& + \xi_2^X(x)\xi_3^Y(y) \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X + \xi_3^X(x)\xi_1^Y(y) \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \\
& + \xi_3^X(x)\xi_2^Y(y) \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y.
\end{aligned}$$

Segue que,

$$\xi_3^Z(z) = [I_3 + \xi_3^X(x)\xi_3^Y(y)] \lambda_3.$$

Repetindo o processo para $k = 4$, obtemos

$$\begin{aligned}
\xi_4^Z(z) = & [\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y + \xi_1^X(x)\xi_3^Y(y) \langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_1^X(x)\xi_4^Y(y) \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& - I_2 \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y + \xi_2^X(x)\xi_3^Y(y) \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_2^X(x)\xi_4^Y(y) \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X + \xi_3^X(x)\xi_1^Y(y) \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_3^X(x)\xi_2^Y(y) \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y - I_3 \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_3^X(x)\xi_4^Y(y) \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X + \xi_4^X(x)\xi_1^Y(y) \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y + \xi_4^X(x)\xi_2^Y(y) \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_4^X(x)\xi_3^Y(y) \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y + \xi_4^X(x)\xi_4^Y(y)] \lambda_4.
\end{aligned}$$

Com

$$\begin{aligned}
I_4 = & \xi_1^X(x)\xi_2^Y(y) \langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y + \xi_1^X(x)\xi_3^Y(y) \langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_1^X(x)\xi_4^Y(y) \langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y) \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& - I_2 \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y + \xi_2^X(x)\xi_3^Y(y) \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_2^X(x)\xi_4^Y(y) \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X + \xi_3^X(x)\xi_1^Y(y) \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \quad (3.2.108) \\
& + \xi_3^X(x)\xi_2^Y(y) \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y - I_3 \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_3^X(x)\xi_4^Y(y) \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X + \xi_4^X(x)\xi_1^Y(y) \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y + \xi_4^X(x)\xi_2^Y(y) \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \\
& + \xi_4^X(x)\xi_3^Y(y) \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y.
\end{aligned}$$

Segue que,

$$\xi_4^Z(z) = [I_4 + \xi_4^X(x)\xi_4^Y(y)] \lambda_4.$$

Fazendo $I_1 = 0$ e seguindo o processo obtemos, para $k \in \mathbb{N}$.

$$\xi_k^Z(z) = [I_k + \xi_k^X(x)\xi_k^Y(y)] \lambda_k. \quad (3.2.109)$$

Voltando aos coeficientes dados acima, vamos reescrevê-los dando uma visão de forma matricial em relação ao somatório de cada $\xi_k^Z(z)$. Salientamos que, apenas faremos uma reordenação dos termos dos somatórios nas posições matriciais, por isso os termos virão acompanhados de seus devidos sinais. O objetivo de tal reordenação, para além da organização, é o agrupamento conveniente de termos os quais serão definidos padrões para uma majoração e análise de convergência.

Para $k = 1$,

$$\xi_1^Z(z) = [\xi_1^X(x)\xi_1^Y(y)]\lambda_1. \quad (3.2.110)$$

Para $k = 2$,

$$\xi_2^Z(z) = \begin{bmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)\langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)\langle y_1, \tilde{J}_Y y_2 \rangle_Y & +\xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \end{bmatrix} \lambda_2.$$

Ou ainda,

$$\xi_2^Z(z) = \begin{bmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^2 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^2 & +\xi_2^X(x)\xi_2^Y(y) \end{bmatrix} \lambda_2, \quad (3.2.111)$$

onde:

$$A_{12}^2 = \langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X \text{ e } A_{21}^2 = \langle y_1, \tilde{J}_Y y_2 \rangle_Y.$$

Para $k = 3$,

$$\xi_3^Z(z) = \begin{bmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y & -I_2 \langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)\langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y & +\xi_3^X(x)\xi_3^Y(y) \end{bmatrix} \lambda_3.$$

Por (3.2.103), substituindo I_2 na igualdade acima e reorganizando os termos $\xi_i^X(x)\xi_j^Y(y)$ nas posições matriciais, obtemos:

$$\xi_3^Z(z) = \begin{bmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^3 & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)A_{13}^3 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^3 & +0 & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)A_{23}^3 \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)A_{31}^3 & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)A_{32}^3 & +\xi_3^X(x)\xi_3^Y(y) \end{bmatrix} \lambda_3, \quad (3.2.112)$$

onde:

$$A_{12}^3 = \langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y - \langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X \langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y;$$

$$A_{21}^3 = \langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y - \langle y_1, \tilde{J}_Y y_2 \rangle_Y \langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y;$$

$$A_{13}^3 = \langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X;$$

$$A_{23}^3 = \langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X;$$

$$A_{32}^3 = \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y;$$

$$A_{31}^3 = \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y;$$

Para $k = 4$,

$$\xi_4(z) =$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)\left\langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)\left\langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_1^X(x)\xi_4^Y(y)\left\langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)\left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & -I_2 \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)\left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_2^X(x)\xi_4^Y(y)\left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)\left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)\left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & -I_3 \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_3^X(x)\xi_4^Y(y)\left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ +\xi_4^X(x)\xi_1^Y(y)\left\langle x_4, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_4^X(x)\xi_2^Y(y)\left\langle x_4, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_4^X(x)\xi_3^Y(y)\left\langle x_4, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y & +\xi_4^X(x)\xi_4^Y(y)\left\langle x_4, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \end{array} \right] \lambda_4$$

Novamente, por (3.2.103) e (3.2.107), procedendo de maneira análoga ao coeficiente anterior, obtemos:

$$\xi_4(z) = \left[\begin{array}{cccc} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^4 & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)A_{13}^4 & +\xi_1^X(x)\xi_4^Y(y)A_{14}^4 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^4 & +0 & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)A_{23}^4 & +\xi_2^X(x)\xi_4^Y(y)A_{24}^4 \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)A_{31}^4 & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)A_{32}^4 & +0 & +\xi_3^X(x)\xi_4^Y(y)A_{34}^4 \\ +\xi_4^X(x)\xi_1^Y(y)A_{41}^4 & +\xi_4^X(x)\xi_2^Y(y)A_{42}^4 & +\xi_4^X(x)\xi_3^Y(y)A_{43}^4 & +\xi_4^X(x)\xi_4^Y(y)A_{44}^4 \end{array} \right] \lambda_4, \quad (3.2.113)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{12}^4 &= \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ &\quad - \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \right\rangle_X \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ &\quad - \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ &\quad + \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \right\rangle_X \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}^4 &= \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ &\quad - \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_2 \right\rangle_Y \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ &\quad - \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \\ &\quad + \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_2 \right\rangle_Y \left\langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \right\rangle_Y \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y; \end{aligned}$$

$$A_{13}^4 = \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y - \left\langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y;$$

$$A_{23}^4 = \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y - \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y;$$

$$A_{32}^4 = \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y - \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y;$$

$$A_{31}^4 = \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y - \langle y_1, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y;$$

$$A_{14}^4 = \langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X;$$

⋮

$$A_{41}^4 = \langle y_1, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y;$$

Seguimos da mesma forma para $k = 5$,

$$\xi_5(z) = \begin{bmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^5 & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)A_{13}^5 & +\xi_1^X(x)\xi_4^Y(y)A_{14}^5 & +\xi_1^X(x)\xi_5^Y(y)A_{15}^5 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^5 & +0 & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)A_{23}^5 & +\xi_2^X(x)\xi_4^Y(y)A_{24}^5 & +\xi_2^X(x)\xi_5^Y(y)A_{25}^5 \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)A_{31}^5 & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)A_{32}^5 & +0 & +\xi_3^X(x)\xi_4^Y(y)A_{34}^5 & +\xi_3^X(x)\xi_5^Y(y)A_{35}^5 \\ +\xi_4^X(x)\xi_1^Y(y)A_{41}^5 & +\xi_4^X(x)\xi_2^Y(y)A_{42}^5 & +\xi_4^X(x)\xi_3^Y(y)A_{43}^5 & +0 & +\xi_4^X(x)\xi_5^Y(y)A_{45}^5 \\ +\xi_5^X(x)\xi_1^Y(y)A_{51}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_2^Y(y)A_{52}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_3^Y(y)A_{53}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_4^Y(y)A_{54}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_5^Y(y), \end{bmatrix} \lambda_5,$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{12}^5 &= \langle x_1, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad - \langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X \langle x_2, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad - \langle x_1, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad - \langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle x_3, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y \langle y_3, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad + \langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X \langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle x_3, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y \langle y_3, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad + \langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X \langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad + \langle x_1, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad + \langle x_1, \tilde{J}_X x_2 \rangle_X \langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \rangle_X \langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \rangle_X \langle y_2, \tilde{J}_Y y_3 \rangle_Y \langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \rangle_Y \langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \rangle_X \langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \rangle_Y \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23}^5 &= \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_5 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_5 \right\rangle_Y \\
&\quad - \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \right\rangle_Y \\
&\quad - \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \left\langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \right\rangle_Y \\
&\quad + \left\langle x_2, \tilde{J}_X x_3 \right\rangle_X \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle y_3, \tilde{J}_Y y_4 \right\rangle_Y \left\langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \right\rangle_Y \\
&\quad \vdots \\
A_{34}^5 &= \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_5 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \right\rangle_Y - \left\langle x_3, \tilde{J}_X x_4 \right\rangle_X \left\langle x_4, \tilde{J}_X x_5 \right\rangle_X \left\langle y_4, \tilde{J}_Y y_5 \right\rangle_Y \\
&\quad \vdots \\
A_{51}^5 &= \left\langle y_1, \tilde{J}_Y y_5 \right\rangle_Y
\end{aligned}$$

Após a obtenção dos coeficientes acima, observamos o seguinte: (3.2.109) pode ser visto da seguinte forma,

$$\xi_k^Z(z) = \begin{bmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^k & \cdots & +\xi_1^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{1(k-1)}^k & +\xi_1^X(x)\xi_k^Y(y)A_{1k}^k \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^k & +0 & \cdots & +\xi_2^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{2(k-1)}^k & +\xi_2^X(x)\xi_k^Y(y)A_{2k}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ +\xi_{k-1}^X(x)\xi_1^Y(y)A_{(k-1)1}^k & +\xi_{k-1}^X(x)\xi_2^Y(y)A_{(k-1)2}^k & \cdots & +0 & +\xi_{k-1}^X(x)\xi_k^Y(y)A_{(k-1)k}^k \\ +\xi_k^X(x)\xi_1^Y(y)A_{k1}^k & +\xi_k^X(x)\xi_2^Y(y)A_{k2}^k & \cdots & +\xi_k^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{k(k-1)}^k & +\xi_k^X(x)\xi_k^Y(y) \end{bmatrix} \lambda_k.$$

$$\xi_k(z) = \xi_k(T(x, y)) = [I_k + \xi_k(x)\xi_k(y)]\lambda_k, \quad (3.2.114)$$

com

$$I_k = \begin{bmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^k & \cdots & +\xi_1^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{1(k-1)}^k & +\xi_1^X(x)\xi_k^Y(y)A_{1k}^k \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^k & +0 & \cdots & +\xi_2^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{2(k-1)}^k & +\xi_2^X(x)\xi_k^Y(y)A_{2k}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ +\xi_{k-1}^X(x)\xi_1^Y(y)A_{(k-1)1}^k & +\xi_{k-1}^X(x)\xi_2^Y(y)A_{(k-1)2}^k & \cdots & +0 & +\xi_{k-1}^X(x)\xi_k^Y(y)A_{(k-1)k}^k \\ +\xi_k^X(x)\xi_1^Y(y)A_{k1}^k & +\xi_k^X(x)\xi_2^Y(y)A_{k2}^k & \cdots & +\xi_k^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{k(k-1)}^k & +0 \end{bmatrix}$$

Observação 3.2.18. *Estando os termos de I_k dispostos em forma matricial e com ordenação quadrada, podemos fazer algumas observações quanto à sua recorrência.*

1. $A_{ij}^k = 0$, $i = j$;
2. Os termos da forma A_{ij}^k , $i \neq j$, são formados pelos somatórios das parcelas, onde, a menos de sinal, são produtos entre $\left\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \right\rangle_X$ e $\left\langle y_j, \tilde{J}_Y y_l \right\rangle_Y$, $1 \leq i, j < m, l \leq k$.
3. As parcelas do somatório de I_k , em sua forma matricial, contidos na k -ésima coluna

e k -ésima linha, representados pelo símbolo $\lrcorner_k$, tem as formas $\xi_i^X(x)\xi_k^Y(y)A_{ik}^k$ e $\xi_k^X(x)\xi_j^Y(y)A_{kj}^k$, onde $A_{ik}^k = \langle x_i, \tilde{J}_X x_k \rangle_X$ e $A_{kj}^k = \langle y_j, \tilde{J}_Y y_k \rangle_Y$, $1 \leq i, j < k$. Abaixo representamos os termos do somatório de $\lrcorner_k$ em sua forma matricial

$$\lrcorner_k = \begin{bmatrix} & & & & +\xi_1^X(x)\xi_k^Y(y)A_{1k}^k \\ & & & & +\xi_2^X(x)\xi_k^Y(y)A_{2k}^k \\ & & & & \vdots \\ & & & & +\xi_{k-1}^X(x)\xi_k^Y(y)A_{(k-1)k}^k \\ +\xi_k^X(x)\xi_1^Y(y)A_{k1}^k & +\xi_k^X(x)\xi_2^Y(y)A_{k2}^k & \cdots & +\xi_k^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{k(k-1)}^k & \end{bmatrix}$$

4. As parcelas do somatório de I_k , em sua forma matricial, contidos na $(k-1)$ -ésima coluna e $(k-1)$ -ésima linha, representados pelo símbolo $\lrcorner_{k-1}$, tem as formas $\xi_i^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{i(k-1)}^k$ e $\xi_{k-1}^X(x)\xi_j^Y(y)A_{(k-1)j}^k$, onde $A_{i(k-1)}^k$ e $A_{(k-1)j}^k$ terão somatórios, a menos de sinal, com duas parcelas, com produtos de dois e três elementos da forma $\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \rangle_X$ e $\langle y_j, \tilde{J}_Y y_l \rangle_Y$, $1 \leq i, j < m, l \leq k$, respectivamente. Exemplos: A_{34}^5 e A_{31}^4 . Abaixo representamos os termos do somatório de $\lrcorner_{k-1}$ em sua forma matricial.

$$\lrcorner_{k-1} = \begin{bmatrix} & & \cdots & \cdots & +\xi_1^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{1(k-1)}^k & \vdots \\ & \cdots & & \cdots & +\xi_2^X(x)\xi_{k-1}^Y(y)A_{2(k-1)}^k & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ +\xi_{k-1}^X(x)\xi_1^Y(y)A_{(k-1)1}^k & & +\xi_{k-1}^X(x)\xi_2^Y(y)A_{(k-1)2}^k & \cdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$$

5. As parcelas do somatório de I_k , em sua forma matricial, contidos na $(k-2)$ -ésima coluna e $(k-2)$ -ésima linha, representados pelo símbolo $\lrcorner_{k-2}$, tem as formas $\xi_i^X(x)\xi_{k-2}^Y(y)A_{i(k-2)}^k$ e $\xi_{k-2}^X(x)\xi_j^Y(y)A_{(k-2)j}^k$, onde $A_{i(k-2)}^k$ e $A_{(k-2)j}^k$ terão somatórios, a menos de sinal, com quatro parcelas, com produtos de dois, três, quatro e cinco elementos da forma $\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \rangle_X$ e $\langle y_j, \tilde{J}_Y y_l \rangle_Y$, $1 \leq i, j < m, l \leq k$, respectivamente. Exemplos: A_{23}^5 e A_{21}^4 .
6. A partir de $\lrcorner_{k-3}$, os termos $A_{i(k-n)}^k$ e $A_{(k-n)j}^k$, $1 \leq i, j < k-n$ ($3 \leq n \leq k-2$), terão somatório com 2^n parcelas e produtos de dois a $2k-3$ elementos da forma $\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \rangle_X$ e $\langle y_j, \tilde{J}_Y y_l \rangle_Y$, $1 \leq i, j < m, l \leq k$, respectivamente, tendo repetições de parcelas com mesmo número de produtos que seguem o seguinte padrão:

Tabela 1 :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		$2k-4$	$2k-3$	$quantidade$
A_{1k}^k	1																$2(k-1)$
$A_{1(k-1)}^k$	0	1	1														$2(k-2)$
$A_{1(k-2)}^k$	0	1	1	1	1												$2(k-3)$
$A_{1(k-3)}^k$	0	1	1	2	2	1	1										$2(k-4)$
$A_{1(k-4)}^k$	0	1	1	3	3	3	3	1	1								$2(k-5)$
$A_{1(k-5)}^k$	0	1	1	4	4	6	6	4	4	1	1						$2(k-6)$
$A_{1(k-6)}^k$	0	1	1	5	5	10	10	10	10	5	5	1	1				$2(k-7)$
$\vdots$								$\vdots$			$\vdots$						$\vdots$
A_{13}^k	0	1	1	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$		a_{r-2}	a_{r-1}	a_r	1	1			4
A_{12}^k	0	1	1	$1+a_1$	$1+a_2$	a_1+a_3	a_2+a_4	$\cdots$		$\cdots$		$a_{r-2}+a_r$	$a_{r-1}+1$	a_n+1	1	1	2

Algumas observações quanto à tabela acima:

- na primeira coluna, com elementos da forma $A_{1(k-m)}^k$, são representantes dos elementos de cada $\lrcorner_{k-m}$;
- a última coluna, "quantidade", é formada pelo número de elementos de $\lrcorner_{k-m}$ que contém $A_{1(k-m)}^k$;
- na primeira linha, a numeração indica a quantidade de elementos da forma $\left\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \right\rangle_X$ e $\left\langle y_j, \tilde{J}_Y y_l \right\rangle_Y$ que formam as parcelas dos somatórios;
- os elementos correspondentes linha/coluna representam o número de repetições das parcelas com o número de produtos de elementos da forma $\left\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \right\rangle_X$ e $\left\langle y_j, \tilde{J}_Y y_l \right\rangle_Y$, indicados na coluna, seguindo um padrão geral como descrito nas duas últimas linhas da tabela.

Observamos ainda que I_k pode ser dado pelo somatório dos $\lrcorner$, ou seja, $I_k = \lrcorner_k + \lrcorner_{k-1} + \dots + \lrcorner_2$.

Temos que $\left| \left\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \right\rangle_X \right| < 1$ e $\left| \left\langle y_j, \tilde{J}_Y y_m \right\rangle_Y \right| < 1$, $1 \leq i, j < m \leq k$. Seja $1 < q$ tal que $\frac{1}{q} = \max \left\{ \left| \left\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \right\rangle_X \right|, \left| \left\langle y_j, \tilde{J}_Y y_m \right\rangle_Y \right| \right\}$, $1 \leq i, j < m \leq k$. Observamos que, para cada A_{1r}^k , $2 \leq r \leq k$, que descrevem as linhas da tabela acima, o número de repetições de termos com um mesmo número de produtos tem seu maior valor na posição central de cada linha. Assim, faremos a majoração do somatório por esse valor, como no exemplo abaixo.

$$\begin{aligned}
|A_{12}^5| &\leq 0 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + 2\frac{1}{q^4} + 2\frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \\
&\leq 2 \left(0 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \right) \\
&= 2 \sum_{l=2}^7 \frac{1}{q^l}.
\end{aligned} \tag{3.2.115}$$

Consideramos mais um exemplo: façamos a análise para $|A_{12}^8|$. Pelo item 6 da observação 3.2.18 e da *Tabela 1*, vemos que a quantidade e as repetições de termos com mesmo número de produtos estão dispostos na linha de $A_{1(k-6)}^k$ e, com isso, temos a seguinte majoração.

$$\begin{aligned}
|A_{12}^8| &\leq 0 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + 5\frac{1}{q^4} + 5\frac{1}{q^5} + 10\frac{1}{q^6} + 10\frac{1}{q^7} + 10\frac{1}{q^8} + 10\frac{1}{q^9} + 5\frac{1}{q^{10}} + \\
&\quad 5\frac{1}{q^{11}} + \frac{1}{q^{12}} + \frac{1}{q^{13}} \\
&\leq 10 \left(0 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^9} + \frac{1}{q^{10}} + \frac{1}{q^{11}} + \frac{1}{q^{12}} + \frac{1}{q^{13}} \right) \\
&= 10 \sum_{l=2}^{13} \frac{1}{q^l}.
\end{aligned}$$

Agora, para um k qualquer, podemos fazer a seguinte estimativa para $|A_{12}^k|$, $k \geq 4$.

$$\begin{aligned}
|A_{12}^k| &\leq 0 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + (k-3)\frac{1}{q^4} + (k-3)\frac{1}{q^5} + \cdots + 2^{k-4}\frac{1}{q^k} + 2^{k-4}\frac{1}{q^{k+2}} + \cdots + \\
&\quad (k-3)\frac{1}{q^{2k-6}} + (k-3)\frac{1}{q^{2k-5}} + \frac{1}{q^{2k-4}} + \frac{1}{q^{2k-3}} \\
&\leq 2^{k-4} \left(0 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \cdots + \frac{1}{q^k} + \frac{1}{q^{k+2}} + \cdots + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{q^{2k-6}} + \frac{1}{q^{2k-5}} + \frac{1}{q^{2k-4}} + \frac{1}{q^{2k-3}} \right) \\
&= 2^{k-4} \sum_{l=2}^{2k-3} \frac{1}{q^l}.
\end{aligned} \tag{3.2.116}$$

Ressaltando que o coeficiente em evidência, 2^{k-4} , é o coeficiente do termo central do somatório.

3.2.2 Resultado principal

Vamos definir agora a seguinte família de funcionais em $Bil(X \times Y)$.

Definição 3.2.19. *Sejam $B_k \in Bil(X \times Y)$ tais que:*

$$\langle (x, y), B_k \rangle_{X \times Y} = \langle T(x, y), \xi_k^Z \rangle_Z = \langle (x, y), T^* \xi_k^Z \rangle_{X \times Y}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ou ainda,

$$B_k(x, y) = \sum_{(i,j) \in E_l} A_{ij}^k \xi_i^X(x) \xi_j^Y(y) \lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.2.117)$$

onde E_l é o conjunto dos $l = k^2$ primeiros pares ordenados de índices (i, j) na ordenação quadrada, como definido em (2.3.40), para base do produto tensorial.

Retomando 3.1.10, pela definição dos funcionais B_k , podemos escrever

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \{x \in X; \langle (x, y), B_k \rangle_{X \times Y} = 0, \forall y \in Y\} \\ e \\ Y_{k+1} &= \{y \in Y; \langle (x, y), B_k \rangle_{X \times Y} = 0, \forall x \in X\}. \end{aligned} \quad (3.2.118)$$

Notemos ainda que, por (3.1.8), $B_k(x, y) \in (X_{k+1} \times Y_{k+1})^\circ \cong Bil\left(\frac{X}{X_{k+1}} \times \frac{Y}{Y_{k+1}}\right)$.

O seguinte lema, de [17], lema 10.4, será necessário.

Lema 3.2.20. *Seja E um espaço normado e F um subespaço fechado de codimensão finita. Então todo complemento algébrico de F é também complemento topológico.*

Demonstração: Seja $\phi : E \rightarrow E/F$ a aplicação quociente e seja G um complemento algébrico de F em E . Então $\phi|_G : G \rightarrow E/F$ e deste modo também é de dimensão finita, por [17, 5.15] então $\phi|_G$ é um isomorfismo. Consequentemente, $\Phi := (\phi|_G)^{-1} \circ \phi$ é uma projeção contínua de E em G com $Nuc \Phi = F$. ■

Pelo lema 3.2.20 e sua demonstração, teremos que $\left(\frac{X}{X_{k+1}}\right) \approx R_k^X$ e $\left(\frac{Y}{Y_{k+1}}\right) \approx R_k^Y$.

Em [16], lema 3.1.16, temos a seguinte definição para $Nuc T$, para $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$.

Definição 3.2.21. *Suponha que X e Y são espaços normados e $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Então $Nuc T = {}^\circ(T^*(Y^*))$ e $Nuc T^* = (T(X))^\circ$.*

Voltando em (3.2.39), onde por Ramanujan e Schock [20], é dado o operador adjunto de $T^* : Z^* \rightarrow \text{Bil}(X \times Y)$ por:

$$\langle (x, y), T^* z^* \rangle_{X \times Y} = \langle T(x, y), z^* \rangle_Z.$$

Desta forma podemos ter uma definição análoga à 3.2.21 para $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$.

Definição 3.2.22. *Sejam X , Y e Z espaços normados e $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$. Então o conjunto*

$${}^\circ(T^*Z^*) \equiv \{(x, y) \in X \times Y; \langle (x, y), T^* z^* \rangle_{X \times Y} = \langle T(x, y), z^* \rangle_Z = 0, \forall z^* \in Z^*\}$$

é chamado de anulador de T em $X \times Y$.

Em [11], página 105, comenta que, se existe um funcional bilinear não degenerado em $U \times V$ onde U e V são de dimensão finita então $\dim U = \dim V$.

Para um operador $T \in \mathfrak{L}(E, F)$, Pietsch, em [18, B.4.4] define:

Definição 3.2.23. *Um operador $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ é dito finito se existe uma representação finita*

$$T = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n \in E^*$ e $y_1, y_2, \dots, y_n \in F$. Isso significa que

$$Tx = \sum_{i=1}^n \langle x, a_i \rangle_E y_i, \quad \forall x \in E.$$

E define $\text{posto } T$ como o menor número de termos o qual Tx tenha a representação acima, para qualquer $x \in E$. Note que:

$$\text{posto } T = \text{codim}(\text{Nuc } T) = \dim(\text{Im } T).$$

Definimos assim, para $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$,

Definição 3.2.24. *Um operador $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$ é dito finito se existe uma representação finita*

$$T = \sum_{i=1}^n B_i \otimes z_i,$$

onde $B_1, B_2, \dots, B_n \in \text{Bil}(X \times Y)$ e $z_1, z_2, \dots, z_n \in Z$. Ou seja,

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^n \langle (x, y), B_i \rangle_{X \times Y} z_i, \quad \forall (x, y) \in X \times Y. \quad (3.2.119)$$

Da mesma forma, o $\text{posto } T$, para $T \in \text{Bil}(X \times Y)$, é o menor número de termos tal que se tenha a representação (3.2.119).

De posse de tais definições, provaremos um resultado análogo à proposição 2.2.4 em [5].

Proposição 3.2.25. *A restrição de T ao subconjunto ${}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ] \subset X \times Y$ é o operador nulo se, e somente se, T tem posto n . Se T é de posto infinito então $\{\lambda_n\}$ é infinito, com $\lambda_n \rightarrow 0$ e*

$${}^\circ(T^*Z^*) \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ].$$

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ o menor índice tal que para todo $x_0 \in X_{n+1}$ se tenha $T_{x_0} \in \mathfrak{L}(Y, Z)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{x_0} &: Y \rightarrow Z \\ y &\mapsto T(x_0, y) = 0, \quad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Por (3.2.99) temos que, $x_0 \in X_{n+1}$, $T_{x_0}(Y) \subset Z_{n+1}$. Assim, $B_k \in \text{Bil}(X \times Y)$, $k \leq n$, são nulos para quaisquer $x_0 \in X_{n+1}$ e $y \in Y$, pois $B_k(x_0, y) = \xi_k^Z(T(x_0, y)) = 0$.

Pela decomposição de X , dada em (3.2.22),

$$X = K_n^X \oplus R_n^X,$$

para $x \in X$ e algum $y \in Y$, tal que $T(x, y) \neq 0$, implica que $x \in R_n^X$ e $B_n \in \text{Bil}(X \times Y)$ é não degenerado em $R_n^X \times Y$, caso contrário existiria $x' \in R_n^X$ tal que $B_n(x', y) = 0$, para qualquer $y \in Y$, e assim $x' \in K_n^X = X_{n+1}$, por (3.2.118) e como $X_{n+1} \cap R_n^X = \emptyset$, teremos assim uma contradição. Com isso, pela construção dos coeficientes em Z , $\xi_n^Z \in Z^*$ é não nulo.

Da mesma forma temos que B_k , $k \leq n$, também são não degenerados por conta da minimilidade de n .

Pela definição 3.2.19 e por (3.2.22), B_n decompõem Y em $Y_{n+1} \oplus R_n^Y$, onde, se $y \in Y_{n+1}$, $B_n(x, y) = 0$, para qualquer $x \in X$.

Suponha agora que $y \in [y_n] \subset R_n^Y$, ou seja, $y = \xi_n^Y(y)y_n$ não nulo, tal que $B_n(x, y) = 0$. Pela representação matricial de $B_n(x, y) = \xi_n^Z(T(x, y))$, vemos que esta terá somente a última coluna e teremos a igualdade:

$$\left\langle \xi_1^X(x)x_1 + \xi_2^X(x)x_2 + \dots + \xi_n^X(x)x_n, \tilde{J}_X x_n \right\rangle_X \xi_n^Y(y)\lambda_n = 0,$$

ou seja,

$$\xi_1^X(x)x_1 + \xi_2^X(x)x_2 + \dots + \xi_n^X(x)x_n = S_{n+1}^X x = 0$$

e $\xi_i^X(x) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Isto ocorre se, e somente se, $x = 0$ ou $x \in X_{n+1}$. Assim, a minimilidade de n se aplica também em Y e, portanto, $T(X \times Y) = T(R_n^X \times R_n^Y)$ e $\text{posto } T = n$.

Vemos que a análise é análoga para $y_0 \in Y_{n+1}$ e assim teremos que, se T é operador nulo em $(X_{n+1} \times Y) \cup (X \times Y_{n+1})$ então T tem a representação da forma como dado em (3.2.119). Ou seja, para $k = n$,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{i=1}^n \xi_i(z) z_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (x, y), B_i \rangle_{X \times Y} z_i. \end{aligned}$$

Satisfazendo a definição 3.2.24.

Partindo agora da definição 3.2.24, com $\text{posto } T = n$, teremos então que, para cada $B_i \in \text{Bil}(X \times Y)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$B_i \in (X_{i+1} \times Y_{i+1})^\circ \cong \text{Bil}\left(\frac{X}{X_{i+1}} \times \frac{Y}{Y_{i+1}}\right).$$

Ou seja, $(x, y) \in X \times Y$, com $x \in X_{i+1}$ ou $y \in Y_{i+1}$, então

$$\langle (x, y), B_i \rangle_{X \times Y} = 0.$$

Como $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ e $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_n \supset \dots$, assim, $x \in X_{n+1}$ ou $y \in Y_{n+1}$,

$$\langle (x, y), B_i \rangle_{X \times Y} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto,

$$T(x, y) = 0.$$

Se T não tem posto finito, então o processo de obtenção de λ_n , (x_n, y_n) , X_{n+1} e Y_{n+1} segue indefinidamente. Como $T(x_n, y_n) \in {}^\circ M_{n-1}^Z$, temos

$$\left\langle T(x_n, y_n), \tilde{J}_Z T(x_m, y_m) \right\rangle_Z = 0, \quad \text{se } m < n.$$

Assim, se $m < n$,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k &\leq \|T(x_m, y_m)\|_Z = \left\langle T(x_m, y_m), \tilde{J}_Z T(x_m, y_m) \right\rangle_Z \\
&= \left\langle T(x_m, y_m) - T(x_n, y_n), \tilde{J}_Z T(x_m, y_m) \right\rangle_Z \\
&\leq \|T(x_m, y_m) - T(x_n, y_n)\|_Z \|\tilde{J}_Z T(x_m, y_m)\|_{Z^*} \\
&= \|T(x_m, y_m) - T(x_n, y_n)\|_Z.
\end{aligned}$$

Desde que $\{(x_n, y_n)\}$ é limitada e T compacto, então existe subsequência de $\{T(x_n, y_n)\}$ convergente em Z . Portanto $\{\lambda_k\}$ converge para zero.

Se $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [(X_n \times Y_n)^\circ]$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, $T_{x_n}(Y) \subset Z_n$ e $T_{y_n}(X) \subset Z_n$. Desta forma $\|T(x, y)\|_Z \leq \|T(x_n, y_n)\|_Z \leq \lambda_n \|(x_n, y_n)\|_{X \times Y} \rightarrow 0$, com $n \rightarrow \infty$. Assim $\langle T(x, y), z^* \rangle_Z = \langle (x, y), T^* z^* \rangle_{X \times Y} = 0$, para qualquer $z^* \in Z^*$ e portanto (x, y) pertence ao conjunto anulador de T . ■

Temos assim, pela definição 3.2.19 e por (3.2.114), a representação para $T(x, y)$ em $R_n^X \times R_n^Y$.

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= z = \sum_{i=1}^n \xi_i(z) z_i \\
&= \sum_{i=1}^n B_i(x, y) z_i \\
&= \sum_{i=1}^n [I_i + \xi_i^X(x) \xi_i^Y(y)] \lambda_i \frac{T(x_i, y_i)}{\lambda_i} \\
&= \sum_{i=1}^n [I_i + \xi_i^X(x) \xi_i^Y(y)] T(x_i, y_i).
\end{aligned} \tag{3.2.120}$$

Ou ainda, por (3.2.117),

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{(r,s) \in E_l} A_{rs}^i \xi_r^X(x) \xi_s^Y(y) \lambda_i z_i. \tag{3.2.121}$$

Onde E_l é o conjunto dos $l = i^2$ primeiros pares ordenados de índices (r, s) na ordenação quadrada, como definido em (2.3.40), para base do produto tensorial.

Observação 3.2.26. Se X e Y são espaços de Hilbert, temos que $I_l = 0$ para $1 \leq l \leq n$ e assim (3.2.120) tem a seguinte forma:

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i^X(x) \xi_i^Y(y) T(x_i, y_i).$$

Denotando por ${}_nT = T|_{R_n^X \times R_n^Y}$, ou seja,

$$\begin{aligned} {}_nT &: R_n^X \times R_n^Y \longrightarrow Z \\ (S_{n+1}^X, S_{n+1}^Y) &\mapsto {}_nT(S_{n+1}^X, S_{n+1}^Y) \subset R_n^Z \approx Z/Z_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.2.122)$$

Temos, por (3.2.122), a seguinte igualdade

$$T(S_{n+1}^X(x), S_{n+1}^Y(y)) = S_{n+1}^Z(T(x, y)), \quad \forall (x, y) \in X \times Y. \quad (3.2.123)$$

Vemos, pelo teorema anterior, que ${}_nT$ é de posto finito e igual a n e $Nuc {}_nT = {}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ]$.

Com a luz do lema 3.2.20 onde se faz as identificações $\left(\frac{X}{X_k}\right) \approx R_{k-1}^X$ e $\left(\frac{Y}{Y_k}\right) \approx R_{k-1}^Y$, passaremos olhar o caso em que $k = \infty$, onde $X_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$ e $Y_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Y_k$.

Consideremos as aplicações quocientes

$$\begin{aligned} \phi_k^X &: X \rightarrow X/X_k \\ \phi_k^Y &: Y \rightarrow Y/Y_k. \end{aligned} \quad (3.2.124)$$

Para $k = \infty$ em (3.2.124), ou seja,

$$\begin{aligned} \phi_\infty^X &: X \rightarrow X/X_\infty \\ \phi_\infty^Y &: Y \rightarrow Y/Y_\infty. \end{aligned} \quad (3.2.125)$$

Sendo $\phi_\infty^X : X \rightarrow X/X_\infty$ aplicação canônica. Temos ainda que, por [5, Proposição 2.2.1], ϕ^* é um isomorfismo isométrico de $(X/X_\infty)^*$ em X_∞° , com isso reproduziremos o lema 2.2.11, de [5], o qual será necessário para o prosseguimento do texto.

Lema 3.2.27. *Seja $\mathbb{L}(X)$ o conjunto de todos os subespaços lineares de um espaço de Banach X , seja $\mathbb{S} \subset \mathbb{L}(X)$ e faça $L = \bigcap_{S \in \mathbb{S}} S$, $N = \overline{\bigcup_{S \in \mathbb{S}} S^\circ}$. Então $L^\circ = N$ e para todo $x \in X$,*

$$\|x\|_{X/L} = \sup_{S \in \mathbb{S}} \|x\|_{X/S}.$$

Demonstração: Seja $\Psi : \mathbb{L}(X) \rightarrow \mathbb{L}(X^*)$ dado por $\Psi(Z) = Z^\circ$ ($Z \in \mathbb{L}(X)$). Recordamos que dado qualquer subespaço linear G de um espaço de Banach, G° é fechado e $\overline{G} = {}^\circ(G^\circ)$; o que também é válido para subespaços no dual. Portanto Ψ é bijetivo e temos a inclusão inversa. Assim, para qualquer $S \in \mathbb{S}$, $L \subset S$, temos $S^\circ \subset L^\circ$; portanto, $\bigcup_{S \in \mathbb{S}} S^\circ \subset L^\circ$ e

$N \subset L^\circ$. Contudo, para todo $S \in \mathbb{S}$, $S^\circ \subset N$, o qual mostra que $\Psi^{-1}(N) \subset \bigcap_{S \in \mathbb{S}} S = L$, onde $L^\circ \subset N$. Consequentemente $L^\circ = N$. Isto implica que $(X/L)^*$ é isométrico a N , e

$$\begin{aligned} \sup\{|\langle x, y \rangle_X| : x \in N, \|y\|_{X^*} \leq 1\} &= \sup\{|\langle x, y \rangle_X| : y \in \overline{\bigcup_{S \in \mathbb{S}} S^\circ}, \|y\|_{X^*} \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, y \rangle_X| : y \in S^\circ, \|y\|_{X^*} \leq 1\}. \end{aligned}$$

■

Agora, aplicando o lema com $L = X_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$. Como $X_k^\circ = (^\circ M_{k-1}^X)^\circ = M_{k-1}^X$, temos que $N = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k^X}$, portanto

$$X_\infty^\circ = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k^X} \quad (3.2.126)$$

e

$$\|x\|_{X/X_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x\|_{X/X_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x\|_{X/X_k}. \quad (3.2.127)$$

A mesma análise se dá em Y e Z .

Em [5] temos o seguinte lema.

Lema 3.2.28. *Seja S_{k+1}^X , $k \in \mathbb{N}$, a projeção linear de X em $R_k^X = [x_1, x_2, \dots, x_k]$, dada por (3.2.84), onde os coeficientes ξ_i^X satisfazem (3.2.85), e seja P_{k+1}^X a projeção de X em X_{k+1} , como (3.2.88). Então $(I - P_{k+1}^X)S_{k+1}^X x \rightharpoonup x \in X/X_\infty$.*

Demonstração: Ver [5], página 85. ■

O mesmo se dá para Y e, ainda em [5], o teorema 2.2.14 mostra que, se X for uniformemente convexo, essa convergência fraca pode ser substituída por forte e caracteriza os elementos $x \in X/X_\infty$ como

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_{n+1}^X x - P_{n+1}^X S_{n+1}^X x] \quad (3.2.128)$$

e, $x \in X$,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_{n+1}^X x - P_{n+1}^X S_{n+1}^X x] + P_\infty^X x. \quad (3.2.129)$$

Proposição 3.2.29. *Sejam X e Y espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. Se T é de posto infinito, então $^\circ(T^*Z^*) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [^\circ(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ]$.*

Demonstração: Afirmamos que ${}^\circ(T^*Z^*) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ]$. De fato, pois, caso contrário, existiria $(x, y) \in \frac{X}{X_\infty} \times \frac{Y}{Y_\infty}$, com x e y não nulos tais que $T(x, y) = 0 \in Z$. Com isso, suponha que $(x, y) \notin {}^\circ[(X_{k+1} \times Y_{k+1})^\circ]$ para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(x, y) \in X \times Y$ tal que $(S_{k+1}^X(x), S_{k+1}^Y(y)) \neq (0, 0)$. Seja $\xi_l^X(x) \cdot \xi_l^Y(y)$ o primeiro produto de coeficientes não nulo. Pela representação de x e y em X/X_∞ e Y/Y_∞ , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(S_{n+1}^X x - P_{n+1}^X S_{n+1}^X x, S_{n+1}^Y y - P_{n+1}^Y S_{n+1}^Y y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T(S_{n+1}^X x, S_{n+1}^Y y) - T(S_{n+1}^X x, P_{n+1}^Y S_{n+1}^Y y) - T(P_{n+1}^X S_{n+1}^X x, S_{n+1}^Y y) \\ &\quad - T(P_{n+1}^X S_{n+1}^X x, P_{n+1}^Y S_{n+1}^Y y)) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.130)$$

Observamos ainda que

$$\left\langle T(x, y), \tilde{J}_Z z_l \right\rangle_Z = \left\langle (x, y), T^* \tilde{J}_Z z_l \right\rangle_{X \times Y} = \langle (x, y), B_l \rangle,$$

para $n+1 > l$, e salientando que $P_{n+1}^X S_{n+1}^X y \in X_{n+1}$ e $P_{n+1}^Y S_{n+1}^Y y \in Y_{n+1}$, assim, por (3.2.118)

$$\begin{aligned} \langle (S_{n+1}^X x, P_{n+1}^Y S_{n+1}^Y y), B_l \rangle_{X \times Y} &= 0 \\ \langle (P_{n+1}^X S_{n+1}^X x, S_{n+1}^Y y), B_l \rangle_{X \times Y} &= 0 \\ \langle (P_{n+1}^X S_{n+1}^X x, P_{n+1}^Y S_{n+1}^Y y), B_l \rangle_{X \times Y} &= 0. \end{aligned}$$

e, por (3.2.120) e pela representação dos funcionais B_i , temos

$$\begin{aligned} \left\langle T(x, y), \tilde{J}_Z z_l \right\rangle_Z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle T(S_{n+1}^X x, S_{n+1}^Y y), \tilde{J}_Z z_l \right\rangle_Z \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle (x, y), B_i \rangle z_i, \tilde{J}_Z z_l \right\rangle_Z \\ &= \langle (x, y), B_l \rangle_{X \times Y} = \xi_l^X(x) \cdot \xi_l^Y(y) \lambda_l = 0. \end{aligned}$$

Assim $\xi_l^X(x) \cdot \xi_l^Y(y) = 0$ e, portanto, uma contradição. Logo, ${}^\circ(T^*Z^*) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ]$ e, juntamente com a proposição 3.2.25, temos que ${}^\circ(T^*Z^*) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ]$. ■

Observamos aqui, assim como no caso linear em [5], com o lema 3.2.17 aplicado em Z , (3.2.99) e por ${}^\circ(T^*Z^*) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ]$,

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_{n+1} \right) \cap T(X \times Y) = T \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ] \right) = \{0\}. \quad (3.2.131)$$

Se T tem imagem densa em Z , isto é, $\overline{T(X \times Y)} = Z$, então $(T(X \times Y))^\circ = \{0\}$.

Com efeito, de (3.2.131),

$$\begin{aligned} Z^* &= \{0\}^\circ = \left\{ \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_{n+1} \right) \cap T(X \times Y) \right\}^\circ = \overline{\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_{n+1} \right)^\circ \cup (T(X \times Y))^\circ} \\ &= \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_{n+1}^\circ} = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_{n+1} \right)^\circ. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_{n+1} = \{0\}. \quad (3.2.132)$$

Com o exposto acima, temos a seguinte proposição (análogo ao teorema 2.2.19 de [5]).

Proposição 3.2.30. *Suponha que Z seja uniformemente convexo e Z^* estritamente convexo e seja, para todo $k \in \mathbb{N}$, P_{k+1}^Z como em (3.2.88), a projeção de Z em Z_{k+1} . Se T tem imagem densa em Z , então, para todo $(x, y) \in X \times Y$, $P_{k+1}^Z T(x, y) \rightarrow 0$, com $k \rightarrow \infty$ e*

$$T(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - P_{k+1}^Z)(T(S_{k+1}^X x, S_{k+1}^Y y)).$$

Demonstração: Pela proposição 2.2.12 de [5], temos que para Z reflexivo e Z^* estritamente convexo, com $P_k^Z : Z \rightarrow Z_k$ e $P_\infty^Z : Z \rightarrow Z_\infty$, onde $Z_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$. Então, para todo $z \in Z$, $P_k z \rightarrow P_\infty z$, para $k \rightarrow \infty$ e, se Z for uniformemente convexo, então $P_k z \rightarrow P_\infty z$, $k \rightarrow \infty$. Assim, por (3.2.132), temos que $P_k z \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Portanto, para $z = T(x, y)$, $(x, y) \in X \times Y$, $P_k T(x, y) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Ainda, por (3.2.129) do lema 3.2.28, teremos então que

$$T(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - P_{k+1}^Z)(T(S_{k+1}^X x, S_{k+1}^Y y)). \quad \blacksquare$$

Proposição 3.2.31. *Se $\{S_{k+1}^X\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{S_{k+1}^Y\}_{k \in \mathbb{N}}$ são seqüências limitas, então para todo $x \in X$, $S_{k+1}^X x \rightarrow x$ em X/X_∞ e $y \in Y$, $S_{k+1}^Y y \rightarrow y$ em Y/Y_∞ .*

Demonstração: Tendo $S_{n+1}^X x - x \in X_{n+1} \subset X_{k+1} = {}^\circ M_k^X$ e $S_{n+1}^Y y - y \in Y_{n+1} \subset Y_{k+1} = {}^\circ M_k^Y$, se $n > k$. Se $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k^X$ e $\beta \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k^Y$

$$\langle S_{n+1}^X x - x, \alpha \rangle_X \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

e

$$\langle S_{n+1}^Y y - y, \beta \rangle_Y \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Pela limitação de $\{S_{n+1}^X\}$ e $\{S_{n+1}^Y\}$ para todo $\alpha \in \overline{\cup_{k \in \mathbb{N}} M_k^X} = X_\infty^\circ$ e $\beta \in \overline{\cup_{k \in \mathbb{N}} M_k^Y} = Y_\infty^\circ$, por (3.2.126), vale que

$$\langle \phi_\infty^X(S_{n+1}^X(x) - x), ((\phi_\infty^X)^*)^{-1}\alpha \rangle_{X/X_\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

e

$$\langle \phi_\infty^Y(S_{n+1}^Y(y) - y), ((\phi_\infty^Y)^*)^{-1}\beta \rangle_{Y/Y_\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

desde que $((\phi_\infty^X)^*)^{-1}X_\infty^\circ = (X/X_\infty)^*$ e $((\phi_\infty^Y)^*)^{-1}Y_\infty^\circ = (Y/Y_\infty)^*$.

Em Edmunds e Evans [5], a limitação de $\{S_n\}$ e da convergência fraca, como apresentado acima, e pelo lema 2.2.9 e corolário 2.2.23, mostra-se que $\{x_n\}$ é uma base fraca para X/X_∞ e, portanto, uma base. Temos o mesmo para $\{y_n\}$ em Y/Y_∞ . ■

Reproduziremos aqui o lema 2.2.9 [5, página 81].

Lema 3.2.32. *Para todo $j, k \in \mathbb{N}$,*

$$\xi_j(x_k) = \delta_{j,k}, \tag{3.2.133}$$

onde $\delta_{j,k}$ é o delta Kronecker.

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo e escolha qualquer $n > k$. Então $x_k = \sum_{j=1}^n \delta_{j,k} x_j$ e $x_k - \sum_{j=1}^n \xi_j(x_k) x_j = x_k - S_{n+1} x_k \in X_{n+1}$. Portanto

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{j,k} - \xi_j(x_k)) x_j \in X_{n+1}.$$

Isto implica que $\xi_j(x_k) = \delta_{j,k}$ para todo $j \leq n$ e, portanto, segue o resultado. ■

Sendo X e Y reflexivos, então X/X_∞ e Y/Y_∞ também os são. Assim, pelo teorema 1.2.13 de [5], $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são shrinking (ver definição 2.3.31) e, portanto, $\{x_n\}$, $\{\xi_n^X\}$ e $\{y_n\}$, $\{\xi_n^Y\}$ formam sistemas biortogonais e, consequentemente $\{\xi_n^X\}$ e $\{\xi_n^Y\}$ são bases de $X_\infty^\circ \simeq (X/X_\infty)^*$ e $Y_\infty^\circ \simeq (Y/Y_\infty)^*$ respectivamente e, $x \in X/X_\infty$ e $y \in Y/Y_\infty$ tem as

representações dadas por

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^X(x) x_i \quad e \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^Y(y) y_i.$$

Teorema 3.2.33. *Sejam X , Y e Z espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. E seja $T : X \times Y \longrightarrow Z$ bilinear, completamente contínuo e com imagem densa em Z . Então, para $(x, y) \in \frac{X}{X_\infty} \times \frac{Y}{Y_\infty}$,*

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(x, y) z_i, \quad z_i = \frac{T(x_i, y_i)}{\lambda_i}.$$

Demonstração: Pela proposição 3.2.31, onde, para todo $x \in X$, $S_{k+1}^X(x) \rightharpoonup x$ em X/X_∞ e, pelo lema 3.2.28, que nos dá a convergência fraca em X/X_∞ , temos então, $(I - P_{k+1}^X)S_{k+1}^X x \rightharpoonup x$. Assim, temos que $P_{k+1}^X S_{k+1}^X x \rightharpoonup 0$ em X/X_∞ . Temos o mesmo para Y .

Assim, pela representação de x e y em X/X_∞ e Y/Y_∞ e por (3.2.130), temos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} T(S_{k+1}^X x - P_{k+1}^X S_{k+1}^X x, S_{k+1}^Y y - P_{k+1}^Y S_{k+1}^Y y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (T(S_{k+1}^X x, S_{k+1}^Y y) - T(S_{k+1}^X x, P_{k+1}^Y S_{k+1}^Y y) - T(P_{k+1}^X S_{k+1}^X x, S_{k+1}^Y y) \\ &\quad - T(P_{k+1}^X S_{k+1}^X x, P_{k+1}^Y S_{k+1}^Y y)). \end{aligned}$$

e, portanto

$$T(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(S_{k+1}^X x, S_{k+1}^Y y). \quad (3.2.134)$$

Como ${}_k T = T|_{R_k^X \times R_k^Y}$, por (3.2.122),

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} T(S_{k+1}^X x, S_{k+1}^Y y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} {}_k T(S_{k+1}^X, S_{k+1}^Y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k B_i(x, y) z_i. \end{aligned}$$

Tendo que, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} Z_{k+1} = \{0\}$, como dado em (3.2.132), então $Z = Z/Z_\infty$ e

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(x, y) z_i.$$

Com os funcionais $B_i \in \text{Bil}(X \times Y)$, $i \in \mathbb{N}$, definidos em 3.2.19. ■

Pela representação dos funcionais B_i , $i \in \mathbb{N}$, para $(x, y) \in \frac{X}{X_\infty} \times \frac{Y}{Y_\infty}$,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i(x, y) z_i = \sum_{i=1}^{\infty} [I_i + \xi_i(x) \xi_i(y)] \lambda_i \frac{T(x_i, y_i)}{\lambda_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [I_i + \xi_i(x) \xi_i(y)] T(x_i, y_i). \end{aligned} \quad (3.2.135)$$

Ou ainda,

$$T(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(i,j) \in E_k} \lambda_k A_{ij}^k \xi_i(x) \xi_j(y) z_k. \quad (3.2.136)$$

Em [24], teorema 3.5, apresenta o seguinte resultado para operadores multilineares:

Teorema 3.2.34. *Sejam X_i , $i = 1, \dots, r$, espaços de Banach reflexivos. Suponha que o espaço de Banach Y e os espaços X_i tenham bases de Schauder. Se $M \in \mathfrak{ML}_r(X, Y)$ é completamente contínuo, então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|M(S_{k+1}^1, \dots, S_{k+1}^r) - M\| = 0,$$

onde $X = X_1 \times \dots \times X_r$ e $\mathfrak{ML}_r(X, Y) := \bigcup_{X,Y} \mathfrak{L}_r(X, Y)$, com $\mathfrak{L}_r(X, Y)$ o espaço dos operadores r -lineares contínuos de X em Y .

Desta forma temos que $T : X \times Y \rightarrow Z$, como apresentado acima, é aproximado por operadores bilineares de posto finito e, assim, (3.2.135) é válido para todos $(x, y) \in X \times Y$.

Observação 3.2.35. *Se X , Y e Z são espaços de Hilbert, então a representação (3.2.135) é a representação dada em (4) em Silva et al., em [27, Teorema 3], pois os termos I_i em B_i são nulos, tendo assim $B_i(x, y) = \lambda_i \xi_i^X(x) \xi_i^Y(y)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja*

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(x, y) z_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i(x) \xi_i(y) z_i.$$

3.3 Representação via produto tensorial

Na definição 2.3.6, para $k \in \mathbb{N}$, fazendo $S = S_k^X$, $T = S_k^Y$, $E = R_k^X$ e $F = R_k^Y$, teremos

$$\begin{aligned} S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y &: X \otimes Y \rightarrow R_k^X \otimes R_k^Y \\ x \otimes y &\mapsto S_k^X(x) \otimes S_k^Y(y), \end{aligned} \quad (3.3.137)$$

sendo a linearização da aplicação bilinear

$$\begin{aligned} S_{k+1} &: X \times Y \longrightarrow R_k^X \otimes R_k^Y \\ (x, y) &\longmapsto S_k^X(x) \otimes S_k^Y(y). \end{aligned} \quad (3.3.138)$$

Pela proposição 2.3.7, a qual determina a estrutura do núcleo de $S \otimes T$, vamos descrever a estrutura do núcleo de $S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y$ e suas identificações.

Voltando ao lema 3.2.20, q_k^X e q_k^Y são aplicações canônicas de X em $\frac{X}{X_{k+1}}$ e de Y em $\frac{Y}{Y_{k+1}}$, respectivamente. R_k^X e R_k^Y complementos algébricos de X_{k+1} e Y_{k+1} em X e Y . Temos que $(q|_{R_k^X})^{-1} : \frac{X}{X_{k+1}} \rightarrow R_k^X$ e $(q|_{R_k^Y})^{-1} : \frac{Y}{Y_{k+1}} \rightarrow R_k^Y$ são isomorfismos e assim S_{k+1}^X e S_{k+1}^Y são dados pelas composições $S_{k+1}^X := (q|_{R_k^X})^{-1} \circ q_k^X$ e $S_{k+1}^Y := (q|_{R_k^Y})^{-1} \circ q_k^Y$. Ainda, na demonstração da proposição 2.3.7, é definida a aplicação K de $X \otimes Y$ em $\frac{X \otimes Y}{D_k}$, onde

$$D_k = D_k[X_{k+1}, Y_{k+1}] = X_{k+1} \otimes Y + X \otimes Y_{k+1},$$

a qual define uma aplicação bilinear K_0 em $\frac{X}{X_{k+1}} \times \frac{Y}{Y_{k+1}}$, tal que

$$K(x \otimes y) = K_0(\bar{x}, \bar{y}) = K_0(q|_{R_k^X}(x^k), q|_{R_k^Y}(y^k)) = B_0(x^k, y^k), \quad (3.3.139)$$

com $x^k \in R_k^X$, $y^k \in R_k^Y$ e $B_0 : R_k^X \times R_k^Y \rightarrow \frac{X \otimes Y}{D_k}$, cuja a linearização é dada por: $\dot{B}_o \in \mathfrak{L}(R_k^X \otimes R_k^Y, \frac{X \otimes Y}{D_k})$, ou seja,

$$B_0(x^k, y^k) = \dot{B}_o(x^k \otimes y^k).$$

Segue que,

$$\dot{B}_o(x^k \otimes y^k) = \dot{B}_o((S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y)(x \otimes y)) = K(x \otimes y).$$

Isso permite concluir que $Nuc(S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y) \subset D$, ou seja, se $w \in Nuc(S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y)$, então

$$\dot{B}_o((S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y)w) = 0 = Kw.$$

A inclusão contrária advém diretamente de (3.3.137) e (3.3.138). Assim:

$$Nuc(S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y) = X_{k+1} \otimes Y + X \otimes Y_{k+1}. \quad (3.3.140)$$

Pelo corolário 2.3.9 vemos que $\frac{X}{X_{k+1}} \otimes \frac{Y}{Y_{k+1}}$ e $\frac{X \otimes Y}{D_k}$ são isomorfos. Com isto, temos as identificações:

$$R_k^X \otimes R_k^Y = \frac{X}{X_{k+1}} \otimes \frac{Y}{Y_{k+1}} = \frac{X \otimes Y}{D_k}. \quad (3.3.141)$$

Reforçando que estamos tratando de subespaços de dimensões finitas. Assim, por (2.3.17):

$$\dim(R_k^X \otimes R_k^Y) = \dim\left(\frac{X}{X_{k+1}} \otimes \frac{Y}{Y_{k+1}}\right) = \dim\left(\frac{X \otimes Y}{D_k}\right) = k^2.$$

Além disso, como X e Y são reflexivos, segue ainda de (2.3.17) que

$$\dim((R_k^X)^\# \otimes (R_k^Y)^\#) = \dim(R_k^X)^\# \dim(R_k^Y)^\# = \dim(R_k^X) \dim(R_k^Y) = \dim(R_k^X \otimes R_k^Y).$$

Então, na seção 0.1.2, em (2.3.24) e (2.3.26) tem-se

$$\begin{aligned} (R_k^X)^* \otimes (R_k^Y)^\# &= (R_k^X \otimes R_k^Y)^\# = \left(\frac{X}{X_{k+1}} \otimes \frac{Y}{Y_{k+1}}\right)^\# = \left(\frac{X \otimes Y}{D_k}\right)^\# \\ &= \text{Bil}\left(\frac{X}{X_{k+1}} \times \frac{Y}{Y_{k+1}}\right) = \text{Bil}(R_k^X \times R_k^Y). \end{aligned} \quad (3.3.142)$$

Lembremos ainda, que $\text{Bil}\left(\frac{X}{X_{k+1}} \times \frac{Y}{Y_{k+1}}\right) = (X_{k+1} \times Y_{k+1})^\circ$.

Na seção 1.3.8, **Bases do produto tensorial**, vimos que, como $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ é base em R_k^X e $\{\xi_1^X, \xi_2^X, \dots, \xi_k^X\}$ é base dual de $(R_k^X)^\#$. O mesmo com $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ em R_k^Y e $\{\xi_1^Y, \xi_2^Y, \dots, \xi_k^Y\}$ em $(R_k^Y)^\#$. Seguindo a ordenação quadrada, $\{x_i \otimes y_j\}_{(i,j) \in E_l}$, onde E_l é o conjunto dos $l = k^2$ primeiros pares ordenados de índices (i, j) como definido em (2.3.40), é uma base ordenada para $R_k^X \otimes R_k^Y$. O mesmo se dá a para base em $(R_k^X)^\# \otimes (R_k^Y)^\#$.

Sendo S_{k+1}^X e S_{k+1}^Y as projeções nas primeiras k coordenadas em X e Y respectivamente, $S_{k+1}^X x = \sum_{i=1}^k \xi_i(x) x_i$ e $S_{k+1}^Y(y) = \sum_{j=1}^k \xi_j(y) y_j$. Se $u \in X \otimes Y$, a projeção de u é dado por

$$S_{k+1} u = \sum_{(i,j) \in E_l} \xi_i^X \otimes \xi_j^Y(u).$$

Como $l = k^2$, então $S_{k+1} = S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y$ e $S_{k+1} u \in R_k^X \otimes R_k^Y$.

Ainda na seção 0.1.2, pela dualidade tensorial, cada um dos produtos tensoriais $R_k^X \otimes R_k^Y$ e $(R_k^X)^* \otimes (R_k^Y)^*$ é o dual um do outro, como descrito pela aplicação em (2.3.27).

Considerando a linearização $\tilde{T}$ de $T : X \times Y \longrightarrow Z$, ou seja, $\tilde{T} : X \otimes Y \longrightarrow Z$ e também $\tilde{B}_k : (R_k^X)^\# \otimes (R_k^Y)^\# \longrightarrow \mathbb{K}$, a linearização de $B_k \in \text{Bil}(R_k^X \times R_k^Y)$, definida em 3.2.19, a qual pode ser vista por $\left\langle S_{k+1}^X(x) \otimes S_{k+1}^Y(y), \tilde{T}^* \xi_k^Z \right\rangle_{X \otimes Y} = \left\langle S_{k+1}^X(x) \otimes S_{k+1}^Y(y), \tilde{B}_k \right\rangle_{X \otimes Y}$. Assim, por (3.2.117) e pela dualidade tensorial entre $R_k^X \otimes R_k^Y$ e $(R_k^X)^\# \otimes (R_k^Y)^\#$, temos:

$$\tilde{B}_k(S_{k+1}^X(x) \otimes S_{k+1}^Y(y)) = \sum_{(i,j) \in E_l} A_{ij}^k \xi_i(x) \xi_j(y) \lambda_k, \quad k \in \mathbb{N} \text{ e } l = k^2. \quad (3.3.143)$$

Pela construção acima ganhamos naturalmente a primeira parte da proposição 3.2.25, ou seja, a restrição de T ao subconjunto $^\circ[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ] \subset X \times Y$ é operador zero se,

e somente se, T tem posto n e com a seguinte representação:

$$\begin{aligned} T(S_{k+1}^X(x), S_{k+1}^Y(y)) &= \tilde{T}(S_{k+1}^X(x) \otimes S_{k+1}^Y(y)) = \sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in E_l} \lambda_k A_{ij}^k \xi_i(x) \xi_j(y) \otimes z_k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in E_l} \lambda_k A_{ij}^k \xi_i(x) \xi_j(y) z_k, \quad l = k^2. \end{aligned} \quad (3.3.144)$$

Observamos que, $D_k = Nuc(S_{k+1}^X \otimes S_{k+1}^Y) = X_{k+1} \otimes Y + X \otimes Y_{k+1}$ é a imagem da aplicação canônica de $[(X_{n+1} \times Y_{n+1})^\circ] \subset X \times Y$ em $X \otimes Y$.

Agora, considerando que $T : X \times Y \longrightarrow Z$ não tenha posto finito, passaremos a analisar os subespaços R_k^X e R_k^Y para $k = \infty$. Para tal, tomaremos a norma projetiva no produto tensorial entre os espaços e seu completamento, ou seja, analisaremos os espaços $X \hat{\otimes}_\pi Y$, assim como $R_\infty^X \hat{\otimes}_\pi R_\infty^Y$. Vimos anteriormente que, no caso infinito, $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$ são bases de R_∞^X e R_∞^Y , respectivamente. Assim, pelo corolário 1.2.14 de [5], $\{\xi_i^X\}$ e $\{\xi_j^Y\}$ são bases de Schauder de $(R_\infty^X)^*$ e $(R_\infty^Y)^*$, respectivamente. Vemos ainda que, pela proposição 2.3.34, $\{\xi_i^X \otimes \xi_j^Y\}$, com a ordenação quadrada, é uma base de Schauder de $(R_\infty^X)^* \hat{\otimes}_\pi (R_\infty^Y)^*$. Além disso, sendo X e Y reflexivos, então R_∞^X e R_∞^Y os são, assim como $(R_\infty^X)^*$ e $(R_\infty^Y)^*$.

Como visto no corolário 2.3.39, todo espaço de Banach com uma base de Schauder tem propriedade de aproximação. Desta forma, temos que $(R_\infty^X)^*$ e $(R_\infty^Y)^*$ tem a propriedade de aproximação.

Voltando ao operador $J : X^* \hat{\otimes}_\pi Y^* \longrightarrow Bil(X \times Y)$, dado em (2.3.41), considerando os espaços $R_\infty^X \hat{\otimes}_\pi R_\infty^Y$ e $Bil(R_\infty^X \times R_\infty^Y)$, temos a aplicação

$$J_R : (R_\infty^X)^* \hat{\otimes}_\pi (R_\infty^Y)^* \longrightarrow Bil(R_\infty^X \times R_\infty^Y). \quad (3.3.145)$$

Observamos ainda, por $(R_\infty^X)^*$ e $(R_\infty^Y)^*$ terem a propriedade de aproximação, então pelo corolário 2.3.43 o núcleo de J_R é trivial e temos a seguinte identificação:

$$(R_\infty^X)^* \hat{\otimes}_\pi (R_\infty^Y)^* = Bil_N(R_\infty^X \times R_\infty^Y). \quad (3.3.146)$$

Vemos assim que, toda forma bilinear em $R_\infty^X \times R_\infty^Y$ é uma forma nuclear e pode ser escrita como

$$B(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \psi_k(y),$$

com $\{\varphi_k\} \subset (R_\infty^X)^*$ e $\{\psi_k\} \subset (R_\infty^Y)^*$ limitadas, tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_{X^*} \|\psi_k\|_{Y^*} < \infty$.

Aqui, em especial, usaremos uma caracterização para tais operadores, dado em [14], §42.5(5).

Proposição 3.3.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. O operador $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$ é nuclear se, e somente se, tem a representação*

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varphi_i(x) y_i, \quad \varphi_i \in X^*, \|\varphi_i\|_{X^*} \leq 1, \quad y_i \in Y, \|y_i\|_Y \leq 1$$

$$\text{e } \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| \leq \infty.$$

Demonstração: Ver [14], página 215. ■

Desta forma, pela identificação, $\text{Bil}(X \times Y) = \mathfrak{L}(X, Y^*)$, podemos olhar a proposição 3.3.1 para $A \in \mathfrak{L}(R_{\infty}^X, (R_{\infty}^Y)^*)$. Assim,

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varphi_i(x) \psi_i, \quad \varphi_i \in (R_{\infty}^X)^*, \|\varphi_i\|_{X^*} \leq 1, \quad \psi_i \in (R_{\infty}^Y)^*, \|\psi_i\|_{Y^*} \leq 1$$

$$\text{e } \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| \leq \infty. \quad (3.3.147)$$

Em (3.3.143), com $k = \infty$, B_{∞} é uma forma bilinear em $R_{\infty}^X \times R_{\infty}^Y$ e, considerando sua linearização em $(R_{\infty}^X)^* \hat{\otimes}_{\pi} (R_{\infty}^Y)^*$, teremos a seguinte expressão:

$$\tilde{B}_k(S_{k+1}^X(x) \otimes S_{k+1}^Y(y)) = \sum_{(i,j) \in E_l} \lambda_k A_{ij}^k \xi_i(x) \xi_j(y), \quad e \quad l = k^2, \quad k = \infty. \quad (3.3.148)$$

Pela identificação (3.3.146) e, por $\{\xi_i^X \otimes \xi_j^Y\} \subset (R_{\infty}^X)^* \hat{\otimes}_{\pi} (R_{\infty}^Y)^*$, com a ordenação quadrada, ser uma base de Schauder de $(R_{\infty}^X)^* \hat{\otimes}_{\pi} (R_{\infty}^Y)^*$, então, $(R_{\infty}^X)^* \hat{\otimes}_{\pi} (R_{\infty}^Y)^*$ e, consequentemente, $\text{Bil}_N(R_{\infty}^X \times R_{\infty}^Y)$ tem a propriedade de aproximação.

Desta forma, pela proposição 2.3.44, em que consta: " X^* tem propriedade de aproximação se, e somente se, para todo espaço de Banach Y , para todo operador compacto de X em Y é aproximável". Assim, $(R_{\infty}^X)^* \hat{\otimes}_{\pi} (R_{\infty}^Y)^* = \text{Bil}_N(R_{\infty}^X \times R_{\infty}^Y)$ tendo a propriedade de aproximação e $\tilde{T} : R_{\infty}^X \hat{\otimes}_{\pi} R_{\infty}^Y \rightarrow Z$ compacto, pois $T : X \times Y \rightarrow Z$ é compacto. Então, $\tilde{T}$ é aproximável e, portanto, T é aproximável.

Ainda, por (3.2.132), onde, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n = \{0\}$, ou seja, $Z = Z/Z_{\infty}$, teremos assim,

$$\text{Nuc } \tilde{T} = D_{\infty} = X_{\infty} \hat{\otimes}_{\pi} Y + X \hat{\otimes}_{\pi} Y_{\infty}.$$

Portanto, T e $\tilde{T}$ terão a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= \tilde{T}(x \otimes y) = \sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in E_l} \lambda_k A_{ij}^k \xi_i(x) \xi_j(y) \otimes z_k \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(i,j) \in E_l} \lambda_k A_{ij}^k \xi_i(x) \xi_j(y) z_k, \quad l = k^2.
 \end{aligned} \tag{3.3.149}$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Representação de Operadores Bilineares Infinito-Nucleares

Em [23], Ruch apresenta uma definição de um operador bilinear infinito-nuclear e resultados com condições para que $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$, com X , Y e Z espaços lineares normados reais ou complexos, seja infinito-nuclear. Então, com base nesse trabalho, daremos condições explícitas para que um operador $T : X \times Y \rightarrow Z$, com X , Y e Z espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves seja infinito-nuclear.

Definição 4.0.1. *Uma aplicação $T \in \text{Bil}(X \times Y, Z)$ é chamado infinito-nuclear se ela tem a representação $T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x, y)z_n$, com $b_n \in \text{Bil}(X \times Y)$, $\|b_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \rightarrow 0$, e $\sup_{\|z^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |z^*(z_n)| < \infty$. A sequência $\{z_n\}$, satisfazendo a condição anterior, é dita fracamente somável.*

Seguindo Kothe, em [14, §42.8], Ruch traz, em [23], a seguinte caracterização para subconjuntos compactos em c_0 .

Definição 4.0.2. *A cobertura normal de um elemento $\{a_n\} \in c_0$ é o conjunto denotado por $N(\{a_n\}) = \{\{y_n\} \in c_0 : |y_n| \leq |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}\}$.*

Ruch, em [23, página 299], observa ainda que: um subconjunto M de c_0 é relativamente compacto se, e somente se, $M \subset N(\{a_n\})$ para algum $\{a_n\} \in c_0$.

Proposição 4.0.3. *Sejam X e Y espaços lineares normados. Então $B \in \text{Bil}(X \times Y, c_0)$ tem a forma $B(x, y) = \{b_n(x, y)\}_n$ com $\|b_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \rightarrow 0$, $b_n \in \text{Bil}(X \times Y)$, se, e somente se, B é compacto.*

Demonstração: Se $B(x, y) = \{b_n(x, y)\}_n$, então $B(U_X \times U_Y)$ pertence à cobertura normal de $\{\|b_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)}\}_n \in c_0$, assim $B(U_X \times U_Y)$ é relativamente compacto.

Suponha B compacto. Seja e_n , denotando a sequência $(\delta_{i,n})_{i=1}^\infty$. Defina $b_n \in \text{Bil}(X \times Y)$ por $b_n(x, y) = \langle B(x, y), e_n \rangle_{c_0} = \langle (x, y), B^* e_n \rangle_{X \times Y}$, então $B(x, y) = \{b_n(x, y)\}$. Agora $\{e_n\} \in l^1$ converge para 0 na topologia fraca *, então B compacto implica que $\{B^* e_n\}$ é convergente em norma para 0, [23, Corolário 7]. Assim $\|b_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \rightarrow 0$. ■

Partiremos agora para mostrar que os funcionais bilineares, definidos em 3.2.19, formam uma sequência que satisfaz a condição acima. Desta forma, devemos obter uma sequência $\{b_n(x, y)\}_n$, $b_n \in \text{Bil}(X \times Y)$, com $\|b_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \rightarrow 0$, onde

$$\begin{aligned} B : X \times Y &\rightarrow c_0 \\ (x, y) &\mapsto B(x, y) = \{b_n(x, y)\}_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

seja compacto. Para tal, fazendo $b_n(x, y) = B_n(x, y)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, como definidos em 3.2.19,

$$B_n(x, y) = \xi_n^Z(z) = \sum_{(i,j) \in E_l} A_{ij}^n \xi_i^X(x) \xi_j^Y(y) \lambda_n, \quad (4.0.2)$$

onde $z = T(x, y) \in Z$ e E_l é o conjunto dos $l = n^2$ primeiros pares ordenados de índices (i, j) na ordenação quadrada, como no diagrama em (2.3.40), para base do produto tensorial.

Analisaremos agora $|b_n(x, y)| = |B_n(x, y)|$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por (3.2.110),

$$B_1(x, y) = \xi_1^X(x) \xi_1^Y(y) \lambda_1.$$

Lembrando que, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, $|\xi_i^X(x)| \leq 1$ e $|\xi_i^Y(y)| \leq 1$, assim:

$$|B_1(x, y)| = |\xi_1^X(x) \xi_1^Y(y) \lambda_1| \leq \lambda_1, \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Portanto,

$$\|B_1\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = \sup_{(x,y) \in (U_X \times U_Y)} |B_1(x, y)| \leq \lambda_1.$$

Pelo lema 3.2.17, para o espaço Z , em (3.2.96), temos

$$\begin{aligned} Z &= Z_{n+1} \oplus R_n^Z, \\ Z^* &= M_n^Z \oplus (R_n^Z)^\circ. \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

Considerando para $z = T(x, y)$ e $n = 2$, teremos por (3.2.95),

$$T(x, y) = (I - S_2^Z)T(x, y) + S_2^Z T(x, y) = P_2^Z T(x, y) + S_2^Z T(x, y).$$

Por (3.2.99) e pela construção da representação de T , temos

$$T(S_2^X x, S_2^Y y) = S_2^Z T(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Assim,

$$P_2^Z T(x, y) = T(x, y) - T(S_2^X x, S_2^Y y). \quad (4.0.4)$$

Tendo que $x = S_2^X x + P_2^X x$ e $y = S_2^Y y + P_2^Y y$,

$$\begin{aligned} P_2^Z T(x, y) &= T(S_2^X x + P_2^X x, S_2^Y y + P_2^Y y) - T(S_2^X x, S_2^Y y) \\ &= T(S_2^X x, S_2^Y y) + T(S_2^X x, P_2^Y y) + T(P_2^X x, S_2^Y y) + \\ &\quad T(P_2^X x, P_2^Y y) - T(S_2^X x, S_2^Y y) \\ &= T(S_2^X x, P_2^Y y) + T(P_2^X x, S_2^Y y) + T(P_2^X x, P_2^Y y). \end{aligned}$$

Como $\|P_2^X x\|_X \leq \|x\|_X = 1$, $\|S_2^X x\|_X \leq \|x\|_X = 1$, $\|P_2^Y y\|_Y \leq \|y\|_Y = 1$ e $\|S_2^Y y\|_Y \leq \|y\|_Y = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|P_2^Z T(x, y)\|_Z &\leq \|T(S_2^X x + P_2^X x, S_2^Y y + P_2^Y y)\|_Z + \|T(S_2^X x, S_2^Y y)\|_Z \\ &\leq \|T(S_2^X x, P_2^Y y)\|_Z + \|T(P_2^X x, S_2^Y y)\|_Z + \|T(P_2^X x, P_2^Y y)\|_Z \quad (4.0.5) \\ &\leq \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \|S_2^X x\|_X \|P_2^Y y\|_Y + \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \|P_2^X x\|_X \|S_2^Y y\|_Y + \\ &\quad \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} \|P_2^X x\|_X \|P_2^Y y\|_Y \\ &\leq \|T\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} (3\|x\|_X \|y\|_Y) = 3\lambda_1. \end{aligned}$$

Seguindo o lema 2.2.38 de [5] onde, no caso linear, estabelece uma estimativa sobre λ_n para que $\|T(x) - S_n^Y T(x)\|_Y < 1$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Na demonstração do lema em questão tem-se, para $n = 2$, $\frac{1}{2} P_2^Y T(U_X) \subset Y_2 \cap T(U_X)$ e, assim:

$$\sup\{\|y\|_Y : y \in Y_2 \cap T(U_X)\} = \mu_2,$$

onde $\mu_2 = \sup\{\|T(x)\|_Y, x \in X_2 \subset X\}$. O fato segue de, se $y \in Y_2 \cap T(U_X)$, então $y = T(x)$ para algum $x \in U_X$, e vimos pela decomposição em (3.2.96), $x = u + v$ para algum $u \in X_2$ e $v \in R_1^X$, $v = \alpha x_1$. Assim $y = Tu + \alpha T x_1 = Tu + \alpha \lambda_1 y_1$, de modo que $\alpha \lambda_1 = y - Tu \in Y_2$. Assim, segue que $\alpha = 0$ e $x \in X_2$.

Para o caso bilinear, vimos por (3.2.71) que, $T(R_1^X \times R_1^Y) \subset R_1^Z$ e $z = T(x, y) \in Z_2$, então $(x, y) \in {}^\circ[(X_2 \times Y_2)^\circ] = (X_2 \times Y) \cup (X \times Y_2)$. Mas, $\lambda_2 = \|T_2\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)} = \sup\{\|T(x, y)\|_Z, (x, y) \in X_2 \times Y_2 \subset {}^\circ[(X_2 \times Y_2)^\circ]\}$. Ou seja,

$$\lambda_2 \leq \{\|z\|_Z; z \in Z_2 \cap T(U_X \times U_Y)\},$$

e assim não é possível concluir, de forma análoga ao caso linear que, se $\lambda_2 \leq 3^{-1}$, então

$$\sup\{\|z\|_Z; z \in Z_2 \cap T(U_X \times U_Y)\} \leq 1.$$

No entanto, por (4.0.4), (4.0.5) e (3.2.36) teremos, para $\lambda_1 < 3^{-1}$,

$$\|T(x, y) - T(S_2^X x, S_2^Y y)\|_Z < 1. \quad (4.0.6)$$

Com essa estimativa para λ_1 e, conseqüentemente para $\|B_1\|_{\text{Bil}(X \times Y)}$, onde $\|B_1\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \leq \lambda_1 < 3^{-1}$, seguiremos agora considerando os itens da observação 3.2.18, a *Tabela 1* e a simetria dos $\lrcorner_{k's}$, dada pela ordenação quadrada da forma matricial do somatório de cada B_n . Com isto, pretendemos obter condições sobre a sequência $\{\lambda_n\}$, também para $\{\|B_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)}\}$, tal que se tenha a representação do operador T .

Por (3.2.111), temos

$$|B_2(x, y)| = \left| \begin{array}{cc} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^2 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^2 & +\xi_2^X(x)\xi_2^Y(y), \end{array} \right| \lambda_2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |B_2(x, y)| &= |\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^2 + \xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^2 + \xi_2^X(x)\xi_2^Y(y)| \lambda_2 \\ &\leq (|A_{12}^2| + |A_{21}^2| + 1) \lambda_2 = (2|A_{12}^2| + 1) \lambda_2 \\ &\leq \left(\frac{2}{q} + 1\right) \lambda_2 < \left(\frac{2}{q-1} + 1\right) \lambda_2. \end{aligned}$$

Observamos aqui que os elementos contidos no mesmo $\lrcorner_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem a mesma majoração. Seguindo com essa análise, por (3.2.112), temos a estimativa para $B_3(x, y)$.

$$|B_3(x, y)| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^3 & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)A_{13}^3 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^3 & +0 & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)A_{23}^3 \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)A_{31}^3 & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)A_{32}^3 & +\xi_3^X(x)\xi_3^Y(y) \end{array} \right| \lambda_3.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|B_3(x, y)| &\leq 2(2|A_{13}^3| + |A_{12}^3|) \lambda_3 \\
&\leq \left\{ 2 \left[2\frac{1}{q} + \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_3 \\
&\leq \left\{ 2 \left[(2+1) \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_3 \\
&\leq \left\{ 6 \left[\frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{1}{q^3} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_3 \\
&\leq \left(\frac{6}{q-1} + 1 \right) \lambda_3.
\end{aligned}$$

A majoração feita em B_3 será repetida para os demais funcionais bilineares B_n que seguem, ou seja:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots + \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{1}{q^n} \right) \leq \frac{1}{q-1}.$$

Desta forma, para B_4 teremos,

$$|B_4(x, y)| = \begin{vmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^4 & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)A_{13}^4 & +\xi_1^X(x)\xi_4^Y(y)A_{14}^4 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^4 & 0 & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)A_{23}^4 & +\xi_2^X(x)\xi_4^Y(y)A_{24}^4 \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)A_{31}^4 & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)A_{32}^4 & 0 & +\xi_3^X(x)\xi_4^Y(y)A_{34}^4 \\ +\xi_4^X(x)\xi_1^Y(y)A_{41}^4 & +\xi_4^X(x)\xi_2^Y(y)A_{42}^4 & +\xi_4^X(x)\xi_3^Y(y)A_{43}^4 & +\xi_4^X(x)\xi_4^Y(y)A_{44}^4 \end{vmatrix} \lambda_4,$$

e

$$\begin{aligned}
|B_4(x, y)| &\leq 2(3|A_{14}^4| + 2|A_{13}^4| + |A_{12}^4|) \lambda_4 \\
&\leq \left\{ 2 \left[3\frac{1}{q} + 2 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} \right) + \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_4 \\
&\leq \left\{ 2 \left[(3+2+1) \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_4 \\
&\leq \left(\frac{12}{q-1} + 1 \right) \lambda_4.
\end{aligned}$$

Para B_5 faremos nova observação, decorrente de (3.2.116), que seguirá para os demais funcionais B_n .

$$|B_5(x, y)| = \begin{vmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^5 & +\xi_1^X(x)\xi_3^Y(y)A_{13}^5 & +\xi_1^X(x)\xi_4^Y(y)A_{14}^5 & +\xi_1^X(x)\xi_5^Y(y)A_{15}^5 \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^5 & 0 & +\xi_2^X(x)\xi_3^Y(y)A_{23}^5 & +\xi_2^X(x)\xi_4^Y(y)A_{24}^5 & +\xi_2^X(x)\xi_5^Y(y)A_{25}^5 \\ +\xi_3^X(x)\xi_1^Y(y)A_{31}^5 & +\xi_3^X(x)\xi_2^Y(y)A_{32}^5 & 0 & +\xi_3^X(x)\xi_4^Y(y)A_{34}^5 & +\xi_3^X(x)\xi_5^Y(y)A_{35}^5 \\ +\xi_4^X(x)\xi_1^Y(y)A_{41}^5 & +\xi_4^X(x)\xi_2^Y(y)A_{42}^5 & +\xi_4^X(x)\xi_3^Y(y)A_{43}^5 & 0 & +\xi_4^X(x)\xi_5^Y(y)A_{45}^5 \\ +\xi_5^X(x)\xi_1^Y(y)A_{51}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_2^Y(y)A_{52}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_3^Y(y)A_{53}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_4^Y(y)A_{54}^5 & +\xi_5^X(x)\xi_5^Y(y)A_{55}^5 \end{vmatrix} \lambda_5,$$

logo

$$\begin{aligned}
|B_5(x, y)| &\leq 2(4|A_{15}^5| + 3|A_{14}^5| + 2|A_{13}^5| + |A_{12}^5|) \lambda_5 \\
&\leq \left\{ 2 \left[4 \frac{1}{q} + 3 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} \right) + 2 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} \right) + \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + 2 \frac{1}{q^4} + 2 \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_5 \\
&\leq \left\{ 2 \left[(4 + 3 + 2 + 2) \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_5 \\
&\leq \left(\frac{22}{q-1} + 1 \right) \lambda_5.
\end{aligned}$$

Aqui, para a estimativa do termo $|A_{12}^5|$, usamos a análise feita em (3.2.115), onde a parcela $\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + 2 \frac{1}{q^4} + 2 \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \right)$ é majorada pelo fator "2", o qual é o número de repetições de produtos da forma $\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \rangle_X$ e $\langle y_j, \tilde{J}_Y y_l \rangle_Y$, $1 \leq i, y \leq m, j \leq 5$, conforme descrito no item 6 da observação 3.2.18.

Partindo agora para a estimativa dos demais B_n , com $n > 5$. De (3.2.114), temos

$$|B_n(x, y)| = \begin{vmatrix} 0 & +\xi_1^X(x)\xi_2^Y(y)A_{12}^n & \cdots & +\xi_1^X(x)\xi_{n-1}^Y(y)A_{1(n-1)}^n & +\xi_1^X(x)\xi_n^Y(y)A_{1n}^n \\ +\xi_2^X(x)\xi_1^Y(y)A_{21}^n & +0 & \cdots & +\xi_2^X(x)\xi_{n-1}^Y(y)A_{2(n-1)}^n & +\xi_2^X(x)\xi_n^Y(y)A_{2n}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ +\xi_{n-1}^X(x)\xi_1^Y(y)A_{(n-1)1}^n & +\xi_{n-1}^X(x)\xi_2^Y(y)A_{(n-1)2}^n & \cdots & +0 & +\xi_{n-1}^X(x)\xi_n^Y(y)A_{(n-1)n}^n \\ +\xi_n^X(x)\xi_1^Y(y)A_{n1}^n & +\xi_n^X(x)\xi_2^Y(y)A_{n2}^n & \cdots & +\xi_n^X(x)\xi_{n-1}^Y(y)A_{n(n-2)}^n & +\xi_n^X(x)\xi_n^Y(y) \end{vmatrix} \lambda_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|B_n(x, y)| &\leq \left\{ 2 \left[(n-1)|A_{1n}^n| + (n-2)|A_{1(n-1)}^n| + \cdots + 2|A_{13}^n| + |A_{12}^n| \right] + 1 \right\} \lambda_n \\
&\leq \left\{ 2 \left[(n-1) \frac{1}{q} + (n-2) \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} \right) + \cdots + 2^{n-4} \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots + \frac{1}{q^{2n-4}} + \frac{1}{q^{2n-3}} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_n \\
&\leq \left\{ 2 \left[((n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4).2 + (n-5).2^2 + \cdots + 2.2^{n-5} + 2^{n-4}) \cdot \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots + \frac{1}{q^{2n-4}} + \frac{1}{q^{2n-3}} \right) \right] + 1 \right\} \lambda_n \\
&\leq \left(\frac{2^{n-1} + 2n - 4}{q - 1} + 1 \right) \lambda_n.
\end{aligned} \tag{4.0.7}$$

Temos que na terceira desigualdade de (4.0.7),

$$\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots + \frac{1}{q^{2n-4}} + \frac{1}{q^{2n-3}} \right) \leq \frac{1}{q-1},$$

como já observado e, ainda

$$2[(n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4).2 + (n-5).2^2 + \cdots + 2.2^{n-5} + 2^{n-4}] = 2^{n-1} + 2n - 4, \quad n \geq 2. \tag{4.0.8}$$

Onde, o lado esquerdo da igualdade acima, tem termos positivos e dependendo de $n \geq 2$ da seguinte forma:

$$[(n-1) + (n-2) + (n-3) + 2(n-4) + (n-5).2^2 + (n-6).2^3 + \cdots + (n-(n-2))2^{n-5} + (n-(n-1))2^{n-4}].$$

Vamos agora, por indução, provar a igualdade (4.0.8).

Vimos acima que a igual é válida para $n = 2, 3, 4$ e 5 . Supondo agora, que seja válida para $n = m$, verificaremos a igualdade para $n = m + 1$. Inicialmente, em (4.0.8), o lado esquerdo com $n = m + 1$, teremos

$$m + (m - 1) + (m - 2) + (m - 3).2 + (m - 4).2^2 + \cdots + 2.2^{m-4} + 2^{m-3} = K.$$

Temos por objetivo chegar em $K = \frac{2^m + 2m - 2}{2}$. Dividindo os dois lados da igualdade acima por 2, obtemos:

$$\frac{m + (m - 1) + (m - 2) + (m - 3).2 + (m - 4).2^2 + \cdots + 2.2^{m-4} + 2^{m-3}}{2} = \frac{K}{2}$$

$$\frac{m}{2} + \frac{(m - 1)}{2} + \frac{(m - 2)}{2} + (m - 3). + (m - 4).2 + \cdots + 2^{m-4} + 2^{m-4} = \frac{K}{2}.$$

Somando e diminuindo os termos $(m - 1)$ e $(m - 2)$, seguimos

$$\frac{m}{2} + \frac{(m - 1)}{2} + \frac{(m - 2)}{2} - (m - 1) - (m - 2) + (m - 1) + (m - 2) + (m - 3). + (m - 4).2 + \cdots + 2^{m-4} + 2^{m-4} = \frac{K}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{(m - 1)}{2} + \frac{(m - 2)}{2} - (m - 1) - (m - 2) + \underbrace{(m - 1) + (m - 2) + (m - 3). + (m - 4).2 + \cdots + 2.2^{m-5} + 2^{m-4}}_{= K} = \frac{K}{2}$$

Onde os termos destacados é a nossa hipótese de indução igual a $\frac{2^{m-1} + 2m - 4}{2}$. Assim,

$$\frac{m}{2} + \frac{(m - 1)}{2} + \frac{(m - 2)}{2} - (m - 1) - (m - 2) + \frac{2^{m-1} + 2m - 4}{2} = \frac{K}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} - \frac{(m - 1)}{2} - \frac{(m - 2)}{2} + \frac{2^{m-1} + 2m - 4}{2} = \frac{K}{2}$$

$$\Rightarrow m - (m - 1) - (m - 2) + 2^{m-1} + 2m - 4 = K$$

$$\Rightarrow 2^{m-1} + m - 1 = K$$

$$\Rightarrow \frac{2^m}{2} + m - 1 = K$$

$$\Rightarrow \frac{2^m + 2m - 2}{2} = K.$$

A demonstração está finalizada.

Agora, voltando em (4.0.1), tendo a estimativa para cada $b_n(x, y)$ dada em (4.0.7) onde, para quaisquer $(x, y) \in X \times Y$,

$$|b_n(x, y)| = |B_n(x, y)| \leq \left(\frac{2^{n-1} + 2n - 4}{q - 1} + 1 \right) \lambda_n, \quad n \geq 2. \quad (4.0.9)$$

Tendo que

$$\|b_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = \|B_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = \sup_{(x, y) \in (U_X \times U_Y)} |B_n(x, y)| \leq \left(\frac{2^{n-1} + 2n - 4}{q - 1} + 1 \right) \lambda_n, \quad n \geq 2.$$

Assim, $\|b_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} = \|B_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \rightarrow 0$ se $\lambda_1 < 3^{-1}$, $\lambda_2 < \frac{q-1}{3(q+1)}$ e

$$\frac{(2^n + 2n - 3 + q) \lambda_{n+1}}{(2^{n-1} + 2n - 5 + q) \lambda_n} \leq c < 1, \quad \forall n \geq 2. \quad (4.0.10)$$

Portanto, $B : X \times Y \rightarrow c_0$ satisfazendo a condição acima, é um operador compacto.

Com isto, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.0.4. *Sejam X , Y e Z espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. Sejam $T : X \times Y \rightarrow Z$, bilinear e completamente contínuo, $B : X \times Y \rightarrow c_0$, com $B(x, y) = \{B_n(x, y)\} = \{\xi_n^Z(T(x, y))\}$, $B_n \in \text{Bil}(X \times Y)$ e $\xi_n^Z \in Z^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se $\lambda_1 < 3^{-1}$, $\lambda_2 < \frac{q-1}{3(q+1)}$ e*

$$\frac{(2^n + 2n - 3 + q) \lambda_{n+1}}{(2^{n-1} + 2n - 5 + q) \lambda_n} \leq c < 1, \quad \forall n \geq 2, \quad (4.0.11)$$

onde $\lambda_n = \|T_n\|_{\text{Bil}(X \times Y, Z)}$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{q} = \max \left\{ \left| \left\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \right\rangle_X \right|, \left| \left\langle y_j, \tilde{J}_Y y_m \right\rangle_Y \right| \right\}$, $1 \leq i, j < m \leq n$. Então $\|B_n\|_{\text{Bil}(X \times Y)} \rightarrow 0$ e B é um operador compacto.

Teorema 4.0.5. *Sejam X , Y e Z espaços de Banach uniformemente convexos e uniformemente suaves. Seja $T : X \times Y \rightarrow Z$ bilinear e completamente contínuo. Existem sequências com norma unitária $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ em X e $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ em Y tais que $\|T(x_n, y_n)\|_Z = \lambda_n$ e $\frac{\|T(x_n, y_n)\|_Z}{\lambda_n} = z_n \in Z$. Se $\lambda_1 < 3^{-1}$, $\lambda_2 < \frac{q-1}{3(q+1)}$ e*

$$\lambda_{n+1} < \frac{(2^{n-1} + 2n - 5 + q)}{(2^n + 2n - 3 + q)} \lambda_n, \quad \forall n \geq 2, \quad (4.0.12)$$

onde $q > 1$ é tal que $\frac{1}{q} = \max \left\{ \left| \left\langle x_i, \tilde{J}_X x_m \right\rangle_X \right|, \left| \left\langle y_j, \tilde{J}_Y y_m \right\rangle_Y \right| \right\}$, $1 \leq i, j < m \leq n$. Então T é infinito-nuclear e tem a seguinte representação:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x, y) z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i, j) \in E_l} \lambda_n A_{ij}^n \xi_i(x) \xi_j(y) z_n, \quad l = n^2,$$

com $B_n(x, y) = \sum_{(i, j) \in E_l} \lambda_n A_{ij}^n \xi_i(x) \xi_j(y)$, e A_{ij}^n dados em (3.2.114) e na observação 3.2.18.

Demonstração: Sejam X , Y e Z espaços de Banach com as hipóteses dadas. A fim de que o operador $T : X \times Y \rightarrow Z$ bilinear e completamente contínuo seja infinito-nuclear, é necessário que a definição 4.0.1 seja satisfeita. Tendo $z = T(x, y)$ e $\xi_k^Z(T(x, y)) = B_k(x, y)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, como definidos em 3.2.19, tal que a condição (4.0.12) é satisfeita, então é válida a condição (4.0.11). Assim, pela proposição 4.0.4, a aplicação $B : X \times Y \rightarrow c_0$, com $B(x, y) = \{B_n(x, y)\}$, é compacta. Sejam agora $\{e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal em c_0 e $A : c_0 \rightarrow Z$, linear, com $Ae_n = z_n$, tais que

$$T(x, y) = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x, y) e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x, y) (Ae_n).$$

É suficiente mostrar que $\{z_n\}$ é fracamente somável. Para tal, fixando $z^* \in Z^*$ temos $A^* z^* \in c_0^* = l^1$. Então,

$$\sup_{\|z^*\|_{Z^*} \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z_n, z^* \rangle_Z| = \sup_{\|z^*\|_{Z^*} \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ae_n, z^* \rangle_Z| = \sup_{\|z^*\|_{Z^*} \leq 1} \|A^* z^*\|_{c_0^*} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Z^*, c_0^*)} < \infty.$$

Ou seja, $\sup_{\|z^*\|_{Z^*} \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |z^*(z_n)| < \infty$ e a sequência $\{z_n\}$ é fracamente somável. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alber, Y.I., *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl., 312. 2005, 330–342.
- [2] Bényi, A., and R. H. Torres, *Compact Bilinear Operators and Commutators*. Proceedings of the American Mathematical Society Volume 141, Number 10, October 2013, Pages 3609–3621.
- [3] Botelho, G., Pellegrino, D., e Teixeira, E., *Fundamentos da Análise Funcional*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [4] Calvacanti, M. M., Calvacanti, V. N. D. e Komornik, V., *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, Maringá, 2011.
- [5] Edmunds, D.E., e Evans, W. D., *Representations of Linear Operators Between Banach Spaces*. Birkhäuser, 2013.
- [6] Edmunds, D.E., and Evans, W. D. e Harris, D. J., *Representations of compact linear operator in Banach spaces*. J. London Math. Soc. (2) 78 (2008), 65-84.
- [7] Edmunds, D.E., Evans, W. D. e Harris, D. J., *A spectral analysis of compact linear operators in Banach spaces*. Bull. London Math. Soc. 42 (2010); Corrigendum, Bull. London Math. Soc. 44 (2012), 1079-1081.
- [8] Edmunds, D.E., Evans, W. D. e Harris, D. J., *The structure of compact linear operators in Banach spaces*. Rev. Mat. Complut. 26 (2)(2013), 445-469.
- [9] Edmunds, D.E., Lang, J., *Gelfand numbers and widths*. J. Approx. Th. 166 (2013), 78-84.

-
- [10] Edmunds, D.E., Lang, J., *Explicit representations of compact linear operators in Banach spaces via polar sets*. Studia Math. 214 (2013), 78-84.
- [11] Hayden, T. L., *The extension of bilinear functionals*. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 22, No. 1, 1967.
- [12] James, R. C., *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*. Trans. American Math. Soc. 61, 1947, 265-292.
- [13] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*. Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [14] Köthe, G., *Topological Vector Spaces II*. Springer-Verlag, New-York, 1979.
- [15] Kozono. H., Yanagisawa. T., *Generalized Lax-Milgram theorem in Banach spaces and its application to the elliptic system of boundary value problems*. manuscripta math. 2012.
- [16] Megginson, R. E., *An introduction to Banach space theory*. Graduate text in Mathematics; 183. 1998.
- [17] Meise, R., and Vogt, D., *Intoduction to functional analysis*. Oxford Graduate text in Mathematics. 2004.
- [18] Pietsch, A., *Eigenvalues and s-Numbers*. Cambridge University Press. 1987.
- [19] Pires, I, F., *Um estudo sobre bases de Schauder em espaços de Banach e aplicações do princípio de seleção de Bessega-Pelczynski*. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Gradual em Matemática. 2013.
- [20] Ramanujan, M. S., and E. Schock, *Operator ideals and space of bilinear operators*. Lin. Multilin. Alg.**18** (1985), 307–318.
- [21] Retherford, J. R., *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [22] Ryan, A. R., *Introduction to tensor product of Banach spaces*. Springer. , 2002.
- [23] Ruch, D., *Characterizations of Compact Bilinear*. Linear and Multilinear Algebra, vol. 25, 1989, pp. 297-307.

-
- [24] Ruch, D., *Completely continuous and related multilinear operators*. Rendiconti Del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, 1996, pp. 377-396.
- [25] Rudin, W., *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.
- [26] Silva, E. B, Fernandez, D. L., Neves, M.V.A., *A spectral theorem for bilinear compact in Hilbert spaces*. Banach J. Math. Anal., 2021.
- [27] Silva, E. B, Fernandez, D. L., Neves, M.V.A., *Schmidt Representation of Bilinear Operator on Hilbert Spaces*. Banach J. Math. Anal., 2021.
- [28] Straatman, M., *The duality map*. Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden. 2014.